МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ)

Рабочая программа дисциплины (модуля),
как компонент образовательной программы
базового высшего образования
по специальности
10.05.01 Компьютерная безопасность,
утвержденной первым проректором РУТ (МИИТ)
Тимониным В.С.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Геометрия

Специальность: 10.05.01 Компьютерная безопасность

Специализация: Информационная безопасность объектов информатизации на базе компьютерных систем

Форма обучения: Очная

Простая электронная подпись, выданная РУТ (МИИТ)
ID подписи: 366399
Подписал: И.о. заведующего кафедрой Курзина Ангелина Михайловна
Дата: 01.06.2026

1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Цели освоения учебной дисциплины:

- формирование у студентов системных представлений о структуре линейных и евклидовых пространств, линейных операторах и квадратичных формах как фундаментальной математической базы для изучения профильных дисциплин.

- развитие навыков применения аппарата линейной алгебры и аналитической геометрии для математического моделирования, анализа и решения профессиональных задач в области компьютерной безопасности, криптографии и теории кодирования.

- воспитание способности к абстрактному и алгоритмическому мышлению, а также навыков строгого математического обоснования процессов преобразования данных.

Задачи освоения учебной дисциплины:

- изучение аксиоматики и свойств линейных пространств: понятий линейной зависимости и независимости, базиса, размерности, линейных оболочек и законов преобразования координат при замене базиса.

- освоение методов исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений (слау), включая анализ их совместности (теорема кронекера-капелли) и построение фундаментальной системы решений (фср), в том числе над конечными полями.

- формирование представлений о линейных операторах: их матричном представлении, преобразовании матриц при смене базиса, а также анализе структуры ядра, образа, ранга и дефекта оператора.

- изучение спектральной теории линейных операторов: методов нахождения собственных значений и собственных векторов с помощью характеристического многочлена, условий диагонализуемости операторов (операторы простого типа).

- освоение теории билинейных и квадратичных форм: методов их приведения к каноническому и нормальному виду (методом лагранжа и методом ортогональных преобразований), а также исследования на знакоопределенность с использованием критерия сильвестра.

- изучение метрических свойств евклидовых пространств: скалярного произведения, матрицы грама, процессов ортогонализации базисов (процесс грама-шмидта) и свойств ортогональных и симметричных (самосопряженных) операторов.

- развитие практических навыков алгоритмического решения задач (приведение матриц к ступенчатому виду, ортогонализация, диагонализация форм) и верификации полученных результатов (например, проверка закона инерции или ортонормированности базиса).

- создание прочной математической базы для последующего успешного изучения специальных дисциплин, таких как криптография на решетках, многомерный анализ данных, компьютерная графика, теория помехоустойчивого кодирования и криптоанализ.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

ОПК-3 - Способен на основании совокупности математических методов, физических законов и моделей разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

Знать:

- основные определения и свойства линейных пространств, линейных подпространств, линейной зависимости и независимости систем векторов.
- понятия базиса и размерности линейного пространства, теорему о разложении по базису и теорему Штейница.
- теорию систем линейных алгеических уравнений (СЛАУ): теорему Кронекера-Капелли, структуру решений однородных и неоднородных систем, понятие фундаментальной системы решений (ФСР).
- теорию линейных операторов: способы задания, матрицу оператора, преобразование матрицы при замене базиса, понятия ядра, образа, ранга и дефекта оператора.
- методы нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора, понятие характеристического многочлена и условия диагонализуемости оператора простого типа.
- теорию билинейных и квадратичных форм: их матричное представление, закон изменения матрицы при замене базиса, инварианты квадратичных форм и закон инерции.
- методы приведения квадратичных форм к каноническому и нормальному виду (метод Лагранжа, метод ортогональных преобразований) и критерий Сильвестра для знакоопределенных форм.

- аксиоматику и свойства евклидовых пространств: понятие скалярного произведения, матрицу Грама, неравенство Коши-Буняковского, геометрические понятия (длина вектора, угол между векторами).

