МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ)

Рабочая программа дисциплины (модуля),
как компонент образовательной программы
высшего образования - программы бакалавриата
по направлению подготовки
38.03.01 Экономика,
утвержденной первым проректором РУТ (МИИТ)
Тимониным В.С.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Математический анализ

Направление подготовки:	38.03.01 Экономика
Направленность (профиль):	Экономика и инженерия транспортных систем. Программа двойного диплома с Высшей школой экономики
Форма обучения:	Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде электронного документа выгружена из единой корпоративной информационной системы управления университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная РУТ (МИИТ)
ID подписи: 2672
Подписал: заведующий кафедрой Платонова Ольга Алексеевна
Дата: 01.06.2022

1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

? ознакомление студентов с основами теории пределов и непрерыв-ных функций, дифференциального исчислений функций одной и многих переменных, основами неопределенного, определенного (в том числе кратного) и несобственного интегрирования, основами теории рядов;

? формирование понимания роли математического анализа в экономических и экономико-статистических исследованиях;

? формирование базовых практических навыков работы с пределами, с непрерывными функциями, с производными и дифференциалами функции одной и многих переменных, с интегралами, с рядами;

? формирование способностей математического анализа экономических систем, экономических зависимостей, функций, выполнения базовых математических операций при обработке экономико-статистических данных.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

УК-1 - Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

УК-2 - Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

Знать:

основные понятия, содержание утверждений и следствий из них, используемых для обоснования выбираемых математических методов решения задач управления.

Уметь:

применять полученные знания по дисциплине при анализе способов решения поставленных задач.

Владеть:

навыками решения основных задач математического анализа; способностью производить самостоятельный выбор методов и способов решения.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 9 з.е. (324 академических часа(ов).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов		
	Всего	Семестр	
		№1	№2
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	180	118	62
В том числе:			
Занятия лекционного типа	88	58	30
Занятия семинарского типа	92	60	32

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 144 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Введение в математический анализ Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- понятие множеств, отношения и операций над ними. - числовые множества, множество простых чисел, множество алгебраических чисел. - связь числовых множеств с возможностью решения различных алгебраических уравнений в этих множествах. - числовая прямая, взаимно однозначное соответствие между множествами и числовой прямой. - отрезок, интервал, полуинтервал, бесконечные промежутки. - длина отрезка на прямой. - окрестность точки на прямой. - декартово произведение множеств. - понятия ограниченного сверху, снизу и просто ограниченного числового множества. - понятия верхней и нижней граней. - определение точных верхней и нижней граней, примеры. - теорема о существовании ТГ ограниченного множества (схема доказательства). - определение отображения (функции) и связанных понятий: об-ласть определения, множество значений, образ множества, прообраз множества. - типы отображений: инъективное, сюръективное, биективное, примеры. - операции над функциями: арифметические, композиция функций (сложная функция), примеры. - основные элементарные функции. - способы задания функций: аналитический, табличный, графиче-ский, описательный, неявный и др. - график функции и эскиз графика. - ограниченные и неограниченные функции. - ТВГ и ТНГ функции на множестве. - наибольшее (максимальное) и наименьшее (минимальное) значе-ния функции на множестве (экстремальные значения), примеры. - понятие обратной функции, свойства обратной функции, приме-ры. - четные и нечетные функции, примеры. - монотонные функции, периодические функции, примеры. - примеры функций экономического анализа.
2	Понятие последовательности. Предел последовательности. Рассматриваемые вопросы: - последовательность. - способы задания последовательностей: явный, рекуррентный, описательный, графический. - примеры: формулы начисления процентов по вкладам: простые проценты, сложные проценты; непрерывные проценты. - понятие предела последовательности. бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, по-следовательности с пределами . - свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. - ограниченность последовательности, имеющей предел. - единственность предельного значения. - арифметические свойства пределов. - свойства пределов, связанные с неравенствами. - свойства пределов, связанные с неравенствами, примеры (в том числе пределы последовательностей и). - монотонные и ограниченные последовательности. - теорема о существовании предела монотонной ограниченной по-следовательности. - примеры (в том числе пределы последовательностей , ; , ; , , . - предельный случай непрерывного начисления процентов на капитал. Предел . понятие подпоследовательности и частичных пределов. - верхний и нижний пределы последовательности. Примеры. - понятие последовательности вложенных отрезков и стягивающихся отрезков. - теорем об отделимости числовых множеств (аксиома непрерывности).

