

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**  
**(РУТ (МИИТ))**



Рабочая программа дисциплины (модуля),  
как компонент образовательной программы  
высшего образования - программы бакалавриата  
по направлению подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика,  
утвержденной первым проректором РУТ (МИИТ)  
Тимониным В.С.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Вариационное исчисление**

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математическое моделирование и системный анализ

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде  
электронного документа выгружена из единой  
корпоративной информационной системы управления  
университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная РУТ (МИИТ)  
ID подписи: 5665  
Подписал: заведующий кафедрой Нутович Вероника  
Евгеньевна  
Дата: 01.09.2024

## 1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целью освоения дисциплины (модуля) является:

- формирование умений и навыков, необходимых для практического применения методов классического вариационного исчисления для поиска решений в оптимальных задачах.

Задачами освоения дисциплины (модуля) являются:

- формирование у обучающегося компетенций в области применения методов вариационного исчисления для проектной и научно-исследовательской деятельности;
- обучение студента применению основных понятий и задач классического вариационного исчисления;

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

**ПК-4** - Уметь ставить цели создания системы, разрабатывать концепцию системы и требования к ней, выполнять декомпозицию требований к системе.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

### **Знать:**

- основные теоремы и формулы вариационного исчисления.

### **Уметь:**

- анализировать условия задач, возникающих в вариационном исчислении, и применять соответствующий метод для их решения, включая системный подход.

### **Владеть:**

- навыками решения типовых задач, возникающих в вариационном исчислении.

## 3. Объем дисциплины (модуля).

### 3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 2 з.е. (72 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов	
	Всего	Семестр №6
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	32	32
В том числе:		
Занятия лекционного типа	16	16
Занятия семинарского типа	16	16

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 40 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля).

##### 4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Экстремум функции нескольких переменных (ФНП) Рассматриваемые вопросы: - безусловный экстремум ФНП; - условный экстремум ФНП. Множители Лагранжа; - задачи с неравенствами.
2	Дифференцирование в нормированных пространствах Рассматриваемые вопросы: - дифференцируемый функционал, производная по Гато, Фреше и Лагранжу в нормированных пространствах; - основные свойства производной по Фреше; - вариация по Лагранжу и ее основные свойства.
3	Простейшая задача вариационного исчисления Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- сильный и слабый минимум;</li> <li>- уравнение Эйлера-Лагранжа и его первые интегралы;</li> <li>- задача о наименьшей поверхности вращения;</li> <li>- задача о брахистохроне.</li> </ul>
4	<p><b>Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- вторая вариация функционала</li> <li>- условие и усиленное условие Лежандра</li> <li>- уравнение Якоби и его анализ</li> <li>- условие и усиленное условие Якоби</li> <li>- проверка экстремалей на экстремальность в классических задачах</li> </ul>
5	<p><b>Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- задача Больца и условия трансверсальности;</li> <li>- основная задача вариационного исчисления для функций многих переменных;</li> <li>- уравнение Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными.</li> </ul>
6	<p><b>Достаточные условия слабого минимума в обобщениях простейшей задачи вариационного исчисления.</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- достаточные и необходимые условия слабого минимума в задаче Больца</li> <li>- условия экстремума второго порядка в задачах со старшими производными</li> </ul>
7	<p><b>Задачи с подвижными границами</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- постановка простейшей задачи со свободными границами, условия трансверсальности и стационарности</li> <li>- задача Лагранжа на множестве функций со свободными границами.</li> </ul>
8	<p><b>Изопериметрические задачи</b></p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- алгоритм решения изопериметрических задач. Метод множителей Лагранжа;</li> <li>- задача Дидоны о кривой, окружающей наибольшую площадь;</li> <li>- задача о форме кривой, провисающей под действием силы тяжести.</li> </ul>

