

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ))



Рабочая программа дисциплины (модуля),
как компонент образовательной программы
высшего образования - программа бакалавриата
по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика,
утвержденной первым проректором ФГАОУ ВО
РУТ (МИИТ) Тимониным В.С.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Вариационное исчисление и элементы функционального анализа

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математическое моделирование и системный анализ

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде
электронного документа выгружена из единой
корпоративной информационной системы управления
университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная ФГАОУ ВО РУТ
(МИИТ)

ID подписи: 1343395

Подписал: И.о. заведующего кафедрой Тищенко Сергей
Александрович

Дата: 01.09.2026

1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целью освоения дисциплины (модуля) является:

- получение знаний, приобретение навыков решения задач функционального анализа, необходимых для практического применения методов и моделей функционального анализа в исследовательской и профессиональной деятельности.

- формирование умений и навыков, необходимых для практического применения методов классического вариационного исчисления для поиска решений в оптимальных задачах;

- обучение студента применению основных понятий и задач классического вариационного исчисления;

Задачами освоения дисциплины (модуля) являются:

- освоение приемов решения типовых задач функционального анализа;
- формирование умения строить теоретические и прикладные модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты;
- формирование у обучающегося компетенций в области применения методов вариационного исчисления для проектной и научно-исследовательской деятельности.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

ПК-4 - Уметь ставить цели создания системы, разрабатывать концепцию системы и требования к ней, выполнять декомпозицию требований к системе.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

Знать:

- основные свойства функциональных пространств,
- свойства линейных функционалов и линейных операторов.
- основные теоремы и формулы вариационного исчисления.

Уметь:

- использовать понятия и концепции функционального анализа;
- логически выстраивать обоснование основных теоретических результатов, анализировать и оценивать различные методы решения задач;
- решать прикладные задачи с использованием методов функционального анализа.

- анализировать условия задач, возникающих в вариационном исчислении, и применять соответствующий метод для их решения, включая системный подход

Владеть:

- навыками анализа свойств объектов функционального анализа, применяемых в прикладных задачах;
- навыками решения задач вычислительного и теоретического характера в области функционального анализа.
- навыками решения типовых задач, возникающих в вариационном исчислении.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 4 з.е. (144 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов	
	Всего	Семестр №6
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	80	80
В том числе:		
Занятия лекционного типа	32	32
Занятия семинарского типа	48	48

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 64 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Понятие метрического пространства. Рассматриваемые вопросы: - определение; - примеры классических метрических пространств и метрик в них.
2	Сходимость в метрических пространствах Рассматриваемые вопросы: - понятие об открытых и замкнутых шарах в метрическом пространстве; - понятие предела в метрическом пространстве; - теорема о вложенных шарах и принцип сжимающих отображений.
3	Применения принципа сжимающих отображений (ПСО) Рассматриваемые вопросы: - решение алгебраического уравнения при помощи ПСО; - решение систем алгебраических уравнений на основе ПСО; - решение дифференциальных уравнений при помощи ПСО.
4	Понятие нормированного пространства. Понятие евклидова пространства Рассматриваемые вопросы: - определение; - примеры классических нормированных пространств и норм в них; - примеры классических евклидовых пространств и скалярных произведений в них. - понятие подпространства.
5	Основные теоремы об евклидовых пространствах Рассматриваемые вопросы: - теорема об ортогонализации; - неравенство Бесселя и ортонормированные системы; - характеристическое свойство евклидовых пространств.
6	Функционалы в нормированных пространствах. Операторы в нормированных пространствах Рассматриваемые вопросы: - функционал и его норма, примеры функционалов; - понятие о сопряженном пространстве; - линейные операторы, ядро и образ оператора, примеры; - обратные операторы и теорема о существовании обратного; - спектр оператора, теорема о спектре. - теорема Рисса о представлении линейного функционала.
7	Условный экстремум функции нескольких переменных (ФНП) Рассматриваемые вопросы: - задачи, приводящие к исследованию на условный экстремум; - условный экстремум ФНП. Множители Лагранжа; - достаточное условие условного экстремума.
8	Задачи с неравенствами Рассматриваемые вопросы: - примеры, приводящие к задачам с неравенствами;