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- лемма Кантора о вложенных отрезках. - теорема (Больцано Вейерштрасса) о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности. - понятие фундаментальной последовательности. - свойства фундаментальной последовательности. - критерий Коши сходимости последовательности. - критерий расходимости последовательности. - пример (расходимость последовательности гармонических чи-сел).
3	Предел функции одной переменной Рассматриваемые вопросы: - пределы монотонной функции. - замена переменной при вычислении пределов. Примеры. - первый замечательный предел. - следствия из первого замечательного предела. - эквивалентные функции. - второй замечательный предел. - асимптоты функции: вертикальные и наклонные асимптоты. - теорема о существовании наклонной асимптоты. - понятие непрерывной функции. - непрерывность основных элементарных функций. - односторонняя непрерывность. - понятие предела функции по Гейне и Коши. Примеры. - односторонние пределы. - пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Примеры. - свойства пределов функции: локальные, связанные с неравенствами. - бесконечно малые функции и их свойства. - арифметические свойства пределов функции. - точки разрыва и их классификация. Пример. - свойства функций, непрерывных в точке: локальная ограничен-ность, свойство сохранения знака, арифметические свойства, непрерывность сложной функции. - непрерывность элементарных функций в естественной области определения. - следствия из второго замечательного предела. Примеры. - эквивалентные функции. - замена функций эквивалентными при вычислении пределов. - о-символика (символы Ландау). - свойства функций непрерывных на отрезке: теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижимости точных граней; теоремы Коши о нулях и о промежуточном значении. - решение уравнений методом половинного деления. - теорема о неподвижной точке.
4	Производная функции одной переменной и ее приложения. Рассматриваемые вопросы: - мотивация введения производной как скорости изменения функ-ции и углового коэффициента касательной. - определение производной. - вычисление производной по определению. Примеры. - производные элементарных функций. - таблица производных. - геометрический смысл производной. - уравнения касательной и нормальной прямой. односторонние производные и касательные. Примеры. - понятие дифференцируемой функции и дифференциала. - теорема о связи производной и дифференцируемости.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- правила дифференцирования в терминах производных. - геометрический смысл дифференциала. - инвариантность формы 1-го дифференциала. - производная обратной функции. - производная функции заданной параметрически. - примеры функций экономического анализа: общие, средние и предельные издержки, доход. - эластичность функции. - свойства эластичности. Примеры. - производная и дифференциал высших порядков. - функциональная интерпретация знака и абсолютного значения второй производной (выпуклость и кривизна). - правила вычисления производных и дифференциалов n-го порядка: линейность, формула Лейбница. Примеры. - понятие точек локального экстремума. - теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции). теоремы Ролля и Лагранжа. - следствия из теоремы Лагранжа (формула конечных приращений, условия постоянства и линейности, о точках разрыва производной, о вычислении односторонних пределов, о доказательстве неравенств). - теорема Коши о среднем. - правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Примеры. - соотношения между ростами степенной, показательной и логарифмической функций. - многочлен Тейлора и его свойства. - формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. - формула Тейлора с остаточными членом в форме Пеано. - теорема единственности. - частные случаи: формула Маклорена, представление четных и нечетных функций с помощью формулы Маклорена. - примеры представлений основных элементарных функций формулой Маклорена. - применение формулы Тейлора к нахождению пределов и вычислению значений функций с заданной точностью. - понятие выпуклой (вогнутой) дифференцируемой функции. - свойства выпуклых функций. - критерий нестрогой выпуклости и достаточное условие строгой выпуклости дважды дифференцируемых функций. - неравенство Йенсена, соотношение между средними значениями. - - выпуклость надграфика, подграфика выпуклых (вогнутых) функций. - понятие точки перегиба и достаточное условие существования точек перегиба. - общий план исследования функции с помощью производных и построение эскиза графика. - понятие метрического пространства (м.п.). - неравенства Коши-Буняковского, Минковского, треугольника. метрическое пространство. - Евклидово пространство, понятие нормы элемента. - открытые и замкнутые шары в м.п. и в разных метриках. - предел последовательности в м.п. и в . - теорема о покоординатной сходимости последовательности в . - свойства сходящихся последовательностей в м.п. - фундаментальные последовательности и полнота м.п. - полнота пространства . - понятия внутренней и граничных точек множества, границы мно-жества, открытого и замкнутого множеств, ограниченного множе-ства, компактного множества, выпуклого и связного множеств. - свойства отрытых и замкнутых множеств. Примеры: бюджетное множество.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
