Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

ИрГУПС - г.Иркутск

(Адрес площадки: 664074, Иркутская область, г Иркутск, ул Чернышевского, д 15)

Титульный лист работы

Бирюков Максим Олегович (дата рождения 09.06.1998)
ученик 11 класса, ж.д. школа НОУ "Школа-интернат №25 ОАО "РЖД" (г. Вихоревка)
регистрация № **45634**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Бирюков)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Хатанаев А.В)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

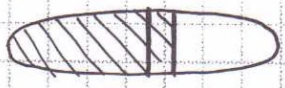
ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск В-3

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	±	±	−	0	0	0	3

1.) Первый сын:



Второй сын:



Третий сын:



Т.к. в условии сказано, что третьему сыну отец дал „половину нового остатка и ещё пол-апельсина", а после этого апельсины закончились, то значит, что пол-апельсина, добавленные в конце, и есть половина последнего остатка, так как осталась целая половина этого последнего остатка.

⇓

третий сын: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ апельсин.

второй сын: $1+\frac{1}{2}=1{,}5$ - половина первого остатка.

$1{,}5+\frac{1}{2}=2$ апельсина.

первый ~~третий~~ сын: $3+\frac{1}{2}=3{,}5$ - половина всех апельсинов, $3{,}5+\frac{1}{2}=4$ апельсина.

Всего апельсинов $=4+2+1=7$.

Ответ: всего: 7; 1: 4; 2: 2; 3: 1.

3.) $x=\ln 1{,}2$; $y=\frac{1}{6}$,

$e\approx 2{,}7$; $2{,}7^{x}=1{,}2$; $2{,}7=1{,}2^{\frac{1}{x}}$;

$1{,}2^{5}=2{,}48832$; $1{,}2^{6}=2{,}985984>e \Rightarrow x>\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5,\ldots}\right)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$X \approx \frac{1}{5,\ldots}$, $y = \frac{1}{6}$, $X > y$.

Ответ: $\ln 1{,}2 > \frac{1}{6}$.

2) $\begin{cases} mn + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases}$ одно из них чётное, другое нет. либо оба чётные, либо оба нечётные.

Ч - чётное; Н - нечётное.

I.) $\begin{cases} m_{Ч}\,n_{Ч} = Ч \\ k_{Н}\,l_{Н} = Н \\ n_{Ч}\,k_{Н} = Ч \\ m_{Ч}\,l_{Н} = Ч \end{cases}$

$\begin{cases} 4\cdot 2 + 5\cdot 1 = 13 \\ 2\cdot 5 - 4\cdot 1 = 6 \end{cases}$ (+) $\begin{cases} 2\cdot 4 + 1\cdot 5 = 13 \\ 4\cdot 1 - 5\cdot 2 = -6 \end{cases}$ (−)

$\begin{cases} 6\cdot 2 + 1\cdot 1 = 13 \\ 2\cdot 1 - 6\cdot 1 = -4 \end{cases}$ (−) $\begin{cases} 2\cdot 6 + 1\cdot 1 = 13 \\ 6\cdot 1 - 2\cdot 1 = 4 \end{cases}$ (−)

II $\begin{cases} m_{Н}\,n_{Н} = Ч \\ k_{Н}\,l_{Н} = Н \\ n_{Н}\,k_{Н} = Н \\ m_{Н}\,l_{Н} = Н \end{cases}$ (−)

$\begin{cases} 2\cdot 2 + 3\cdot 3 = 13 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 3 = 0 \end{cases}$ (−)

III $\begin{cases} m_{Н}\,n_{Н} = Н \\ k_{Н}\,l_{Н} = Ч \\ n_{Н}\,k_{Н} = Н \\ m_{Н}\,l_{Н} = Н \end{cases}$ (−)

IV $\begin{cases} m_{Н}\,n_{Н} = Н \\ k_{Ч}\,l_{Ч} = Ч \\ n_{Н}\,k_{Ч} = Ч \\ m_{Н}\,l_{Ч} = Ч \end{cases}$

$\begin{cases} 3\cdot 3 + 2\cdot 2 = 13 \\ 3\cdot 2 - 3\cdot 2 = 0 \end{cases}$ (−) $\begin{cases} 1\cdot 5 + 2\cdot 4 = 13 \\ 5\cdot 2 - 1\cdot 4 = 6 \end{cases}$ (+)

$\begin{cases} 5\cdot 1 + 4\cdot 2 = 13 \\ 1\cdot 4 - 5\cdot 2 = -6 \end{cases}$ (−)

Ответ: 1) $m=4, n=2, k=5, l=1$; 2) $m=1, n=5, k=2, l=4$. (+)

Место для скрепки

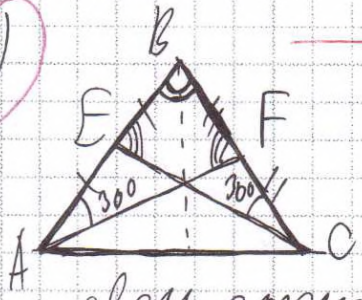
ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

5.) Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

4.)



$\triangle ABF \sim \triangle CBE$ по двум углам. ⇒ записать отношение

Они смогут разделить свои стороны, другими сторонами по ровну одновременно только, если они равны, а т.к. эти стороны лежат напротив 30° и в 2 раза меньше стороны прилежащей к 30°, то следует, что треугольники прямоугольные, а углы противолежащие гипотенузам (BC и AB) $= 90° \Rightarrow \angle ABC = 60° \Rightarrow$ $\angle FAC + \angle ECA = 180° - 60° - 60° = 60°$, а т.к. они равны $\Rightarrow$ $BAC = BCA = 60° \Rightarrow$ $\triangle ABC$ - равносторонний.

нет полного обоснования.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

ИрГУПС - г.Иркутск

(Адрес площадки: 664074, Иркутская область, г Иркутск, ул Чернышевского, д 15)

Титульный лист работы

Гаевой Владислав Александрович (дата рождения 03.07.1998)
ученик 11 класса, средняя школа "Школа-интернат №23 ОАО "РЖД" (Слюдянка)
регистрация № **46008**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 4 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Гаевой)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	0	±	0	0	0	+	0	3

Вариант 4.

(1) X - площадь поля
y - час начала вспашки
$v = 8$ га/час
$v_1 = 6$ га/час
$v_2 = 5$ га/час

$\Rightarrow (12-y)\cdot 8 = X$

* Изначально планировалось вспахать поле к 12 часам со средней скоростью v. $\Rightarrow$

$\Rightarrow t \cdot v = X$; $v = 8$ га/час

$t = (12-y)$ часов

* Рассмотрим теперь случай, где все пошло не по плану: вместо 12-ти работа закончилась только в 16 часов, а скорость вспахивания была неравномерна.

$t_{общ} = t_1 + t_2 + t_3$, t_1 - время вспахивания $\frac{1}{3}$ поля до поломки, т.е с прежней скоростью

$\Rightarrow t_1 = \frac{X}{3\cdot v} = \frac{X}{3\cdot 8}$

t_2 - время вспахивания $\frac{1}{4}$ поля со скоростью v_1:

$\Rightarrow t_2 = \frac{X}{4\cdot v_1} = \frac{X}{4\cdot 6}$

t_3 - время вспахивания оставшейся части поля со скоростью v_2:

$t_3 = \frac{S}{v_2}$, $S = X - \frac{X}{4} - \frac{X}{3} = \frac{5X}{12} \Rightarrow t_3 = \frac{5X}{12\cdot v_2} = \frac{5X}{12\cdot 8} = \frac{X}{12}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{общ} = \frac{X}{3\cdot 8} + \frac{X}{4\cdot 6} + \frac{X}{12} = \frac{X}{24} + \frac{X}{24} + \frac{X}{12} = \frac{X}{12} + \frac{X}{12} = \frac{X}{6} \\ t_{общ} = 16 - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{X}{6} = 16 - y \text{ (на самом деле)} \\ (12-y)\cdot 8 = X \text{ (по плану)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 - \frac{X}{8} \\ \frac{X}{6} = \frac{16}{8} - y \end{cases}$$

$\frac{X}{6} = 16 - 12 + \frac{X}{8} \Rightarrow \frac{X}{6} - \frac{X}{8} = 4 \quad \frac{X}{24} = 4 \Rightarrow X = 96 \Rightarrow y = 12 - \frac{96}{8} = 0$ г.

Ответ: Площадь поля равна 96 га, а вспахивать его начали в 12 часов ночи (т.е 00:00).

Регистрация №46008

Страница 0 1 из 0 4

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

③ $\ln 1{,}25$; $0{,}2$ * Прологарифмируем число $0{,}2$:

$0{,}2 = \ln e^{0{,}2} = \ln e^{\frac{1}{5}} = \ln \sqrt[5]{e}$

теперь получаем 2 натуральных логарифма

$\ln 1{,}25$ и $\ln \sqrt[5]{e}$; сравним подлогарифмические выражения:

$1{,}25$ и $\sqrt[5]{e}$, для этого возведем их оба в 5-ю степень:

$(1{,}25)^5$ и e

$(1{,}25)^5$:

$1{,}25 \times 1{,}25 = 1{,}5625$

$1{,}5625 \times 1{,}5625 = 2{,}44140625$

$2{,}44140625 \approx 2{,}4 \cdot 1{,}25$

$2{,}4 \cdot 1{,}25$; $e \approx 2{,}8$? $\Rightarrow 2{,}4 \cdot 1{,}25 < 3$

$3 > 2{,}8 \Rightarrow (1{,}25)^5 > e \Rightarrow 1{,}25 > \sqrt[5]{e}$

* Основание логарифма $e > 1$ $\Rightarrow \ln 1{,}25 > 0{,}2$

* $1{,}25 > \sqrt[5]{e}$

Ответ: $\ln 1{,}25 > 0{,}2$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(7) $\left|y-\frac{x^2}{2}\right|+\left|y+\frac{x^2}{2}\right|\le 2-x$

$(y-\frac{x^2}{2})$ $-$ $-$ $+$ $\to y$; $-\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^2}{2}$

$(y+\frac{x^2}{2})$ $-$ $+$ $+$ $\to y$; $-\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^2}{2}$

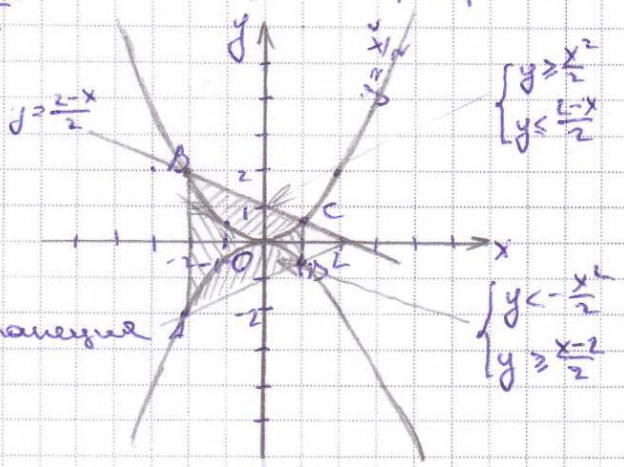
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\ge\frac{x^2}{2} \\ y-\frac{x^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}\le 2-x\end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} -\frac{x^2}{2}\le y<\frac{x^2}{2} \\ -y+\frac{x^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}\le 2-x\end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} y<-\frac{x^2}{2} \\ -y+\frac{x^2}{2}-y-\frac{x^2}{2}\le 2-x\end{cases} \Rightarrow\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\ge\frac{x^2}{2} \\ y\le\frac{2-x}{2}\end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{x^2}{2}\le y<\frac{x^2}{2} \\ x^2+x-2\le 0\end{cases} \\ \begin{cases} y<-\frac{x^2}{2} \\ y\ge\frac{x-2}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

* Задаем функцию для каждого неравенства.

$f(x)=\frac{x^2}{2}$; $f(x)=\frac{2-x}{2}$

$f(x)=-\frac{x^2}{2}$; $f(x)=\frac{x-2}{2}$

* Строим график.



$x^2+x-2\le 0$

$(x-1)(x+2)\le 0$

$\Rightarrow x\in[-2;1] \Rightarrow \begin{cases} -\frac{x^2}{2}\le y<\frac{x^2}{2} \\ x\in[-2;1]\end{cases}$

* Полученная фигура - трапеция ~~...~~ две стороны //

* Пусть трапеция = ABCD

$h=1-(-2)=3$;

т. B - т. A) т $B\in y=\frac{x^2}{2}$; $x=-2 \Rightarrow y=2$

т $A\in y=-\frac{x^2}{2}$; $x=-2$; $y=-2$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB=2-(-2)=4$

т $C\in y=\frac{x^2}{2}$; $x=1$; $\Rightarrow y=0{,}5$

т. $D\in y=\frac{x^2}{2}$; $x=1 \Rightarrow y=0{,}5$ $\Rightarrow CD=0{,}5-(-0{,}5)=1$.

* $S_{трап}=\frac{AB+CD}{2}\cdot h=\frac{4+1}{2}\cdot 3=2{,}5\cdot 3=7{,}5$

Ответ: 7,5 (+)

Регистрация №46008

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(8) $\sqrt{3b^2-6x+x^2}+\sqrt{3b^2+6x+x^2}=6a$

I При $a<0$ – решений нет, т.к. $\begin{cases}\sqrt{3b^2-6x+x^2}\geq 0\\ \sqrt{3b^2+6x+x^2}\geq 0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3b^2-6x+x^2}+\sqrt{3b^2+6x+x^2}\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6a>0 \Rightarrow a\geq 0$

II При $a=0$: $\sqrt{3b^2-6x+x^2}+\sqrt{3b^2+6x+x^2}=0$

$\Leftrightarrow 3b^2-6x+x^2=3b^2+6x+x^2$

$12x=0 \Rightarrow \underline{x=0}$, при $b=R$

$\Rightarrow$ При $a=0$ существуют также $b=R$, при которых ур-е имеет один корень.

Регистрация №46008

Страница 04 из 04

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

ИрГУПС - г.Иркутск

(Адрес площадки: 664074, Иркутская область, г Иркутск, ул Чернышевского, д 15)

Титульный лист работы

Кондаков Владислав Асхатович (дата рождения 25.03.1998)
ученик 11 класса, лицей МБОУ Лицей №3 г. Иркутска (Город Иркутск)
регистрация № **45446**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Кондаков)

Подпись дежурного по аудитории _____ (М.С. Лагунова)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	−	±	0	−	0	7	3

(1) x - всего апельсинов.

1 сын получил: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2 сын получил: $\left(x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) : 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

3 сын получил: $\left(x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$

Т.к. у отца апельсинов не осталось, то он отдал всё $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} = x$

$\frac{1}{8}x = \frac{7}{8} \Rightarrow x = 7$

Ответ: было 7 апельсинов. 1 сын получил 4 апельсина. 2-ой сын получил 2 апельсина и 3-ий сын получил 1 апельсин.

(2)
$$\begin{cases} mn + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases}$$

$mn + kl = $ нечет. $\Rightarrow$ одно слаг. чётное, другое - нечётное.

В силу симметрии предположим, что mn - чётное, тогда одно из m и n - чётное. Пусть m - чётн., kl - неч. $\Rightarrow$ k - неч. и и l - неч. $\Rightarrow$ n - чётн. (н. неч. - четн. = чётн.). Тогда возможные варианты для m и n:

1) $2 = m = n$

2) $m = 2$; $n = 4$

3) $m = 4$; $n = 2$

4) $m = 2$; $n = 6$

5) $m = 6$; $n = 2$

1) $\begin{cases} 4 + kl = 13 \\ 2k - 2l = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kl = 9 \\ k - l = 3 \end{cases}$ - нет целых корней

2) $\begin{cases} 8 + kl = 13 \\ 4k - 2l = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kl = 5 \\ 2k = 3 + l \end{cases}$ - нет целых корней

3) $\begin{cases} 8 + kl = 13 \\ 2k - 4l = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kl = 5 \\ k = 3 + 2l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ l = 1 \end{cases}$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4) $\begin{cases} 12+kl=13 \\ 2k-6l=6 \end{cases}$ - нет целых корней.

5) $\begin{cases} 12+kl=13 \\ 6k-2l=6 \end{cases}$ - нет целых корней

То же самое, когда k и l - четные. => ещё одно решение:

$k=2;\ l=4;\ m=1;\ n=5$.

+

Ответ: 1) $m=4;\ n=2;\ k=5;\ l=1$; 2) $k=2;\ l=4;\ m=1;\ n=5$.

(3) $\ln 1{,}2 \quad \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6} = \ln e^{\frac{1}{6}} = \ln \sqrt[6]{e}$

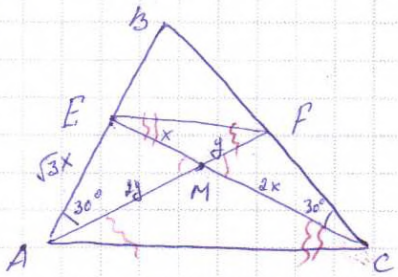
?

т.к. основания логарифмов >1, то надо сравнить $1{,}2$ и $\sqrt[6]{e}$.

Возведем в 6-ую степень: $2{,}985984$ и e.

Ответ: ?

(4)



$\angle EAF = \angle ECF \Rightarrow AEFC$ - вписанный четырехугольник. $\Rightarrow \triangle CMF \sim \triangle AME$:

$\frac{CM}{MA} = \frac{MF}{ME}$

не доказано, но верно! точнее ревью!

M - точка пересеч. медиан, она делит их в отношении 2:1, считая от вершины $\Rightarrow AM = 2MF = 2y$

$MC = 2EM = 2x \Rightarrow \frac{2x}{2y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x = y \Rightarrow CE = AF \Rightarrow AB = BC$, т.е.

$\triangle ABC$ - равносторонн. и $AM = 2y = 2x$.

в $\triangle AEM$: $x^2 = a^2 + 4x^2 - 2a \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 0 = a^2 + 3x^2 - 2\sqrt{3}ax$

$(a-\sqrt{3}x)^2 = 0 \quad a = \sqrt{3}x$, где $a = AE$.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Найдём $\angle AEM$:

$4x^2 = x^2 + 3x^2 - 2\sqrt{3}x \cdot x \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ = \angle AEM \Rightarrow$

$\Rightarrow CE$ - медиана, высота $\Rightarrow BC = AC$ ($\triangle ACB$ - равнобедр.).

$\left.\begin{matrix} BC = AC \\ AB = BC. \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = BC = AC \Rightarrow \triangle ABC$ - равносторонний, или правильный.

(8) $P(x) = \sqrt{x^2+4x+4a^2} + \sqrt{x^2-4x+4a^2} = 4b$

$P(-x) = \sqrt{(-x)^2+4(-x)+4a^2} + \sqrt{(-x)^2-4(-x)+4a^2} = 4b$

$\sqrt{x^2-4x+4a^2} + \sqrt{x^2+4x+4a^2} = 4b$

$\Downarrow$

$P(x) = P(-x) \Rightarrow$ функция чётная

Значит, если x - корень, то и $-x$ тоже корень уравнения. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственное решение, только когда $x = 0$.

Подставим $x = 0$; $\sqrt{4a^2} + \sqrt{4a^2} = 4b$

$4\sqrt{a^2} = 4b$. $b \geq 0$

$a^2 = b^2 \Rightarrow b = \pm a$. $\Rightarrow$ проверить получ. значение.

$a = \pm b$

$\Downarrow$ а в ур. замена b

$\sqrt{x^2+4x+4b^2} + \sqrt{x^2-4x+4b^2} = 4b$

$+4-4$

$\sqrt{(x+2)^2+4(b^2-1)} + \sqrt{(x-2)^2+4(b^2-1)} = 4b$

$b^2 - 1 \geq 0$

Ответ: $b = \pm a$.

(6) $\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y) = 15xy \\ (x^4+y^4)(x^2+y^2) = 85x^2y^2 \end{cases}$

$17xy(x^2+y^2)(x+y) = 3(x^4+y^4)(x^2+y^2)$

$(x^2+y^2)(3x^4+3y^4-17x^2y-17xy^2) = 0$.

1) $x^2+y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$

2) $3x^4+3y^4-17x^2y-17xy^2 = 0$.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

ИрГУПС - г.Иркутск

(Адрес площадки: 664074, Иркутская область, г Иркутск, ул Чернышевского, д 15)

Титульный лист работы

Лойко Анна Андреевна (дата рождения 13.07.1998)
ученица 11 класса, лицей МАОУ "Ангарский лицей №2" имени М.К.Янгеля (Ангарск)
регистрация № **48023**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 6 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Лойко)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1 2 3 4 5 6 7 8 Σ
± ± ∓ ∓ 7 0 ∓ ∓ 3

Вариант 3

(1.) Пусть изначально апельсинов было n штук.

I первому сыну досталось $\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)$

II Второму досталось $\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}\right)$

III третьему сыну досталось $\left(n-\left(\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}$

$+\frac{1}{2}$

$=\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}n-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{8}n-\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{1}{8}n+\frac{1}{8}$

В сумме эти три числа дают n:

$\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}n+\frac{1}{8}=n \quad \frac{7}{8}=n\frac{1}{8} \quad n=7$

Ответ: 7 апельсинов А сколько каждому?

(2.) 1) пусть $mn=1$, тогда $k\cdot l=12$

$\begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ k=\frac{12}{l} \end{cases}$ Подставим это значение во (2) уравнение: $1\cdot\frac{12}{l}-1\cdot l=6$

$12-l^2=6l$

$\sqrt{D}$ - не целое $-l^2-6l+12=0$

корень из D не вычисляется $D=36+4\cdot12 \quad D=84$

∅

2) Пусть $mn=2$, тогда $k\cdot l=11$

$\begin{cases} k=1 \\ l=11 \\ m=\frac{2}{n} \end{cases}$ $n\cdot1-\frac{2}{n}\cdot11=6$

$n^2-22=6n \quad D=36+4\cdot22=124$

$n^2-6n-22=0 \quad \sqrt{D}$ - не целое ∅

3) $mn=3 \quad k\cdot l=10$ $\begin{cases} m=1 \\ n=3 \\ k=\frac{10}{l} \end{cases}$ $3\cdot\frac{10}{l}-l=6$

$30-l^2=6l$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\ell^2+6\ell-30=0$ $\sqrt{D}$ - не целое $\varnothing$

$D=36+4\cdot30=156$

4) $mn=4$ $k\ell=9$

$\begin{cases} m=1 \\ n=4 \\ k=\frac{9}{\ell} \end{cases}$ или $\begin{cases} m=2 \\ n=2 \\ k=\frac{9}{\ell} \end{cases}$ $\begin{cases} 4\cdot\frac{9}{\ell}-\ell=6 \\ 2\cdot\frac{9}{\ell}-\ell\cdot2=6 \end{cases}$ $\begin{cases} 36-\ell^2=6\ell \\ 18-2\ell^2=6\ell \end{cases}$

$\begin{cases} \ell^2+6\ell-36=0 \\ 2\ell^2+6\ell-18=0 \end{cases}$ $D=36+4\cdot36$ $\varnothing$ $D=36+4\cdot2\cdot18$ $\varnothing$

5) $mn=5 \Rightarrow k\ell=8$

$\begin{cases} m=1 \\ n=5 \\ k=\frac{8}{\ell} \end{cases}$ $5\cdot\frac{8}{\ell}-\ell=6$

$40-\ell^2=6\ell$ $\ell^2+6\ell-40$

$D=36+4\cdot40=196=14^2$

$\ell=\frac{-6+14}{2}=4 \Rightarrow k=2$

В итоге, проверив 6 комбинаций $\Rightarrow$

не все ± $m=1$ $n=5$ $k=2$ $\ell=4$ и $m=2$ $k=1$ $n=4$ $\ell=5$; ← ответ $nk-m\ell\neq6$

3. $\ln 1{,}2 < \frac{1}{6}$

$\ln 1{,}2 < \frac{1}{6}\cdot1$

$\ln 1{,}2 < \frac{1}{6}\ln e$

$\ln 1{,}2 < \ln e^{\frac{1}{6}}$

$1{,}2 < e^{\frac{1}{6}}$

$\frac{6}{5} < e^{\frac{1}{6}}$

$\left(\frac{6}{5}\right)^{6\cdot\frac{1}{6}} < e^{\frac{1}{6}}$

$\frac{6^6}{5^6} < e$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\frac{216^2}{125^2} < e$

$\left(1\frac{91}{125}\right)^2 < e$ т.к. $e > 2$

Ответ: $\ln 1{,}2 < \frac{1}{6}$ (F)

(4.) Дано:

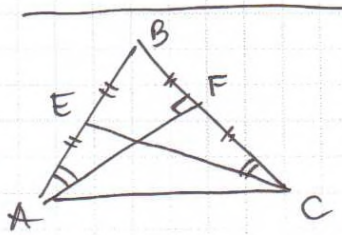
$\triangle ABC$

AF, CE - медианы

$\angle BAF = \angle BCE = 30^\circ$

Д-ть:

$\triangle ABC$ - правильный



Решение:

1) Пойдём от обратного. Допустим, что $\triangle ABC$ - правильн. и найдем, чему равны $\angle BAF$ и BCE.

не дожали!

2) $\triangle ABC$ - правильный $\Rightarrow$ медиана $AF \perp BC \Rightarrow \angle AFB = 90^\circ$

3) $\triangle ABF$ - прямоугольный

катет BF равен $\frac{1}{2}$ AB (гипотенуза) $\Rightarrow$

$\angle BAF = 30^\circ$ ■

(5.) $\sin^2 x + (2\sin x \cdot \cos x)^2 + (\sin(2x+x))^2 + (\sin(2x \cdot 2))^2 > 2$

$\sin^2 x + 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x + (\sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x)^2$

$+ (2\sin 2x \cdot \cos 2x)^2 > 2$

$\sin^2 x + 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x + (2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos 2x)^2$

$+ (2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x)^2 > 2$

$\sin^2 x + 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x (2\cos^2 x + \cos 2x)^2$

$+ 16\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\cos 2x)^2 > 2$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\sin^2 x\left(1+4\cos^2 x+\left(2\cos^2 x+\cos 2x\right)^2\right)+16\sin^2 x\cdot\cos^2 x\left(\cos 2x\right)^2>2$$

$$\sin^2 x\left(1+4\cos^2 x+4\cos^4 x+4\cdot\cos^2 x\cdot\cos 2x+(\cos 2x)^2\right.$$
$$\left.+16\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot(\cos 2x)^2\right)>2$$

$$\sin^2 x\left(4\cos^4 x+1+4\cos^2 x(1+\cos 2x)+(\cos 2x)^2(1+\right.$$
$$\left.16\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\right)>2$$

$$\sin^2 x\left(4\cos^4 x+1+4\cos^2 x\left(1+2\cos^2 x-1\right)+(\cos 2x)^2\cdot\right.$$
$$\left.\cdot(1+16\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\right)>2$$

$$\sin^2 x\left(4\cos^4 x+1+8\cos^4 x+(\cos^2 x-\sin^2 x)^2(1+16\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\right)>2$$

$$\sin^2 x\left(12\cos^4 x+1+(\cos^2 x-\sin^2 x)^2(1+16\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\right)>2$$

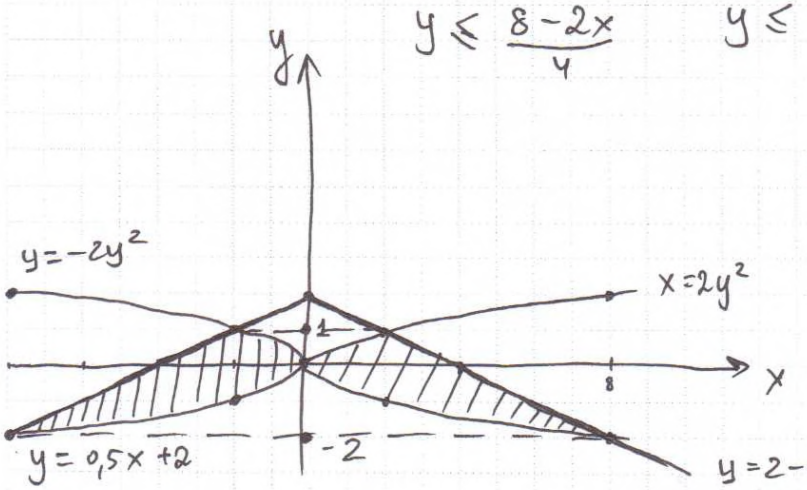
(7) $|x-2y^2|+|x+2y^2|\le 8-4y$ (7) ⇓?