## 4.2. Занятия семинарского типа.

### Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	<p><b>Экстремум функции нескольких переменных</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык поиска условного и безусловного экстремумов ФНП; проверки достаточного условия экстремума.</p>
2	<p><b>Дифференцирование в нормированных пространствах</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык вычисления производных функционалов и поиска точки недифференцируемости (на примерах).</p>
3	<p><b>Простейшая задача вариационного исчисления</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык решения основных задач вариационного исчисления с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа; проверки, является ли найденная экстремаль слабым минимумом; нахождения первых интегралов основной задачи.</p>
4	<p><b>Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче вариационного</b></p>

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	исчисления В результате работы на практических занятиях студент получает навыки проверки экстремали простейшей задачи вариационного исчисления на слабый минимум, записи и анализа условий Лежандра и Якоби.
5	Обобщения основной задачи вариационного исчисления В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык выписывания условия трансверсальности и решения задачи Больца; решения системы уравнений Эйлера-Лагранжа в основной задаче для функций нескольких переменных; решения уравнения Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными; проверки, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.
6	Достаточные условия слабого минимума в обобщениях простейшей задачи вариационного исчисления В результате работы на практических занятиях студент получает навыки проверки экстремали задач Больца и задач со старшими производными на слабый минимум.
7	Задачи с подвижными границами В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения простейшей задачи со свободными границами, проверки условий трансверсальности и стационарности, решения задачи Лагранжа на множестве функций со свободными границами.
8	Изопериметрические задачи В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык решения заданных изопериметрических задач; проверки, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.

#### 4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Изучение учебной литературы из приведенных источников
2	Подготовка к практическим занятиям
3	Выполнение курсовой работы.
4	Подготовка к промежуточной аттестации.
5	Подготовка к текущему контролю.

#### 4.4. Примерный перечень тем курсовых работ

1. Линейные нормированные и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха.
2. Линейные нормированные и банаховы пространства. Теоремы о разделении.
3. Инвариантность уравнения Эйлера относительно замены переменной.
4. Каноническая форма уравнений Эйлера.
5. Нахождение экстремалей функционала через уравнение Гамильтона-Якоби.
6. Вариационные принципы механики. Принцип наименьшего действия в простейшей задаче.

7. Достаточные условия сильного минимума. Функция Вейерштраса.
8. Нахождение ломаных экстремалей. Условия Вейерштраса-Эрдмана.
9. Вариационные методы нахождения собственных значений.
10. Вариационные методы нахождения собственных функций.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. Учебное пособие, Санкт-Петербург: Лань; — 320 с. - 2022. — ISBN 978-5-8114-0893-1	<a href="https://e.lanbook.com/book/210236">https://e.lanbook.com/book/210236</a> (дата обращения: 26.05.2023). - Текст: электронный.
2	Романко В.К., Агаханов Н.Х., Власов В.В., Коваленко Л.И. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. Учебное пособие, Москва : Лаборатория знаний; — 222 с. - 2020. — ISBN 978-5-00101-799-8	<a href="https://e.lanbook.com/book/135528">https://e.lanbook.com/book/135528</a> (дата обращения: 26.05.2023). - Текст: электронный.
3	Алексеев В. М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.. Оптимальное управление : учебно-методическое пособие — 2-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с. — ISBN 5-9221-0589-2.	<a href="https://e.lanbook.com/book/48177">https://e.lanbook.com/book/48177</a> (дата обращения: 26.05.2023). - Текст: электронный.

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

- Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru/>);
- Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru));
- Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru/>);
- Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>);
- Электронно-библиотечная система [ibooks.ru](http://ibooks.ru) (<http://ibooks.ru/>).
- Интернет-университет информационных технологий (<http://www.intuit.ru/>).

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

Microsoft Internet Explorer (или другой браузер).

Операционная система Microsoft Windows.

Microsoft Office.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащённые компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Зачет в 6 семестре.

Курсовая работа в 6 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, к.н. кафедры «Цифровые  
технологии управления  
транспортными процессами»

М.К. Турцынский

Согласовано:

Заведующий кафедрой ЦТУТП  
Председатель учебно-методической  
комиссии

В.Е. Нутович

Н.А. Андриянова