5	Производная функции двух переменных и ее применение. Рассматриваемые вопросы: - понятие функции многих переменных (ФМП). - график функции и его визуализация для . Примеры ФМП: производственные функции (Кобба-Дугласа, Леонтьева), функции полезности. - понятия линий и поверхностей уровня. - предел ФМП, предел по направлению, повторные пределы функ-ции двух переменных. Примеры. - теорема о пределе функции двух переменных в полярных координатах. - непрерывность ФМП. - локальные свойства непрерывных ФМП: о сохранении знака, о промежуточном значении, непрерывность сложной функции. - свойства функций, непрерывных на компакте (теоремы Вейер-штрасса). - открытые и замкнутые множества, задаваемые системами уравне-ний и неравенств непрерывных ФМП. - бюджетное множество. - непрерывная функция полезности на бюджетном множестве. - понятие частных производных ФМП, предельный продукт производственной функции по фактору. - дифференцируемость ФМП. - необходимое условие дифференцируемости. - достаточное условие дифференцируемости ФМП. - дифференциал ФМП и его применение к приближенным вычислениям. - инвариантность формы 1-го дифференциала ФМП. - дифференцируемость сложной ФМП. Примеры. - понятие касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности уровня. - уравнения касательной плоскости и нормальной прямой. - геометрический смысл дифференциала. - производная ФМП по направлению. - градиент. - основные свойства градиента. - примеры применения градиента. - частные производные и дифференциалы высших порядков ФМП. -теорема о равенстве смешанных производных. - общий вид дифференциала m-го порядка ФМП n переменных. - дифференциал 2-го порядка как квадратичная форма. - формула Тейлора для ФМП. - теорема единственности представления ФМП формулой Тейлора. - необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой ФМП. - понятие стационарной точки ФМП. - понятие седловой точки ФМП. - достаточное условие существования локального экстремума ФМП. - примеры задач на локальный экстремум. - отображения из в , векторная функция. - непрерывное отображение. - дифференцируемое отображение. - понятие производной Фреше и матрицы Якоби дифференцируемого отображения. Примеры. - неявная функция, задаваемая одним уравнением. - теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной функции. - неявная векторная функция, задаваемая системой уравнений. - теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной векторной функции. Примеры. - вычисление матрицы Якоби отображения, заданного неявно. - понятие регулярного отображения.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- теорема о локальном существовании обратного отображения и матрице Якоби обратного отображения. - выделение главной части в обратном отображении. Примеры. - выпуклые и вогнутые ФМП: определения и свойства, критерий выпуклости (вогнутости) для непрерывно дифференцируемых функций, критерий выпуклости (вогнутости) для дважды непрерывно дифференцируемых функций. Примеры. - понятия функциональной зависимой и независимой систем функций. - условия функциональной зависимости и независимости системы числовых функций. Примеры. - задача на условный экстремум для функции многих переменных: - - определение точки условного экстремума функции многих переменных при наличии связей. - метод подстановки решения задачи на условный экстремум. - метод множителей Лагранжа. - понятие функции Лагранжа. - необходимое условие существования условного экстремума для дифференцируемой функции и дифференцируемых функций уравнений связи. - достаточное условие существования условного экстремума для дифференцируемой функции и дифференцируемых функций уравнений связи. - условия связи дифференциалов. - нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на компакте. - метод параметризации границ. - задача на безусловный и условный экстремум для ФМП с параметрами. - теоремы об огибающей. - некоторые приложения задачи на условный экстремум: аналитические свойства косвенной функции полезности, экономическая интерпретация множителей Лагранжа и понятие теневой цены, задача о максимизации прибыли.