1) пусть $\begin{cases}x-2y^2\ge 0\\ x+2y^2\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 2y^2\\ x\ge -2y^2\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2y^2$ (парабола относит. оси Ox)

тогда $x-2y^2+x+2y^2-8+4y\le 0$

$2x-8+4y\le 0$

$y\le\frac{8-2x}{4}$ $y\le 2-0{,}5x$ (прямая)



В решение входит всё то, что под прямой $y=2-0{,}5x$ и внутри $x=2y^2$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

2) Пусть $\begin{cases} x-2y^2 \le 0 \\ x+2y^2 \le 0 \end{cases} \begin{cases} x \le 2y^2 \\ x \le -2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -2y^2$ (парабола относит. оси Ox)

Тогда $-(x-2y^2)-(x+2y^2) \le 8-4y$

$-x+2y^2-x-2y^2-8+4y \le 0$

$-2x-8+4y \le 0$

$y \le \frac{2x+8}{4}$ $y \le 0{,}5x+2$ (прямая)

В решение входит всё то, что ниже прямой и внутри $x=-2y^2$.

3) Пусть $\begin{cases} x-2y^2 \le 0 \\ x+2y^2 \ge 0 \end{cases} \begin{cases} x \le 2y^2 \\ x \ge -2y^2 \end{cases}$

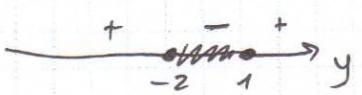
Тогда $-(x-2y^2)+x+2y^2 \le 8-4y$

$4y^2+4y-8 \le 0 \mid :4$

$y^2+y-2 \le 0$

$D = 1+4\cdot 1\cdot 2 = 3^2$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{-1-3}{2} = -2 \\ y = 1 \end{array}\right.$



В решение входит внешняя часть двух парабол ($y=2y^2$ и $x=-2y^2$) в границах $y \in [-2;1]$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4) объединив заштрихованные области, получим трапецию с основаниями 4 и 16 и высотой 3 $\Rightarrow$ $S = \frac{1}{2}(4+16)\cdot 3 = \frac{3}{2}\cdot 20 = 30$

нет 4-го случая! (+)

Ответ: 30

8. 1) При любых значениях x условию удовлетворяют два числа: парные (x) и $(-x)$

Проверим: $\sqrt{x^2+4x+4a^2} + \sqrt{x^2-4x+4a^2} = 4b$

$\sqrt{(-x)^2-4x+4a^2} + \sqrt{(-x)^2-4(-x)+4a^2} =$

$= \sqrt{x^2-4x+4a^2} + \sqrt{x^2+4x+4a^2}$

Получили одинаковые выражения $\Rightarrow$ число x должно быть числом непарным $\Rightarrow$ $x=0$

$\sqrt{0+0+4a^2} + \sqrt{0-0+4a^2} = 4b$ ОДЗ: $b \geq 0$

$|2a| + |2a| = 4b$

$2\cdot|2a| = 2\cdot 2b$

$|2a| = 2b$ $\quad b = |a|$

Ответ: $b = |a|$

F

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

ИрГУПС - г.Иркутск

(Адрес площадки: 664074, Иркутская область, г Иркутск, ул Чернышевского, д 15)

Титульный лист работы

Марченко Дмитрий Сергеевич (дата рождения 04.10.1998)
ученик 11 класса, лицей МБОУ ШР "Шелеховский лицей" (Шелехов)
регистрация № **45786**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 3 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Марченко)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 3.

1. Третьему сыну половину остатка + 0,5 апельсина =>

т.к. больше апельсинов у отца не осталось, третий сын получил $0{,}5 \cdot 2 = 1$ апельсин

Второй сын получил $(1+0{,}5)\cdot 2 = 1 = 2$ апельсина

Второй и третий сыновья вместе получили 3 апельсина, тогда в начале их было $(3+0{,}5)\cdot 2 = 7$ апельсинов

Тогда первый сын получил $7 - 3 = 4$ апельсина

1 2 3 4 5 6 7 8 Σ

\+ + 0 0 ± 0 0 0 3

Ответ: первоначально было 7 апельсинов, первому - 4, второму - 2, третьему - 1.

2. $\begin{cases} |mn + k| = 13 \\ n|k - m| = 6 \end{cases}$ Рассмотрим возможные значения mn и k

$\begin{cases} mn = 1 \\ |k| = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |k| = 12 \\ k - 1 = 6 \end{cases} \quad 1(|1+6|) = 12 \quad 1^2 + 6|1| - 12 = 0$

$D = 36 - 4(-12) = 84$

$\emptyset$, натур. корней нет.

$\begin{cases} mn = 2 \\ |k| = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |k| = 11 \\ k - 2| = 6 \end{cases} \quad |(6+2|) = 11$ натур. корней нет

$\begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} |k| = 11 \\ 2k - 1| = 6 \end{cases} \quad k(2k-6) = 11$ натур. корней нет

при переборе всех mn от 1 до 6 натуральные корни получаются лишь при $mn = 5$

$\begin{cases} m = 1 \\ n = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 4 \\ k = 2 \end{cases} \quad 5 + 8 = 13 \quad 10 - 4 = 6$ верно

при переборе всех mn от 7 до 12 натуральные корни получатся лишь в том случае, когда mn и $k|$ меняются значениями $mn = 8$ $k| = 5$ $\begin{cases} n = 4 \\ n = 2 \end{cases} \begin{cases} 1 = 1 \\ k = 5 \end{cases}$ $8 + 5 = 13$ верно $10 - 4 = 6$

см. стр. 2

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Ответ: $\begin{cases} m=1 \\ n=5 \\ k=2 \\ l=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} m=4 \\ n=2 \\ k=5 \\ l=1 \end{cases}$

5. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x > 2$

$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} > 2$

$4 - \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x - \cos 8x > 4$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x < 0$

$\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 2\cos^2 4x - 1 < 0$

$\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 2(2\cos^2 2x - 1)^2 - 1 < 0$

$2\cos^2 2x + 4\cos^3 2x - 2\cos 2x + 2(4\cos^4 2x - 4\cos^2 2x + 1) - 2 < 0$

$2\cos^2 2x + 4\cos^3 2x - 2\cos 2x + 8\cos^4 2x - 8\cos^2 2x + 2 - 2 < 0$

$8\cos^4 2x + 4\cos^3 2x - 6\cos^2 2x - 2\cos 2x < 0$

$2\cos 2x(4\cos^3 2x + 2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 1) < 0$

$\cos 2x = t$

$2t(4t^3 + 2t^2 - 3t - 1) < 0$

$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ при $t = -1$ $-4 + 2 + 3 - 1 = 0 \Rightarrow t = -1$ корень

$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 \mid t+1$

$-4t^3 + 4t^2$

$-2t^2 - 3t - 1$

$-2t^2 - 2t$

$-t - 1$

$-t - 1$

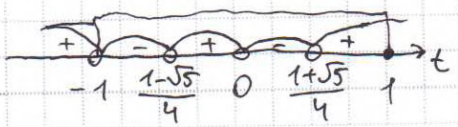
0

$4t^2 - 2t - 1 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$

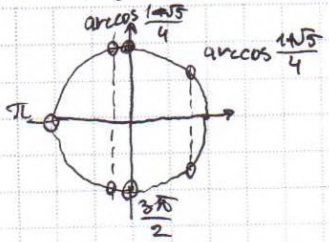
$t = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{4 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ ±

$8t(t+1)\left(t - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) < 0$



$t \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



$$2x \in \left(\arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup$$
$$\cup \left(\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right) \cup$$
$$\cup \left(\pi + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4} + 2\pi n\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup$
$$\cup \left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \pi n\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi n;\ \pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Филимонов Андрей Сергеевич (дата рождения 06.10.1998)
ученик 11 класса, гимназия МБОУ "Гимназия №5" (г. Красногорск)
регистрация № **42762**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 6 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Филимонов)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

II вариант

№1

1) Поскольку при выполнении второй половины работы производительность была в 1,5 раза меньше, то время, затраченное на вторую половину в 1,5 раз больше, чем на первую, и это дало лишний час работы, т.е. половина времени, затраченного на первую половину работы равна 1 часу, значит, вся первая половина ~~работы~~ поля была вспахана за 2 часа, а тогда вторая половина была вспахана за 3 часа. Отсюда вся работа была выполнена за 5 часов. Это значит, что работа была начата в 5 часов утра.

Площадь поля = $\frac{9 \text{ сот}}{\text{ч}} \cdot 2 \text{ ч} + \frac{6 \text{ сот}}{\text{ч}} \cdot 3 \text{ ч} =$

$= 36$ соток.

Ответ: 1) Начало работы – в 5 часов утра

2) $S_{поля} = 36$ соток.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	0	+	+	7

7 баллов

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2.

Возведём обе части уравнений в квадрат и складываем. Получим следствие:

$(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_3^2) = 122 = 61 \cdot 2$.

Это равенство возможно лишь при условии, если:

$\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 61 \\ x_2^2 + x_3^2 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 2 \\ x_2^2 + x_3^2 = 61 \end{cases}$

Из первой системы:

$x_2 = x_3 = 1$,

$\begin{cases} x_1 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases}$

$x_1 = 6, x_4 = 5$

$x_1 = 6; x_2 = x_3 = 1$

$x_4 = 5$

Из второй системы:

$x_1 = x_4 = 1$

$\begin{cases} x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases}$

$x_3 = 6; x_2 = 5$

$x_1 = 1; x_2 = 5;$

$x_3 = 6; x_4 = 1$

Ответ: (6, 1, 1, 5) или (1, 5, 6, 1)

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$.

если $x=0$, $f(x)=0$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 2 \cdot \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+4-4-4x}{(x+2)^2(x+1)} =$

$= \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$

Следовательно, при $x>0$ $f'(x)>0$, а значит $f(x)$ при $x>0$ возрастает. И поэтому $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$. Подставляя в это неравенство $x=0{,}01$, получим:

$\ln 1{,}01 > \frac{2}{201}$

Ответ: первое число больше +

№4

Рассмотрим $\triangle ABC$ со сторонами $BC=a$; $AC=b$; $AB=c$ и углами $\angle B=\alpha$; $\angle C=\beta$; $\angle A=\gamma$. По условию получим, что $\alpha = 2\beta$, тогда $\angle A = \pi - 3\beta$. По теореме синусов имеем: $c = 2R\sin\beta$; $b = 2R\sin 2\beta$; $a = 2R\sin 3\beta$. Доказать нужно то, что $b^2 = c^2 + ac$, значит, должно соблюдаться равенство: +

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\sin^2 2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \ (=)$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\beta\cos^2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = \sin\beta + \sin 3\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = 2\sin 2\beta\cos\beta = 4\sin\beta\cos^2\beta.$

Значит, исходное равенство тоже верно.

ч.т.д.

№5.

$f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ непрерывна, имеет период 2π.

Ищем функции:

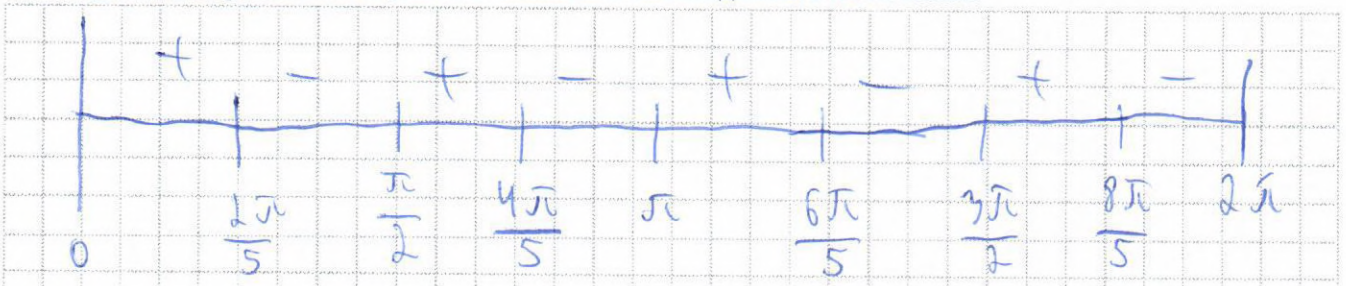
$2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x = 0 \ ; \ \cos x(2\sin 2x + \sin 3x) = 0$

$\cos x \cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2} = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos\frac{x}{2} = 0\\ \sin\frac{5x}{2} = 0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n\\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m\\ \frac{5x}{2} = \pi k\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n\\ x = \pi + 2\pi m\\ x = \frac{2\pi k}{5}\end{array}\right. \quad n, m, k \in \mathbb{Z}$

Рассмотрим промежуток $[0; 2\pi)$, периода 2π. Функция на нём имеет нули в точках $0; \frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{5}; \pi; \frac{6\pi}{5}; \frac{3\pi}{2}; \frac{8\pi}{5}$, значит, отрезок $[0; 2\pi)$ разделён на 8 интервалов, на каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



Иногда с учётом периодичности ответ такой!

~~$x \in (\frac{2\pi}{5} + 2\pi\mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z})$~~,

$x \in (\frac{2\pi}{5} + 2\pi\mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup$

$\cup (\frac{4\pi}{5} + 2\pi\mathbb{Z}; \pi + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{6\pi}{5} + 2\pi\mathbb{Z}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup$

$\cup (\frac{8\pi}{5} + 2\pi\mathbb{Z}; 2\pi + 2\pi\mathbb{Z})$, $\quad z \in \mathbb{Z}$ +

№7

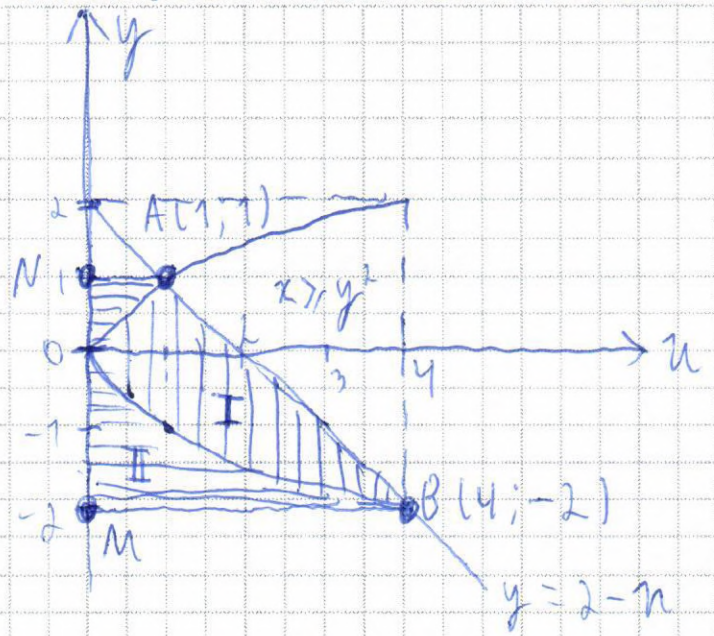
По свойствам модуля замена x на −x не меняет вид неравенства, задающего область. Тогда фигура симметрична относительно Oy и достаточно рассмотреть случай, когда $x \geq 0$. При раскрытии модуля получим 2 области: I: $\begin{cases} x \geq y^2 \\ x - y^2 + x + y \leq 4 - 2y \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq y^2 \\ y \leq 2 - x \end{cases}$ и $\begin{cases} x \leq y^2 \\ -x + y^2 + x + y^2 \leq 4 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y^2 \\ -2 \leq y \leq 1 \end{cases}$. Строим

графики неравенств, с учетом $x \geq 0$; $x = y^2$ - график параболы вершиной в начале координат, с ветвями в сторону положительной оси Ox. Искомая фигура - трапеция,

$S = \frac{1}{2} \cdot 3(4+1) = \frac{15}{2}$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



Искомая площадь фигуры:

$S = 2 \cdot \frac{15}{2} = 15$

Ответ: 15

+

№8.

Из симметрии уравнения следует, что числа x и $2-x$ одновременно являются корнями этого уравнения, а тогда в силу единственности корня должно выполняться условие: $2-x=x$; $x=1$. Подставляем это в исходное уравнение, находим необходимые условия на параметр a; получим: $\sqrt{1+2a} = 1+2a \Rightarrow \sqrt{1+2a}(\sqrt{1+2a}-1)=0$; тогда $a=0$; $a=-\frac{1}{2}$. Если $a=0$, то: $\sqrt{2-x}+\sqrt{x}=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2-x+x+2\sqrt{(2-x)x}=4$; $\sqrt{(2-x)x}=1 \Rightarrow x^2-2x+1=0$, т.е. $x=1$. Если же $a=-\frac{1}{2}$, то имеем:

$\sqrt{2-x-2^{x-1}} + \sqrt{x-2^{x-1}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2-x-2^{x-1}=0 \\ x-2^{x-1}=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{2}{2}x$,

подставляя в первое уравнение получим: $2-x-\frac{1}{2}x=0$; $x^2-2x+1=0$; $x=1$. В обоих случаях решение единственное.

Ответ: $a=0$; $a=-\frac{1}{2}$

+

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Волгин Виктор Дмитриевич (дата рождения 25.10.1998)
ученик 11 класса, гимназия МИИТа Гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **47218**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Волгин)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С.А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	12
+	+	+	+	+	0	0	+	6

Вариант II

6 баллов

№1

Поскольку при выполнении второй половины работы производительность была в 1,5 раза меньше, то время затраченное на вторую половину в 1,5 раза больше чем на первую и это дало лишний час работы, т.е. половина времени, затраченного на первую половину работы равна 1 час, а значит вся 1-ая половина поля была вспахана за 2 часа, а поэтому вторая половина поля была вспахана за 3 часа. Отсюда вся работа была выполнена за 5 час. Значит работа была начата в 5 вечера. Площадь поля равна: 9 сот/час · 2 часа + 6 сот/час · 3 часа = = 36 сотых. Ответ: начало работы в 5 вечера, площадь вспаханного поля - 36 сотых. +

№2.

Возводим обе части уравнения в квадрат и складываем. Получим следствие $(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_3^2) = 122 = 61 \cdot 2$

Это равенство возможно лишь при условии:

$\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 61 \\ x_2^2 + x_3^2 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 2 \\ x_2^2 + x_3^2 = 61 \end{cases}$. Из первой системы

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

получим, что $x_2 = x_3 = 1$, А тогда $\begin{cases} x_1 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 6$; $x_4 = 5$. И второй системы имеем $x_1 = x_4 = 1$, а тогда $\begin{cases} x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 6$ $x_2 = 5$ ответ: $(1;5;6;1)$, $(6;1;1;5)$. +

№3.

Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$.

При $x = 0$ $f(x) = 0$. Найдем $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 2 \cdot \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 4 - 4 - 4x}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$

Следовательно при $x > 0$ $f'(x) > 0$. А тогда $f(x)$ при $x > 0$ возрастающая функция и поэтому $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$. Подставляя в это неравенство $x = 0{,}01$, получим: $\ln 1{,}01 > \frac{2}{207}$ +

Ответ: первое число больше.

№4.

Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и углами $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, $\angle A = \gamma$. По условию получим, что $\alpha = 2\beta$, а значит $\angle A = \pi - 3\beta$. По теореме синусов имеем: $c = 2R\sin\beta$, $b = 2R\sin 2\beta$, $a = 2R\sin 3\beta$. Нужно доказать, что $b^2 = c^2 + ac$. Значит должно выполняться равенство: $\sin^2 2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Leftrightarrow 4\sin^2\beta\cos^2\beta =$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$= \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = \sin\beta + \sin 3\beta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = 2\sin 2\beta\cos\beta = 4\sin\beta\cos^2\beta$.
Следовательно исходное равенство тоже верно.

№5 (+)

Функция $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ является непрерывной и имеет период равный 2π. Найдем нули этой функции.

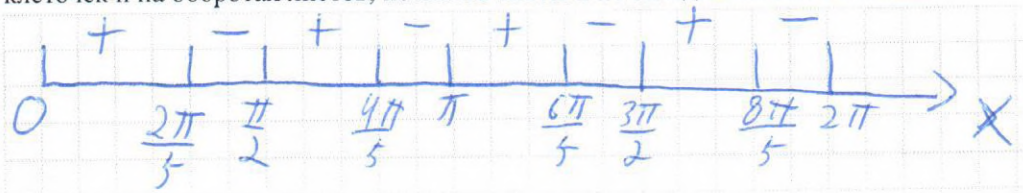
$2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x = 0$, $\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 0$,
$\cos x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2} = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = 0 \\ \sin\frac{5x}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{5x}{2} = \pi l. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \pi + 2\pi n \\ x = \frac{2\pi l}{5} \end{cases} \quad n, l \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим промежуток $[0, 2\pi)$ длиной 2π. На этом промежутке функция $f(x)$ имеет нули в точках $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{5}$, следовательно отрезок $[0, 2\pi)$ разделен на 8 интервалов, на каждом из которых функция $f(x)$ сохраняет знак. Определим знаки $f(x)$ на каждом из этих промежутков:

→

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



А тогда с учетом периодичности функции $f(x)$ Ответ будет следующий:

$x \in \left(\frac{2\pi}{5}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{5}+2\pi k;\pi+2\pi k\right) \cup$

$\cup \left(\frac{6\pi}{5}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{8\pi}{5}+2\pi k;2\pi+2\pi k\right),$

$k \in Z.$

+

№8.

Из симметрии уравнения следует, что числа x и $2-x$ одновременно являются корнями этого уравнения. А тогда в силу единственности корня должно выполняться условие: $2-x=x \Rightarrow x=1$. Подставляя $x=1$ в исходное уравнение находим необходимое условие на параметр a. Получим: $\sqrt{7+2a}=7+2a \Rightarrow \sqrt{7+2a}(\sqrt{7+2a}-1)=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}; a=0$. Если $a=0$, то получаем: $\sqrt{2-x}+\sqrt{x}=2 \Rightarrow 2-x+x+2\sqrt{(2-x)x}=4 \Rightarrow \sqrt{(2-x)x}=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-2x+1=0$, т.е. $x=1$ единственный корень.

Если $a=-\frac{1}{2}$, то имеем: $\sqrt{2-x-2^{x-1}}+\sqrt{x-2^{x-1}}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2-x-\frac{1}{2}2^{x-1}=0 \\ x-2^{1-x}=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{2}{2^x}$, подставляя в первое уравнение,

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

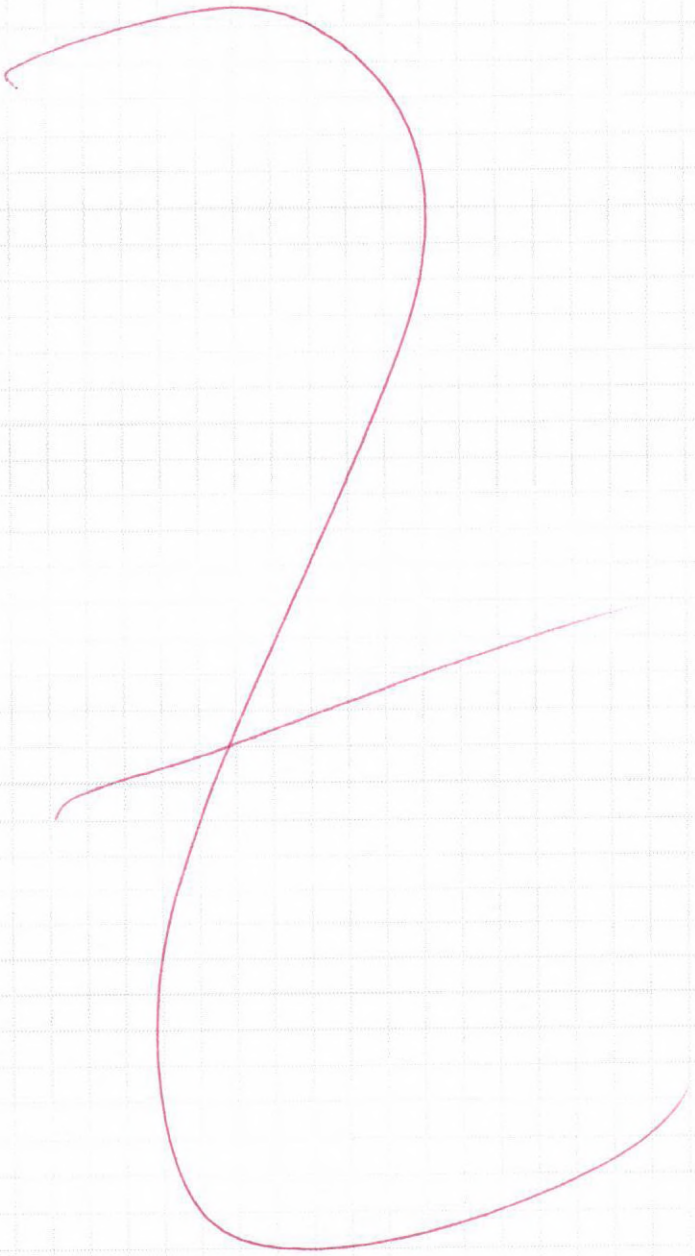
Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

получим: $2-x-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0$ $x=1$ - единственное решение.

Ответ: $a=0$, $a=-\frac{1}{2}$

+



Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Максимов Георгий Максимович (дата рождения 17.08.1998)
ученик 11 класса, средняя школа ГБОУ СОШ №237 (город Москва)
регистрация № **43322**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 7 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Максимов)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

8 баллов

Вариант 1.

