

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**  
**(РУТ (МИИТ))**



Рабочая программа дисциплины (модуля),  
как компонент образовательной программы  
высшего образования - программы бакалавриата  
по направлению подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика,  
утвержденной первым проректором РУТ (МИИТ)  
Тимониным В.С.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Классические задачи оптимизации**

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математические модели в экономике и технике

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде электронного документа выгружена из единой корпоративной информационной системы управления университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная РУТ (МИИТ)  
ID подписи: 5665  
Подписал: заведующий кафедрой Нутович Вероника Евгеньевна  
Дата: 10.06.2021

## 1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целями освоения дисциплины (модуля) являются:

- изучение – в продолжение фундаментального курса анализа (или параллельно ему) основных фактов и выводов классического вариационного исчисления (непосредственно связанных с классическими задачами оптимизации);

- изучение необходимых связей этой науки с численными методами, механикой, теорией оптимального управления и др. разделами математики;

- обзор (на новом уровне) основных фундаментальных фактов классического математического анализа и курса алгебры в связи с изучением далёких и глубоких обобщений этих фактов с целью усиления знаний роли основных фактов анализа и алгебры в общей структуре математического образования;

- подготовка к изучению специальных курсов, использующих методы оптимального управления и вариационного исчисления и классических задач оптимизации.

Задачами дисциплины (модуля) являются:

- формирование у обучающегося компетенций в области применения методов оптимального управления для проектной и научно-исследовательской деятельности;

- формирование личности студента, развитие его интеллекта и умения логически и алгоритмически мыслить, формирование умений и навыков, необходимых при практическом применении теории оптимального управления при поиске оптимальных решений и их реализации;

- изучение методологии решения классических задач оптимизации непосредственно способствует этому.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

**ПК-4** - Уметь ставить цели создания системы, разрабатывать концепцию системы и требования к ней, выполнять декомпозицию требований к системе.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

**Знать:**

- линейные пространства: общие понятия, основные

пространства(примеры), гильбертовы и евклидовы пространства

**Уметь:**

- умение решать основные типы дифференциальных уравнений, включая случаи понижения порядка дифференциальных уравнений

**Владеть:**

- навыками решения типовых задач по данной дисциплине.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 10 з.е. (360 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов			
	Всего	Семестр		
		№6	№7	№8
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	164	60	64	40
В том числе:				
Занятия лекционного типа	78	30	32	16
Занятия семинарского типа	86	30	32	24

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 196 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