- свойства ортогональных и ортонормированных систем векторов, а также свойства ортогональных и симметричных (самосопряженных) линейных операторов.

Уметь:

- исследовать системы векторов на линейную зависимость/независимость, находить базис и размерность линейных подпространств и линейных оболочек, а также дополнять линейно независимую систему до базиса всего пространства;

- выполнять преобразования координат векторов при переходе от одного базиса к другому, находить матрицу перехода и проверять её невырожденность;

- исследовать системы линейных уравнений на совместность, находить общее решение, а также строить фундаментальную систему решений (в том числе над конечными полями, если это предусмотрено вариативной частью);

- доказывать, что заданное отображение является линейным оператором, находить его матрицу в заданном базисе, а также вычислять ядро, образ, ранг и дефект оператора;

- находить собственные значения и собственные векторы линейных операторов, проверять операторы на принадлежность к простому типу;

- приводить квадратичные формы к каноническому виду методом Лагранжа и методом ортогональных преобразований, проверять выполнение закона инерции;

- исследовать квадратичные формы на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра;

- строить матрицу Грама для заданного базиса, применять процесс ортогонализации (Грама-Шмидта) для построения ортонормированного базиса и проверять его ортонормированность;

- вычислять длины векторов и углы между ними в евклидовом пространстве с использованием матрицы Грама.

Владеть:

- навыками строгого математического доказательства и логического обоснования свойств алгебраических и геометрических структур (например, доказательство критериев подпространств или идеалов);

- методами алгоритмического решения задач линейной алгебры и аналитической геометрии (приведение матриц к ступенчатому виду, ортогонализация базисов, диагонализация квадратичных форм);

- математическим аппаратом для описания и анализа многомерных пространств, что является фундаментальной основой для дисциплин специальности (таких как криптография, теория кодирования, компьютерная графика и машинное обучение);

- навыками верификации полученных результатов (например, проверка ортонормированности базиса через матрицу перехода и матрицу Грама, проверка закона инерции при разных способах приведения формы к каноническому виду).

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 6 з.е. (216 академических часа(ов).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов		
	Всего	Семестр	
		№1	№2
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	64	32	32
В том числе:			
Занятия лекционного типа	32	16	16
Занятия семинарского типа	32	16	16

