

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ))



Рабочая программа дисциплины (модуля),
как компонент образовательной программы
базового высшего образования
по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика,
утвержденной первым проректором РУТ (МИИТ)
Тимониным В.С.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Вариационное исчисление

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математическое моделирование и системный анализ

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде электронного документа выгружена из единой корпоративной информационной системы управления университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная РУТ (МИИТ)
ID подписи: 1343395
Подписал: И.о. заведующего кафедрой Тищенко Сергей Александрович
Дата: 18.06.2026

1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целью освоения дисциплины (модуля) является:

- формирование умений и навыков, необходимых для практического применения методов классического вариационного исчисления для поиска решений в оптимальных задачах.

Задачами освоения дисциплины (модуля) являются:

- формирование у обучающегося компетенций в области применения методов вариационного исчисления для проектной и научно-исследовательской деятельности;

- обучение студента применению основных понятий и задач классического вариационного исчисления;

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

ОПК-1 - Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

Знать:

- основные теоремы и формулы вариационного исчисления.

Уметь:

- анализировать условия задач, возникающих в вариационном исчислении, и применять соответствующий метод для их решения, включая системный подход.

Владеть:

- навыками решения типовых задач, возникающих в вариационном исчислении.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 3 з.е. (108 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов	
	Всего	Семестр №6
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	32	32
В том числе:		
Занятия лекционного типа	16	16
Занятия семинарского типа	16	16

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 76 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Экстремум функции нескольких переменных (ФНП) Рассматриваемые вопросы: - безусловный экстремум ФНП; - условный экстремум ФНП. Множители Лагранжа; - задачи с неравенствами.
2	Дифференцирование в нормированных пространствах Рассматриваемые вопросы: - дифференцируемый функционал, производная по Гато, Фреше и Лагранжу в нормированных пространствах; - основные свойства производной по Фреше; - вариация по Лагранжу и ее основные свойства.
3	Простейшая задача вариационного исчисления Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	<ul style="list-style-type: none"> - сильный и слабый минимум; - уравнение Эйлера-Лагранжа и его первые интегралы; - задача о наименьшей поверхности вращения; - задача о брахистохроне.
4	<p>Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - вторая вариация функционала - условие и усиленное условие Лежандра - уравнение Якоби и его анализ - условие и усиленное условие Якоби - проверка экстремалей на экстремальность в классических задачах
5	<p>Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - задача Больца и условия трансверсальности; - основная задача вариационного исчисления для функций многих переменных; - уравнение Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными.
6	<p>Достаточные условия слабого минимума в обобщениях простейшей задачи вариационного исчисления.</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - достаточные и необходимые условия слабого минимума в задаче Больца - условия экстремума второго порядка в задачах со старшими производными
7	<p>Задачи с подвижными границами</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - постановка простейшей задачи со свободными границами, условия трансверсальности и стационарности - задача Лагранжа на множестве функций со свободными границами.
8	<p>Изопериметрические задачи</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - алгоритм решения изопериметрических задач. Метод множителей Лагранжа; - задача Дидоны о кривой, окружающей наибольшую площадь; - задача о форме кривой, провисающей под действием силы тяжести.

4.2. Занятия семинарского типа.

Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	<p>Экстремум функции нескольких переменных</p> <p>В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык поиска условного и безусловного экстремумов ФНП; проверки достаточного условия экстремума.</p>
2	<p>Дифференцирование в нормированных пространствах</p> <p>В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык вычисления производных функционалов и поиска точки недифференцируемости (на примерах).</p>
3	<p>Простейшая задача вариационного исчисления</p> <p>В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык решения основных задач вариационного исчисления с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа; проверки, является ли найденная экстремаль слабым минимумом; нахождения первых интегралов основной задачи.</p>

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
4	Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче вариационного исчисления В результате работы на практических занятиях студент получает навыки проверки экстремали простейшей задачи вариационного исчисления на слабый минимум, записи и анализа условий Лежандра и Якоби.
5	Обобщения основной задачи вариационного исчисления В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык выписывания условия трансверсальности и решения задачи Больца; решения системы уравнений Эйлера-Лагранжа в основной задаче для функций нескольких переменных; решения уравнения Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными; проверки, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.
6	Достаточные условия слабого минимума в обобщениях простейшей задачи вариационного исчисления В результате работы на практических занятиях студент получает навыки проверки экстремали задач Больца и задач со старшими производными на слабый минимум.
7	Задачи с подвижными границами В результате работы на практических занятиях студент получает навыки решения простейшей задачи со свободными границами, проверки условий трансверсальности и стационарности, решения задачи Лагранжа на множестве функций со свободными границами.
8	Изопериметрические задачи В результате работы на практических занятиях студент приобретает навык решения заданных изопериметрических задач; проверки, является ли найденная экстремаль слабым минимумом.

4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Изучение учебной литературы из приведенных источников
2	Подготовка к практическим занятиям
3	Выполнение курсовой работы.
4	Подготовка к промежуточной аттестации.
5	Подготовка к текущему контролю.

4.4. Примерный перечень тем курсовых работ

1. Линейные нормированные и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха.
2. Линейные нормированные и банаховы пространства. Теоремы о разделении.
3. Инвариантность уравнения Эйлера относительно замены переменной.
4. Каноническая форма уравнений Эйлера.
5. Нахождение экстремалей функционала через уравнение Гамильтона-Якоби.

6. Вариационные принципы механики. Принцип наименьшего действия в простейшей задаче.

7. Достаточные условия сильного минимума. Функция Вейерштраса.

8. Нахождение ломаных экстремалей. Условия Вейерштраса-Эрдмана.

9. Вариационные методы нахождения собственных значений.

10. Вариационные методы нахождения собственных функций.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. Учебное пособие, Санкт-Петербург: Лань; — 320 с. -2022. — ISBN 978-5-8114-0893-1	https://reader.lanbook.com/book/210236 (дата обращения: 24.06.2025)
2	Беспалов, М. С. Решение задач по методам оптимизации и вариационному исчислению: практикум : учебное пособие / М. С. Беспалов. — Владимир : ВлГУ, 2023. — 104 с. — ISBN 978-5-9984-1550-0.	https://e.lanbook.com/book/434276 (дата обращения: 24.06.2025)
3	Юрина, Т. А. Оптимальное управление : учебное пособие / Т. А. Юрина. — Омск : СибАДИ, 2020. — 70 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система.	https://e.lanbook.com/book/163739 (дата обращения: 24.06.2025)

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

- Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru>);

- Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (www.elibrary.ru);

- Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru/>);

- Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>);

- Электронно-библиотечная система ibooks.ru (<http://ibooks.ru/>).

- Интернет-университет информационных технологий (<http://www.intuit.ru/>).

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

Microsoft Internet Explorer (или другой браузер).

Операционная система Microsoft Windows.

Microsoft Office.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащённые компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Зачет в 6 семестре.

Курсовая работа в 6 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, к.н. кафедры
«Математическое моделирование
сложных систем» Института
железнодорожного транспорта

М.К. Турцынский

Согласовано:

и.о. заведующего кафедрой ПМ
Председатель учебно-методической
комиссии

С.А. Тищенко

Н.А. Андриянова