1. Пусть x - общая сумма денег, которая присвоила Лиса Алиса, через y обозначим сумму денег, доставшуюся каждому мисёнку. Тогда первый мисёнок получил $a + \frac{x-a}{m} = y$, второй получил: $2a + \frac{x-y-2a}{m} = y$ и т.д. n-ый мисёнок получил: $na + \frac{x-(n-1)y-na}{m} = y$. Упростив эти равенства на m, получим систему:

$$\begin{cases} (m-1)a + x = my \\ 2(m-1)a + x = (m+1)y \\ 3(m-1)a + x = (m+2)y \\ n(m-1)a + x = (m+n-1)y \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнение, первое, получаем $(m-1)a = y$. Подставляя y в первое уравнение, имеем: $(m-1)a + x = m(m-1)a$, т.е. $x = (m-1)^2 a$. А тогда $\frac{x}{y} = \frac{(m-1)^2 a}{(m-1)a} = m-1$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	+	+	+	8

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Но теперь нужно доказать, что все остальные мисета также получили в рублях сумму: $(m-1)a$. Узнаем: сколько получил p-й мисеок. Он получает сначала (в рублях) pa, потом m-ю часть остатка. Этот остаток получается вычитанием из общей суммы x, или $(m-1)^2 a$, сначала pa, затем суммы, полученной $p-1$ первых мисет, т.е. $(p-1)(m-1)a$. А так как они все получили поровну, а именно: $m(m-1)a$. Таким образом p мисеок получает $pa + (m-1)^2 a - pa - (p-1)(m-1)a =$

$= \frac{a}{m}(pm + m^2 - 2m + 1 - p - pm + p + m - 1) =$

$= \frac{(m^2-m)a}{m} = (m-1)a$, что и требовалось доказать.

Ответ: украдено $a(m-1)^2$ рублей, мисет было $m-1$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

2. Возведем оба уравнение в квадрат и сложим. Получим следствие системы: $(x^2+t^2)(z^2+y^2)=50$.
Так как x, y, z, t - натуральные числа, то это равенство возможно лишь при:

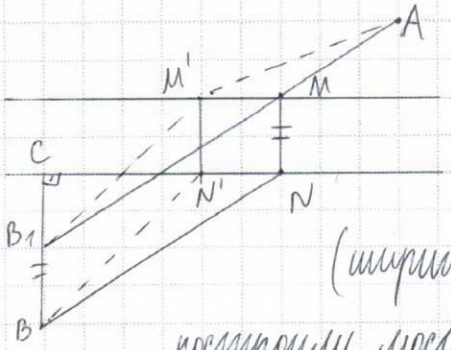
$\begin{cases} x^2+t^2=5 \\ z^2+y^2=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+t^2=10 \\ z^2+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+t^2=25 \\ z^2+y^2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+t^2=2 \\ z^2+y^2=25 \end{cases}$

Из первой системы находим, что либо $x=2, t=1$, либо $x=1, t=2, z=3, y=1$, либо $z=1, y=3$. А тогда получим четыре решения: $(2,1,1,3), (1,1,2,3), (1,3,2,1), (2,3,1,1)$. И только одно $(1,1,2,3)$ удовлетворяет исходной системе.
Из 2 системы находим, что $x=3, t=1$; $x=1, t=3$; $z=2, y=1$; $y=2; z=1$.
Тогда исходной системе будет удовлетворять решение $(3,2,1,1)$.
Аналогично еще 2 решения: $(4,1,3,1)$; $(1,3,4,1)$.
Ответ: $(1,1,2,3)$; $(3,2,1,1)$; $(4,1,3,1)$; $(1,3,4,1)$.

3. Рассмотрим функцию $y(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$ при $x\geq 0$.
Очевидно, что $y(0)=0$. Находим $y'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$.
Следовательно при $x>0$ $y'>0$, значит $y(x)$ возрастающая функция и поэтому $\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}>0$. Полагая в неравенстве $x=0{,}1$, получаем, что $\ln(1{,}1)>\frac{1}{11}$.
Ответ: первое число больше второго.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4.



Опустим из точки B перпендикуляр BC на ближайший берег и пусть $B_1B = MN$ (ширина реки). Тогда, где бы мы не построили мост $M'N'$ длина пути $BN'M'A = BN' + N'M' + M'A$. Следовательно, нужно минимизировать длину пути $BN' + M'A$, так как длина моста постоянна, но $BN' = B_1M'$, поэтому нужно минимизировать длину ломаной $B_1M'A$; следовательно точка M' должна лежать на прямой B_1A, т.е. совпасть с точкой M.

5. Рассмотрим функцию $f(x) = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 2$. Эта функция непрерывна и имеет общий период π.

Находим нули этой функции: $\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} - 2 = 0$, $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$, $2\cos x \cos 3x + 2\cos 7x \cos x = 0$, $2\cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0$, $4\cos x \cos 2x \cos 5x = 0$.

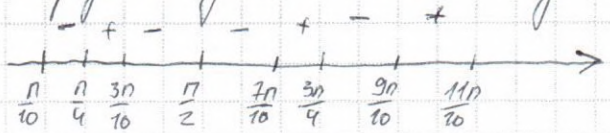
Отсюда имеем:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi m \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi \ell}{5} \end{cases} \quad k, m, \ell \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим промежуток, длина которого равна π. На этом промежутке функция $f(x)$ имеет нули в точках $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$. Таким образом, промежуточное

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\left[\frac{\pi}{10}; \frac{11\pi}{10}\right)$ разделим на семь интервалов, на каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак. Определим знаки $f(x)$ на каждом из этих промежутков.



А тогда с учетом периодичности функции $f(x)$ ответ имеет вид: $x \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{3\pi}{10}+\pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{10}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right] \cup \left[\frac{9\pi}{10}+\pi k; \frac{11\pi}{10}+\pi k\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

6. $\begin{cases} xy(x+y)+xy+x+y=11 \\ xy(x^2+y^2)+3x^2y^2(x+y)+2x^2y^2=30 \end{cases}$

Пусть $x+y=a$, $xy=b$. Тогда: $\begin{cases} ab+a+b=11 \\ b(a^2-2b)+ab^2+2b^2=30 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab+a+b=11 \\ ba^2+b^2a=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+a+b=11 \\ ab(a+b)=30 \end{cases} \Rightarrow$ по т. обратной Виета:

$\begin{cases} ab=5 \\ a+b=6 \end{cases}$ или $\begin{cases} ab=6 \\ a+b=5 \end{cases} \Rightarrow$ по т. обратной Виета: $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}, \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases},$

$\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow$ 1) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=5 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$.

Первая система решений не имеет, т.к. уравнение $x^2-x+5=0$ не имеет действительных корней. Корни второй системы будут: $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$. Третья система так же не имеет корней, корни четвертой системы будут $(2,1), (1,2)$.

Ответ: $(2,1), (1,2), \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

7. По свойствам модуля ($|x|=|-x|$) замена x на $-x$ не меняет данного неравенства. Поэтому область, задаваемая данным неравенством, будет симметрична относительно оси OY и

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

достаточно найти площадь фигуры при $x \geq 0$. В области $x \geq 0$ неравенство можно переписать в виде: $\left|x - \frac{y^2}{2}\right| + x + \frac{y^2}{2} \leq 2 - y$.

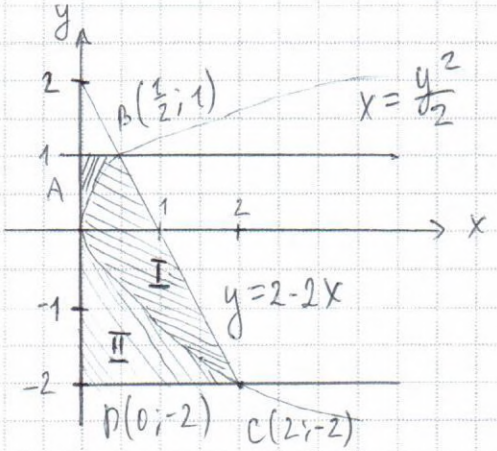
Раскрывая знак модуля, получим две области:

$$I: \begin{cases} x \geq \frac{y^2}{2} \\ x - \frac{y^2}{2} + x + \frac{y^2}{2} \leq 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{y^2}{2} \\ y + 2x \leq 2 \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} x \leq \frac{y^2}{2} \\ -x + \frac{y^2}{2} + x + \frac{y^2}{2} \leq 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{y^2}{2} \\ y^2 + y - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{y^2}{2} \\ -2 \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

Строим области I и II при $x \geq 0$ с учетом того, что $x = \frac{y^2}{2}$ представляет график параболы, симметричный относительно оси Ox, с вершиной в начале координат. Знак подмодульного выражения определяем подстановкой координат пробной точки. Очевидно, что полученная в области $x \geq 0$ фигура представляет собой трапецию $ABCD$. Площадь этой трапеции S будет равна: $\frac{1}{2} \cdot 3\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$. А тогда площадь всей фигуры будет равна $\frac{15}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{15}{2}\right\}$



Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

8. Записывая уравнение в виде: $\sqrt{(x+a)^2+a-a^2}+\sqrt{(x-a)^2+a-a^2}=2\sqrt{b}$, получим, что если x_0 - корень, то $-x_0$ также корень этого уравнения. Из единственности следует, что $x_0=0$. А тогда, подставляя $x=0$ в уравнение, получаем, что $2\sqrt{a}=2\sqrt{b} \Rightarrow a=b$ и $a\geq 0$. С учетом этого получаем уравнение $\sqrt{x^2+2bx+b}+\sqrt{x^2-2bx+b}=2\sqrt{b}$. Можно возвести в квадрат. Получим: $\sqrt{(x^2+b)^2-4b^2x^2}=b-x^2$. Снова возводя в квадрат, получим: $x^4+b^2+2x^2b-4b^2x^2=b^2-2bx^2+x^4 \Rightarrow$ $\Rightarrow b(b-1)x^2=0$. Если $b\neq 0$, $b\neq 1$, то $x=0$ единственное решение. Если $b=0$, то получим $x=0$, значит $x=0$ единственное решение. И наконец, подставляя $b=1$, имеем: $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=2 \Rightarrow |x+1|+|x-1|=2$. Решением этого уравнения будет промежуток $x\in[-1,1]$, т.е. в данном случае единственности нет.

Ответ: $b\in[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Татаренко Александр Николаевич (дата рождения 07.08.1998)
ученик 11 класса, ж.д. школа Гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **45004**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 6 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Татаренко)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Иванова А.П.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	0	0	+	6

Вариант 3. 6 баллов

№1.

Обозначим через x число апельсинов, которое отец имел до распределения между сыновьями. Он дает первому сыну число апельсинов, равное $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$; у него остается $x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. Затем он дает второму сыну половину остатка, или $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$, увеличенную на $\frac{1}{2}$; это составляет $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$. Тогда у него остается $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$. Наконец он дает третьему сыну $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$. Но так как у него больше не остается, то должно быть $\frac{x}{8}+\frac{1}{8}=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$, откуда $x=7$. Ответ: у отца – 7 апельсин, первый сын получил 4, второй 2, третий 1.

№2.

Возведем оба уравнения в квадрат, получим систему-следствие. Сложив уравнения этой системы, получим $(m^2+k^2)(n^2+l^2)=5\cdot 41$.

Так как все переменные натуральные числа, то равенство возможно лишь в двух случаях: $m^2+k^2=5$, или $n^2+l^2=5$. Из первого равенства получим, что $m=2$, $k=1$ либо $m=1$; $k=2$.

Подставляя эти числа в исходную систему, получим

$$\begin{cases} 2n+l=13 \\ n-2l=6 \\ m=2,\ k=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n+2l=13 \\ 2n-l=6 \\ m=1,\ k=2 \end{cases}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Первая система не имеет решений в целых числах. Из второй системы получаем $n=5$, $m=1$, $l=4$, $k=2$. Если $n^2+l^2=5$, то либо $n=2$, $l=1$, либо $n=1$, $l=2$.

А тогда снова имеем две системы:

$$\begin{cases} n=2,\ l=1 \\ 2m+k=13 \\ 2k-m=6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n=1,\ l=2 \\ \sout{2k+m=13} \quad m+2k=13 \\ \sout{n=1,\ k=2} \quad k-2m=6 \end{cases}$$

Из первой системы находим, что $n=2$, $m=4$, $l=1$, $k=5$. Вторая система не имеет решений в натуральных числах.

Ответ: $\{(5;1;4;2),(2;4;1;2)\}$

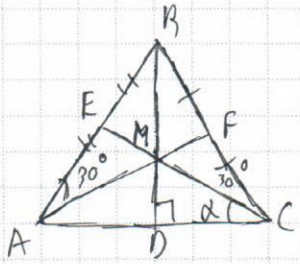
№3.

$\ln 1{,}2 \vee \frac{1}{6} \leftrightarrow (1{,}2 \vee e^{\frac{1}{6}}) \leftrightarrow ((1{,}2)^6 \vee e) \leftrightarrow ((1{,}44)^2 \cdot 1{,}44 \vee e \leftrightarrow 2{,}0736 \cdot 1{,}44 \vee e$.

Так как $2{,}07 \cdot 1{,}4 = 2{,}898 > e = 2{,}718$, то первое число больше второго.

Ответ: первое число больше.

№4.



Пусть ABC треугольник, где AF и CE медианы, $\angle BAF = \angle BCE = 30^\circ$. Доказать, что $AB=BC=AC$.

Решение.

ΔABF подобен ΔBCE по двум углам ($\angle B$ - общий); из подобия имеем:

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\frac{BF}{AB} = \frac{EB}{BC}$; $\frac{\frac{1}{2}BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{BC} \Rightarrow BC = AB$, т.е. треугольник

ABC равнобедренный. Пусть т. M - точка пересечения медиан. Тогда $BD = 3MD$. Обозначим $\angle MCD = \alpha$. Если $tg(\widehat{MCD}) = t$, то $tg\angle BCD = 3t$. Отсюда $tg\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg(\angle BCD - \angle MCD) = \frac{3t-t}{1+3t^2} =$

$\frac{2t}{1+3t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2t\sqrt{3} = 1+3t^2 \Rightarrow \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$. Поэтому $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\alpha = 30^\circ$. Поэтому $\triangle ABC$ - правильный.

N5.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x - 2$. Эта функция непрерывна и дифференцируема. Она имеет наименьший общий период π. Найдём нули этой функции. Преобразуя квадраты функций через двойной угол, получим:

$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} - 2 = 0$,

$-(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x) = 0$, $2\cos 3x\cos x + 2\cos 7x\cos x = 0$,

$\cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0$, $\cos x \cos 5x \cos 2x = 0$.

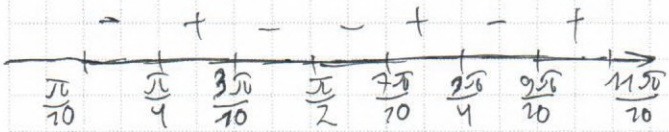
следовательно $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 5x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2} \end{cases}$ $n, m, l \in Z$

Рассмотрим промежуток $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{11\pi}{10}\right)$, длина которого равна π. Отметим на этом промежутке точки, в которых $f(x)$ равна

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

нулю на этом промежутке. Это будут, $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$. Определим знак функции $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые нули функции разбили отрезок $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{11\pi}{10}\right]$ (очевидно, что таких промежутков будет семь). Так как $f(x) = -\cos x \cos 2x \cos 5x > 0$, то в качестве решения будут те промежутки, где $f(x) < 0$.

Находим:



Тогда в соответствии с рисунком будет ответ:

$x \in \left(\frac{\pi}{10} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{10} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k; \frac{7\pi}{10} + \pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k; \frac{9\pi}{10} + \pi k\right)$, $k \in Z$

№6.

Ясно, что $b \geq 0$. Запишем уравнение в виде:

$\sqrt{(x+2)^2 + 4a^2 - 4} + \sqrt{(x-2)^2 + 4a^2 - 4} = 4b$. Если x_0 – решение этого уравнения, то $-x_0$ также решение этого уравнения. Из единственности следует, что $x_0 = 0$. А тогда подставляя в исходное уравнение $x = 0$, получим необходимое условие на параметры: $4|a| = 4b$, т.е. $b = |a|$. Сумеем этого получаем уравнение: $\sqrt{4b^2 + 4x + x^2} + \sqrt{4b^2 - 4x + x^2} = 4b$. После возведения в квадрат получим: $\sqrt{(4b^2 + x^2)^2 - 16x^2} = 4b^2 - x^2$. Снова возводим в квадрат.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Получим:

$16b^4+8b^2x^2+x^4-16x^2=16b^4-8b^2x^2+x^4 \Rightarrow 16x^2(b^2-1)=0$. Отсюда следует, что, если $b\neq 1$ ($b\geq 0$!), то $x=0$ будет единственное решение уравнения. Остается рассмотреть случай $b=1$. В этом случае получим уравнение:

$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-4x+4}=4 \Rightarrow |x+2|+|x-2|=4$. Методом интервалов находим, что решение этого уравнения будет отрезок $[-2;2]$, т.е. x в этом случае не единственно.

Ответ: $b\in[0;1)\cup(1;+\infty)$.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Регистрация №**45004**

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Бондарь Дмитрий Андреевич (дата рождения 29.08.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МБОУ Лицей №1 имени Г.С.Титова (Краснознаменск)
регистрация № **44694**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Бондарь)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Иванова А.П.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для «скрепки»

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 1

№1

Пусть x - сумма денег, которую присвоила Алиса, y - сумма денег, которую получил каждый мисенок. Тогда первый получил $a + \frac{x-a}{m} = y$, второй получил $2a + \frac{x-y-2a}{m} = y$, n-ый мисенок получил $na + \frac{x-(n-1)y-na}{n} = y$. Тогда получим систему:

$$\begin{cases} (m-1)a + x = my \\ 2(m-1)a + x = (m+1)y \\ 3(m-1)a + x = (m+2)y \\ n(m-1)a + x = (m+n-1)y \end{cases}$$

+

Вычитая из второго ур-я первое, получаем $(m-1)a = y$

Подставляя y в первое ур-е, имеем $(m-1)a + x = m(m-1)a$,

т.е. $x = (m-1)^2 a$. А тогда $\frac{x}{y} = \frac{(m-1)^2 a}{(m-1)a} = m-1$.

Теперь нетрудно доказать, что всем мисятам было выдано денег поровну.

Ответ: мисят было $m-1$, украдено денег: $a(m-1)^2$

№2

Возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Получим следствия:

$$(x^2+t^2)(z^2+y^2) = 50 \Rightarrow \begin{cases} x^2+t^2=5 \\ z^2+y^2=10 \end{cases}, \begin{cases} x^2+t^2=25 \\ z^2+y^2=2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2+t^2=2 \\ z^2+y^2=25 \end{cases}, \begin{cases} x^2+t^2=10 \\ z^2+y^2=5 \end{cases}$$

+

Решая эти системы с учетом натуральности x, y, z, t, мы получим Ответ: $(1;1;2;3)$, $(3;2;1;1)$, $(4;1;3;1)$, $(1;3;4;1)$

1	2	3	4	5	6	7,8	Σ
+	+	4	+	+	0	40	6

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

Обозначим $y(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ при $x \geq 0$. $y(0) = 0$

$y'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow$ при $x > 0$ $y'(x) > 0$, значит

$y(x)$ возрастает, поэтому $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} > 0$

Получаем в неравенстве $x = 0{,}1$, имеем $\ln(1{,}1) > \frac{1}{11}$

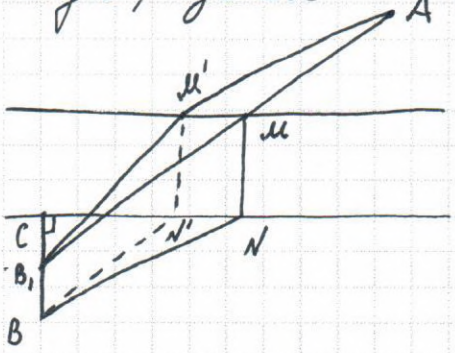
Ответ: первое число больше

+

№4

Опустим из точки B перпендикуляр BC на ближайший берег и пусть $B_1B = MN$ (ширина реки) (см. рисунок)

Тогда, где бы мы не строили мост $M'N'$ длина пути $BN'M'A = BN' + M'N' + M'A$.



А тогда нужно минимизировать длину ломаной B_1MA, так как $M'N'$ величина постоянная. А тогда точка M' должна лежать на прямой B_1A, т.е. совпасть с точкой M.

+

№5

$f(x) = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 2$ имеет общий период π.

найдем нули $f(x)$: $\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi l}{5}$, $m, k, l \in Z$.

на промежутке $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{11\pi}{10}\right)$, длина которого равна π, $f(x)$ имеет нули в точках $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$.

Методом интервалов с учетом периодичности находим, что

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{10}+\pi k\right]\cup\left[\frac{7\pi}{10}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]\cup$

$\cup\left[\frac{9\pi}{10}+\pi k;\frac{11\pi}{10}+\pi k\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$, $k\in Z$ +

№6

$x+y=a$, $xy=b$, тогда $\begin{cases}ab+a+b=11\\ab(a+b)=30\end{cases}$ $\Rightarrow$ по теореме, обратной

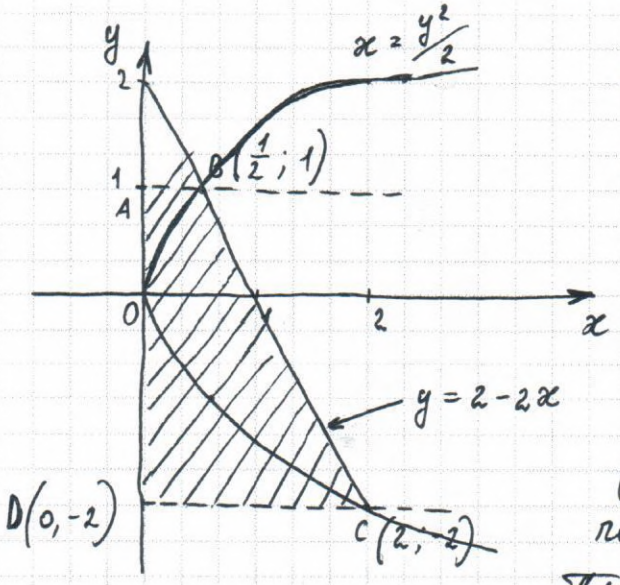
Виета, следует, что $\begin{cases}ab=6\\a+b=5\end{cases}$ или $\begin{cases}ab=5\\a+b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=5\end{cases},\begin{cases}a=5\\b=1\end{cases}$,

$\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\xy=5\end{cases},\begin{cases}x+y=5\\xy=1\end{cases},\begin{cases}x+y=2\\xy=3\end{cases}\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}$.

Решая эти системы, получим

Ответ: $(2,1),(1,2),\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2},\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right),\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2},\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$. +

№7



Область симметрична относительно оси Oy. Поэтому достаточно найти площадь при $x\geq 0$. Тогда $\left|x-\frac{y^2}{2}\right|+x+\frac{y^2}{2}\leq 2-y$.

И получим две области:

$\begin{cases}x\geq\frac{y^2}{2}\\y+2x\leq 2\end{cases}$ и $\begin{cases}x\leq\frac{y^2}{2}\\-2\leq y\leq 1\end{cases}$

Строим при $x\geq 0$ эти области: получили трапецию $ABCD$ (см. рис.)

Площадь этой трапеции равна $\frac{15}{4}$

Ответ: $\left\{\frac{15}{2}\right\}$ +

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Чернышев Василий Сергеевич (дата рождения 28.08.1998)
ученица 11 класса, гимназия МИИТа ГОУ ВПО Московский государственный университет путей сообщения - Гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **47588**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Чернышев)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3 вариант

① Пусть было x апельсинов $I \to \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$; $II \to \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$

$III \to \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1}{4}+\frac{x}{8}+\frac{1}{8}=x$

$x=7$ +

② Возведем уравнение в квадрат и сложим. Получим

$(m^2+k^2)(n^2+\ell^2)=5\cdot 41=1\cdot 205$

Так как m, k, n, ℓ – натуральные, то возможен только первый вариант

1) $\begin{cases} m^2+k^2=5 \\ n^2+\ell^2=41 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=2 \\ k=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=1 \\ k=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2n+\ell=13 \mid \cdot 2 \\ n-2\ell=6 \end{cases} + \\ \begin{cases} n+2\ell=13 \\ 2n-\ell=6 \mid \cdot 2 \end{cases} + \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5n=32 \\ n-2\ell=6 \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} n=5 \\ \ell=4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ k=2 \\ n=5 \\ \ell=4 \end{cases}$ обязательно

2) $\begin{cases} m^2+k^2=41 \\ n^2+\ell^2=5 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=2 \\ \ell=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=1 \\ \ell=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m+k=13 \\ 2k-m=6 \mid 2 \end{cases} + \\ \begin{cases} m+2k=13 \mid \cdot 2 \\ k-2m=6 \end{cases} + \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=5 \\ m=4 \end{cases} \\ 5k=32 \ \varnothing \end{array}\right. = \begin{cases} m=4 \\ k=5 \\ n=2 \\ \ell=1 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} m=1 \\ k=2 \\ n=5 \\ \ell=4 \end{cases}$ $\begin{cases} m=4 \\ k=5 \\ n=2 \\ \ell=1 \end{cases}$ +

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	0	+	+	6

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

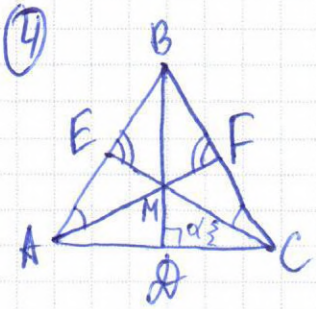
③ $\ln 1{,}2 \vee \frac{1}{6} \Leftrightarrow 1{,}2 \vee e^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow (1{,}2)^6 \vee e \Leftrightarrow$

$(1{,}44)^2 \cdot 1{,}44 \vee e \Leftrightarrow 2{,}0736 \cdot 1{,}44 \vee e$ но $2{,}07 \cdot 1{,}44 =$

$= 2{,}8908 > e$

Ответ: $\ln 1{,}2 > \frac{1}{6}$ +

④



$\triangle ABF \sim \triangle BCE \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}BC}{AB} =$

$= \frac{\frac{1}{2}AB}{BC} \Rightarrow BC = AB \Rightarrow$ равнобедренный

$\angle MCD = \alpha$

$\operatorname{tg}\angle MCD = t \Rightarrow \operatorname{tg}\angle BCD = 3t$ +

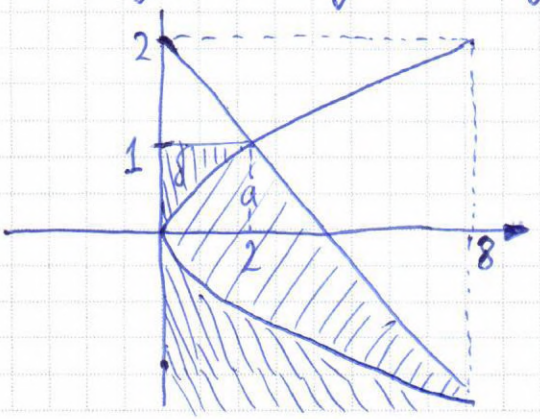
$\operatorname{tg} 30 = \operatorname{tg}(\angle BCD - \alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3t - t}{1 + 3t^2} \Leftrightarrow 3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1 = 0$

$(\sqrt{3}t - 1)^2 = 0 \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle C = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ правильный

⑦ Замена x на $-x$ не меняет условие $\Rightarrow$ фигура симметрична относительно оси OY. Рассмотрим $x \geq 0$

$|x - 2y^2| + x + 2y^2 \leq 8 - 4y \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2y^2 \\ y \leq 2 - \frac{x}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 2y^2 \\ -2 \leq y \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$ +



а) Вместе трапеция

б) $S_{тр} = \frac{2+8}{2} \cdot 3 = 15$

Ответ: 30

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(8) $b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+4a^2-4} + \sqrt{(x-2)^2+4a^2-4} = 4b$

Если x_0 - решение, то и $-x_0$ решение $\Rightarrow x_0 = 0$

$4|a| = 4b \Rightarrow b = |a| \Rightarrow$ возведём в квадрат

$\sqrt{4b^2+4x+x^2} + \sqrt{4b^2-4x+x^2} = 4b \Leftrightarrow$

$\sqrt{(4b^2+x^2)^2 - 16x^2} = 4b^2 - x^2 \Leftrightarrow$ в квадрат

$16b^4 + 8b^2x^2 + x^4 - 16x^2 = 16b^4 - 8b^2x^2 + x^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x^2(b^2-1) = 0$

Если $b \neq 1$, то единств. решение $x = 0$

Если $b = 1$, то $\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-4x+4} = 4 \Leftrightarrow |x+2| + |x-2| = 4$

Решение этого уравнения $x \in [-2; 2] \Rightarrow b = 1$ не подходит

Ответ: $b \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Чепец Владислав Владимирович (дата рождения 01.12.1997)
ученик 11 класса, гимназия Гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **44056**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 4 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Чепец)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант №4.