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 152 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Линейное пространство. Рассматриваемые вопросы: - линейное пространство,определения, простейшие свойства, примеры - линейная зависимость и независимость системы векторов, свойства. - линейное подпространство, критерий линейного подпространства - пересечение и сумма подпространств. - прямая сумма подпространств.
2	Размерность и базис линейного пространства. Рассматриваемые вопросы: - размерность и базис линейного пространства. - теорема о разложении по базису. - координаты вектора в данном базисе. - координатное выражение линейных действий в линейном пространстве. - закон преобразования координат вектора при переходе к другому базису. - матрица перехода и её невырожденность.
3	Линейная оболочка системы векторов. Рассматриваемые вопросы: - линейная оболочка системы векторов и её свойства. - теорема Штейница. - следствия из теоремы Штейница: два определения базиса, дополнение линейно независимой системы векторов до базиса всего пространства. - ранг системы векторов. - базис и размерность линейной оболочки системы векторов. - теоремы о ранге матрицы: теорема о базисном миноре, необходимое идостаточное условие равества нулю определителя. Ранг произведения матриц.
4	Общая теория линейных систем. Рассматриваемые вопросы: - общая теория линейных систем. - теорема Кронекера-Капэлли. - теорема о линейном пространстве решений однородной системы линейных уравнений (ОСЛУ) и его размерности. - фундаментальная система решений (ФСР) ОСЛУ. Их нахождение.
5	Линейные операторы в линейном пространстве. Рассматриваемые вопросы: - линейные операторы в линейном пространстве, примеры - матрица линейного оператора, примеры - преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. - линейные действия над линейными операторами в линейном пространстве - кольцо линейных операторов и его изоморфизм с кольцом матриц
6	Обратный оператор. Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- обратный к линейному оператору - обратимость линейного оператора в терминах его матирицы.
7	Ядро и образ линейного оператора. Рассматриваемые вопросы: - ядро и образ линейного оператора как линейные подпространства - дефект и ранг линейного оператора - обратимость линейного оператора в терминах его ядра
8	Структура ядра и образа линейного оператора. Рассматриваемые вопросы: - нахождение ядра и образа линейного оператора - теорема о ранге линейного оператора - теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора.
9	Собственные вектора и собственные значения линейного оператора. Рассматриваемые вопросы: - собственные вектора и собственные значения линейного оператора, примеры - свойства системы векторов с попарно различными собственными значениями - линейные операторы простого типа - нахождение собственных векторов и собственных значений линейного оператора. Пример - характеристический многочлен оператора и его инвариантность.
10	Билинейные функции в линейном пространстве. Рассматриваемые вопросы: - билинейные функция и её билинейная форма в линейном пространстве, примеры - закон преобразования матрицы билинейной функции при переходе к другому базису - симметричные билинейные функции - квадратичная функция и её квадратичная форма в линейном пространстве и её матрица в данном базисе.
11	Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Рассматриваемые вопросы: - канонический и нормальный базисы для квадратичной функции - приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Примеры - инварианты квадратичной функция. Теорема инерции.
12	Знакоопределенные квадратичные функции. Рассматриваемые вопросы: - положительно определённые квадратичные функции. Критерий Сильвестра - отрицательно определённые квадратичные функции. Критерий отрицательной определённости.
13	Евклидовы пространства. Рассматриваемые вопросы: - евклидовы пространства, матрица Грама, примеры - неравенство Коши-Буняковского - геометрические понятия в евклидовом пространстве: длина вектора, угол между векторами. Неравество треугольника.
14	Ортогональные системы векторов. Рассматриваемые вопросы: - ортогональные системы векторов. Свойства. Теорема Пифагора. - теорема о линейной независимости ортогональной системы векторов - ортонормированные системы векторов. Ортонормированный базис - теорема об ортогонализации базиса. Пример. - матрица Грама в ортонормированном базисе

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- теорема об изоморфизме евклидовых пространств - ортогональные дополнения в евклидовом пространстве.
15	Ортогональные операторы в евклидовом пространстве. Рассматриваемые вопросы: - ортогональные матрицы. Критерий ортогональной матрицы. - ортогональные операторы в евклидовом пространстве, примеры и их свойства - теорема о каноническом базисе для ортогонального оператора.
16	Самосопряжённые (симметричные) операторы в евклидовом пространстве. Рассматриваемые вопросы: - свойства симметричного оператора. - теорема о существовании ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов этого оператора. - теорема о приведении любой квадратичной формы ортогональным преобразованием к каноническому виду.

4.2. Занятия семинарского типа.

Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Линейное пространство. В результате работы студент получает навыки решения задач на проверку систем векторов на линейную зависимость и независимость, нахождения базиса и размерности линейного подпространства, а также вычисления пересечения, суммы и прямой суммы линейных подпространств.
2	Размерность и базис линейного пространства. В результате работы студент получает навыки решения задач на разложение вектора по заданному базису, вычисление координат вектора в различных базисах, построение матрицы перехода и применение закона преобразования координат при смене базиса.
3	Линейная оболочка системы векторов. В результате работы студент получает навыки решения задач на нахождение базиса и размерности линейной оболочки, вычисление ранга системы векторов и ранга матрицы (методом базисного минора и методом элементарных преобразований), а также применения следствий из теоремы Штейница для дополнения линейно независимой системы до базиса.
4	Общая теория линейных систем. В результате работы студент получает навыки решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса, исследования СЛАУ на совместность и единственность решения с помощью теоремы Кронекера-Капелли, а также нахождения фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений.
5	Линейные операторы в линейном пространстве. В результате работы студент получает навыки решения задач на построение матрицы линейного оператора в заданном базисе, выполнение линейных действий над операторами и преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
6	Обратный оператор. В результате работы студент получает навыки решения задач на проверку условий обратимости линейного оператора и нахождения матрицы обратного оператора с использованием свойств определителей и метода элементарных преобразований.
7	Ядро и образ линейного оператора. В результате работы студент получает навыки решения задач на нахождение ядра и образа