6	Интегрирование функции одной переменной Рассматриваемые вопросы: - понятие первообразной функции. - совместные свойства функции и ее первообразной. - свойства неопределенного интеграла. - замена переменной (подстановка, внесение под знак дифференциала) в неопределенном интеграле. - интегрирование по частям. - некоторые сведения из теории многочленов и рациональных функций. - понятие простых дробей. - разложение правильной рациональной дроби в сумму простых дробей. - интегрирование рациональных дробей. - понятие рационализируемого интеграла. - интегрирование некоторых классов иррациональных и тригоно-метрических функций. - мотивация введения определенного интеграла: вычисление объема выполненной работы по производительности. - понятие определенного интеграла: разбиение, мелкость разбиения, выборка, интегральная сумма. - необходимое условие интегрируемости функции. - функция Дирихле. - суммы Дарбу и их свойства. - критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. понятие равномерной непрерывности функции на множестве. - модуль непрерывности. - теорема Кантора. Примеры. - интегрируемость непрерывных функций. - понятие множеству меры нуль по Лебегу. - критерий интегрируемости Лебега. Примеры. - свойства определенных интегралов.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- интеграл с переменным верхним пределом: определение и свой-ства. - общий вид первообразной непрерывной функции. - формула Ньютона-Лейбница. - замена переменной и интегрирование по частям для определенного интеграла. - интегралы от четной и нечетной функций по симметричному промежутку интегрирования. - интеграл от периодической функции. Примеры. - приложения интегрального исчисления в экономическом анализе и анализе данных. - понятие квадрируемой плоской фигуры и ее площади. - нахождение площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла. Примеры. - несобственные интегралы (НИ). Понятие НИ I-го и II-го родов. - НИ в смысле главного значения. Примеры. - этонные НИ. Свойства НИ. - критерии и признаки сходимости НИ от неотрицательных функ-ций: критерий ограниченности, признак сравнения, признак сравнения в предельной форме. - критерий Коши и его отрицание. - абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы. Примеры. - кратные интегралы. - понятие измеримого множества и его меры в (меры Жордана), свойства меры Жордана. -понятие множества меры нуль. -критерий измеримости множества.
7	Кратные интегралы. Рассматриваемые вопросы: -понятие кратного интеграла по измеримому множеству (разбиение множества, мелкость разбиения, выборка точек в разбиении, интегральная сумма). - критерии интегрируемости (в терминах сумм Дарбу и меры нуль по Лебегу). - свойства кратных интегралов. - вычисления кратных интегралов с помощью повторных в параллелепипеде (теорема Фубини). -вычисления кратных интегралов с помощью повторных по элементарным множествам. Примеры. - замена переменных в кратном интеграле: гладкие отображения, геометрический смысл модуля якобиана гладкого отображения формула замены переменных в кратном интеграле. Примеры. – - частные случаи замены переменных в кратном интеграле: переход к полярным координатам в двойном интеграле. Примеры. - приложения кратных интегралов. - собственные интегралы, зависящие от параметра. -непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость собственных интегралов, зависящих от параметра. - правило Лейбница и его обобщение. Примеры.
8	Числовые и функциональные ряды. Рассматриваемые вопросы: - числовые ряды: понятие числового ряда, его члена и частичной суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Примеры: модель приведенной стоимости бессрочной облигации. - необходимое условие сходимости и его отрицание. Примеры. – - свойства сходящихся числовых рядов. - критерий Коши сходимости числового ряда и его отрицание. - гармонический ряд и асимптотика его частичных сумм. - признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: крите-рий ограниченности, признаки сравнения, интегральный признак, признак д'Аламбера, радикальный признак Коши. Примеры. - знакопеременные ряды. - абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. - знакочередующиеся ряды. - теорема, признак и ряд Лейбница.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- абсолютно и условно сходящиеся ряды. - свойства абсолютно сходящихся рядов. - понятие функционального ряда. Области сходимости и абсолют-ной сходимости. - критерий равномерной сходимости функционального ряда. - признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Примеры. - аналитические свойства равномерно сходящегося на множестве функционального ряда: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Примеры. - степенные ряды. Теорема Абеля. - радиус сходимости. - формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Примеры. - равномерная сходимость степного ряда. - свойства степенных рядов: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Примеры. - вычисление радиуса сходимости разложения рациональной функции в степенной ряд.

