

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**  
**(РУТ (МИИТ))**



Рабочая программа дисциплины (модуля),  
как компонент образовательной программы  
высшего образования - программы бакалавриата  
по направлению подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика,  
утвержденной первым проректором РУТ (МИИТ)  
Тимониным В.С.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Вариационное исчисление и оптимальное управление**

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математические модели в экономике и технике

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде электронного документа выгружена из единой корпоративной информационной системы управления университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная РУТ (МИИТ)  
ID подписи: 5665  
Подписал: заведующий кафедрой Нутович Вероника Евгеньевна  
Дата: 10.06.2021

## 1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целями освоения дисциплины (модуля) являются:

- изучение – в продолжение фундаментального курса анализа (или параллельно ему) – основ теории дифференцируемых функционалов в линейных нормированных пространствах, и затем – изучение основных фактов и выводов классического вариационного исчисления и оптимального управления;

- изучение необходимых связей этой науки с численными методами, механикой, теорией оптимального управления и другими разделами математики;

- обзор (на новом уровне) основных фундаментальных фактов классического математического анализа и курса алгебры в связи с изучением далёких и глубоких обобщений этих фактов с целью усиления знаний роли основных фактов анализа и алгебры в общей структуре математического образования;

- подготовка к изучению специальных курсов, использующих методы вариационного исчисления и оптимального управления.

Задачами дисциплины (модуля) являются:

- формирование у обучающегося компетенций в области применения методов вариационного исчисления и оптимального управления для проектной и научно-исследовательской деятельности;

- формирование личности студента, развитие его интеллекта и умения логически и алгоритмически мыслить, формирование умений и навыков, необходимых при практическом применении методов вариационного исчисления и оптимального управления.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

**ПК-4** - Уметь ставить цели создания системы, разрабатывать концепцию системы и требования к ней, выполнять декомпозицию требований к системе.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

### **Знать:**

- основные теоремы и формулы вариационного исчисления и оптимального

управления.

**Уметь:**

- анализировать условия задач вариационного исчисления и оптимального управления и применять соответствующий метод для их решения, включая системный подход.

**Владеть:**

- навыками решения типовых задач вариационного исчисления и оптимального управления.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 10 з.е. (360 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов			
	Всего	Семестр		
		№6	№7	№8
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	164	60	64	40
В том числе:				
Занятия лекционного типа	78	30	32	16
Занятия семинарского типа	86	30	32	24

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 196 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или)

лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля).

##### 4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	<p>Экстремум функции нескольких переменных (ФНП)</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- безусловный экстремум ФНП;</li> <li>- условный экстремум ФНП. Множители Лагранжа.</li> </ul>
2	<p>Дифференцирование в нормированных пространствах</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- дифференцируемый функционал, производная по Гато, Фреше и Лагранжу в нормированных пространствах;</li> <li>- основные свойства производной по Фреше;</li> <li>- вариация по Лагранжу и ее основные свойства.</li> </ul>
3	<p>Основная задача вариационного исчисления</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- сильный и слабый минимум;</li> <li>- уравнение Эйлера-Лагранжа и его первые интегралы;</li> <li>- задача о наименьшей поверхности вращения;</li> <li>- задача о брахистохроне.</li> </ul>
4	<p>Обобщения основной задачи вариационного исчисления</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- задача Больца и условия трансверсальности;</li> <li>- основная задача вариационного исчисления для функций многих переменных;</li> <li>- уравнение Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными.</li> </ul>
5	<p>Изопериметрические задачи.</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- алгоритм решения изопериметрических задач. Метод множителей Лагранжа;</li> <li>- задача Дидоны о кривой, окружающей наибольшую площадь;</li> <li>- задача о форме кривой, провисающей под действием силы тяжести.</li> </ul>
6	<p>Достаточные условия сильного и слабого минимума в задачах вариационного исчисления</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- понятие сопряжённой точки. Условия Лежандра и Якоби;</li> <li>- функция Вейерштрасса. Поле экстремалей. Условие Вейерштрасса на сильный минимум.</li> </ul>
7	<p>Постановка задач оптимального управления</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- уравнения динамического объекта;</li> <li>- критерии оптимальности: интегральные, терминальные, локальные;</li> <li>- ограничения на переменные состояния, на управления, совместные ограничения;</li> <li>- граничные условия, классификация задач ОУ;</li> <li>- основное отличие задач ОУ от классических задач вариационного исчисления.</li> </ul>
8	<p>Принцип максимума Л.С. Понтрягина</p> <p>Рассматриваемые задачи:</p>