#### 4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Дифференцируемые функционалы в ЛНП. Функционалы и операторы в линейных нормированных пространствах. Вариация дифференцируемого функционала
2	Экстремум дифференцируемых функционалов. Необходимые условия. Достаточное условие экстремума. Примеры.
3	Вариационное исчисление: основные необходимые условия экстремума.
4	Постановка основной (простейшей) задачи вариационного исчисления. Лемма Лагранжа. Вывод уравнения Эйлера. Случаи понижения порядка. Задача о брахистохроне. Задача о катеноиде.
5	Функционалы, зависящие от $n$ функций. Функционалы, зависящие от производных высших порядков. Случай нескольких независимых переменных; уравнение Эйлера-Остроградского.
6	Дальнейшие условия экстремума. Условный экстремум. Изопериметрические задачи; правило множителей Лагранжа. Задача Дидоны
7	Условие трансверсальности
8	Система необходимых и достаточных условий экстремума в основной задаче вариационного исчисления (условия Лагранжа, Якоби, Вейерштрасса).
9	Постановка задач оптимального управления. Две формы решения – оптимальная программа и синтез.
10	Теорема принципа максимума Л.С. Понтрягина о необходимых условиях оптимальности.
11	Методика решения задач оптимального управления. О доказательстве принципа максимума.
12	Примеры решения задач оптимального управления объектами первого порядка.
13	Примеры решения задач оптимального управления объектами второго порядка.
14	Постановка автономной задачи о быстродействии. Доказательство теоремы о необходимых условиях оптимальности в задаче о быстродействии..
15	Постановка автономной задачи о быстродействии. Доказательство теоремы о необходимых условиях оптимальности в задаче о быстродействии..
16	Семейство изохрон. Аналитическое и численное построение семейства изохрон.
17	Область управляемости. Теорема Калмана об управляемости. Оценка области управляемости.
18	Теорема об $n$ интервалах. Доказательство и применение.
19	Оптимальное по быстродействию управление устойчивым линейным объектом второго порядка с вещественными собственными значениями.
20	Оптимальное по быстродействию управление неустойчивым линейным объектом второго порядка с вещественными собственными значениями.
21	Оптимальное по быстродействию управление устойчивым линейным объектом второго порядка с комплексными собственными значениями. Линия переключения.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
22	Оптимальное по быстродействию управление неустойчивым линейным объектом второго порядка с комплексными собственными значениями. Оценка размера области управляемости.
23	Алгоритм построения изохрон при произвольном числе переключений.
24	Описание линейного стационарного объекта с помощью передаточной функции. Переход от передаточной функции к дифференциальным уравнениям в переменных состояния.
25	Пример решения двухточечной задачи для линейного объекта третьего порядка. Система условий непрерывности и методы её решения.
26	Постановка задачи оптимального заряда конденсатора. Вывод уравнений объекта. Запись задачи оптимального управления в относительных единицах.
27	Постановка задачи оптимального заряда конденсатора. Вывод уравнений объекта. Запись задачи оптимального управления в относительных единицах.
28	Постановка задачи оптимального управления поездом по критерию минимума механической энергии. Запись уравнений в удельных величинах.
29	Понижение порядка задачи и вывод основных соотношений принципа максимума.
30	Принцип оптимальности и вывод уравнения Р. Беллмана в частных производных.
31	Решение нестационарной задачи АКОР с помощью уравнения Р. Беллмана в частных производных.
32	Решение нестационарной задачи АКОР с помощью уравнения Р. Беллмана в частных производных.
33	Применение теоремы Репина – Третьякова для решения стационарной задачи АКОР.

#### 4.2. Занятия семинарского типа.

##### Лабораторные работы

№ п/п	Наименование лабораторных работ / краткое содержание
1	Л. р. 1. Исследование динамических свойств управляемого объекта. Приведение уравнений объекта к нормальной форме. Вычисление собственных значений и собственных векторов. Характеристика положений равновесия. Получение общего решения задачи Коши для уравнений управляемого объекта при постоянном управлении. Графическое построение собственных направлений. Построение фазового портрета системы при отсутствии управления.
2	Л. р. 2. Численный синтез оптимального управления. Постановка задачи оптимального быстродействия для заданного объекта. Вывод и анализ соотношений принципа максимума. Изучение возможности применения теоремы об $n$ интервалах. Построение собственных направлений в окрестности положений равновесия. Разбиение фазовой плоскости на области различного поведения. Применение обратного времени для расчёта линии переключения. Построение фазового портрета оптимальной системы.
3	Л. р. 3. Решение двухточечной задачи оптимального управления. Выбор начальной

№ п/п	Наименование лабораторных работ / краткое содержание
	<p>точки оптимального процесса.</p> <p>Вывод уравнений движения объекта для первого и второго интервала.</p> <p>Вывод уравнений непрерывности фазовых переменных.</p> <p>Численное решение уравнений непрерывности относительно момента переключения и длительности оптимального процесса.</p> <p>Аналитический расчёт оптимальной траектории в прямом времени.</p> <p>Численное построение оптимального процесса.</p> <p>Построение изохрон и оценка области управляемости.</p> <p>Защита лабораторных работ первого семестра.</p>
4	<p>Л. р. 4. Оптимальное управление поездом по критерию расхода механической энергии. Вычисление условно оптимальной траектории движения поезда при заданной скорости стабилизации.</p> <p>Разработка итерационного процесса вычисления скорости стабилизации, удовлетворяющей заданному времени хода.</p> <p>Определение точек пути и соответствующих моментов времени, в которых изменяется режим движения. Построение оптимальной траектории.</p>
5	<p>Л. р. 5. Решение стационарной задачи АКОР. Аналитическое и численное исследование динамики неуправляемого объекта. Постановка стационарной задачи АКОР для заданного объекта.</p> <p>Вычисление коэффициентов оптимального регулятора на основе теоремы Репина-Третьякова.</p> <p>Расчёт оптимального процесса. Вычисление прямых показателей качества оптимального процесса.</p> <p>Защита лабораторных работ второго семестра.</p>

### Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Условный и безусловный экстремум функции нескольких переменных. Исследование на условный экстремум. Множители Лагранжа.
2	Вариация функционала. Примеры вычисления вариации
3	Основная задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Задача о брахистохроне.
4	Основная задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Задача о брахистохроне.
5	Основная задача вариационного исчисления для функций нескольких переменных. Примеры.
6	Задачи со старшими производными.
7	Задача с подвижными концами.
8	Задача Больца. Примеры.
9	Изопериметрическая задача. Необходимое условие экстремума.
10	Примеры изопериметрических задач: задача Дидоны, задача о форме длины нити, подвешенной на двух концах.
11	Достаточные условия слабого минимума. Условия Лежандра и Якоби.
12	Функция Вейерштрасса. Поле экстремалей. Центральное поле экстремалей.
13	Достаточные условия сильного максимума. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
14	Каноническая система уравнений Эйлера. Примеры.
15	Уравнение Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби.
16	Вариационные принципы механики.

#### 4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Изучение рекомендуемой литературы
2	Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам
3	Выполнение курсовой работы.
4	Подготовка к промежуточной аттестации.
5	Подготовка к текущему контролю.

#### 4.4. Примерный перечень тем курсовых работ

Курсовая работа выполняется по индивидуальным заданиям; основана тема: Приближенная минимизация интегрального функционала по методу Рунге.

Предполагается реализация всех численных алгоритмов на ЭВМ.

Варианты курсовой работы см. Приложение 1. Вначале требуется найти точное решение задачи о минимуме заданного функционала, затем (в случае задания по методу Рунге) нужно отыскать  $n$  приближений (итераций) по методу Рунге при указанном выборе системы координатных функций; далее сравнить приближения с точным решением (вычислив невязки), построить графики.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 320 с. - ISBN 978-5-8114-0893-1 Учебное пособие	<a href="https://e.lanbook.com/book/210236">https://e.lanbook.com/book/210236</a>
2	В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 222 с. - ISBN 978-5-00101-799-8 Учебное пособие	<a href="https://e.lanbook.com/book/135528">https://e.lanbook.com/book/135528</a>
3	Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.	<a href="https://e.lanbook.com/book/2097">https://e.lanbook.com/book/2097</a>

Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 256 с. - ISBN 978-5-9221-0590-3	
--	--

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

Официальный сайт РУТ (МИИТ) (<https://www.miit.ru/>).

Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru>).

Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru/>).

Общие информационные, справочные и поисковые системы «Консультант Плюс», «Гарант».

Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>).

Электронно-библиотечная система [ibooks.ru](http://ibooks.ru) (<http://ibooks.ru/>).

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

Microsoft Internet Explorer (или другой браузер).

Операционная система Microsoft Windows.

Microsoft Office.

Mathcad Prime 3.0.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Экзамен в 7 семестре.

Зачет в 6, 8 семестрах.

Курсовая работа в 8 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом



РУТ (МИИТ).

Авторы:

старший преподаватель, к.н. кафедры  
«Цифровые технологии управления  
транспортными процессами»

М.К. Турцынский

Согласовано:

Заведующий кафедрой ЦТУТП

В.Е. Нутович

Председатель учебно-методической  
комиссии

Н.А.Клычева