4.2. Занятия семинарского типа.

Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Введение в математический анализэ В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: - понятие множеств, отношения и операций над ними. - числовые множества, множество простых чисел, множество алгебраических чисел. - связь числовых множеств с возможностью решения различных алгебраических уравнений в этих множествах. - числовая прямая, взаимно однозначное соответствие между множествами и числовой прямой. - отрезок, интервал, полуинтервал, бесконечные промежутки. - длина отрезка на прямой. - окрестность точки на прямой. - декартово произведение множеств. - понятия ограниченного сверху, снизу и просто ограниченного числового множества. - понятия верхней и нижней граней. - определение точных верхней и нижней граней, примеры. - теорема о существовании ТГ ограниченного множества (схема доказательства). - определение отображения (функции) и связанных понятий: об-ласть определения, множество значений, образ множества, прообраз множества. - типы отображений: инъективное, сюръективное, биективное, примеры. - операции над функциями: арифметические, композиция функций (сложная функция), примеры. - основные элементарные функции. - способы задания функций: аналитический, табличный, графиче-ский, описательный, неявный и др. - график функции и эскиз графика. - ограниченные и неограниченные функции. - ТВГ и ТНГ функции на множестве. - наибольшее (максимальное) и наименьшее (минимальное) значе-ния функции на множестве (экстремальные значения), примеры. - понятие обратной функции, свойства обратной функции, приме-ры. - четные и нечетные функции, примеры. - монотонные функции, периодические функции, примеры. - примеры функций экономического анализа.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
2	Понятие последовательности. Предел последовательности. В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: - последовательность. - способы задания последовательностей: явный, рекуррентный, описательный, графический. - примеры: формулы начисления процентов по вкладам: простые проценты, сложные проценты; непрерывные проценты. - понятие предела последовательности. - бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, последовательности с пределами . - свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. - ограниченность последовательности, имеющей предел. - единственность предельного значения. - арифметические свойства пределов. - свойства пределов, связанные с неравенствами. - свойства пределов, связанные с неравенствами, примеры (в том числе пределы последовательностей и). - монотонные и ограниченные последовательности. - теорема о существовании предела монотонной ограниченной по-следовательности. - примеры (в том числе пределы последовательностей , ; , ; , , . - предельный случай непрерывного начисления процентов на капитал. Предел . - понятие подпоследовательности и частичных пределов. - верхний и нижний пределы последовательности. Примеры. - понятие последовательности вложенных отрезков и стягивающихся отрезков. - теорем об отделимости числовых множеств (аксиома непрерывности). - лемма Кантора о вложенных отрезках. - теорема (Больцано Вейерштрасса) о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности. - понятие фундаментальной последовательности. - свойства фундаментальной последовательности. - критерий Коши сходимости последовательности. - критерий расходимости последовательности. - пример (расходимость последовательности гармонических чи-сел).
3	Предел функции одной переменной. В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: - пределы монотонной функции. - замена переменной при вычислении пределов. Примеры. - первый замечательный предел. - следствия из первого замечательного предела. - эквивалентные функции. - второй замечательный предел. - асимптоты функции: вертикальные и наклонные асимптоты. - теорема о существовании наклонной асимптоты. - понятие непрерывной функции. - непрерывность основных элементарных функций. - односторонняя непрерывность. - понятие предела функции по Гейне и Коши. Примеры. - односторонние пределы. - пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Примеры. - свойства пределов функции: локальные, связанные с неравенствами. - бесконечно малые функции и их свойства. - арифметические свойства пределов функции. - точки разрыва и их классификация. Пример. - свойства функций, непрерывных в точке: локальная ограничен-ность, свойство сохранения знака,