№1

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	0	+	+	68

68 уже

Дано:

S га - площадь поля

$t = \frac{S}{8}$ - время работы

$\frac{S}{24} + \frac{S}{24} + \frac{S}{12} = \frac{S}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S}{6} - \frac{S}{8} = 4 \Rightarrow S = 96$ га

$t = \frac{96}{8} = 12$ часов

+

$\Rightarrow$ Планировали начать работу в 00 часов

№2.

$$\begin{cases} (y+z)(x+t) = 12 \\ (y-z)(x-t) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+z)(x+t) = 12 \\ \left[\begin{cases} y-z=2 \\ x-t=1 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} y-z=1 \\ x-t=2 \end{cases} \right. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y = z+2 \\ x = t+1 \\ (2z+2)(2t+1) = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = z+1 \\ x = t+2 \\ (2z+1)(t+1) = 6 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y=3 \\ x=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

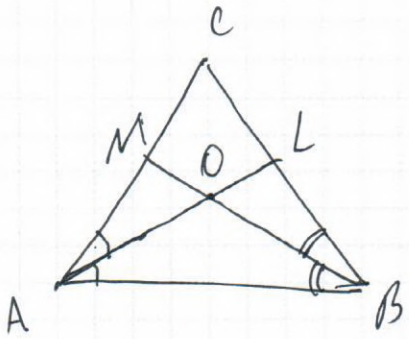
№3

$\ln\frac{5}{4} \vee \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \vee e^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^5 \vee e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3125}{1024} \vee e \Rightarrow$ первое больше +

$3^{\angle 1}$

№4



$h_a < l_a < 1$

$h_b < l_b < 1$

$h_c < l_c < 1$

+

$AB < AO + OB < AL + BM < 2$

Аналогично $AC < 2$; $BC < 2$

$S = \frac{1}{2} h_a \cdot BC < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ ч.т.д.

№1

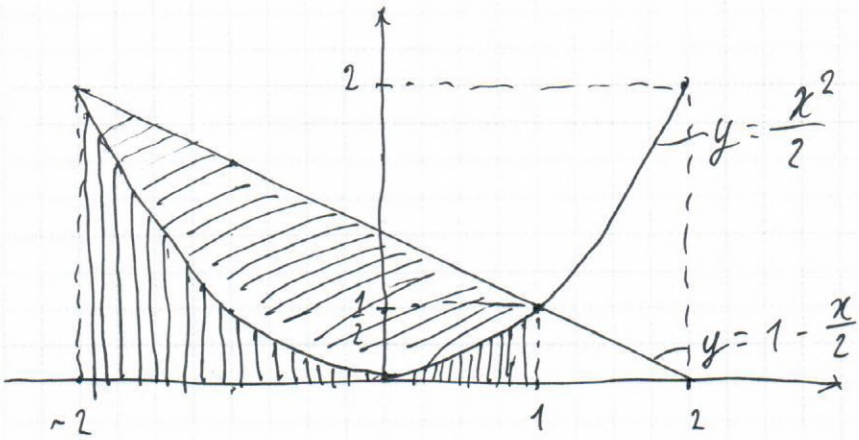
Замена y на $-y$ не меняет равенства $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ фигура симметрична относительно оси Ox

Рассмотрим $y \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x^2}{2} \\ y \leq 1 - \frac{x}{2} \end{cases}$ (1) или

$\begin{cases} y \leq \frac{x^2}{2} \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ (2)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



$S_{трапеции} = \frac{0,5+2}{2} \cdot 3 = \frac{15}{4}$ +

Ответ: $\frac{15}{2}$

№8.

$a \neq 0 \quad \sqrt{(x-3)^2+9b^2-9} + \sqrt{(x+3)^2+9b^2-9} = 6a$

Замена x на $-x$ не меняет уравнения $\Rightarrow$ Пусть $x=0$

Подставим

$\sqrt{9b^2} + \sqrt{9b^2} = 6a \quad 6|b| = 6a \quad a = |b| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{9a^2-6x+x^2} + \sqrt{9a^2+6x+x^2} = 6a$ возведем в 1^2

$\sqrt{(9a^2+x^2)^2-36x^2} = 9a^2 - x^2$ Возведем в квадрат.

$36x^2(a^2-1) = 0$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Если $a \neq 1$, то $x = 0$ един. решение.

Если $a = 1$, то $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x - 3| + |x + 3| = 6 \Rightarrow x \in [-3; 3]$ не единствен. решение $\Rightarrow a \neq 1$

Ответ: $a \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Чаузов Андрей Александрович (дата рождения 16.12.1997)
ученик 11 класса, средняя школа Гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **44478**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 03 0 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Чаузов)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С. А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

ВАРИАНТ 1

№1

Пусть x - сумма денег, которые присвоила Алиса, y - сумма денег, которую получил каждый мисенок. Тогда первый получил $a + \frac{x-a}{m} = y$, второй получил $2a + \frac{x-y-2a}{m} = y$, n-ый мисенок получил $na + \frac{x-(n-1)y-na}{m} = y$. Тогда получим систему: $\begin{cases} (m-1)a + x = my \\ 2(m-1)a + x = (m+1)y \\ 3(m-1)a + x = (m+2)y \\ n(n-1)a + x = (m+n-1)y \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения, первое, получаем $(m-1)a = y$. Подставляя y в первое уравнение, имеем $(m-1)a + x = m(m-1)a$, т.е. $x = (m-1)^2 a$. А тогда $\frac{x}{y} = \frac{(m-1)^2 a}{(m-1)a} = m-1$. Теперь нетрудно доказать, что всем мисятам было выдано денег поровну. #Ответ: мисят было $m-1$, украдено денег: $a(m-1)^2$ +

№2

Возьмем оба уравнения в квадрат и сложим. Получим следующее:

$(x^2+t^2)(z^2+y^2) = 50 \Rightarrow \begin{cases} x^2+t^2=5 \\ z^2+y^2=10 \end{cases}, \begin{cases} x^2+t^2=25 \\ z^2+y^2=2 \end{cases}, \begin{cases} x^2+t^2=2 \\ z^2+y^2=25 \end{cases}, \begin{cases} x^2+t^2=10 \\ z^2+y^2=5 \end{cases}$

Решая эти системы с учетом натуральности x, y, z, t, мы получим ответ: (1,1,2,3), (3,2,1,1), (4,1,3,1), (1,3,4,1) +

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	+	0	0	6

6 б. Дмитрий

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

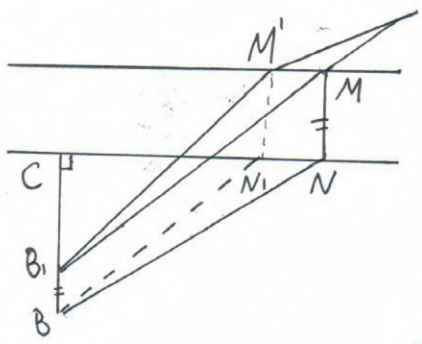
Обозначим $y(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, при $x \geq 0$. $y(0) = 0$, $y'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow$ при $x > 0$ $y'(x) > 0$, значит $y(x)$ возрастает, поэтому $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} > 0$, положив в неравенстве $x = 0{,}1$, имеем $\ln(1{,}1) > \frac{1}{11}$.

Ответ: первое число больше.

+

№4

Опустим из точки B перпендикуляр BC на Британский берег и пусть $B_1B = MN$ (ширина реки) (см. рис.). Тогда, где бы мы не построили мост $M'N'$ длина пути $BN'M'A = BN' + M'N' + M'A$. А тогда нужно минимизировать длину ломаной B_1MA, так как $M'N'$ величина постоянная. А тогда точка M' должна лежать на прямой B_1A, т.е. совпасть с точкой M.



+

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5

$f(x) = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 2$ имеет общий период π.

Найдем нули $f(x)$: $\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} - 2 = 0 \Rightarrow$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Rightarrow \cos x \cos 2x \cos 5x = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi l}{5}$, $k, n, l \in Z$.

На промежутке $[\frac{\pi}{10}; \frac{11\pi}{10})$, длина которого равна π, $f(x)$ имеет нули в точках $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$. Методом интервалов с учетом периодичности находим, что ответ: $[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{10} + \pi k] \cup [\frac{7\pi}{10} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k] \cup [\frac{9\pi}{10} + \pi k; \frac{11\pi}{10} + \pi k] \cup \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$, $k \in Z$

№6

$x + y = a$, $xy = b$, тогда: $\begin{cases} a+b+a+b = 11 \\ ab(a+b) = 30 \end{cases} \Rightarrow$ по теореме обратной

Виета следует, что $\begin{cases} ab = 5 \\ a+b = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} ab = 6 \\ a+b = 5 \end{cases} = \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}, \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}, \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x+y = 1 \\ xy = 5 \end{cases}, \begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 1 \end{cases}, \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}, \begin{cases} x+y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$. Решая эти системы, получим ответ: $(2,1), (1,2), (\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}), (\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2})$.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Сенчакова Полина Дмитриевна (дата рождения 21.04.1998)
ученица 11 класса, гимназия МИИТа ФГБОУ ВПО МГУПС (МИИТ) гимназия (Москва)
регистрация № **43455**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 10 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Сенчакова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С. А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

68 работ

Вариант II

№1 Поскольку при выполнении второй половины работы производительность была в 1,5 меньше, то и время, затраченное на вторую половину работы, в 1,5 раза больше, чем на первую; и это дало лишний час работы, т.е. половина времени, затраченного на первую половину работы равна 1 часу, а значит вся 1-ая половина поля была вспахана за 2 часа, а тогда вторая за 3 часа. Значит вся работа была выполнена за 5 часов, отсюда начало в 5 час вечера. Площадь поля равна:

$9 \times 2 + 6 \times 3 = 36$ соток. Ответ начало - 5 вечера, площадь - 36 соток (+)

№2 Возводим обе части уравнения в квадрат и складываем. Получим: $(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_3^2) = 122 = 61 \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ либо $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 61 \\ x_2^2 + x_3^2 = 2 \end{cases}$ либо $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 2 \\ x_2^2 + x_3^2 = 61 \end{cases}$

Из первой системы получим $x_3 = x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 6$, $x_4 = 5$. Из второй системы имеем:

$x_1 = x_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 5, x_3 = 6$

Ответ: (1;5;6;1), (6;1;1;5) (+)

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	+	0	0	6

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3 Пусть $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$, $f(0) = 0$,

находим $f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ при $x > 0$.

Следовательно $f(x)$ монот. возрастает, (+)

значит $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$. При $x = 0{,}01$ получим

$\ln 1{,}01 > \frac{2}{201}$ Ответ первое число больше.

№4 Рассмотрим треугольник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, $\angle A = \gamma$. По условию $\alpha = 2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A = \pi - 3\beta$. по т. синусов $c = 2R\sin\beta$, $b = 2R\sin 2\beta$,

$a = 2R\sin 3\alpha$. Нужно доказать, что $b^2 = ac + c^2$. Значит должно выполняться равенство $\sin^2 2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\beta\cos^2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = \sin\beta + \sin 3\beta \Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = 2\sin 2\beta\cos\beta = 4\sin\beta\cos^2\beta$.

А тогда исходное равенство верно, что и требовалось доказать. (+)

№5 $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ имеет общий период 2π.

Находим нули этой функции: $2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x = 0$,

$\cos x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi\ell}{5}$ где $m, n, \ell \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим промежуток $[0; 2\pi)$ длиной 2π. На этом промежутке $f(x)$ равна нулю в точках $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{5}$.

Поэтому отрезок $[0, 2\pi)$ разделен на 8 интервалов ~~участки периодичности $f(x)$~~,

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

на каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак. А тогда методом интервалов с учетом периодичности $f(x)$ ответ: $x \in \left(\frac{2\pi}{5}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{5}+2\pi k; \pi+2\pi k\right) \cup \left(\frac{6\pi}{5}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{8\pi}{5}+2\pi k; 2\pi+2\pi k\right)$ $k \in Z$. (+)

№6

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{1+xy+\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}+2+xy} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{xy}-1+xy}{\frac{1}{xy}-2+xy} = 9 \end{cases}$$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\alpha \quad xy+\frac{1}{xy}=\beta \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} \cdot \dfrac{1+\beta}{\beta+2} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2} \cdot \dfrac{\beta-1}{\beta-2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)2+4} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4} = 9 \end{cases}$$

Пусть $\alpha\beta=a$, $\alpha+\beta=b$, тогда $\frac{a+b+1}{a+2b+2}=\frac{49}{81}$ и $\frac{a-b+1}{a-2b+4}=9 \Rightarrow$

$b=\frac{8a+35}{17}$, подставим в первое уравнение, получим $\frac{25a+52}{33a+138}=\frac{49}{81} \Rightarrow$

$408a=2550$, значит $a=6{,}25$ и $b=5$. Отсюда $\begin{cases} \alpha\beta=\frac{25}{4} \\ \alpha+\beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow y=2x$ или $y=x/2$

$\frac{1}{xy}+xy=\frac{5}{2} \Rightarrow xy=2$ или $xy=\frac{1}{2}$ отсюда ответ:

$(2;1); (-2;-1); (1;2); (-1;-2);$

$(1;\frac{1}{2}); (-1;-\frac{1}{2}); (\frac{1}{2};1); (-\frac{1}{2};-1).$

(+)

7

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Шаленников Кирилл Андреевич (дата рождения 14.01.1998)
ученик 11 класса, гимназия МИИТа ГОУ ВПО Московский Государственный Университет Путей Сообщения - Гимназия МИИТ (г. Москва)
регистрация № **49175**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Шаленников)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С.А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 1.

① Пусть x - сумма денег, которую присвоила Алиса.
Пусть y - сумма денег, которая была получена каждым лисёнком
Тогда $a + \frac{x-a}{m} = y$ - получил первый лисёнок
$2a + \frac{x-y-2a}{m} = y$ - получил второй лисёнок
а n-ный лисёнок получил $na + \frac{x-(n-1)y-na}{m} = y$

В итоге получаем систему: $\begin{cases} (m-1)a + x = my \\ 2(m-1)a + x = (m+1)y \\ 3(m-1)a + x = (m+2)y \\ n(m-1)a + x = (m+n-1)y \end{cases}$

Вычитаем из уравнения $(2(m-1)a + x = (m+1)y)$ уравнение $((m-1)a + x = my)$ и получаем, что $y = (m-1)a$
Подставляем „y" в первое уравнение, получаем: $(m-1)a + x = m(m-1)a$
Из этого следует, что $x = (m-1)^2 a$; Из отношения $\frac{x}{y} = \frac{(m-1)^2 a}{(m-1)a} = m-1$

Можно сделать вывод, что всем лисятам было выдано одинаковое количество денег.

Ответ: лисят было $(m-1)$; денег украдено $a(m-1)^2$ (+)

② Возведём оба уравнения в квадрат и сложим полученное следствие: $(x^2+t^2)(z^2+y^2) = 50$

Из этого получаем 4 системы:

1) $\begin{cases} x^2+t^2 = 5 \\ z^2+y^2 = 10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+t^2 = 25 \\ z^2+y^2 = 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+t^2 = 2 \\ z^2+y^2 = 25 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+t^2 = 10 \\ z^2+y^2 = 5 \end{cases}$

При решении систем получаем, что x, y, z, t (натуральные значения) составят искомые значения.

Ответ: $(1, 1, 2, 3); (3, 2, 1, 1); (4, 1, 3, 1); (1, 3, 4, 1)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	+	0	+	6

6 б

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

③ Обозначим $y(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ при $x \geq 0$

$y(0) = 0$

$y'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow$ при $x > 0$ $y'(x) > 0 \Rightarrow y(x)$ - возрастает

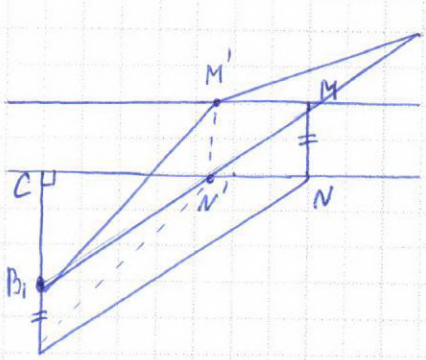
Из вышесказанного следует, что $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} > 0$

Полагая, что $x = 0{,}1$, имеем $\ln(1{,}1) > \frac{1}{1.1}$

Ответ: первое число больше

+

④



Опустим из точки B перпендикуляр BC на ближайший берег и пусть $B_1B = MN$ (ширина реки) (см. рис.)

Тогда, где бы мы не построили мост $M'N'$ длина пути $BN'M'A = BN' + M'N' + M'A$

Необходимо минимизировать длину ломаной $B_1M'A$, так как $M'N'$ величина постоянная.

+

Значит точка M' должна лежать на прямой B_1A, то есть совпадать с точкой M.

⑥ $x + y = a$, тогда $\begin{cases} ab + a + b = 11 \\ ab(a+b) = 30 \end{cases}$

$xy = b$

По теореме, обратной теореме Виета, следует, что $\begin{cases} ab = 5 \\ a + b = 6 \end{cases}$

или $\begin{cases} ab = 6 \\ a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}; \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}; \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

+

1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

Решая эти системы, получим, ~~270~~ $(2, 1), (1, 2), \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$

Ответ: $(2, 1), (1, 2), \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(8) Если x_0 - корень, то и $(-x_0)$ также является корнем.
Из этого следует, что $x_0 = 0$

$2\sqrt{a} = 2\sqrt{b} \Rightarrow a = b$ и $a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2bx+b} + \sqrt{x^2-2bx+b} = 2\sqrt{b}$

$\sqrt{(x^2+b)^2 - 4b^2x^2} = b - x^2 \Rightarrow x^4 + b^2 + 2x^2b - 4b^2x^2 = b^2 - 2bx^2 + x^4$

Следовательно $b(b-1)x^2 = 0$

Если $b \neq 0$, $b \neq 1$, то $x = 0$ - единственное решение

Если $b = 0$, то $x = 0$ - единственное решение

Если $b = 1$, имеем $\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1} = 2$

Отсюда $|x+1| + |x-1| = 2$. Решением будет $x \in [-1; 1]$, значит единственности нет.

Ответ: $b \in [0, 1) \cup (1; +\infty)$.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Лукьянова Ксения Дмитриевна (дата рождения 16.12.1998)
ученица 11 класса, гимназия МИИТа Гимназия МИИТ (москва)
регистрация № **43545**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Лукьянова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С.А)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 3. 6 баллов

№1

Обозначим через X число апельсинов, которое имел отец до распределения между сыновьями. Он даёт первому сыну число апельсинов, равное $(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$, тогда у него остаётся $(X-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}))=(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$. Затем он даёт второму сыну половину остатка, т.е. $\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$, увеличенную на $\frac{1}{2}$, получается $\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$. Тогда у него остаётся $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-(\frac{x}{4}+\frac{1}{4})=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$. Наконец он даёт третьему сыну $\frac{1}{2}(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$, но т.к. у него больше не остаётся, то должно быть:

$$\frac{x}{8}+\frac{1}{8}=\frac{x}{4}-\frac{3}{4};$$

$$x+1=2x-6;$$

$$x=7$$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	0	+	+	6

Ответ: у отца - 7 апельсинов; у первого сына - 4 ап.; у второго сына - 2 апель.; у третьего - 1 апель.

№2.

$$\begin{cases} mn+kL=13 \\ nk-mL=6 \end{cases};$$

Возведём оба уравнения в квадрат, а затем сложим их; получим:

$$(m^2+k^2)(n^2+L^2)=5\cdot 41$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Т.к. все переменные натуральные числа, то равенство возможно лишь в двух случаях:

$m^2+k^2=5$ или $n^2+l^2=5$

$\left[\begin{cases} m=2 \\ k=1 \end{cases} \quad \begin{cases} m=1 \\ k=2 \end{cases}\right.$ $\left[\begin{cases} n=1 \\ l=2 \end{cases} \quad \begin{cases} n=2 \\ l=1 \end{cases}\right.$

① Подставим значения m и k в систему:

$\begin{cases} 2n+l=13 \\ n-2l=6 \\ m=2,\ k=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} n+2l=13 \\ 2n-l=6 \\ m=1,\ k=2 \end{cases}$

Первая система не имеет решений в целых числах. Из второй системы получаем $n=5$; $m=1$; $l=4$; $k=2$.

② Подставим значения n и l в систему:

$\begin{cases} n=2,\ l=1 \\ 2m+k=13 \\ 2k-m=6 \end{cases}$ или $\begin{cases} n=1,\ l=2 \\ m+2k=13 \\ k-2m=6 \end{cases}$

Из первой системы находим, что $n=2$, $m=4$, $l=1$, $k=5$. Вторая система не имеет решений в натуральных числах.

Ответ: $\{(5;1;4;2),\ (2;4;1;2)\}$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3.

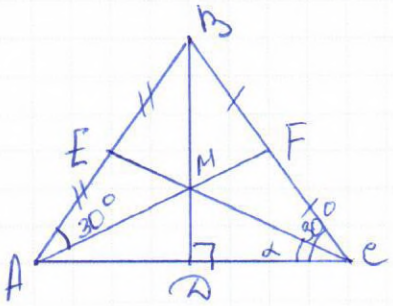
$\ln 1{,}2 \vee \frac{1}{6} \Leftrightarrow 1{,}2 \vee e^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow (1{,}2)^6 \vee e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1{,}44)^2 \cdot 1{,}44 \vee e \Leftrightarrow 2{,}0736 \cdot 1{,}44 \vee e$,

т.к. $2{,}07 \cdot 1{,}4 = 2{,}898 > e = 2{,}718$, то первое число больше второго.

Ответ: первое число больше.

№4.



Дано:
$\triangle ABC$; AF и CE - медианы;
$\angle BAF = \angle BCE = 30°$

Док-ть: $\triangle ABC$ - правильный.

Док-во:

1) Пусть ABC треугольник, где AF и CE медианы, $\angle BAF = \angle BCE = 30°$

2) $\triangle ABF \sim \triangle BCE$ (по двум углам ($\angle B$ - общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BF}{AB} = \frac{EB}{BC}$; $\frac{\frac{1}{2}BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{BC} \Rightarrow BC = AB$, т.е. $\triangle ABC$ равнобедр.. Пусть т. M - точка пересечения медиан. Тогда $BD = 3MD$. Обозначим $\angle MCD = \alpha$. Если $tg(\angle MCD) = t$, то $tg \angle BCD = 3t$. Отсюда

$tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg(\angle BCD - \angle MCD) = \frac{3t - t}{1 + 3t^2} = \frac{2t}{1 + 3t^2} = \frac{t}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t\sqrt{3} = 1 + 3t^2 \Rightarrow (t - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 0$. Поэтому $tg \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$. Поэтому $\triangle ABC$ - правильный. ▨

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

б7.

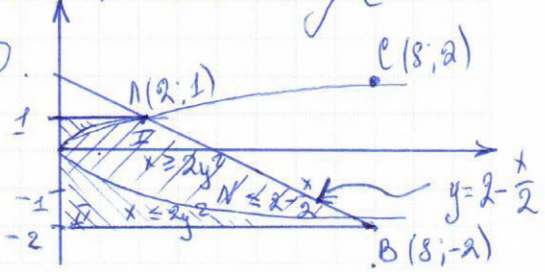
По свойствам абсолютной величины замена x на $-x$ не меняет данного соотношения. Это означает, что фигура, заданная данным неравенством, симметрична относительно оси Oy. Поэтому достаточно найти площадь половины фигуры при $x \geq 0$. В этом случае получим неравенство $|x-2y^2| + x + 2y^2 \leq 8 - 4y$. Раскрывая знак модуля, получим две области:

Область I: $\begin{cases} x \geq 2y^2 \\ x - 2y^2 + x + 2y^2 \leq 8 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2y^2 \\ y \leq 2 - \frac{x}{2} \end{cases}$

Область II: $\begin{cases} x \leq 2y^2 \\ -x + 2y^2 + x + 2y^2 \leq 8 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y^2 \\ y^2 + y - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y^2 \\ -2 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Далее на координатной плоскости xOy строим график полученных неравенств при $x \geq 0$ с учётом того, что $x = 2y^2$ есть график параболы с вершиной в начале координат, ветви направлены вдоль положительного направления оси Ox. Объединение этих областей даст фигуру, которая является трапецией $MNAB$, площадь которой равна $S = \frac{1}{2} \cdot 3(8+2) = 15$. Тогда удвоенная площадь равна 30.

Ответ: 30.



Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8.

Ясно, что $b \geq 0$. Запишем уравнение:

$\sqrt{(x+2)^2+4a^2-4} + \sqrt{(x-2)^2+4a^2-4} = 4b$

Если x_0 - решение уравнения, то $-x_0$ также решение этого уравнения. Из единственности следует, что $x_0 = 0$. Тогда подставляя в исходное уравнение $x=0$, получим необходимое условие на параметры: $4|a| = 4b$, т.е. $b = |a|$, с учётом этого получаем уравнение:

$\sqrt{4b^2+4x+x^2} + \sqrt{4b^2-4x+x^2} = 4b$, возведём в квадрат

$16b^2+8b^2x^2+x^2-16x^2 = 16b^2-8b^2x^2+x^4$

$16x^2(b^2-1) = 0$. Отсюда следует, что, если $b \neq 1$ ($b \geq 0$!), то $x=0$ будет единственное решение уравнения. Остаётся рассмотреть случай $b=1$. В этом случае получим уравнение:

$\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-4x+4} = 4 \Rightarrow |x+2|+|x-2| = 4$,

методом интервалов находим, что решение этого уравнения будет отрезок $[-2; 2]$, т.е. x в этом случае не единственно.

Ответ: $b \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Богоутдинова Дания Руслановна (дата рождения 29.07.1998)
ученица 11 класса, средняя школа ФГБ ОУ ВПО "МГУПС" (МИИТ) Гимназия (Москва)
регистрация № **49466**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 4 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника Богоутдинова (Богоутдинова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 4.