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- необходимое условие экстремума в задачах с неравенствами; - теорема Вейерштрасса о достижении функцией наибольшего и наименьшего значения в области.
9	Дифференцирование в нормированных пространствах Рассматриваемые вопросы: - дифференцируемый функционал, производная по Гато, Фреше и Лагранжу в нормированных пространствах; - основные свойства производной по Фреше; - вариация по Лагранжу и ее основные свойства.
10	Простейшая задача вариационного исчисления Рассматриваемые вопросы: - история и постановка задачи о брахистохроне; - сильный и слабый минимум; - необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера-Лагранжа); - примеры простейших задач вариационного исчисления.
11	Первые интегралы уравнения Эйлера-Лагранжа Рассматриваемые вопросы: - случаи понижения порядка уравнения Эйлера-Лагранжа; - решение задачи о брахистохроне; - постановка и решение задачи геометрической оптики; - постановка и решение задачи о наименьшей поверхности вращения.
12	Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче вариационного исчисления Рассматриваемые вопросы: - вторая вариация функционала; - условие и усиленное условие Лежандра; - уравнение Якоби и его анализ; - условие и усиленное условие Якоби; - проверка экстремалей на экстремальность в классических задачах.
13	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления Рассматриваемые вопросы: - задача Больца и условия трансверсальности; - основная задача вариационного исчисления для функций многих переменных; - уравнение Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными.
14	Достаточные условия слабого минимума в обобщениях простейшей задачи вариационного исчисления Рассматриваемые вопросы: - достаточные и необходимые условия слабого минимума в задаче Больца; - условия экстремума второго порядка в задачах со старшими производными.
15	Задачи с подвижными границами Рассматриваемые вопросы: - постановка простейшей задачи со свободными границами, условия трансверсальности и стационарности; - задача Лагранжа на множестве функций со свободными границами.
16	Изопериметрические задачи Рассматриваемые вопросы: - алгоритм решения изопериметрических задач. Метод множителей Лагранжа; - задача Дидоны о кривой, окружающей наибольшую площадь; - задача о форме кривой, провисающей под действием силы тяжести.

4.2. Занятия семинарского типа.

Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Понятие метрического пространства В результате работы на практических занятиях студент учится анализировать функции и искать расстояние между функциями в метрических пространствах.
2	Сходимость в метрических пространствах В результате работы на практических занятиях студент учится анализировать сходимость последовательности функций в метрических пространствах, искать её предел и применять принцип сжимающих отображений.
3	Применения принципа сжимающих отображений (ПСО): часть 1 В результате работы на практических занятиях студент учится решать конкретные уравнения и системы алгебраических уравнений с применением ПСО
4	Понятие нормированного пространства В результате работы на практических занятиях студент учится анализировать функции и искать норму между функциями в различных нормированных пространствах.
5	Понятие евклидова пространства В результате работы на практических занятиях студент учится анализировать функции и искать скалярное произведение между функциями в различных евклидовых пространствах.
6	Основные теоремы об евклидовых пространствах В результате работы на практических занятиях студент учится ортогонализировать системы функций, применять неравенство Бесселя и характеристическое свойство евклидовых пространств.
7	Функционалы в нормированных пространствах В результате работы на практических занятиях студент учится находить нормы различных функционалов в нормированных пространствах.
8	Операторы в нормированных пространствах В результате работы на практических занятиях студент учится находить нормы различных операторов в нормированных пространствах, искать их спектр и классифицировать его точки.
9	Условный экстремум ФНП В результате работы на практических занятиях студент получает навыки нахождения условного экстремума ФНП, проверки достаточного условия экстремума.
10	Задачи с равенствами В результате работы на практических занятиях студент получает навыки нахождения экстремума ФНП для случая ограничений в виде равенств.
11	Дифференцирование в нормированных пространствах В результате работы на практических занятиях студент получает навыки вычисления производных функционалов и поиска точек недифференцируемости.
12	Простейшая задача вариационного исчисления для нескольких функций В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения системы уравнений Эйлера-Лагранжа в основной задаче для функций нескольких переменных и делает простейшую проверку на экстремальность.
13	Первые интегралы уравнения Эйлера-Лагранжа В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения простейших задачи вариационного исчисления при помощи первых интегралов.
14	Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче вариационного исчисления В результате работы на практических занятиях студент получает навыки проверки экстремали