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	арифметические свойства, непрерывность сложной функции. - непрерывность элементарных функций в естественной области определения. - следствия из второго замечательного предела. Примеры. - эквивалентные функции. - замена функций эквивалентными при вычислении пределов. - о-символика (символы Ландау). - свойства функций непрерывных на отрезке: теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижимости точных граней; теоремы Коши о нулях и о промежуточном значении. - решение уравнений методом половинного деления. - теорема о неподвижной точке.
4	Производная функции одной переменной и ее применение. В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: - мотивация введения производной как скорости изменения функ-ции и углового коэффициента касательной. - определение производной. - вычисление производной по определению. Примеры. - производные элементарных функций. - таблица производных. - геометрический смысл производной. - уравнения касательной и нормальной прямой. - односторонние производные и касательные. Примеры. - понятие дифференцируемой функции и дифференциала. - теорема о связи производной и дифференцируемости. - правила дифференцирования в терминах производных. - геометрический смысл дифференциала. - инвариантность формы 1-го дифференциала. - производная обратной функции. - производная функции заданной параметрически. - примеры функций экономического анализа: общие, средние и предельные издержки, доход. - эластичность функции. - свойства эластичности. Примеры. - производная и дифференциал высших порядков. - функциональная интерпретация знака и абсолютного значения второй производной (выпуклость и кривизна). - правила вычисления производных и дифференциалов n-го порядка: линейность, формула Лейбница. Примеры. - понятие точек локального экстремума. - теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции). - теоремы Ролля и Лагранжа. - следствия из теоремы Лагранжа (формула конечных приращений, условия постоянства и линейности, о точках разрыва производной, о вычислении односторонних пределов, о доказательстве неравенств). - теорема Коши о среднем. - правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Примеры. - соотношения между ростами степенной, показательной и логарифмической функций. - многочлен Тейлора и его свойства. - формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. - формула Тейлора с остаточными членом в форме Пеано. - теорема единственности. - частные случаи: формула Маклорена, представление четных и нечетных функций с помощью формулы Маклорена.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	- примеры представлений основных элементарных функций формулой Маклорена. - применение формулы Тейлора к нахождению пределов и вычислению значений функций с заданной точностью. - понятие выпуклой (вогнутой) дифференцируемой функции. - свойства выпуклых функций. - критерий нестрогой выпуклости и достаточное условие строгой выпуклости дважды дифференцируемых функций. - неравенство Йенсена, соотношение между средними значениями. - - выпуклость надграфика, подграфика выпуклых (вогнутых) функций. - понятие точки перегиба и достаточное условие существования точек перегиба. - общий план исследования функции с помощью производных и построение эскиза графика. - понятие метрического пространства (м.п.). - неравенства Коши-Буняковского, Минковского, треугольника. метрическое пространство. - Евклидово пространство, понятие нормы элемента. - открытые и замкнутые шары в м.п. и в разных метриках. - предел последовательности в м.п. и в . - теорема о покоординатной сходимости последовательности в . - свойства сходящихся последовательностей в м.п. - фундаментальные последовательности и полнота м.п. - полнота пространства . - понятия внутренней и граничных точек множества, границы мно-жества, открытого и замкнутого множеств, ограниченного множе-ства, компактного множества, выпуклого и связного множеств. - свойства отрытых и замкнутых множеств. Примеры: бюджетное множество.
5	Производная функции двух переменных и ее применение. В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: - понятие функции многих переменных (ФМП). - график функции и его визуализация для . Примеры ФМП: производственные функции (Кобба-Дугласа, Леонтьева), функции полезности. - понятия линий и поверхностей уровня. - предел ФМП, предел по направлению, повторные пределы функ-ции двух переменных. Примеры. - теорема о пределе функции двух переменных в полярных координатах. - непрерывность ФМП. - локальные свойства непрерывных ФМП: о сохранении знака, о промежуточном значении, непрерывность сложной функции. - свойства функций, непрерывных на компакте (теоремы Вейер-штрасса). - открытые и замкнутые множества, задаваемые системами уравне-ний и неравенств непрерывных ФМП. - бюджетное множество. - непрерывная функция полезности на бюджетном множестве. - понятие частных производных ФМП, предельный продукт производственной функции по фактору. - дифференцируемость ФМП. - необходимое условие дифференцируемости. - достаточное условие дифференцируемости ФМП. - дифференциал ФМП и его применение к приближенным вычислениям. - инвариантность формы 1-го дифференциала ФМП. - дифференцируемость сложной ФМП. Примеры. - понятие касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности уровня. - уравнения касательной плоскости и нормальной прямой. - геометрический смысл дифференциала. - производная ФМП по направлению. - градиент. - основные свойства градиента.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	- примеры применения градиента. - частные производные и дифференциалы высших порядков ФМП. - теорема о равенстве смешанных производных. - общий вид дифференциала m-го порядка ФМП n переменных. - дифференциал 2-го порядка как квадратичная форма. - формула Тейлора для ФМП. - теорема единственности представления ФМП формулой Тейлора. - необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой ФМП. - понятие стационарной точки ФМП. - понятие седловой точки ФМП. - достаточное условие существования локального экстремума ФМП. - примеры задач на локальный экстремум. - отображения из в , векторная функция. - непрерывное отображение. - дифференцируемое отображение. - понятие производной Фреше и матрицы Якоби дифференцируемого отображения. Примеры. - неявная функция, задаваемая одним уравнением. - теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной функции. - неявная векторная функция, задаваемая системой уравнений. - теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной векторной функции. Примеры. - вычисление матрицы Якоби отображения, заданного неявно. - понятие регулярного отображения. - теорема о локальном существовании обратного отображения и матрице Якоби обратного отображения. - выделение главной части в обратном отображении. Примеры. - выпуклые и вогнутые ФМП: определения и свойства, критерий