1. x - площадь всего поля

га	га/ч	ч
$\frac{x}{3}$	8	$\frac{x}{24}$
$\frac{x}{4}$	6	$\frac{x}{24}$
$\frac{5x}{12}$	5	$\frac{x}{12}$

$\frac{x}{8}+4=\frac{x}{24}+\frac{x}{24}+\frac{x}{12}$

$\frac{x}{8}+4=\frac{x}{6}$

$3x+96=4x$

$x=96$ га

$t=96:8=12$ ч.

Ответ: 96 га; в 00:00 ч.

+

2. $\begin{cases} xy+zt=7; \\ xz+yt=5; \end{cases} + \left| - \begin{matrix} x>t, \\ y>z \end{matrix} \right.$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	0	+	+	6

$\begin{cases} xy+zt+xz+yt=12, \\ xy+zt-xz-yt=2; \end{cases}$

$\begin{cases} (y+z)(x+t)=12, \\ (y-z)(x-t)=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+z)(x+t)=12, \\ \left[\begin{matrix} \begin{cases} y-z=1, \\ x-t=2, \end{cases} \\ \begin{cases} y-z=2, \\ x-t=1; \end{cases} \end{matrix} \right. \end{cases}$

6 б.

решение

+

1) $\begin{cases} y=z+1, \\ x=t+2, \\ (y+z)(x+t)=12; \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} y=z+2, \\ x=t+1, \\ (y+z)(x+t)=12; \end{cases}$

1) $(2z+1)(t+1)=6 \Rightarrow \begin{cases} 2z+1=3, \\ t+1=2; \end{cases} \begin{cases} z=1, \\ y=2, \\ t=1, \\ x=3; \end{cases}$

2) $(2z+2)(2t+1)=12;$ $(z+1)(2t+1)=6;$ $\Rightarrow \begin{cases} 2t+1=3, \\ z+1=2; \end{cases} \begin{cases} z=1, \\ t=1, \\ y=3, \\ x=2; \end{cases}$

Ответ: (3; 2; 1; 1); (2; 3; 1; 1)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3. $\ln 1{,}25 \vee 0{,}2$,

$\ln \frac{5}{4} \vee \frac{1}{5}$;

$\frac{5}{4} \vee e^{\frac{1}{5}}$;

$\left(\frac{5}{4}\right)^5 \vee e$;

$\frac{3125}{1024} \vee e$, $e < 2{,}75$

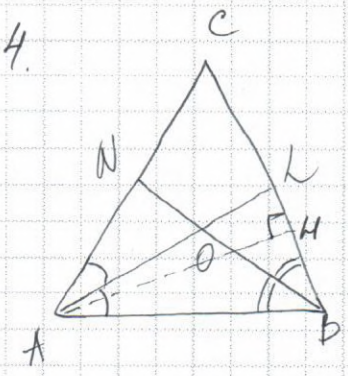
$3{,}05$

$\Rightarrow 3{,}05 > 2{,}75$

Ответ: Преобразований, меняющих знак исходного неравенства не производилось $\Rightarrow$ полученной соответствует исходному

Ответ: первое больше второго

4.



$AL \cap BN = O$

$AL = l_a$ $h_a < l_a < 1$

$AH = h_a$ аналогично $h_b < l_b < 1$, $h_c < l_c < 1$

Рассмотрим $\triangle AOB$.

$AB < AO + OB$ (условие существования $\triangle$)

$\Rightarrow AB < AO + OB < AL + BN < 2$

аналогично $BC < 2$, $AC < 2$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 < 1$ ч.т.д.

8. Из условия ясно, что $a \geq 0$;

$\sqrt{(x-3)^2 + 9b^2 - 9} + \sqrt{(x+3)^2 + 9b^2 - 9} = 6a$,

Заметим, что если x_0 - реш. ур., то $(-x_0)$ - тоже является решением. Т.к. нам нужен единственный корень, то $x_0 = 0$. Подставим в уравнение.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\sqrt{(0-3)^2+9b^2-9}+\sqrt{(0+3)^2+9b^2-9}=6a$,

$|b|=a$,

тогда: $\sqrt{9a^2-6x+x^2}+\sqrt{9a^2+6x+x^2}=6a \;|^2$;

$\sqrt{(9a^2+x^2)^2-36x^2}=9a^2-x^2 \;|^2$;

$81a^4+x^4+18a^2x^2-36x^2=81a^4+x^4-18a^2x^2$,

$36a^2x^2-36x^2=0$,

$36x^2(a^2-1)=0$;

$a\neq\pm1$: $x=0$ - ед. решение;

$a=1$ (только это т.к. $a\geq0$): $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}=6 \Rightarrow |x-3|+|x+3|=6$

$x\in[-3;3]$, т.е. реш. не единств.

$\Rightarrow a\neq1$

Ответ: $[0;1)\cup(1;+\infty)$

4

4. Заметим, что если y заменить на $(-y)$, то исходное ур-ие остается неизменным $\Rightarrow$ данная фигура симметрична относительно Ox. Рассмотрим $y\geq0$:

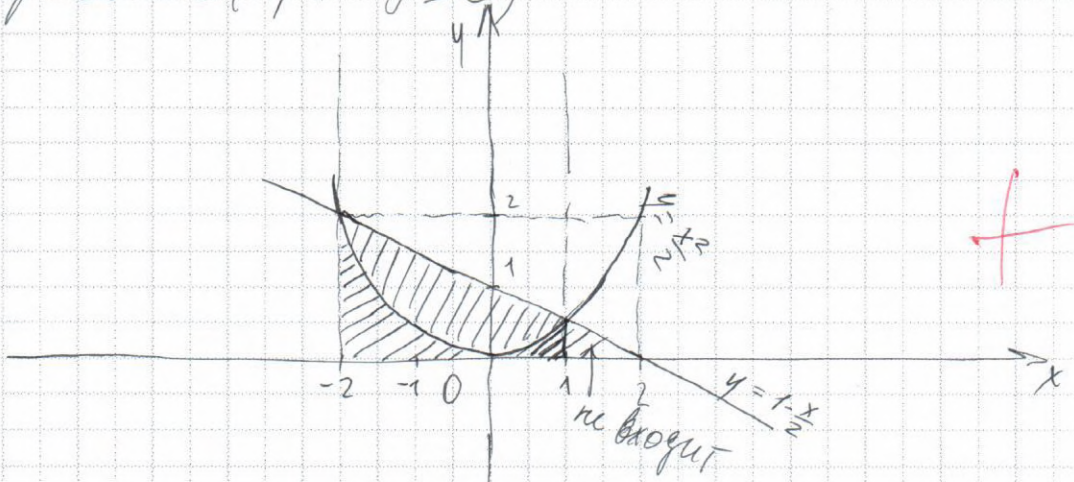
$|y-\frac{x^2}{2}|+y+\frac{x^2}{2}\leq2-x$,

$\begin{cases} y\geq\frac{x^2}{2}, \\ y-\frac{x^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}\leq2-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq\frac{x^2}{2}, \\ y\leq1-\frac{x}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} y\leq\frac{x^2}{2}, \\ -y+\frac{x^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}\leq2-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq\frac{x^2}{2}, \\ x^2+x-2\leq0; \end{cases} \begin{cases} y\leq\frac{x^2}{2}, \\ x\in[-2;1]; \end{cases}$ сим. отн. Ox

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Построим графическую модель полученных неравенств (при $y \geq 0$)



Из графика видно, что ~~искомая~~ искомая фигура - трапеция $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2 + \frac{1}{2}) = \frac{15}{4}$.

Т. к. это половина ($y \geq 0$), а фигура симметрична относительно Ox, то

$S_ф = 2 \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{2}$. Ответ: 7,5.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Еремеева Евгения Дмитриевна (дата рождения 29.03.1998)
ученица 11 класса, средняя школа МОУ СОШ №5 (77)
регистрация № **43163**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Еремеева)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

Вариант 2.

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1. Поскольку при выполнении половины работы производительность была в 1,5 меньше, то и время затраченное на вторую половину работы в 1,5 раза больше, чем на первую; и это дало лишний час работы, т.е половина времени, затраченного на первую половину работы равна 1 часу, а значит вся 1-ая половина пола была вспахана за 2 часа, а тогда вторая за 3 часа, значит вся работа была выполнена за 5 часов, отсюда начало в 5 часов вечера площадь пола равна: $9 \times 2 + 6 \times 3 = 36$ соток.
Ответ: начало 5 вечера; площадь - 36 соток. (+)

2. Возводим обе части уравнений в квадрат и складываем, получим:

$(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_3^2) = 122 = 61 \cdot 2 \Rightarrow$ либо $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 61 \\ x_2^2 + x_3^2 = 2 \end{cases}$ либо $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 2 \\ x_2^2 + x_3^2 = 61 \end{cases}$

Из первой системы получим $x_3 = x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 6, x_4 = 5.$

Из второй системы имеем $x_1 = x_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 5, x_3 = 6$

Ответ: (1; 5; 6; 1), (6; 1; 1; 5).

6 баллов

(+)

3. Пусть $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$, $f(0) = 0$, находим $f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ при $x > 0$. Следовательно $f(x)$ монот. возрастает, значит $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$. при $x = 0{,}01$ получим $\ln 1{,}01 > \frac{2}{201}$. Ответ: первое число больше. (+)

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	?	+	0	0	6

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4. Рассмотрим треугольник ABC, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$, $\angle A=\gamma$. По условию $\alpha=2\beta \Rightarrow \angle A=\pi-3\beta$. По т. синусов $c=2R\sin\beta$, $b=2R\sin 2\beta$, $a=2R\sin 3\beta$. Нужно доказать, что $b^2=ac+c^2$. Значит должно выполняться равенство $\sin^2 2\beta=\sin^2\beta+\sin\beta\sin 3\beta \Leftrightarrow 4\sin^2\beta\cos^2\beta=$ $=\sin^2\beta+\sin\beta\sin 3\beta \Rightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta=\sin\beta+\sin 3\beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta=2\sin 2\beta\cos\beta=4\sin\beta\cos^2\beta$. А тогда исходное равенство верно, что и требовалось доказать. (+)

5. $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$ имеет общий период 2π. Находим нули этой функции: $2\sin 2x\cos x+2\sin 3x\cos x=0$, $\cos x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{2\pi l}{5}$, где $n,l\in Z$. Рассмотрим промежуток $[0;2\pi)$ длиной 2π. На этом промежутке $f(x)$ равна нулю в точках $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}$. поэтому отрезок $[0,2\pi)$ разделен на 8 интервалов, на каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак. А тогда методом интервалов с учётом периодичности $f(x)$ Ответ: $x\in\left(\frac{2\pi}{5}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{4\pi}{5}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)\cup\left(\frac{6\pi}{5}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{8\pi}{5}+2\pi k;2\pi+2\pi k\right)$ $k\in Z$. (+)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

6. $\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{1+xy+\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}+2+xy} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{xy}-1+xy}{\frac{1}{xy}-2+xy} = 9 \end{cases}$ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\alpha \quad xy+\frac{1}{xy}=\beta \Rightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} \cdot \dfrac{1+\beta}{\beta+2} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2} \cdot \dfrac{\beta-1}{\beta-2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)2+4} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4} = 9 \end{cases}$ Пусть $\alpha\beta=a$, $\alpha+\beta=b$, тогда

$\frac{a+b+1}{a+2b+2}=\frac{49}{81}$ и $\frac{a-b+1}{a+2b+4}=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=\frac{80a+35}{17}$, подставляя в первое уравнение, получим $\frac{25a+52}{33a+138}=\frac{49}{81} \Rightarrow$

$408a=2550$, значит $a=6{,}25$ и $b=5$. отсюда

$\begin{cases} \alpha\beta=\frac{25}{4} \\ \alpha+\beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow y=2x$ или $y=x/2$

$\frac{1}{xy}+xy=\frac{5}{2} \Rightarrow xy=2$, или $xy=\frac{1}{2}$ отсюда Ответ: $(2,1)$; $(-2;-1)$; $(1,2)$; $(-1;-2)$; $(1;\frac{1}{2})$; $(-1;-\frac{1}{2})$; $(\frac{1}{2},1)$; $(-\frac{1}{2};-1)$

+

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Парсян Ален Камоевич (дата рождения 11.10.1998)
ученик 11 класса, средняя школа ГБОУ Гимназия Марьина роща им. В.Ф. Орлова №237 (77)
регистрация № **42776**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Парсян)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С.А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 3

№1

Обозначим через x число апельсинов, которое отец имел до распределения между сыновьями. Он даёт первому сыну число апельсинов, равное $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ у него остаётся $x-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. Затем он даёт второму сыну половину остатка, или $\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$, увеличенную на $\frac{1}{2}$; это составляет $\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$. Тогда у него остаётся $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-(\frac{x}{4}+\frac{1}{4})=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$. Наконец он даёт третьему сыну $\frac{1}{2}(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$. Но так как у него ничего больше не остаётся, то должно быть $\frac{x}{8}+\frac{1}{8}=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$, отсюда $x=7$. Ответ. У отца - 7 апельсин, первый сын получил - 4, второй - 2, третий - 1

+

№2

Возведём оба уравнения в квадрат. Сложив уравнения этой системы получим $(m^2+k^2)(n^2+l^2)=5\cdot 41$. Так как все переменные Z, т.о. $m^2+k^2=5$, или $n^2+l^2=5$. Из первого равенства получим, что $m=2, k=1$, либо $m=1, k=2$. Подставим эти числа: $\begin{cases} 2n+l=13 \\ n-2l=6 \\ m=2, k=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} n+2l, \cancel{l=2}=13 \\ \cancel{m+2k=13}\ 2n-l=6 \\ \cancel{k-2m=6}\ m=1, k=2 \end{cases}$

Из ~~первой~~ второй системы находим, что $n=5, m=1, l=4, k=2$. ~~Вторая~~ Первая система не имеет решений в натуральных числах.

Если $n^2+l^2=5$, то либо $n=2, l=1$, либо $n=1, l=2$. Тогда снова имеем 2 системы

$\begin{cases} n=2, l=1 \\ 2m+k=13 \\ 2k-m=6 \end{cases}$ или $\begin{cases} n=1, l=2 \\ m+2k=13 \\ k-2m=6 \end{cases}$

Из первой системы находим, что $n=2, m=4, l=1, k=5$. Вторая система не имеет решений в натуральных числах. Ответ. $\{(5;1;4;2)(2;4;1;2)\}$

+

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

$\ln 1{,}2 \vee \sqrt[6]{e} \Leftrightarrow (1{,}2 \vee e^{\frac{1}{6}}) \Leftrightarrow ((1{,}2)^6 \vee e) \Leftrightarrow ((1{,}44)^2 \cdot 1{,}44 \vee e) \Leftrightarrow 2{,}0736 \cdot 1{,}44 \vee e$. Так как $2{,}07 \cdot 1{,}4 = 2{,}898 > e = 2{,}718$, то первое число больше второго

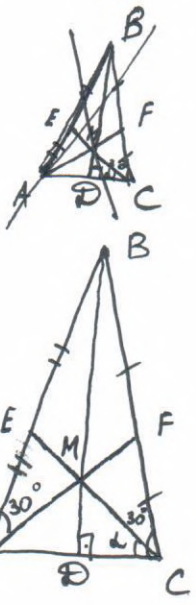
Ответ. Первое число больше +

№4

Пусть ABC тр-ик, где AF и CE медианы, $\angle BAF = \angle BCE = 30°$. Доказать, что $AB = BC = AC$

Решение: $\triangle ABF \sim \triangle BCE$, по двум углам ($\angle B$ - общий); из подобия имеем: $\frac{BF}{AB} = \frac{EB}{BC}$; $\frac{\frac{1}{2}BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{BC} \Rightarrow BC = AB$, т.е. $\triangle ABC$ равнобедренный. Пусть т. M - точка пересечения медиан. Тогда $BD = 3MD$. Обозначим $\angle MCD = \alpha$. Если $tg(\angle MCD) = t$, то $tg(\angle BCD) = 3t$. Отсюда $tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg(\angle BCD - \angle MCD) = \frac{3t - t}{1 + 3t^2} = \frac{2t}{1+3t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2t\sqrt{3} = 1 + 3t^2 \Rightarrow (t - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 0$. Поэтому $tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$.

Поэтому $\triangle ABC$ - правильный +



1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	0	+	+	6

6 баллов

Регистрация №42776

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7

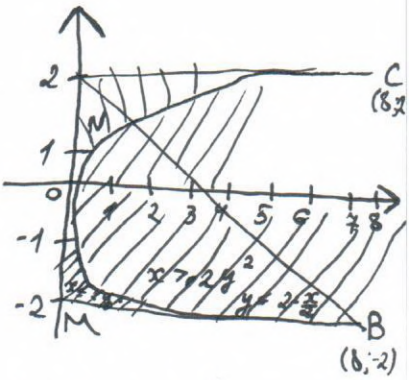
По св-вам абсолютной величины замена x на $-x$ не меняет данного соотношения. Достаточно найти S половины фигуры при $x \geq 0$. В этом случае получим неравенство $|x-2y^2|+x+2y^2 \leq 8-4y$

I область: $\begin{cases} x \geq 2y^2 \\ x-2y^2+x+2y^2 \leq 8-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2y^2 \\ y \leq 2-\frac{x}{2} \end{cases}$

II область: $\begin{cases} x \leq 2y^2 \\ -x+2y^2+x+2y^2 \leq 8-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y^2 \\ y^2+y-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y^2 \\ -2 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$x=2y^2$ - парабола, ветви направлены вдоль положительного направления оси Ox. Объединим и получим $MNAB$ - т.к. S которой $= \frac{1}{2} \cdot 3(8+2) = 15$. А тогда удвоенная площадь равна 30

Ответ. 30



№8

Ясно, что $b \geq 0$. Запишем уравнение в виде: $\sqrt{(x+2)^2+4a^2-4x}+\sqrt{(x-2)^2+4a^2-4x}=4b$. Если x_0 - решение этого уравнения, то x_0 также решение. Из единственности следует, что $x_0=0$. А тогда подставив $x=0$, получим необходимое условие на параметры: $4|a|=4b$, т.е. $b=|a|$. С учётом этого получим уравнение $\sqrt{4b^2+4x+x^2}+\sqrt{4b^2-4x+x^2}=4b$. После возведения в квадрат получим: $\sqrt{(4b^2+x^2)^2-16x^2}=4b^2-x^2$. Снова возводим в квадрат: $16b^4+8b^2x^2+x^4-16x^2=16b^4-8b^2x^2+x^4 \Rightarrow 16x^2(b^2-1)=0$. Следует, что, если $b \neq 1$ ($b \geq 0$). В этом случае получим: $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-4x+4}=4 \Rightarrow |x+2|+|x-2|=4$. Решение этого уравнения является отрезок $[-2;2]$

Ответ. $b \in [0;1) \cup (1;+\infty)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Гаврилин Кирилл Борисович (дата рождения 24.09.1998)
ученик 11 класса, гимназия МИИТа ФГБ ОУ ВПО "МГУПС" (МИИТ)
Гимназия (Москва)
регистрация № **46897**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Гаврилин)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С.А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 1.

№1

Пусть x – сумма денег которую привозила Алла,
y – сумма денег которую получил каждый мальчик

$\Rightarrow$ первый получил $a + \frac{x-a}{m} = y$

второй получил $2a + \frac{x-y-2a}{m} = y$

n-ый мальчик получил $na + \frac{x-(n-1)y-na}{m} = y$

Получим систему: $\begin{cases} (m-1)a + x = my \\ 2(m-1)a + x = (m+1)y \\ 3(m-1)a + x = (m+2)y \\ n(m-1)a + x = (m+n-1)y \end{cases}$

Вычитая из второго ур-ния, первое, получаем $(m-1)a = y$, и подставив y в первое, получим $(m-1)a + x = m(m-1)a$

т.е. $x = (m-1)^2 a$, $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{(m-1)^2 a}{(m-1)a} = m-1$ +

Теперь легко док-ть, что всем мальчикам было выдано денег поровну.

Ответ: мальчиков было $m-1$; украдено денег $a(m-1)^2$

№2.

Возведём ур-ние в квадрат и сложим, получим

$(x^2+t^2)(z^2+y^2) = 50 \Rightarrow \begin{cases} x^2+t^2=5 \\ z^2+y^2=10 \end{cases}, \begin{cases} x^2+t^2=25 \\ z^2+y^2=2 \end{cases}, \begin{cases} x^2+t^2=2 \\ z^2+y^2=25 \end{cases}, \begin{cases} x^2+t^2=10 \\ z^2+y^2=5 \end{cases}$

Решая эти системы с учётом натуральных x, y, z, t, получим ответ.

Ответ: $(1,1,2,3)$; $(3,2,1,1)$; $(1,1,3,1)$; $(1,3,1,1)$ +

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	+	0	0	6

6 баллов фее

Место для скрепки.

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3.

Обозначим $y(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$; при $x \geq 0$, $y(0) = 0$

$y'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ => при $x > 0$, $y'(x) > 0$, значит $y(x)$ возрастает

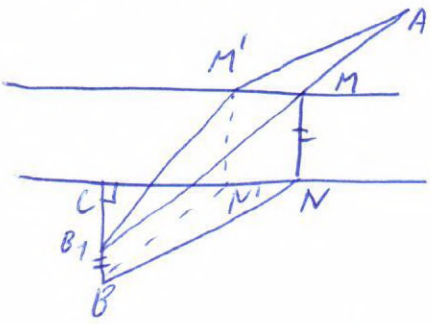
значит $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} > 0$

подставив в неравенство $x = 0{,}1$, получим $\ln(1{,}1) > \frac{1}{11}$

Ответ: первое неравенство больше. +

№4.

Опустим из точки B перпендикуляр BC на ближайшую к ней прямую $B_1B = MN$ (ширина НКМ), тогда, где бы мы не строили мост $M'N'$ длина пути $BN'M'A = BN' + M'N' + M'A$. Тогда нужно минимизировать длину ломаной B_1MA, так как $M'N'$ величина постоянная, тогда точка M' должна лежать на прямой B_1A, т.к. совпала с точкой M



+

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5

$f(x) = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 2$; имеет общий период π

Найдём нули $f(x)$: $\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Rightarrow \cos x \cos 2x \cos 5x = 0$

значит $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi l}{5}$; $k, m, l \in Z$

а в промежутке $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{11\pi}{10}\right)$, длина которого равна π,

$f(x)$ имеет нули в точках $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{10}$

методом интервалов с уч-м периодичности находим, что

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{10} + \pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{10} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right] \cup \left[\frac{9\pi}{10} + \pi k; \frac{11\pi}{10} + \pi k\right] \cup$

$\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$, $k \in Z$

№6.

$x + y = a$; $xy = b$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} ab + a + b = 11 \\ ab(a+b) = 30 \end{cases}$ $\Rightarrow$ по т. обратной т. Виета следует,

что $\begin{cases} ab = 5 \\ a + b = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} b = 5 \\ a = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} b = 1 \\ a = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$,

$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ решая эти системы, получим

Ответ: $(2; 1)$; $(1; 2)$; $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$; $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Деев Михаил Эдуардович (дата рождения 22.01.1999)
ученик 11 класса, гимназия МИИТа Гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **44952**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 04 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Деев)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С.А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант №4.

Задание №1. 6 баллов

Пусть площадь поля $S_{га} \Rightarrow t = \frac{S}{6}$;

Составим время работ:

$$\frac{S}{24} + \frac{S}{24} + \frac{S}{12} = \frac{S}{6} \Rightarrow \frac{S}{6} - \frac{S}{8} = 4$$

$S = 96$, $t = 12$ часов

Ответ: планировали начать работу в 00 часов.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
+	+	+	+	+	0	0	+	+	6

Задание №2

Сложим и вычтем уравнения

$$\begin{cases} (y+z)(x+t) = 12 \\ (y-z)(x-t) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+z)(x+t) = 12 \\ \left[\begin{cases} y-z = 2 \\ x-t = 1 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} y-z = 1 \\ x-t = 2 \end{cases} \right. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y = z+2 \\ x = t+1 \\ (2z+2)(2t+1) = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = z+1 \\ x = t+2 \\ (2z+1)(t+1) = 6 \end{cases}$

продолжение на стр. № 02.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\begin{cases} y=3 \\ x=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$$

+

Ответ: $y=3; x=2; z=1; t=1$

$y=2; x=3, z=1; t=1.$

Задание № 3.

$\ln\frac{5}{4} \vee \frac{1}{5} \Longleftrightarrow \frac{5}{4} \vee e^{\frac{1}{5}} \Longleftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^5 \vee e$

$\frac{3125}{1024} \vee e$

$e < 3 < \frac{3125}{1024}$

$\frac{3125}{1024} > e$

$\frac{3125}{1024} > 3 \Longleftrightarrow$

$e < 3.$

$e < 3 < \frac{3125}{1024}$

Ответ: первое больше.

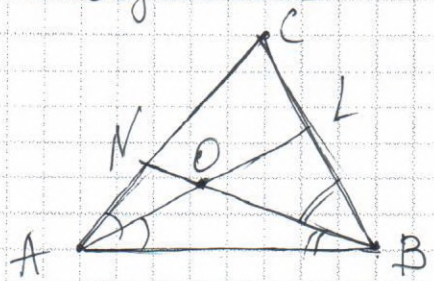
Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задание № 4.



$h_a < l_a < 1$

$h_b < l_b < 1$

$h_c < l_c < 1$ +

$AB < AO + OB < AL + BM < 2$

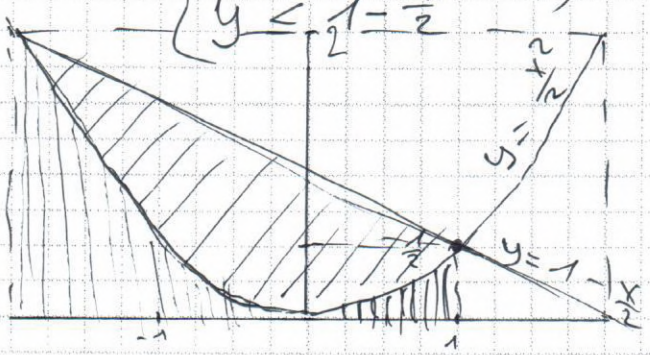
по неравенству $AC < 2$; $BC < 2$

$S = \frac{1}{2} h_a \cdot BC < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$, ч.т.д.

Задание № 7.

Замена y на $-y$ не меняет равенство $\Rightarrow$ фигура симметрична относительно оси OX. Рассмотрим $y \geq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x^2}{2} \\ y \leq 1 - \frac{x}{2} \end{cases}$ (1) + или $\begin{cases} y \leq \frac{x^2}{2} \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ (2)



$S_{тр} = \frac{0{,}5 + 2}{2} \cdot 3 = \frac{15}{4}$

Ответ: $\frac{15}{2}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задание № 8

$a \geq 0$ $\sqrt{(x+3)^2+9b^2-9}+\sqrt{(x+3)^3+9b^2-9}=6a$

Замена x на $-x$ не меняет у-ие

$\Rightarrow x=0$

Подставим:

$\sqrt{9b^2}+\sqrt{9b^2}=6a$ $6|b|=6a$ $a=|b|$

$\Rightarrow \sqrt{9a^2-6x+x^2}+\sqrt{9a^2+6x+x^2}=6a$ возведем в квадрат:

$\sqrt{(9a^2+x^2)^2-36x^2}=9a^2-x^2$;

Возведем в квадрат:

$36x^2(a^2-1)=0$

Если $a \neq 1$, то $x=0$ ед. решение

Если $a=1$, то $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}=6$

$\Leftrightarrow |x-3|+|x+3|=6 \Rightarrow x \in [-3;3]$ не единств. решение $\Rightarrow a \neq 1$

Ответ: $a \in [0;1) \cup (1;+\infty)$.