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	линейного оператора как линейных подпространств, вычисление его ранга и дефекта, а также проверки обратимости оператора через анализ тривиальности его ядра.
8	Структура ядра и образа линейного оператора. В результате работы студент получает навыки решения задач на практическое применение теоремы о ранге линейного оператора и теоремы о сумме ранга и дефекта для анализа структуры и свойств линейных отображений.
9	Собственные вектора и собственные значения линейного оператора. В результате работы студент получает навыки решения задач на нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора, построение характеристического многочлена и анализ свойств систем векторов, соответствующих попарно различным собственным значениям.
10	Билинейные функции в линейном пространстве. В результате работы студент получает навыки решения задач на составление матрицы билинейной и квадратичной форм в заданном базисе, а также преобразования этой матрицы при переходе к другому базису.
11	Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. В результате работы студент получает навыки решения задач на приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному видам методом Лагранжа, а также вычисления её инвариантов и проверки теоремы инерции.
12	Знакоопределенные квадратичные функции. В результате работы студент получает навыки решения задач на исследование квадратичных форм на знакоопределенность (положительную и отрицательную) с использованием критерия Сильвестра.
13	Евклидовы пространства. В результате работы студент получает навыки решения задач на вычисление длины вектора, угла между векторами, построение матрицы Грама и применение неравенства Коши-Буняковского и неравенства треугольника в евклидовых пространствах.
14	Ортогональные системы векторов. В результате работы студент получает навыки решения задач на ортогонализацию и нормирование систем векторов (процесс Грама-Шмидта), построение ортонормированного базиса, а также нахождение ортогонального дополнения подпространства.
15	Ортогональные операторы в евклидовом пространстве. В результате работы студент получает навыки решения задач на проверку матриц и линейных операторов на ортогональность, а также нахождение канонического базиса для ортогонального оператора.
16	Самосопряжённые (симметричные) операторы в евклидовом пространстве. В результате работы студент получает навыки решения задач на приведение симметричных (самосопряженных) операторов и соответствующих им квадратичных форм к диагональному (каноническому) виду с помощью ортогональных преобразований.

4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Подготовка к практическим занятиям.
2	Подготовка к промежуточной аттестации.
3	Подготовка к текущему контролю.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Гусев, В. А. Геометрия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08897-7	https://urait.ru/bcode/541432 (дата обращения: 28.04.2024).
2	Богомолов, Н. В. Геометрия : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 108 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09528-9.	https://urait.ru/bcode/536961 (дата обращения: 28.04.2024).
3	Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18887-5.	https://urait.ru/bcode/555026 (дата обращения: 28.04.2024).

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

1. Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) - http://library.miit.ru
2. Научная электронная библиотека - www.elibrary.ru
3. Образовательная платформа для университетов и колледжей - https://urait.ru/

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

1) Интернет-браузер (Yandex и др.)
2) Microsoft Office.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Компьютеры, интерактивные, доски, проекторы, экраны.

9. Форма промежуточной аттестации:

Зачет в 1, 2 семестрах.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, доцент, к.н. кафедры
«Высшая математика» А.В. Ряднов

Согласовано:

Заведующий кафедрой УиЗИ Л.А. Баранов

и.о. заведующего кафедрой ВМ А.М. Курзина

Председатель учебно-методической
комиссии С.В. Володин