выпуклости (вогнутости) для непрерывно дифференцируемых функций, критерий выпуклости (вогнутости) для дважды непрерывно дифференцируемых функций. Примеры. понятия функциональной зависимой и независимой систем функ-ций. - условия функциональной зависимости и независимости системы числовых функций. Примеры. - задача на условный экстремум для функции многих переменных: - - определение точки условного экстремума функции многих переменных при наличии связей. - метод подстановки решения задачи на условный экстремум. - метод множителей Лагранжа. - понятие функции Лагранжа. - необходимое условие существования условного экстремума для дифференцируемой функции и дифференцируемых функций урав-нений связи. - достаточное условие существования условного экстремума для дифференцируемой функции и дифференцируемых функций урав-нений связи. - условия связи дифференциалов. - нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на компакте. - метод параметризации границ. - задача на безусловный и условный экстремум для ФМП с параметрами. - теоремы об огибающей. - некоторые приложения задачи на условный экстремум: аналитические свойства косвенной функции полезности, экономическая интерпретация множителей Лагранжа и понятие теневой цены, задача о максимизации прибыли.
6	Интегрирование функции одной переменной. В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: - понятие первообразной функции. - совместные свойства функции и ее первообразной.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	- свойства неопределенного интеграла. - замена переменной (подстановка, внесение под знак дифференциала) в неопределенном интеграле. - интегрирование по частям. некоторые сведения из теории многочленов и рациональных функций. - понятие простых дробей. - разложение правильной рациональной дроби в сумму простых дробей. - интегрирование рациональных дробей. - понятие рационализируемого интеграла. - интегрирование некоторых классов иррациональных и тригоно-метрических функций. - мотивация введения определенного интеграла: вычисление объема выполненной работы по производительности. - понятие определенного интеграла: разбиение, мелкость разбиения, выборка, интегральная сумма. - необходимое условие интегрируемости функции. - функция Дирихле. - суммы Дарбу и их свойства. - критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. - понятие равномерной непрерывности функции на множестве. - модуль непрерывности. - теорема Кантора. Примеры. - интегрируемость непрерывных функций. - понятие множеству меры нуль по Лебегу. - критерий интегрируемости Лебега. Примеры. - свойства определенных интегралов. - интеграл с переменным верхним пределом: определение и свой-ства. - общий вид первообразной непрерывной функции. - формула Ньютона-Лейбница. - замена переменной и интегрирование по частям для определенного интеграла. - интегралы от четной и нечетной функций по симметричному промежутку интегрирования. - интеграл от периодической функции. Примеры. - приложения интегрального исчисления в экономическом анализе и анализе данных. - понятие квадрируемой плоской фигуры и ее площади. - нахождение площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла. Примеры. - несобственные интегралы (НИ). Понятие НИ I-го и II-го родов. - НИ в смысле главного значения. Примеры. - этонные НИ. Свойства НИ. - критерии и признаки сходимости НИ от неотрицательных функ-ций: критерий ограниченности, признак сравнения, признак сравнения в предельной форме. - критерий Коши и его отрицание. - абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы. Примеры. - кратные интегралы. - понятие измеримого множества и его меры в (меры Жордана), свойства меры Жордана. -понятие множества меры нуль. -критерий измеримости множества. В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: -понятие кратного интеграла по измеримому множеству (разбиение множества, мелкость разбиения, выборка точек в разбиении, интегральная сумма). - критерии интегрируемости (в терминах сумм Дарбу и меры нуль по Лебегу). - свойства кратных интегралов. - вычисления кратных интегралов с помощью повторных в параллелепипеде (теорема Фубини). -вычисления кратных интегралов с помощью повторных по элементарным множествам. Примеры. - замена переменных в кратном интеграле: гладкие отображения, геометрический смысл модуля якобиана гладкого отображения.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
7	Кратные интегралы. В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: - формула замены переменных в кратном интеграле. Примеры. – - частные случаи замены переменных в кратном интеграле: переход к полярным координатам в двойном интеграле. Примеры. - приложения кратных интегралов. - собственные интегралы, зависящие от параметра. -непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость собственных интегралов, зависящих от параметра. - правило Лейбница и его обобщение. Примеры.
8	Числовые и функциональные ряды. В результате работы студент будет ознакомлен со следующими понятиями: - числовые ряды: понятие числового ряда, его члена и частичной суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Примеры: модель приведенной стоимости бессрочной облигации. - необходимое условие сходимости и его отрицание. Примеры. – - свойства сходящихся числовых рядов. - критерий Коши сходимости числового ряда и его отрицание. - гармонический ряд и асимптотика его частичных сумм. - признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: крите-рий ограниченности, признаки сравнения, интегральный признак, признак д'Аламбера, радикальный признак Коши. Примеры. - знакопеременные ряды. - абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. - знакочередующиеся ряды. - теорема, признак и ряд Лейбница. - абсолютно и условно сходящиеся ряды. - свойства абсолютно сходящихся рядов. - понятие функционального ряда. Области сходимости и абсолют-ной сходимости. - критерий равномерной сходимости функционального ряда. - признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Примеры. - аналитические свойства равномерно сходящегося на множестве функционального ряда: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Примеры. - степенные ряды. Теорема Абеля. - радиус сходимости. - формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Примеры. - равномерная сходимость степного ряда. - свойства степенных рядов: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Примеры. - вычисление радиуса сходимости разложения рациональной функции в степенной ряд. - ряды Тейлора. - вопрос о представлении функции своим рядом Тейлора. - контрпример. - Условие представления функции своим рядом Тейлора. - достаточное условие представления функции своим рядом Тейлора. - представление некоторых элементарных функций своим рядом Тейлора. - применение стандартных разложений к представлению функций степенными рядами, вычислению интегралов с заданной точностью и т. д.