+

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Куртикова Алия Романовна (дата рождения 28.05.1999)
ученица 11 класса, средняя школа МАОУ "Куровская СОШ №2" (Куровское)
регистрация № **46106**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника Куртикова (Куртикова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Рядинов)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

3 ВАРИАНТ

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	0	0	+	6

№1.

Обозначим через x число апельсинов, которое имел отец до распределения между сыновьями. Он даёт первому сыну число апельсинов, равное $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$; у него остаётся $x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$.

Затем он даёт второму сыну половину остатка, или $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$, увеличенную на $\frac{1}{2}$;

это составляет $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$. Тогда у него остаётся $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$.

Наконец он даёт третьему сыну $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$. Т.к. у него ничего больше не остаётся, то должно быть $\frac{x}{8}+\frac{1}{8}=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$, откуда $x=7$;

Ответ: у отца - 7 апельсинов; у I сына - 4; у II сына - 2; у III - 1.

№2.

Возведём оба уравнения в квадрат, получим систему-следствие. Сложив уравнения этой системы, получим $(m^2+k^2)(n^2+l^2)=5\cdot 41$. Т.к. все переменные натуральные числа, то равенство возможно лишь в двух случаях:

$$m^2+k^2=5 \quad \text{или} \quad n^2+l^2=5.$$

Из первого равенства получим, что $m=2, k=1$, либо $m=1; k=2$.

Подставляя эти числа в исходную систему, получим

$$\begin{cases} 2n+l=13 \\ n-2l=6 \\ m=2;\ k=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n+2l=13 \\ 2n-l=6 \\ m=1;\ k=2 \end{cases}$$

Первая система не имеет решений в целых числах. Из второй системы получаем $n=5$, $m=1, l=4, k=2$. Если $n^2+l^2=5$, то либо $n=2, l=1$, либо $n=1, l=2$.

Снова получаем две системы:

$$\begin{cases} n=2, l=1 \\ 2m+k=13 \\ 2k-m=6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n=1; l=2 \\ m+2k=13 \\ k-2m=6. \end{cases}$$

Из первой системы находим, что $n=2, m=4, l=1, k=5$. Вторая - не имеет решений в натур. числах.

Ответ: $\{(5;1;4;2),(2;4;1;5)\}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

$\ln 1{,}2 \vee \frac{1}{6}$

$1{,}2 \vee e^{\frac{1}{6}}$

$(1{,}2)^6 \vee e$

$(1{,}44)^2 \cdot 1{,}44 \vee e$

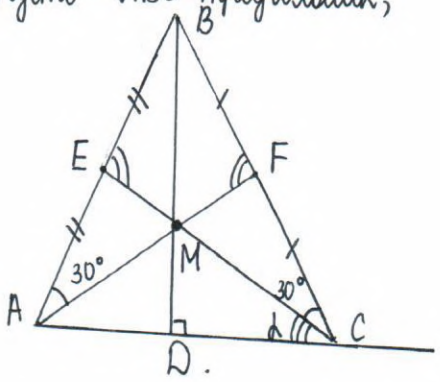
$2{,}0736 \cdot 1{,}44 \vee e$

Так как $2{,}07 \cdot 1{,}4 = 2{,}898 > e = 2{,}718$, то первое число больше второго

Ответ: первое число больше.

№4.

~~Пусть ABC треугольник,~~



$\Delta ABF \sim \Delta BCE$ по двум углам ($\angle B$ - общий);

из подобия имеем:

$\frac{BF}{AB} = \frac{EB}{BC}$; $\frac{\frac{1}{2}BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{BC} \Rightarrow BC = AB$, т.е.

ΔABC - равнобедренный. Пусть т.M - точка пересечения медиан. Тогда $BD = 3MD$.

Обозначим $\angle MCD = \alpha$. Если $\operatorname{tg}\angle MCD = t$, то $\operatorname{tg}\angle BCD = 3t$. Отсюда $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}(\angle BCD - \angle MCD) =$

$= \frac{3t-t}{1+3t^2} = \frac{2t}{1+3t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2t\sqrt{3} = 1+3t^2 \Rightarrow \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0.$

Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$.

Поэтому ΔABC - правильный.

Ч.т.д.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

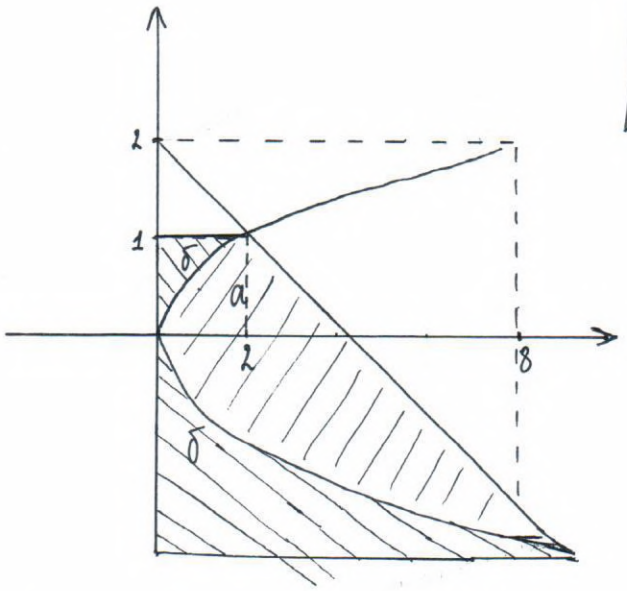
№7.

Замена x на $-x$ не меняет условия $\Rightarrow$ фигура симметрична относительно оси Oy.

Рассмотрим $x \geq 0$

$$|x-2y^2|+x+2y^2 \leq 8-4y. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 2y^2 \\ y \leq 2-\frac{x}{2}\end{cases} \\ \begin{cases}x \leq 2y^2 \\ -2 \leq y \leq 1\end{cases}\end{array}\right.$$

а, б — Вместе трапеция $S_{тр} = \frac{2+8}{2} \cdot 3 = 15$



Ответ: 30

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8

$b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+4a^2-4} + \sqrt{(x-2)^2+4a^2-4} = 4b$

Если x_0 - решение, то и $-x_0$ - решение $\Rightarrow x_0 = 0$

$4|a| = 4b \Rightarrow b = |a| \Rightarrow \sqrt{4b^2+4x+x^2} + \sqrt{4b^2-4x+x^2} = 4b$ возведём в квадрат $\Leftrightarrow$

$\sqrt{(4b^2+x^2)^2-16x^2} = 4b^2-x^2$ возведём в квадрат $\Leftrightarrow 16b^4+8b^2x^2+x^4-16x^2 = 16b^4-8b^2x^2+x^4 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 16x^2(b^2-1) = 0$

Если $b \neq 1$, то единственное решение $x = 0$

Если $b = 1$, то $\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-4x+4} = 4 \Leftrightarrow |x+2|+|x-2| = 4$

Решение этого уравнения $x \in [-2; 2] \Rightarrow b = 1$ не подходит;

Ответ: $b \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5

$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x > 2$

$(\sin^2 x + \sin^2 4x) + (\sin^2 2x + \sin^2 3x) > 2.$

$\frac{1}{2}\sin^2 \frac{5x}{2} \cos^2 \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 \frac{5x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} > 2$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Стороженко Екатерина Сергеевна (дата рождения 25.10.1997)
ученица 11 класса, средняя школа ГБОУ ЦО 1491 (Ул. Каргапольская, 13 к. 2)
регистрация № **46578**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Стороженко)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 4.

Б1 Пусть площадь поля S = t = $\frac{S}{8}$

получили время работы

$$\frac{S}{24} + \frac{S}{24} + \frac{S}{12} = \frac{S}{6} \Rightarrow \frac{S}{6} - \frac{S}{8} = 4 \Rightarrow S = 96$$

t = 12 часов $\Rightarrow$ планировали начать работу в 08 часов

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	0	+	+	6

Б2. Сложим уравнения.

$$\begin{cases} (y+z)(x+t) = 12 \\ (y-z)(x-t) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+z)(x+t) = 12 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - z = 2 \\ x - t = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y - z = 1 \\ x - t = 2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y = z + 2 \\ x = t + 1 \\ (2z + 2)(2t + 1) = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = z + 1 \\ x = t + 2 \\ (2z + 1)(t + 1) = 6 \end{cases}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Ответ. $\begin{cases} y=3 \\ x=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$

53. $\ln \frac{5}{4} \vee \frac{1}{5}$

$\frac{5}{4} \vee e^{\frac{1}{5}}$

$\left(\frac{5}{4}\right)^5 \vee e$

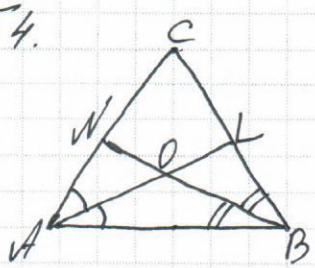
$\frac{3125}{1024} \vee e$

$\vee$

3

Ответ, ~~[illegible]~~ первое больше.

54.



$h_a < l_a < 1$

$h_b < l_b < 1$

$h_c < l_c < 1$

$AB < AO + OB < AL + BM < 2$

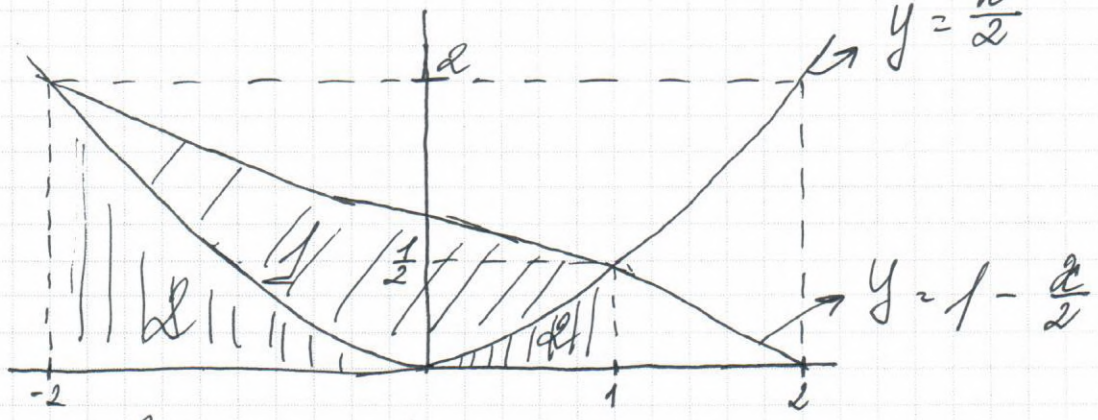
Аналогично $AC < 2$; $BC < 2$

$S = \frac{1}{2} h_a \cdot BC < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ ч.т.д.

57. Замена y на $-y$ не меняет уравнения фигура симметрична относительно оси Ox. Рассмотрим $y \geq 0$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x^2}{2} \\ y \leq 1 - \frac{x}{2} \end{cases}$ (1) или $\begin{cases} y \leq \frac{x^2}{2} \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ (2)



Вместе трапеции

$S_{тр} = \frac{2 \cdot 9 + 2}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2}$

Ответ. $\frac{15}{2}$

№8. $a \geq 0$ $\sqrt{(x-3)^2 + 9b^2 - 9} + \sqrt{(x+3)^2 + 9b^2 - 9} = 6a$

Замена x на $-x$ не меняет уравнение

$\Rightarrow x = 0$

Подставим $\sqrt{9b^2} + \sqrt{9b^2} = 6a$ $6|b| = 6a$, $a = |b|$

$\Rightarrow \sqrt{9a^2 - 6x + x^2} + \sqrt{9a^2 + 6x + x^2} = 6a$

Возведем в квадрат:

$\sqrt{(9a^2 + x^2)^2 - 36x^2} = 9a^2 - x^2$.

Возведем в квадрат

$36x^2(a^2 - 1) = 0$,

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Если $a \neq 1$, то $x = 0$ ед. решение

Если $a = 1$, то $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} = 6 \Leftrightarrow$

$|x-3| + |x+3| = 6 \Rightarrow x \in [-3; 3]$ не единств. решение $\Rightarrow a \neq 1$

Ответ. $a \in [0; 1) \vee (1; +\infty)$.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Гончарова Анна Валерьевна (дата рождения 10.09.1998)
ученица 11 класса, гимназия МИИТа Гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **48475**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 3 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Гончарова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцева С.А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант II

6 баллов

№ 1

Поскольку при выполнении второй половины производительность была в 1,5 меньше, то и время затраченное на вторую половину работы в 1,5 раза больше, чем на первую, и это ровно лишний час работы, т.е. половина времени, затраченного на первую половину работы равна 1 часу, а значит все первая половина поля была вспахана за 2 часа, а потом вторая - за 3 часа, значит вся работа была выполнена за 5 часов, отсюда начало — 5 час. вечера

Площадь поля равна: $9 \times 2 + 6 \times 3 = 36$ соток

Ответ: Начало — 5 вечера, площадь - 36 соток

№ 2

Возводим обе части уравнения в квадрат и складываем. Получим:

$$(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_3^2) = 122 = 61 \cdot 2$$

$$\Downarrow$$

либо $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 61 \\ x_2^2 + x_3^2 = 2 \end{cases}$ либо $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 2 \\ x_2^2 + x_3^2 = 61 \end{cases}$

Из первой системы получим $x_3 = x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 6,\ x_4 = 5.$

Из второй системы имеем $x_1 = x_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 5,\ x_3 = 6.$

Ответ: $(1; 5; 6; 1)$, $(6; 1; 1; 5)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	4	0	0	6

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

N 3

Пусть $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$, $f(0)=0$,

находим $f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ при $x>0$.

Следовательно $f(x)$ монот. возрастает, значит $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$. При $x = 0{,}01$ получим $\ln 1{,}01 > \frac{2}{201}$

Ответ: первое число больше

N 6

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{1+xy+\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}+2+xy} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{xy}-1+xy}{\frac{1}{xy}-2+xy} = 9 \end{cases}$$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \alpha$, $xy + \frac{1}{xy} = \beta \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} \cdot \dfrac{1+\beta}{\beta+2} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2} \cdot \dfrac{\beta-1}{\beta-2} = 9 \end{cases}$$

Пусть $\alpha\beta = a$, $\alpha+\beta = b$,

тогда $\frac{a+b+1}{a+2b+2} = \frac{49}{81}$ и $\frac{a-b+1}{a-2b+4} = 9 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)^2+4} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4} = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow b = \frac{8a+35}{17}$, подставим в первое уравнение, получим

$\frac{25a+52}{33a+138} = \frac{49}{81} \Rightarrow 408a = 2550$, значит $a = 6{,}25$ и $b = 5$.

Отсюда $\begin{cases} \alpha\beta = \frac{25}{4} \\ \alpha+\beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 2x$ или $y = \frac{x}{2}$

$\frac{1}{xy} + xy = \frac{5}{2} \Rightarrow xy = 2$, или $xy = \frac{1}{2}$ отсюда

Ответ: $(2,1); (-2;-1); (1,2); (-1;-2); (1;\frac{1}{2}); (-1;-\frac{1}{2}); (\frac{1}{2};1); (-\frac{1}{2};-1)$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

N5

$f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ имеет общий период 2π.

Находим нули этой функции $2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x = 0$,

$\cos x \cos\frac{x}{2} \sin\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi l}{5}$,

где $m, n, l \in Z$

Рассмотрим промежуток $[0; 2\pi)$ длиной 2π. На этом промежутке $f(x)$ равна нулю в точках $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}$,

поэтому отрезок $[0; 2\pi)$ разделен на 8 интервалов $\frac{8\pi}{5}$. на каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак. А тогда методом интервалов с учетом периодичности $f(x)$ Ответ: $x \in (\frac{2\pi}{5} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{4\pi}{5} + 2\pi k; \pi + 2\pi k) \cup$

$\cup (\frac{6\pi}{5} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{8\pi}{5} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ $k \in Z$

N4

Рассмотрим $\triangle ABC$, $BC = a$ $\angle B = \alpha$

$AC = b$ $\angle C = \beta$

$AB = c$, $\angle A = \gamma$

По условию $\alpha = 2\beta \Rightarrow \angle A = \pi - 3\beta$

По т. синусов $c = 2R\sin\beta$, $b = 2R\sin 2\beta$, $a = 2R\sin 3\alpha$

Нужно доказать, что $b^2 = ac + c^2$.

Значит должно выполняться равенство $\sin^2 2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\sin^2\beta\cos^2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Rightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = \sin\beta + \sin 3\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = 2\sin 2\beta\cos\beta = 4\sin\beta$

А тогда исходное равенство верно, что и требовалось доказать.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Кирина Анастасия Сергеевна (дата рождения 03.12.1999)
ученица 11 класса, гимназия МИИТа гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **45626**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 4 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Кирина)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Гайцева С. А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1 Вариант 1

Пусть x - сумма денег, которую красивша Алиса

y - сумма денег, которую получил каждый лисенок.

Тогда первый получил: $a + \frac{x-a}{m} = y$

Второй получил $2a + \frac{x-y-2a}{m} = y$

n-ый лисенок получил: $na + \frac{x-(n-1)y-na}{m} = y$

Получаем систему:

$$\begin{cases} (m-1)a + x = my \\ 2(m-1)a + x = (m+1)y \\ 3(m-1)a + x = (m+2)y \\ \dots \\ n(m-1)a + x = (m+n-1)y \end{cases}$$

Вычитая из второго ур-я, первое, получаем

$(m-1)a = y$

Подставляя y в первое ур-е, имеем: $(m-1)a + x = m(m-1)a$

$x = (m-1)^2 a$, Тогда $\frac{x}{y} = \frac{(m-1)^2 a}{(m-1)a} = m-1$

Теперь нетрудно доказать, что всем лисятам было выдано денег поровну. Ответ: Лисят было $(m-1)$; украдено денег $a(m-1)^2$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	+	0	0	6

+

Регистрация №45626

Страница 01 из 04

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2 Возведем эти ур-я в квадрат, и сложим. Получим следствие

$$(x^2+t^2)(z^2+y^2)=50$$

$$\begin{cases} x^2+t^2=5 \\ z^2+y^2=10 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2+t^2=25 \\ z^2+y^2=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2+t^2=2 \\ z^2+y^2=25 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2+t^2=10 \\ z^2+y^2=5 \end{cases}$$

Решая эти системы, с учетом натуральности x, y, z, t получим

Ответ: $(1,1,2,3)$; $(3,2,1,1)$; $(4,1,3,1)$; $(1,3,4,1)$

№3

Обозначим $y(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ при $x \geq 0$

$y(0)=0$

$y'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ $\Rightarrow$ при $x>0$ $y'(x)>0$, значит $y(x)$ возрастает, поэтому $\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}>0$

Полагая в неравенстве $x=0,1$, имеем $\ln(1,1)>\frac{1}{11}$

Ответ: первое число больше.

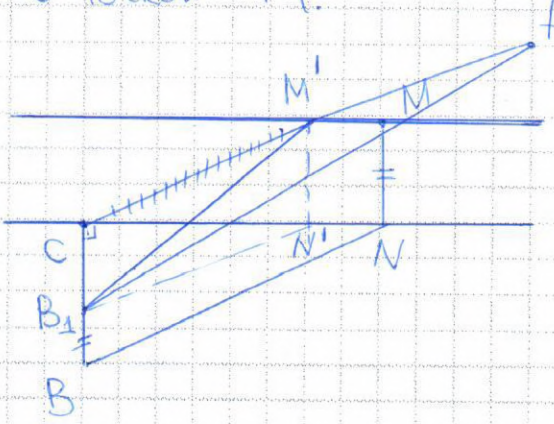
№4 Опустим из точки B перпендикуляр BC на ближайший берег и пусть $B_1B=MN$ (ширина реки (см. рис.) Тогда, где бы мы не построили мост $M'N'$ ~~[illegible]~~ длина пути $BN'M'A=BN'+M'N'+M'A$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4 (продолжение)

А тогда нужно минимизировать длину ломаной B_1MA, т.к. MN величина постоянная

А тогда точка M' должна лежать на прямой B_1A, т.е. совпасть с точкой M.



№5

$f(x) = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 2$

имеет общий период π

Найдем нули $f(x)$: $\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2}$

$-2 = 0 \Rightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \cos 2x \cos 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi m$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi l}{5}$, $k, l, m \in \mathbb{Z}$

На промежутке $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{11\pi}{10}\right)$, длина которого равна π, $f(x)$ имеет нули в точках $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5 (продолжение)

Методом интервалов, с учетом периодичности находим, что

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{10}+\pi k\right]\cup\left[\frac{9\pi}{10}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]\cup\left[\frac{9\pi}{10}+\pi k;\frac{11\pi}{10}+\pi k\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$ $k\in Z$.

№6

$x+y=a$

$xy=b$

Тогда $\begin{cases} ab+a+b=11 \\ ab(a+b)=30 \end{cases}$ $\Rightarrow$ по т. обратной Виета следует, что $\begin{cases} ab=5 \\ a+b=6 \end{cases}$ или $\begin{cases} ab=6 \\ a+b=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}, \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}, \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=5 \end{cases}, \begin{cases} x+y=5 \\ xy=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases}, \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ Решая эти системы получим ответ: $(2,1);(1,2),\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right),\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Астахова Римма Александровна (дата рождения 03.09.1998)
ученица 11 класса, средняя школа МОУ СОШ 13 (Железногорск)
регистрация № **42743**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 2 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Астахова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 — 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вар. II

1. Поскольку при выполнении второй половины работы производительность была в 1,5 меньше, то и время затраченное на вторую половину работы в 1,5 раза больше, чем на первую, и это дало лишний час работы, т.е. половина времени, затраченного на первую половину работы равна 1 часу, а значит вся 1-ая половина поля была вспахана за 2 часа, а тогда вторая за 3 часа. Значит вся работа была выполнена за 5 час, отсюда начало в 5 час вечера. Площадь поля равна: $9 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 36$ соток. Ответ: начало - 5 часов вечера, площадь 36 соток.

2. Возводим обе части уравнений в квадрат и складываем. Получим:
$(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_3^2) = 122 = 61 \cdot 2 \Rightarrow$ либо $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 61 \\ x_2^2 + x_3^2 = 2 \end{cases}$ либо $\begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 2 \\ x_2^2 + x_3^2 = 61 \end{cases}$

Из первой системы получим $x_3 = x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 6,\ x_4 = 5$

Из второй системы имеем $x_1 = x_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 5,\ x_3 = 6$

Ответ: (1; 5; 6; 1), (6; 1; 1; 5)

3. Пусть $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$, $f(0) = 0$, находим $f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ или $x > 0$. Следовательно $f(x)$ монотон. возрастает, значит $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$. $x = 0{,}01$. Получим $\ln 1{,}01 > \frac{2}{201}$. Ответ первое число больше

4. Рассмотрим треугольник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, $\angle A = \gamma$. По условию $\alpha = 2\beta \Rightarrow \angle A = \pi - 3\beta$. По т. синусов $c = 2R\sin\beta$, $b = 2R\sin 2\beta$, $x = 2R\sin 3\beta$. Нужно доказать, что $b^2 = ac + c^2$. Значит должно выполняться равенство: $\sin^2 2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Leftrightarrow 4\sin^2\beta\cos^2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta\sin 3\beta \Rightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = \sin\beta + \sin 3\beta \Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = 2\sin 2\beta\cos\beta = 4\sin\beta\cos^2\beta$. А тогда исходное равенство верно, что и требовалось доказать.

5. $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ имеет общий период 2π. Находим нули этой функции: $2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x = 0$, $\cos x \cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi\ell}{5}$, где $m, n, \ell \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим промежуток $[0, 2\pi)$ длиной 2π. На этом промежутке $f(x)$ равна нулю в точках $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{5}$. Поэтому отрезок $[0, 2\pi)$ разрезается на 8 интервалов, на каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак. А тогда методом интервалов с учетом периодичности $f(x)$ ~~соответствует~~ отвеч: $x \in (\frac{2\pi}{5} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{4\pi}{5} + 2\pi k; \pi + 2\pi k) \cup (\frac{6\pi}{5} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{8\pi}{5} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 — 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

6. $\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{1+xy+\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}+2+xy} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{xy}-1+xy}{\frac{1}{xy}-2+xy} = 9 \end{cases}$ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\alpha$ $xy+\frac{1}{xy}=\beta \Rightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} \cdot \dfrac{1+\beta}{\beta+2} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2} \cdot \dfrac{\beta-1}{\beta-2} = 9 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} \cdot \dfrac{1+\beta}{\beta+2} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2} \cdot \dfrac{\beta-1}{\beta-2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)2+4} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4} = 9 \end{cases}$

Пусть $\alpha\beta=a$, $\alpha+\beta=b$, тогда $\frac{a+b+1}{a+2b+2}=\frac{49}{81}$ и $\frac{a-b+1}{a-2b+4}=9 \Rightarrow b=\frac{8a+35}{17}$, подставляем в первое уравнение, получим $\frac{25a+52}{33a+138}=\frac{49}{81} \Rightarrow$ $408a=2550$, значит $a=6{,}25$ и $b=5$. Отсюда $\begin{cases} \alpha\beta=\frac{25}{4} \\ \alpha+\beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow y=2x$ или $y=\frac{x}{2}$

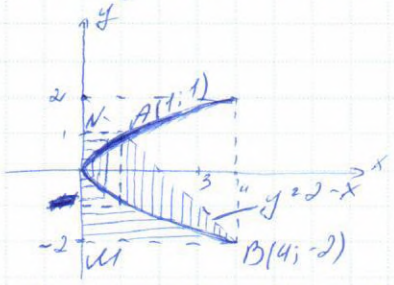
$\frac{1}{xy}+xy=\frac{5}{2} \Rightarrow xy=2$ или $xy=\frac{1}{2}$. Отсюда ответ: $(2,1)$; $(-2;-1)$; $(1,2)$; $(-1;-2)$; $(1;\frac{1}{2})$; $(-1;-\frac{1}{2})$; $(\frac{1}{2};1)$; $(-\frac{1}{2};-1)$

7. Имеем: $|x-y|^2+x+y^2 \le 4-2y$. А тогда: I область $\begin{cases} x \ge y^2 \\ y \in 2-x \end{cases}$,

II область $\begin{cases} x \le y^2 \\ -2 \le y \le 1 \end{cases}$. В область $x \ge 0$ строим указанные области, искомая фигура представляет трапецию $MNAB$ (см. рисунок). Площадь равна:

$S=\frac{1}{2} \cdot 3\,(4+1)=7{,}5$.