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	простейшей задачи вариационного исчисления на слабый минимум, записи и анализа условий Лежандра и Якоби.
15	Задача Больца В результате работы на практических занятиях студент получает навыки записи условий трансверсальности и решения задачи Больца, учится переписывать простейшую задачу как задачу Больца.
16	Достаточные условия слабого минимума в обобщениях простейшей задачи вариационного исчисления В результате работы на практических занятиях студент получает навыки проверки экстремали задач Больца и задач со старшими производными на слабый минимум.
17	Задачи с подвижными границами В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения простейшей задачи со свободными границами, проверки условий трансверсальности и стационарности, решения задачи Лагранжа на множестве функций со свободными границами.
18	Изопериметрические задачи В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения заданных изопериметрических задач, проверки, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.
19	Задача со старшими производными В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения уравнения Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными, проверки, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.
20	Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах В результате работы на практических занятиях студент учится определять, является ли заданное множество в метрическом пространстве открытым или замкнутым, строит открытые и замкнутые шары.
21	Полные пространства В результате работы на практических занятиях студент учится исследовать, является ли пространство полным или неполным, применяет свойства полных пространств к решению задач, изучает теорему о пополнении.
22	Применения принципа сжимающих отображений (ПСО): часть 2 В результате работы на практических занятиях студент учится решать конкретные дифференциальные уравнения и их системы с применением ПСО
23	Простейшая задача вариационного исчисления. В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения простейших задачи вариационного исчисления с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа, проверки того, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.
24	Простейшая задача вариационного исчисления для нескольких функций В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения системы уравнений Эйлера-Лагранжа в основной задаче для функций нескольких переменных и делает простейшую проверку на экстремальность.

4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Самостоятельное изучение лекционного материала.
2	Изучение учебной литературы из приведённых источников.
3	Подготовка к практическим занятиям.

4	Выполнение курсовой работы.
5	Подготовка к промежуточной аттестации.
6	Подготовка к текущему контролю.

4.4. Примерный перечень тем курсовых работ

Линейные нормированные и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха.

Линейные нормированные и банаховы пространства. Теоремы о разделении.

Инвариантность уравнения Эйлера относительно замены переменной.

Каноническая форма уравнений Эйлера.

Нахождение экстремалей функционала через уравнение Гамильтона-Якоби.

Вариационные принципы механики. Принцип наименьшего действия в простейшей задаче.

Достаточные условия сильного минимума. Функция Вейерштраса.

Нахождение ломаных экстремалей. Условия Вейерштраса-Эрдмана.

Вариационные методы нахождения собственных значений.

Вариационные методы нахождения собственных функций.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Курс вариационного исчисления Гюнтер, Н. М. Учебное пособие Санкт-Петербург: Лань; — 320 с. — 2022. ISBN 978-5-8114-0893-1	https://e.lanbook.com/book/210236 (дата обращения: 08.04.2025).
2	Бренерман, М. Х. Вариационное исчисление : учебное пособие / М. Х. Бренерман, В. А. Жихарев. — Казань : КНИТУ, 2017. — 148 с. — ISBN 978-5-7882-2198-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система.	https://e.lanbook.com/book/138281 (дата обращения: 08.04.2025)
3	Некрасов, С. А., Теория оптимального управления : учебник / С. А. Некрасов. — Москва : Русайнс, 2024. — 205 с. — ISBN 978-5-466-07008-8.	https://book.ru/book/954233 (дата обращения: 08.04.2025).
4	Власова, Е. А. Элементы функционального анализа: учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. —	https://e.lanbook.com/book/212189 (дата обращения: 08.04.2025).

	400 с. — ISBN 978-5-8114-1958-6. — Текст: электронный	
5	Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд. стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 272 с. — ISBN 978-5-8114-0976-1. — Текст: электронный	https://e.lanbook.com/book/210290 (дата обращения: 08.04.2025)
6	Павлов, Е. А. Основы функционального анализа: учебное пособие / Е. А. Павлов. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2020. — 88 с. — ISBN 978-5-8114-3635-4. — Текст: электронный	https://e.lanbook.com/book/116362 (дата обращения: 08.04.2025)

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

- Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru/>);
- Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (www.elibrary.ru);
- Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru/>);
- Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>);

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

- Операционная система Windows;
- Microsoft Office;
- MS Teams;
- Поисковые системы.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Для проведения занятий лекционного типа требуются аудитории, оснащенные компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

Для практических занятий – наличие персональных компьютеров.

9. Форма промежуточной аттестации:

Зачет в 6 семестре.

Курсовая работа в 6 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, доцент, к.н. кафедры
«Цифровые технологии управления
транспортными процессами»

А.П. Иванова

Согласовано:

и.о. заведующего кафедрой ММСС

С.А. Тищенко

Председатель учебно-методической
комиссии

Н.А. Андриянова