4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Самостоятельное изучение темы: численное решение уравнений методом Ньютона (касательных). Метод секущих.
2	Самостоятельное изучение темы: исследование функций с помощью производных на монотонность, на существование точек локального экстремума (необходимое условие, достаточное условие в терминах изменения знака производной, достаточной условие в терминах старших производных). Нахождение наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке.
3	Самостоятельное изучение темы: приближенные методы решения нелинейных систем: метод Ньютона. Примеры.
4	Самостоятельное изучение темы: приближенное нахождение стационарных точек ФМП методом Ньютона. Примеры.
5	Самостоятельное изучение темы: интегрирование рационально-тригонометрических функций. Частные случаи интегрирования рационально-тригонометрических функций.
6	Самостоятельное изучение темы: понятие кубируемого тела. Объе-мы тел вращения.
7	Работа с лекционным материалом
8	Выполнение текущих домашних заданий.
9	Выполнение оцениваемого индивидуального домашнего задания.
10	Подготовка к контрольным работам.
11	Подготовка к промежуточной аттестации.
12	Подготовка к промежуточной аттестации.
13	Подготовка к текущему контролю.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Конспект лекций по высшей математике: полный курс Д.Т. Письменный Книга Айрис-пресс , 2014	ИТБ УЛУПС (Абонемент ЮИ)
2	Пределы и числовые ряды Л.Г. Халилова Учебное пособие 2020	http://ml.miit-ief.ru/

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (www.elibrary.ru)

Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (http://window.edu.ru)), (MSTeams)

Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (http://library.miit.ru)

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

Программное обеспечение.

Программное обеспечение не требуется.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Компьютеры

Интерактивные доски

Проекторы

Экраны

9. Форма промежуточной аттестации:

Экзамен в 1, 2 семестрах.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, доцент, к.н. кафедры
«Высшая математика» Л.Г. Халилова

Согласовано:

Заместитель директора академии Д.В. Паринов

Заведующий кафедрой ВМ О.А. Платонова

Председатель учебно-методической
комиссии Д.В. Паринов