А тогда ответ: $\{15\}$



8. Из симметрии уравнения следует, что числа x и $2-x$ одновременно являются корнями этого уравнения. А тогда в силу единственности

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	+	+	−	7

Регистрация №42743 — Страница 02 из 02

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Болотина Евгения Дмитриевна (дата рождения 17.08.1998)
ученица 11 класса, средняя школа ГБОУ школа №932 (Москва)
регистрация № **47337**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 2 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Болотина)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Трубаев)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

I вариант

№1 Т.к. при выполнении 2-й половины работы производительность была в 1,5 раза меньше, то время, затраченное на 2-ую половину работы - в 1,5 раза больше, чем на 1-ю. Это дало лишний час работы т.е. половину времени, затраченного на первую половину работы = 1 часу, => вся первая половина поля была вспахана за 2 часа => вторая половина за 3 часа. => вся работа была выполнена за 5 часов. => начало - в 5 часов вечера. Площадь поля равна: $9 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 36$ соток.

Ответ: начало - 5 вечера. Площадь - 36 соток. +

№2 Возведем обе части уравнения в квадрат и складываем:

$$(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_3^2) = 122 \Rightarrow (x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_3^2) = 61 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 61 \\ x_2^2 + x_3^2 = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1^2 + x_4^2 = 2 \\ x_2^2 + x_3^2 = 61 \end{cases}$$

Из первой системы получаем $x_3 = x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 6,\ x_4 = 5$

Из второй системы получаем $x_1 = x_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 5,\ x_3 = 6$

Ответ: $(1; 5; 6; 1), (6; 1; 1; 5)$ +

№3 Пусть $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$, $f(0) = 0$, находим $f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$, где $x > 0$ =>

=> $f(x)$ - возрастает, => $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$, при $x = 0{,}01$ получим, $\ln 1{,}01 > \frac{2}{201}$

Ответ: первое число больше. +

№4 Рассмотрим ΔABC. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, $\angle A = \gamma$. По усл. $\alpha = 2\beta \Rightarrow \angle A = \pi - 3\beta \Rightarrow$ по теореме синусов:

$c = 2R\sin\beta$; $b = 2R\sin 2\beta$, $\lambda = 2R\sin 3\beta$. Нужно доказать что $b^2 = ac + c^2$.

Значит должно выполняться равенство $\sin^2 2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta \sin 3\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\beta\cos^2\beta = \sin^2\beta + \sin\beta \cdot \sin\beta\sin 3\beta \Rightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = \sin\beta + \sin 3\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\beta\cos^2\beta = 2\sin 2\beta\cos\beta = 4\sin\beta\cos^2\beta \Rightarrow$ исходное равенство верно

ч.т.д.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	+	0	0	6

6 баллов

Регистрация №47337

Место для скрепки.

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5 $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$ имеет общий период 2π.

Найдем нули ф-ии. $2\sin 2x\cos x+2\sin 3x\cos x=0$, $\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{2\pi\ell}{5}$, где $m, n, \ell\in Z$.

Рассмотрим промежуток $[0; 2\pi)$ длиной в 2π, где $f(x)=0$ в т.о. $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{5}$, π, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{5}$ $\Rightarrow$ отрезок $[0; 2\pi)$ - разделен на 8 интервалов, на каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак. Тогда методом интервалов с учётом периодичности:

Ответ: $x\in\left(\frac{2\pi}{5}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{4\pi}{5}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)\cup\left(\frac{6\pi}{5}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{8\pi}{5}+2\pi k; 2\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$

№6
$$\begin{cases}\dfrac{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}}\cdot\dfrac{1+xy+\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}+2+xy}=\dfrac{49}{81}\\ \dfrac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}}\cdot\dfrac{\frac{1}{xy}-1+xy}{\frac{1}{xy}-2+xy}=9\end{cases}$$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\alpha$, $xy+\frac{1}{xy}=\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}\cdot\dfrac{1+\beta}{\beta+2}=\dfrac{49}{81}\\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2}\cdot\dfrac{\beta-1}{\beta-2}=9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)2+4}=\dfrac{49}{81}\\ \dfrac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4}=9\end{cases}$$

Пусть $\alpha\beta=a$, $\alpha+\beta=b$, тогда $\frac{a+b+1}{a+2b+4}=\frac{49}{81}$ и $\frac{a-b+1}{a-2b+4}=9 \Rightarrow$

$b=\frac{8a+35}{17}$, подставляя в 1-е неравенство получаем $\frac{25a+52}{33a+137}=\frac{49}{81}\Rightarrow$

$\Rightarrow 408a=2550$, значит $a=6{,}25$ и $b=5$ откуда $\begin{cases}\alpha\beta=\frac{25}{4}\\ \alpha+\beta=5\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\beta=\frac{5}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}\Rightarrow y=2x$ или $y=\frac{x}{2}$

$\frac{1}{xy}+xy=\frac{5}{2}\Rightarrow xy=2$ или $xy=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 1

~~отсюда:~~ ~~x=1 или~~

$\Rightarrow$ Ответ: $(2; 1)$; $(-2; -1)$; $(1; 2)$; $(-1; -2)$; $\left(1; \frac{1}{2}\right)$; $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Сафонова Ольга Павловна (дата рождения 24.07.1998)
ученица 11 класса, средняя школа Гимназия МИИТ (Москва)
регистрация № **43707**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 4 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Сафонова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 4

№1.

Пусть площадь поля S га $\Rightarrow t = \frac{S}{8}$ Получим время работы $\frac{S}{24} + \frac{S}{24} + \frac{S}{12} = \frac{S}{6}$

$\Rightarrow \frac{S}{6} - \frac{S}{8} = 4 \Rightarrow S = 96,\ t = 12$ ч

+

Планировали начать работу в 00 часов.

№2

Сложим уравнения и вычтем

$$\begin{cases} (y+z)(x+t) = 12 \\ (y-z)(x-t) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+z)(x+t) = 12 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-z = 2 \\ x-t = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y-z = 1 \\ x-t = 2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

+

1) $\begin{cases} y = z+2 \\ x = t+1 \\ (2z+2)(2t+1) = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = z+1 \\ x = t+2 \\ (2z+1)(t+1) = 6 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y=3 \\ x=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	0	+	+	6

6 б.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

$\ln\frac{5}{4} * \frac{1}{5} <=> \frac{5}{4} * e^{\frac{1}{5}} <=> \left(\frac{5}{4}\right)^5 * e <=> \frac{3125}{1024} * e =>$

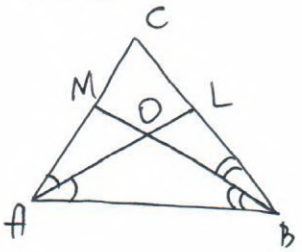
$\frac{3125}{1024} \vee 3$

$=>$ первое больше.

Ответ: $\ln\frac{5}{4}$ больше.

+

№4



$h_a < l_a < 1$

$h_b < l_b < 1$

$h_c < l_c < 1$

$AB < AO + OB < AL + BM < 2$

Аналогично:

$AC < 2$;

$BC < 2$;

$S = \frac{1}{2} h_a \cdot BC < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ ч.т.д.

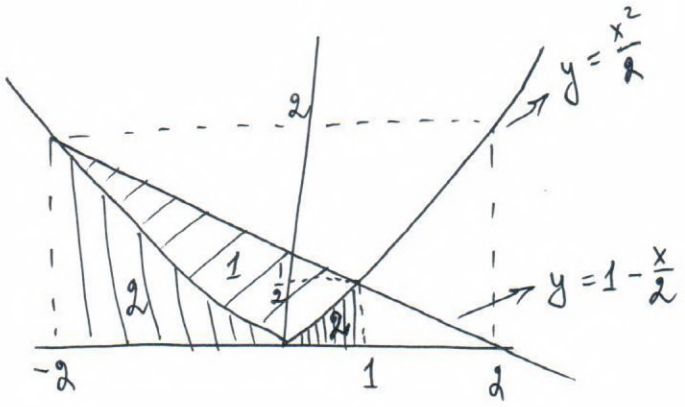
+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7

Замена y на $-y$ не меняет равенства $\Rightarrow$ фигура симметрична относительно оси Ox. Рассмотрим $y \geq 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x^2}{2} \\ y \leq 1 - \frac{x}{2} \end{cases} (1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \leq \frac{x^2}{2} \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} (2).$$



Вместе площади

$$S_{тр.} = \frac{0{,}5+2}{2} \cdot 3 = \frac{15}{4}$$

Ответ: $\frac{15}{2}$

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8

$a \geq 0$ $\sqrt{(x-3)^2+9b^2-9} + \sqrt{(x+3)^2+9b^2-9} = 6a$

Замена x на $-x$ не меняет уравнения $\Rightarrow x=0$.

Подставим: $\sqrt{9b^2} + \sqrt{9b^2} = 6a$ $6|b| = 6a$, $a = |b| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{9a^2-6x+x^2} + \sqrt{9a^2+6x+x^2} = 6a$ Возведем в квадрат:

$\sqrt{(9a^2+x^2)^2-36x^2} = 9a^2-x^2$. Возведем в квадрат.

$36x^2(a^2-1)=0$.

Если $a \neq 1$, то $x=0$ ед. решение.

Если $a=1$, то $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} = 6 \Leftrightarrow |x-3|+|x+3|=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-3;3]$ не единств. решение $\Rightarrow a \neq 1$

Ответ: $a \in [0;1) \cup (1;+\infty)$.

(+)

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Забавин Викентий Григорьевич (дата рождения 27.06.1998)
ученик 11 класса, средняя школа ГБОУ СОШ N 2087 (Москва)
регистрация № **42950**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Забавин)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Рядно в.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 4 (6 баллов [illegible])

№1 Пусть площадь поля была S га. По плану эту работу нужно было выполнить за время $t=\frac{S}{8}$. Однако из-за поломок тракторов на всю работу было затрачено время равное: $\frac{S}{24}+\frac{S}{24}+\frac{S}{12}=\frac{S}{6}$. Так как работа выполнена с опозданием на 4 часа, чем ранее планировалось, то получим: $\frac{S}{6}-\frac{S}{8}=4$. Отсюда находим, что $S=96$ га. Отсюда получается, что по плану на эту работу предполагалось затратить $\frac{96}{8}=12$ часов. А тогда работу начали в 00 час.

+

№2 Сложим первое и второе уравнение, а затем из первого вычтем второе. Получим систему:

$\begin{cases}(y+z)(x+t)=12\\(y-z)(x-t)=2\end{cases}$; Так как $y>z$ и $x>t$ то из второго уравнения следует, что либо $y-z=1$, $x-t=2$, либо $y-z=2$, $x-t=1$. Следовательно:

$\begin{cases}y=z+1\\x=t+2\\(y+z)(x+t)=12\end{cases}$ или $\begin{cases}y=z+2\\x=t+1\\(y+z)(x+t)=12\end{cases}$ Решая первую систему

Получим:

$(2z+1)(t+1)=6 \Rightarrow \begin{cases}2z+1=3\\t+1=2\end{cases} \Rightarrow z=1;\ y=2;\ t=1;\ x=3.$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	0	0	+	6

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Решая вторую систему, имеем:

$(2z+2)(2t+1)=12$, $(z+1)(2t+1)=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2t+1=3 \\ z+1=2 \end{cases} \Rightarrow t=1, z=1, y=3, x=2$

Проверка показывает, что эти числа удовлетворяют системе

Ответ: $\{(3;2;1;1), (2;3;1;1)\}$ (+)

№3

$(\ln \frac{5}{4} \vee \frac{1}{5}) \Leftrightarrow (\frac{5}{4} \vee e^{\frac{1}{5}}) \Leftrightarrow ((\frac{5}{4})^5 \vee e) \Leftrightarrow (\frac{3125}{\text{ком}} \vee e)$.

Дели $\frac{3125}{\text{ком}}$. Отсюда следует, что первое число больше 3,05 и следовательно ответ: первое число больше второго, т.к $e < 2,75$. (+)

№4 Пусть ABC треугольник, биссектрисы которого AL и BM пересекаются в точке O. (см. рис 1)

Обозначим через h_a - высоту, опущенную на сторону a, l_a - биссектрису на сторону a.

Решение: Так как $h_a < l_a < 1$, $h_b < l_b < 1$, $h_c < l_c < 1$, то докажем, что все стороны треугольника меньше 2. Из неравенства треугольника для $\triangle ABO$ следует, что $AB < AO + OB < AL + BM < 2$.

Аналогично доказывается, что $BC < 2$, $AC < 2$.

Площадь $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a h_a < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 < 1$. Что и

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

требовалось доказать. (+)

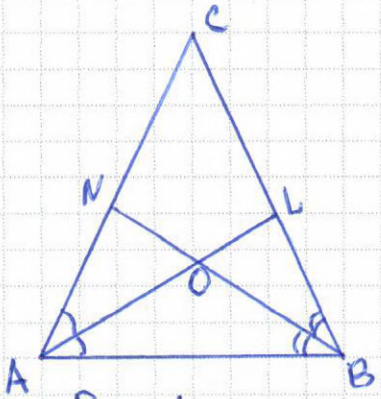


Рис. 1.

№5

Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$. Эта функция везде непрерывна. Общий наименьший период этой функции будет 2π. Найдем нули $f(x)$:

$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$, $2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x=0$,

$\cos x(\cos 2x+\cos 3x)=0$, $\cos x\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}\cos x=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\\ \cos\frac{5x}{2}=0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}x=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ \frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi l\end{bmatrix}\quad n,m,l\in Z\quad\begin{bmatrix}x=\frac{\pi}{2}+\pi m\\ x=\pi+2\pi n\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi l}{5}\end{bmatrix}\quad n,m,l\in Z$$

Рассмотрим промежуток $[0;2\pi]$ и отметим на этом промежутке точки, в которых функция $f(x)$ будет равна нулю. Это будут числа:

$\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{5};\pi;\frac{7\pi}{5};\frac{3\pi}{2};\frac{9\pi}{5}$, т.е. промежуток $[0;2\pi]$ разобьется на 8 отрезков. Определим знак $f(x)$ на каждом из этих отрезков (в силу непрерывности на каждом отрезке $f(x)$ сохраняет знак).

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Заметим, что в точке $x=\pi$ $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{5x}{2}$ одновременно равны нулю.



А тогда в соответствии с рисунком $f(x)>0$ будет: ответ:

$x\in\left(2\pi k;\frac{\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{7\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{9\pi}{5}+2\pi k;2\pi+2\pi k\right),\ k\in Z$

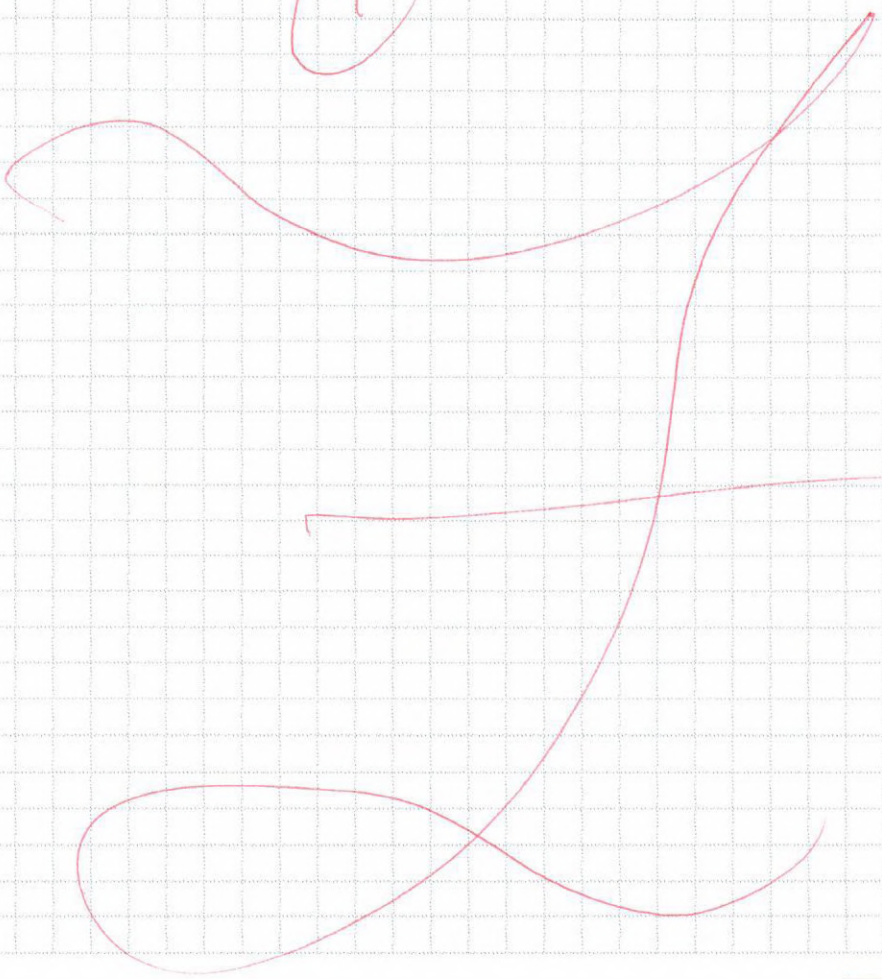
+

№8 Ясно, что $a\geq 0$. Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{(x-3)^2+9b^2-9}+\sqrt{(x+3)^2+9b^2-9}=6a$. Отсюда следует, что если x_0 – решение этого уравнения, то $-x_0$ также решение. В силу единственности получаем, что $x_0=0$. А тогда, подставив $x=0$ в исходное уравнение, получим необходимые условия на параметры: $|b|=a$. С учетом этого, получаем уравнение: $\sqrt{9a^2-6x+x^2}+\sqrt{9a^2+6x+x^2}=6a$. После возведения в квадрат будем иметь: $\sqrt{(9a^2+x^2)^2-36x^2}=9a^2-x^2$. Снова возведем в квадрат, получим: $81a^4+x^4+18a^2x^2-36x^2=81a^4+x^4-18a^2x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 36x^2(a^2-1)=0$. Если $a\neq\pm 1$, то $x=0$ будет

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

единственным решением уравнения. Так как $a \geq 0$, то рассмотрим случай когда $a = 1$. Подставляя в исходное уравнение $a = 1$, получим: $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} = 6 \Rightarrow |x-3|+|x+3| = 6$. Нетрудно найти, что решением этого уравнения является любое $x \in [-3;3]$, т.е. решение в данном случае не единственное, а значит $a \neq 1$. Ответ $a \in [0;1) \cup (1;+\infty)$.

4



Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

(Адрес площадки: Новосибирская область, г Карасук, ул Тургенева, д 14)

Титульный лист работы

Алтунян Артём Михайлович (дата рождения 27.03.1999)
ученик 11 класса, лицей МБОУ технический лицей №176 (Карасук)
регистрация № **48648**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 4 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Алтунян)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	0	±	0	0	−	4

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

① Пусть x – площадь поля, t – время начала работы (кол-во часов от 00:00)

Тогда: $\frac{x}{8}=12-t$ (1) – в уравнение, описывающее работу, если бы не было поломок.

$\frac{x}{3\cdot 8}+\frac{x}{4\cdot 6}+\frac{x\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}{\cancel{\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}5}=16-t$ (2) – уравнение, описывающее работу с поломками.

Решив систему уравнений 1 и 2 найдём x и t:

$$\begin{cases}\frac{x}{8}=12-t\\ \frac{x}{24}+\frac{x}{24}+\frac{\cancel{5}x}{12\cdot\cancel{5}}=16-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=96-8t\\ \frac{4x}{24}=16-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=96-8t\\ x=96-6t\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 96-8t=96-6t\Rightarrow 6t=8t\Rightarrow t=0$ (работа была начата в полночь)

Подставим значение t в ур. 1 и найдём x:

$\frac{x}{8}=12-0\Rightarrow x=96$ га.

Ответ: 96 га; 00:00.

② $\begin{cases}xy+zt=7\\ xz+yt=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy+zt+xz+yt=12\\ xy+zt-xz-yt=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(y+z)+t(y+z)=12\\ x(y-z)+t(y-z)=2\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}(x+t)(y+z)=12\\ (x-t)(y-z)=2\end{cases}$. Учитывая, что все числа натуральные и $\begin{cases}x>t\\ y>z\end{cases}$, то $\begin{cases}x+t\in N\\ y+z\in N\\ x-t\in N\\ y-z\in N\end{cases}$, тогда:

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

② (продолжение)

$\begin{cases} x+t=1 \\ y+z=12 \\ x-t=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ t=0 \\ y=7 \\ z=5 \end{cases}$ $t \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=1 \\ y+z=12 \\ x-t=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=3 \\ 2y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \notin \mathbb{N} \\ y \notin \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=12 \\ y+z=1 \\ x-t=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=13 \\ 2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \notin \mathbb{N} \\ y \notin \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=12 \\ y+z=1 \\ x-t=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=7 \\ t=5 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ $z \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=2 \\ y+z=6 \\ x-t=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ $2x=3 \Rightarrow x \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=2 \\ y+z=6 \\ x-t=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ t=0 \\ 2y=7 \end{cases}$ $t \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ ✗ $y \notin \mathbb{N}$

$\begin{cases} x+t=6 \\ y+z=2 \\ x-t=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=7 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \notin \mathbb{N} \\ z \notin \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=6 \\ y+z=2 \\ x-t=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ $2y=3 \Rightarrow y \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=3 \\ y+z=4 \\ x-t=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ t=1 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow$ решение

$\begin{cases} x+t=3 \\ y+z=4 \\ x-t=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=5 \\ 2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \notin \mathbb{N} \\ y \notin \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=4 \\ y+z=3 \\ x-t=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=5 \\ 2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \notin \mathbb{N} \\ y \notin \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow$ ✗

$\begin{cases} x+t=4 \\ y+z=3 \\ x-t=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ t=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow$ решение

$(x; y; z; t)$

$(2; 3; 1; 1)$

$(3; 2; 1; 1)$

Ответ: $(2; 3; 1; 1)$, $(3; 2; 1; 1)$.

Место для скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

③ $\ln 1{,}25 \vee 0{,}2$

$\ln 1{,}25 \vee 0{,}2 \ln e$

$\ln 1{,}25 \vee \ln e^{0{,}2}$

$1{,}25 \vee e^{\frac{1}{5}}$

$1{,}25 \vee \sqrt[5]{e}$

$\sqrt[5]{1{,}25^5} \vee \sqrt[5]{e}$

$\left(\frac{5}{4}\right)^5 \vee e$

$\frac{3125}{1024} \vee e$

$\approx 3{,}05 \vee \approx 2{,}7$

$3{,}05 > 2{,}7$

$\ln 1{,}25 > 0{,}2$

Ответ: $\ln 1{,}25 > 0{,}2$

---

⑤ $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x > 0$

$\cos x + \cos 3x + \cos 2x + \cos 4x > 0$

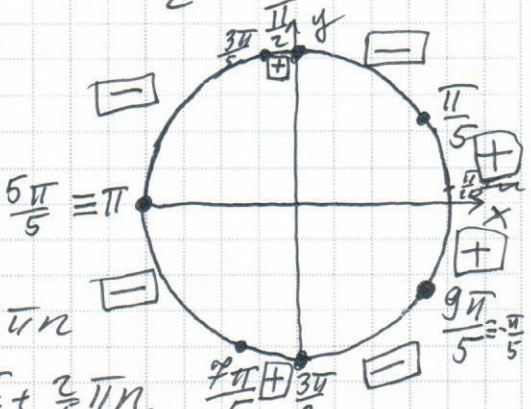
$\cos\frac{3x+x}{2} \cdot \cos\frac{3x-x}{2} + \cos\frac{4x+2x}{2} \cdot \cos\frac{4x-2x}{2} > 0$

$\cos 2x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \cos x > 0$

$\cos x (\cos 2x + \cos 3x) > 0$

$\cos x \cdot \cos\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} > 0$

$\phi(x) \geq 0$



$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \cos\frac{5x}{2} \geq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{5x}{2} \geq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{x}{2} \geq \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x \geq \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi n \\ x \geq \pi + 2\pi n \end{cases}$$

$\phi\left(\frac{\pi}{10}\right) \geq \cos\frac{\pi}{10} \cdot \cos\frac{5\pi}{20} \cdot \cos\frac{\pi}{20} > 0$

$\phi(x) > 0$

$x \in \left(-\frac{\pi}{5} + 2\pi n; \frac{\pi}{5} + 2\pi n\right) \vee \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{5} + 2\pi n\right) \vee \left(\frac{9\pi}{5} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{5} + 2\pi n; \frac{\pi}{5} + 2\pi n\right) \vee \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{5} + 2\pi n\right) \vee \left(\frac{9\pi}{5} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(8) $\sqrt{9b^2-6x+x^2}+\sqrt{9b^2+6x+x^2}=6a$

$\sqrt{(3b-x)^2}+\sqrt{(3b+x)^2}=6a$

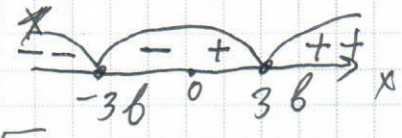
$|3b-x|+|3b+x|=6a$

Рассмотрим 2 графика: $y_1=|3b-x|+|3b+x|$, $y_2=6a$

$y_1=|3b-x|+|3b+x|$

Пусть $b>0$, тогда:

$\left[\begin{array}{l} x\geq 3b \\ x\leq -3b \end{array}\right.$ $y_1=|x-3b|+|x+3b|$



$\begin{cases} x<-3b \\ y_1=3b-x-x-3b \end{cases}$

$\begin{cases} -3b\leq x\leq 3b \\ y_1=3b-x+x+3b \end{cases}$

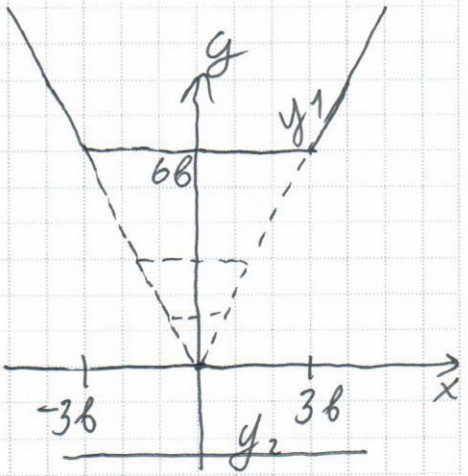
$\begin{cases} x>3b \\ y_1=x-3b+x+3b \end{cases}$

$\Rightarrow$

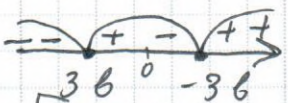
$\begin{cases} x<-3b \\ y_1=-2x \end{cases}$

$\begin{cases} -3b\leq x\leq 3b \\ y_1=6b \end{cases}$

$\begin{cases} x>3b \\ y_1=2x \end{cases}$



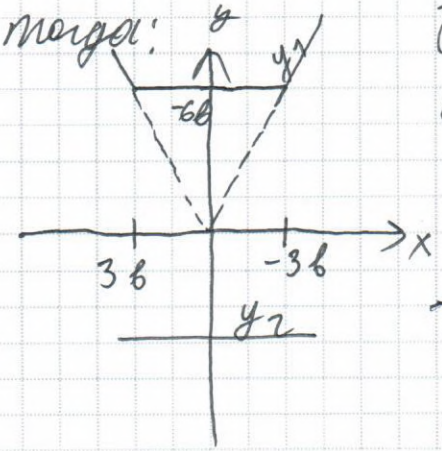
Пусть $b<0$, тогда:



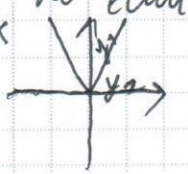
$\begin{cases} x<3b \\ y_1=-2x \end{cases}$