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- постановка стандартной задач;</li> <li>- решение задачи ОУ в форме синтеза и в форме программного управления;</li> <li>- формулировка основной теоремы принципа максимума;</li> <li>- идея доказательства принципа максимума, игольчатые вариации.</li> </ul>
9	<p><b>Методика решения задач ОУ с помощью принципа максимума</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- примеры двухточечной задачи с фиксированным и незакрепленным временем;</li> <li>- задачи со свободным правым концом, с интегральным ограничением, со смешанными граничными условиями.</li> </ul>
10	<p><b>Линейные оптимальные быстродействия</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- постановка стационарной задачи;</li> <li>- доказательство теоремы принципа максимума для линейных оптимальных быстродействий;</li> <li>- пример решения задачи о быстродействии в форме синтеза и в форме программного управления.</li> </ul>
11	<p><b>Управляемость динамических объектов</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- понятие нуль-управляемости;</li> <li>- формулировка теоремы Калмана об управляемости;</li> <li>- область управляемости;</li> <li>- управляемость за конечное время;</li> <li>- изохроны.</li> </ul>
12	<p><b>Решение задач ОУ линейными объектами высокого порядка</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- переход от передаточных функций объектов к системе уравнений состояния в нормальной форме;</li> <li>- пример решения задачи ОУ линейным объектом третьего порядка.</li> </ul>
13	<p><b>Линейные оптимальные быстродействия для объектов второго порядка с вещественными и комплексными собственными значениями</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- теорема об <math>n</math> интервалах;</li> <li>- фазовые портреты;</li> <li>- области нуль-управляемости;</li> <li>- изохроны.</li> </ul>
14	<p><b>Решение некоторых технических задач оптимального управления</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- постановка и решение задачи оптимального заряда конденсатора или аккумулятора;</li> <li>- постановка и решение задачи оптимального управления поездом по критерию минимума механической энергии.</li> </ul>
15	<p><b>Динамическое программирование в задачах оптимального управления</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- принцип оптимальности и вывод уравнения Беллмана в частных производных;</li> <li>- методика применения динамического программирования в решении задач ОУ.</li> </ul>
16	<p><b>Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР)</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- решение нестационарных и стационарных задач АКОР с помощью уравнения Белмана;</li> <li>- применение метода Репина и Третьякова для получения асимптотически устойчивой системы;</li> <li>- прямые показатели качества переходных процессов.</li> </ul>
17	<p><b>Обзор численных методов оптимального управления</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- метод локальных вариаций;</li> <li>- элементарная операция;</li> </ul>

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- локальные вариации; - критерии сходимости; - регуляризация.

## 4.2. Занятия семинарского типа.

### Лабораторные работы

№ п/п	Наименование лабораторных работ / краткое содержание
1	Исследование динамического поведения управляемого объекта. В результате выполнения лабораторной работы студент учится на конкретных примерах делать вычисление собственных чисел и собственных векторов, совершать расчёт процессов при начальном отклонении, делать построение фазового портрета при нулевом управлении.
2	Постановка и решение задачи оптимального быстродействия в форме синтеза. В результате выполнения лабораторной работы студент учится делать вывод и анализ соотношений принципа максимума, графическое построение линий переключения, построение фазового портрета оптимальной системы.
3	Решение задачи оптимального быстродействия в форме программного управления. В результате выполнения лабораторной работы студент учится на конкретных примерах делать вывод уравнений непрерывности и их численное решение, совершать расчёт программного оптимального управления и построение изохрон и оценка области управляемости.
4	Оптимальное управление поездом по критерию минимума механической энергии. В результате выполнения лабораторной работы студент учится на конкретных примерах разрабатывать и графически представлять функции максимальной тяги и максимального служебного торможения в зависимости от скорости движения, учится вычислению условно оптимальной траектории движения поезда при заданной скорости стабилизации и разработке итерационного процесса вычисления скорости стабилизации, удовлетворяющей заданному времени хода.
5	Решение стационарной задачи АКОР. В результате выполнения лабораторной работы студент приобретает навык постановки стационарной задачи АКОР для заданного объекта, учится делать вывод методом динамического программирования уравнения для вычисления коэффициентов обратной связи. приобретает навык вычисления коэффициентов оптимального регулятора на основе теоремы Репина-Третьякова, учится рассчитывать значение оптимального процесса и вычислять значения прямых показателей качества оптимального процесса.

### Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Экстремум функции нескольких переменных В результате работы на практических занятиях студент учится на конкретных примерах искать условный и безусловный экстремум ФНП, проверять достаточное условие экстремума.
2	Дифференцирование в нормированных пространствах. В результате работы на практических занятиях студент учится на конкретных примерах вычислять производные функционалов и искать точки недифференцируемости.
3	Основная задача вариационного исчисления. В результате работы на практических занятиях студент учится на конкретных примерах решать основные задачи вариационного исчисления с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа, проверять, является ли найденная экстремаль слабым минимумом, находить первые интегралы основной задачи.
4	Обобщения основной задачи вариационного исчисления.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	В результате работы на практических занятиях студент учится на конкретных примерах выписывать условия трансверсальности и решать задачу Больца, решать систему уравнений Эйлера-Лагранжа в основной задаче для функций нескольких переменных, решать уравнение Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными, проверять, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.
5	Изопериметрические задачи. В результате работы на практических занятиях студент учится на конкретных примерах решать заданные изопериметрические задачи, проверять, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.
6	Достаточные условия сильного и слабого минимума в задачах вариационного исчисления. В результате работы на практических занятиях студент учится на конкретных примерах искать сопряжённую точку для конкретной задачи, проверять условия Лежандра и Якоби для слабого минимума, Вейерштрасса - для сильного.

#### 4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Изучение дополнительной литературы
2	Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам
3	Выполнение курсовой работы.
4	Подготовка к промежуточной аттестации.
5	Подготовка к текущему контролю.

#### 4.4. Примерный перечень тем курсовых работ

Исследование оптимального быстродействия в системе типа «Устойчивый узел».

Исследование оптимального быстродействия в системе типа «Неустойчивый кратный узел».

Исследование оптимального быстродействия в системе типа «Неустойчивый астатический узел».

Исследование оптимального быстродействия в системе типа «Седло» с приведением к главным направлениям.

Исследование оптимального быстродействия в системе типа «Неустойчивый фокус».

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Гюнтер, Н. М. Курс вариационного исчисления. Учебное пособие. Санкт-Петербург : Лань, 2022, —	<a href="https://e.lanbook.com/book/210236">https://e.lanbook.com/book/210236</a>

	320 с. — ISBN 978-5-8114-0893-1. Учебное пособие	
2	В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. Учебное пособие. Москва : Лаборатория знаний, 2020, — 222 с. — ISBN 978-5-00101-799-8	<a href="https://e.lanbook.com/book/135528">https://e.lanbook.com/book/135528</a>
3	Г. Л. Эпштейн, А. П. Иванова. Теория оптимального управления: Учебное пособие для студентов направления «Прикладная математика и информатика». Москва : РУТ (МИИТ), 2020, — 128 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система.	<a href="https://e.lanbook.com/book/175959">https://e.lanbook.com/book/175959</a>
4	Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. Учебное пособие. М. "Физматлит", 2005, — 384 с. — ISBN 5-9221-0589-2. Учебно-методическое издание	<a href="https://e.lanbook.com/book/48177">https://e.lanbook.com/book/48177</a>
5	Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. Учебное пособие. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011, — 256 с. — ISBN 978-5-9221-0590-3	<a href="https://e.lanbook.com/book/2097">https://e.lanbook.com/book/2097</a>
6	Эпштейн Г.Л., Иванова А.П. Введение в теорию оптимального управления. Части 1 и 2. Учебное пособие по дисциплине «Теория оптимального управления». Учебное пособие. М.:МГУПС (МИИТ), 2017, — 128 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система Учебное пособие	НТБ (МИИТ)

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

Официальный сайт РУТ (МИИТ) (<https://www.miit.ru/>).

Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru>).

Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru/>).

Общие информационные, справочные и поисковые системы «Консультант Плюс», «Гарант».

Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>).

Электронно-библиотечная система [ibooks.ru](http://ibooks.ru) (<http://ibooks.ru/>).

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).



Microsoft Internet Explorer (или другой браузер).  
Операционная система Microsoft Windows.  
Microsoft Office. Mathcad Prime 3.0.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащённые компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Экзамен в 7 семестре.

Зачет в 6, 8 семестрах.

Курсовая работа в 8 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

старший преподаватель, к.н. кафедры  
«Цифровые технологии управления  
транспортными процессами»

М.К. Турцынский

доцент, доцент, к.н. кафедры  
«Цифровые технологии управления  
транспортными процессами»

Г.Л. Эпштейн

Согласовано:

Заведующий кафедрой ЦТУТП

В.Е. Нутович

Председатель учебно-методической  
комиссии

Н.А.Клычева