$\begin{cases} 3b\leq x\leq -3b \\ y=6b \end{cases}$

$\begin{cases} x>-3b \\ y=2x \end{cases}$



В данном случае единственное решение возможно, только если: $a=b=0$:



Ответ: $a=b=0$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Стецурин Родион Евгеньевич (дата рождения 19.11.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МБОУ СОШ №13 (Сочи)
регистрация № **47240**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 07 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Стецурин)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1 В 4

	производительность	время	Работа
по плану вместе	8 га/ч	$\frac{x}{8}$ ч	x га
в действительности			
I часть	8 га/ч	$\frac{x}{24}$ ч	$\frac{x}{3}$ га
II часть	6 га/ч	$\frac{x}{24}$ ч	$\frac{x}{4}$ га
III часть	5 га/ч	$\frac{5x}{125} = \frac{x}{12}$ ч	$x-\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right) = \frac{5x}{12}$ га

площадь поля x га

Зная, что работу закончили на 4 часа позже, составили уравнение $\frac{x}{24} + \frac{x}{24} + \frac{2x}{12} - \frac{3x}{8} = 4$

$\frac{x+x+2x-3x}{24} = 4$ $\frac{x}{24} = 4$ $x = 96$

S поля 96 га

$\frac{96}{8} = 12$ часов

Т.к. по плану бригада должна была закончить к 12:00ч и работать 12 часов, то работу начали в 00:00ч

Ответ: 96 га; 00:00ч +

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	±	±	−	±	0	±	0	5

5 Ерки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2

$$\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz + yt = 5 \end{cases} \quad x > t,\ y > z$$

$xy + xz + zt + yt = 12$

$x(z+y) + t(z+y) = 12$

$(x+t)(z+y) = 12$

$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

т.к. x, y, z, t - натуральные числа, то

а) $x + t \neq 0 \quad z + y \neq 1$

б) $z + y \neq 2$ т.к. $y > z$

$x + t \neq 2$ т.к. $x > t$

в) $\begin{cases} x + t = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + t = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$

с учётом $x > t,\ y > z$

$\begin{cases} x = 2 \\ t = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ t = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

+

Проверка

1) $x = 2, y = 3, t = 1, z = 1$

$\begin{cases} 6 + 1 = 7 \\ 2 + 3 = 5 \end{cases}$ верно

2) $x = 3, y = 3, t = 1, z = 1$

$\begin{cases} 9 + 1 = 10 \neq 7 \\ 3 + 3 = 6 \neq 5 \end{cases}$

ответ: $x = 2, y = 3, z = t = 1$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

$\ln 1{,}25$ или $0{,}2$

$\ln 1{,}25$ или $\ln e^{0{,}2}$

т.к. $e>1$, то сравним

$1{,}25$ и $e^{0{,}2}$

$e \approx 2{,}7$

$1{,}25$ и $\sqrt[5]{2{,}7}$

$\sqrt[5]{3{,}05}$ и $\sqrt[3]{2{,}7}$

т. к можно избавиться от корня, то

$3{,}05 > 2{,}7 \Rightarrow \ln 1{,}25 > 0{,}2$

Ответ: $\ln 1{,}25$

№4 если $p<1$, то $n<1$

$S = \frac{1}{2} ah$

$S < \frac{1}{2} a$

$S < \frac{1}{2} b$

$S < \frac{1}{2} c$

$3S < \frac{a+b+c}{2}$

$a+b+c < 6$

$S < \frac{a+b+c}{6} < 1$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5 $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x>0$

$\cos x+\cos 3x+\cos 2x+\cos 4x>0$

$2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x>0 \;/:2$

$\cos x(\cos 2x+\cos 3x)>0$

$\cos x\cdot 2\cos x\frac{2x+3x}{2}\cos\frac{3x-2x}{2}>0$

$\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}>0$

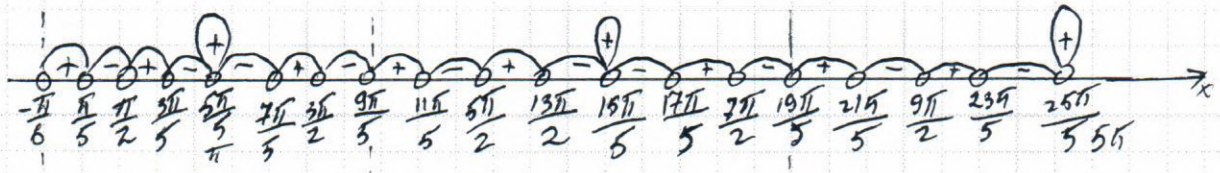
найдём нули функции $y=\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}$

$\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}>0$

$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\\ \cos\frac{5x}{2}=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ n\in Z\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in Z\\ \frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m;\ m\in Z\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ n\in Z\\ x=\pi+2\pi k;\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi m}{5};\ m\in Z\end{array}\right.$

Для данной функции период будет равен 2π.

Рассмотрим промежуток $\left[-\frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5}\right]$



если $x=0$, то $\cos 0\cdot\cos 0\cdot\cos 0\cdot\cos 0>0$

$x=\frac{\pi}{3}$, то $\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}<0$

с учётом периодичности, решением неравенства будут

$\left(-\frac{\pi}{5}+2\pi k;\frac{\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{7\pi}{5}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right);\ k\in Z$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{5}+2\pi k;\frac{\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{7\pi}{5}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right);\ k\in Z$

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6

$$\frac{x+y}{1+xy}=\frac{5}{4},\quad \frac{x^4+y^4}{1+xy^4}=\frac{257}{32}\qquad x,y>0$$

Пусть $x+y=a$, а $xy=b$

$$\frac{a}{1+b}=\frac{5}{4}\qquad \frac{((x+y)^2-2xy)^2-2(xy)^2}{1+(xy)^4}=\frac{257}{32}$$

$$\begin{cases}\frac{a}{1+b}=\frac{5}{4}\\ \frac{((a^2-2b)^2-2b^2}{1+b^4}=\frac{257}{32}\end{cases}\qquad \begin{cases}a=\frac{5+5b}{4}\\ 32\left(\frac{5+5b}{4}\cdot\frac{5+5b}{4}-2b\right)^2-2b^2=\\ =257+257b^4\end{cases}$$

$$32\left(\frac{25+50b+25b^2}{16}-2b\right)^2-2b^2=257+257b^4$$

$$257b^4-32\left(\frac{25+50+25b^2}{16}-2b\right)^2+2b^2+257=0$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7. $\left|y-\frac{x^2}{2}\right|+\left|y+\frac{x^2}{2}\right|\leqslant 2-x$

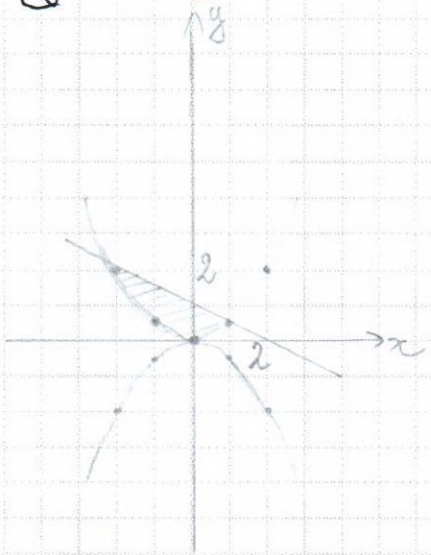
Рассмотрим 4 случая

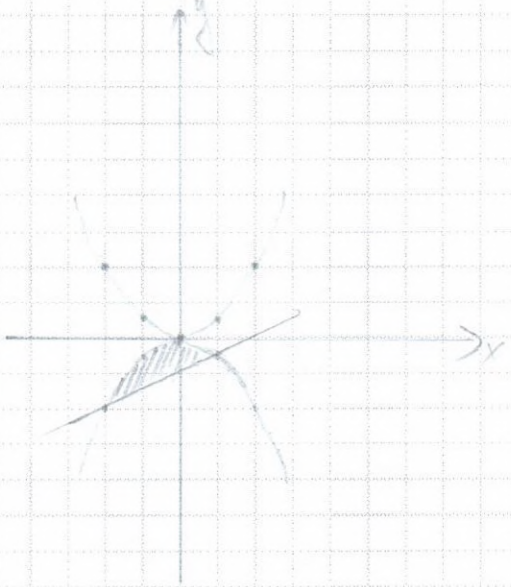
1) $\begin{cases} y-\frac{x^2}{2}\geqslant 0 \\ y+\frac{x^2}{2}\geqslant 0 \\ y-\frac{x^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}\leqslant 2-x \end{cases}$

$\begin{cases} y\geqslant \frac{x^2}{2} \\ y\geqslant -\frac{x^2}{2} \\ y\leqslant 1-\frac{x}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-\frac{x^2}{2}<0 \\ y+\frac{x^2}{2}<0 \\ -y+\frac{x^2}{2}-y-\frac{x^2}{2}\leqslant 2-x \end{cases}$

$\begin{cases} y<\frac{x^2}{2} \\ y<-\frac{x^2}{2} \\ y\geqslant -1+\frac{x}{2} \end{cases}$





+

−

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

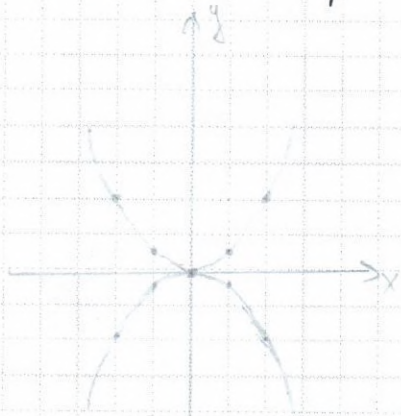
3) $\begin{cases} y \geqslant \frac{x^2}{2} \\ y < -\frac{x^2}{2} \\ y - \frac{x^2}{2} - y - \frac{x^2}{2} \leqslant 2 - x \end{cases}$

$\begin{cases} y \geqslant \frac{x^2}{2} \\ y < -\frac{x^2}{2} \\ x^2 - x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$

$x^2 - x + 2 = 0$

$D < 0, \ a > 0$

$\Rightarrow x^2 - x \neq 2$ при всех x

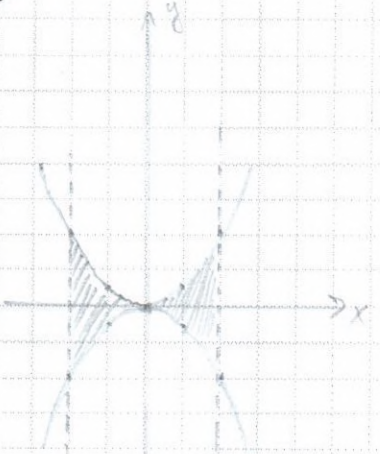


Нет решений

4) $\begin{cases} y < \frac{x^2}{2} \\ y \geqslant -\frac{x^2}{2} \\ -y + \frac{x^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} \leqslant 2 - x \end{cases}$

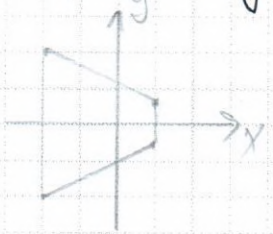
$\begin{cases} y < \frac{x^2}{2} \\ y \geqslant -\frac{x^2}{2} \\ x^2 + x - 2 \leqslant 0 \end{cases}$

$x = 1, \ x = 2$



5) объединяя все решения, получим фигуру - равнобедренную трапецию с основаниями 4; 1 $h = 3$

$S = \frac{1+4}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2} \cdot 3 = 2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5$



Ответ: 7,5

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Чуприна Роман Владимирович (дата рождения 17.10.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МБОУ СОШ №2 (Краснодар)
регистрация № **43342**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Чуприна)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1. Вч.

Пусть площадь поля - S, тогда

$\frac{S}{8}$ (ч) - время по плану

$\frac{\frac{1}{3}S}{8}$ (ч) - время на $\frac{1}{3}$ часть поля

$\frac{\frac{1}{4}S}{6}$ (ч) - время на следующ. $\frac{1}{4}$ часть поля $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ осталась $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{12}$ часть поля, тогда

$\frac{\frac{5}{12}S}{5}$ (ч) - время на оставшуюся часть поля.

Так как работа была закончена на 4ч позже, чем планировали, то составим уравнение:

$\frac{S}{24}+\frac{S}{24}+\frac{S}{12}-\frac{S}{8}=4 \quad |\cdot 24$

$S+S+2S-3S=96$

$S=96$ (га) - площадь поля $\Rightarrow$ $\frac{96}{8}=12$ (ч) время по плану, след-но планировали начинать в 0 ч.

Ответ: в 0 часов; 96 (га). +

№2.

$\begin{cases} xy+zt=7 \\ xz+yt=5, \end{cases} \quad x>t, \quad y>z$

$y(x+t)+z(x+t)=12$

$(x+t)(y+z)=12$

$(2+1)(3+1)=12$

$\frac{12}{2}=\frac{6}{2}=\frac{3}{3}=1$

Ответ: $x=3 \quad y=2 \quad t=1 \quad z=1$

или

$x=2 \quad y=3 \quad t=1 \quad z=1$

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3.

Сравним $\ln 1{,}25$ и $0{,}2$, рассмотрим их разность:

$\ln 1{,}25 - 0{,}2 = \ln 1{,}25 - \ln e^{\frac{1}{5}} = \ln e^{\frac{1}{5}} = \ln \frac{1{,}25}{\sqrt[5]{e}} = \ln \frac{1{,}25}{\sqrt[5]{e}} > 0$, т.к.

$\frac{1{,}25}{\sqrt[5]{e}} > 1$, $1{,}25 > \sqrt[5]{e}$, т.к. $(1{,}25)^5 > e$

$\frac{3+25}{1024} > 3$, а $3 > e \Rightarrow \underline{\ln 1{,}25 > 0{,}2}$

+

№5.

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x > 0$

$(\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) > 0$

$2\cos 2{,}5x \cos 1{,}5x + 2\cos 2x \cos 0{,}5x > 0$

$2\cos 2{,}5x (\cos 1{,}5x + \cos 0{,}5x) > 0$

$2\cos 2{,}5x \cdot 2\cos x \cdot \cos 0{,}5x > 0$

$\cos 2{,}5x \cdot \cos x \cdot \cos 0{,}5x > 0$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	±	+	±	±	−	∓	0	5

5 ✓

Найдем нули ф-ции:

1) $\cos 2{,}5x = 0$

$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} n, n \in Z$

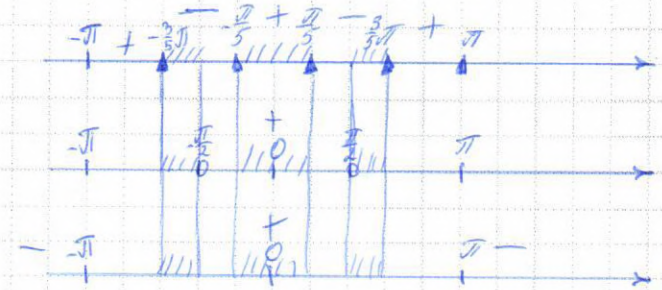
2) $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

3) $\cos 0{,}5x = 0$

$0{,}5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$



$x \in \left(-\frac{3}{5}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{5} + 2\pi n; \frac{\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3}{5}\pi + 2\pi n\right)$

Мин. общий период 2π, поэтому найдем решение на $[-\pi; \pi]$.

+ −

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4.

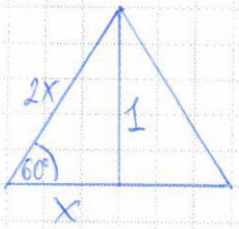
Максимальная площадь треугольника, удовлетворяющая условиям, будет в равностороннем 1-ке, с биссектрисами равными 1. Бис-сы и высоты совпадают.

$x^2 + 1 = (2x)^2$

$3x^2 = 1$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 1 = x = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$



1

№6.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{5}{4} \\ \frac{x^4+y^4}{1+x^4y^4} = \frac{257}{32} \end{cases}$$

возьмем $x+y = a$

$xy = b$

1) $\frac{x+y}{1+xy} = \frac{a}{1+b}$

2) $x^4+y^4 = x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2+2xy+y^2-2xy)^2 - 2x^2y^2 =$

$= ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = (a^2-2b)^2 - 2b^2$

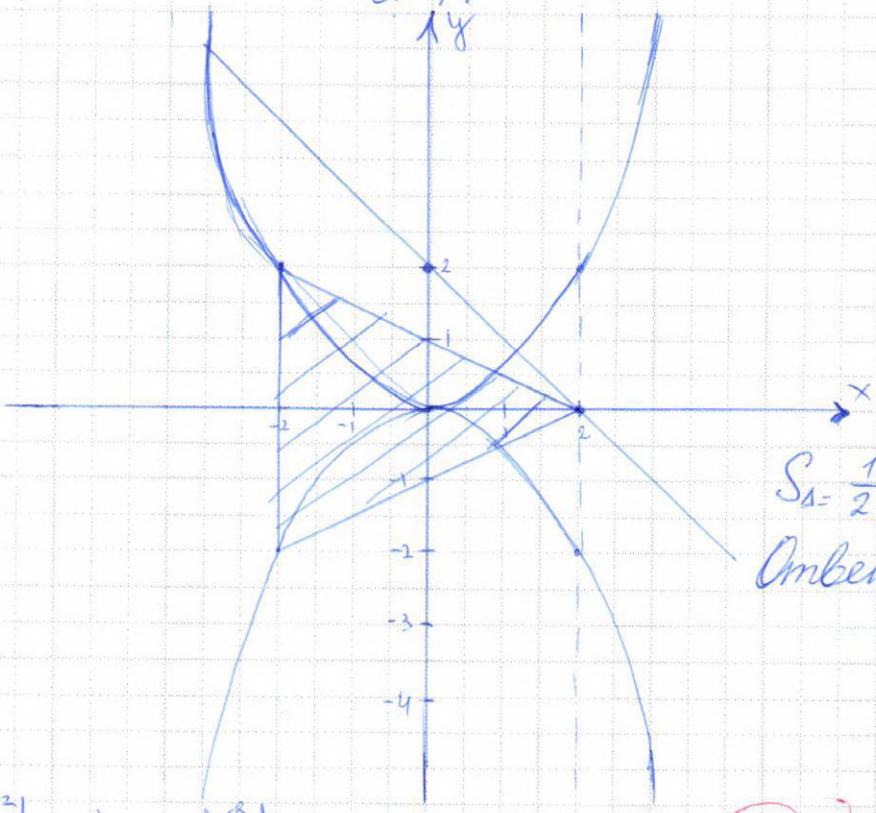
$\frac{x^4+y^4}{1+x^4y^4} = \frac{(a^2-2b)^2-2b^2}{1+b^4} = \frac{257}{32}$

1

$$\begin{cases} \frac{a}{1+b} = \frac{5}{4} \\ \frac{(a^2-2b)^2-2b^2}{1+b^4} = \frac{257}{32} \end{cases}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7.



$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

Ответ: 8.

$\left|y - \frac{x^2}{2}\right| + \left|y + \frac{x^2}{2}\right| \le 2 - x$

$y - \frac{x^2}{2} > 0 \qquad y + \frac{x^2}{2} > 0$

$y - \frac{x^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} \le 2 - x$

$2y \le 2 - x$

$y \le -\frac{1}{2}x + 1$

7

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8.

$\sqrt{9b^2-6x+x^2}+\sqrt{9b^2+6x+x^2}=6a$, $a\geq 0$

$\sqrt{(x^2+9b^2)-6x}+\sqrt{(x^2+9b^2)+6x}=6a$

возводим в квадрат

$x^2+9b^2-6x+x^2+9b^2+6x$

$2x^2+18b^2+2\sqrt{[(x^2+9b^2)-6x][(x^2+9b^2)+6x]}=36a^2 \mid :2$

$x^2+9b^2+\sqrt{(x^2+9b^2)^2-(6x)^2}=36a^2$

$(x^2+9b^2)^2-36x^2=[36a^2-(x^2+9b^2)]^2$

$36x^2=\frac{-36^2\cdot a^4+2\cdot 36a^2\cdot(x^2+9b^2)x}{1}$

$x^2=2a^2(x^2+9b^2)=36a^4$

$x^2=\frac{18a^2b^2-36a^4}{1-2a^2}$ $\Rightarrow$ $a\geq 0$ и $a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$, при $b^2=2a^2$ - единственное решение.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Ващенко Дарья Андреевна (дата рождения 22.07.1998)
ученица 11 класса, гимназия МОУ СОШ №8 (гор.Сочи)
регистрация № **49016**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 8 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Ващенко)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1. x - всего апельсин

$1^{\text{й}}$ сын - $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$2^{\text{ой}}$ сын - $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

$3^{\text{ий}}$ сын - $\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$

Решение:

а) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} = x$

$\frac{x}{8} = \frac{7}{8}$

$x = 7$, тогда:

б) у $1^{\text{ого}}$ сына - 4 апельсина;

у $2^{\text{ого}}$ сына - 2 апельсина;

у $3^{\text{его}}$ сына - 1 апельсин.

Ответ: а) 7;

б) 4; 2; 1.

+

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	±	+	±	−	−	−	0	4

[illegible]

Регистрация №49016 Страница 01 из 08

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2. $\begin{cases} mn + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} n = \frac{13 - kl}{m} \\ n = \frac{6 + ml}{k} \end{cases}$

Решим систему методом подбора:

$kl < 13$

Пусть $kl = 8 \Rightarrow k = 2;\ l = 4;\ m = 1;\ n = 5,$

Тогда:

$\begin{cases} 5 = \frac{13 - 2 \cdot 4}{1} \\ 5 = \frac{6 + 1 \cdot 4}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 5 = 5 \\ 5 = 5 \end{cases}$ почему?

других решений нет.

Ответ: $k = 2;\ l = 4;\ m = 1;\ n = 5.$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3 $\ln 1,2$ или $\frac{1}{6}$

$\ln 1,2$ или $\ln e^{\frac{1}{6}}$

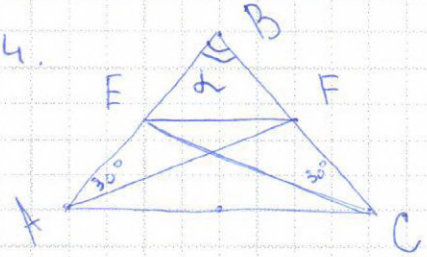
$(1,2)^6$ или $\left(e^{\frac{1}{6}}\right)^6$

$2,975984 > 2,7$, значит:

$\ln 1,2 > \frac{1}{6}$ +

Ответ: $\ln 1,2$.

№4.



Дано:

$\triangle ABC$,

AF и CE - медианы

$F \in BC$, $E \in AB$

$\angle BCE = \angle BAF = 30^0$

Доказать:

$\triangle ABC$ - правильный.

Доказательство:

1) $\triangle AFB \sim \triangle CEB$ (по двум углам и общей стороне) ~~общей стороне~~ $\angle A = \angle C$, $\angle B$ - общий $\Rightarrow$

$\frac{BF}{EB} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{BF}{EB} = \frac{2EB}{2BF}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$2BF^2 = 2EB^2$

$BF = EB \Rightarrow AB = BC$ и ΔABC - равнобедренный.

2) Рассмотрим ΔEBC

Пусть $EB = a$

$BC = 2a$

$\angle C = 30^\circ$

$\angle BEC = \beta$

Тогда $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{2a}{\sin\beta}$

$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{\sin\beta}$

$\sin\beta = 1 \Rightarrow \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ$,

значит ΔABC является правильным, так как все его углы равны 60°.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

5. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x > 2$

$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} > 2$

$4 - \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x - \cos 8x > 4$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x < 0$

$2\cos\frac{2x+4x}{2} \cdot \cos\frac{2x-4x}{2} + 2\cos\frac{6x+8x}{2} \cdot \cos\frac{6x-8x}{2} < 0$

$2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x < 0 \quad | : 2$

$\cos x (\cos 3x + 7x) < 0$

$\cos \cdot 2\cos\frac{3x+7x}{2} \cdot \cos\frac{3x-7x}{2} < 0 \quad | : 2$

$\cos x \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x < 0$

1) $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos 5x < 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}$ ИЛИ 2) $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos 5x > 0 \\ \cos 2x < 0 \end{cases}$ ИЛИ 3) $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos 5x > 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}$ ИЛИ 4) $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos 5x < 0 \\ \cos 2x < 0 \end{cases}$

(−)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

7. $|x-2y^2|+|x+2y^2| \le 8-4y$ $\quad 8-4y \ge 0$, $y \le 2$

1) $\begin{cases} x-2y^2 \ge 0 \\ x+2y^2 \ge 0 \\ x-2y^2+x+2y^2 \le 8-4y \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 2y^2 \\ 2y^2 \ge -x \\ 2x \le 8-4y \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 2 \\ y \le -\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y^2 \ge 0 \\ x+2y^2 \le 0 \\ x-2y^2-x-2y^2 \le 8-4y \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 2y^2 \\ x \le -2y^2 \\ 4y^2-4y+8 \ge 0 \end{cases}$ (не верно)

3) $\begin{cases} x-2y^2 \le 0 \\ x+2y^2 \ge 0 \\ -x+2y^2+x+2y^2 \le 8-4y \end{cases}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\begin{cases} x \le 2y^2 \\ -2y^2 \le x \\ 4y^2 + 4y - 8 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 2y^2 \\ y \le 2 \\ x \ge -2y^2 \\ (y+2)(y-1) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-8; 8] \\ y \le 2 \\ (y+2)(y-1) \le 0 \end{cases}$$

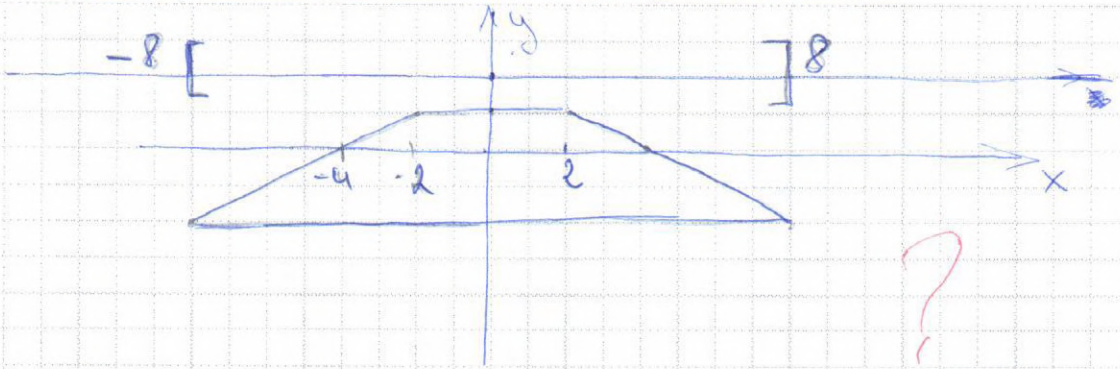
4) $$\begin{cases} x - 2y^2 \le 0 \\ x + 2y^2 \le 0 \\ -x + 2y^2 - x - 2y^2 \le 8 - 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 2y^2 \\ x \le -2y^2 \\ 4y \le 2x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 2y^2 \\ 2y^2 \le -x \\ y \le \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 0 \\ y \le \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



$S = \frac{4+16}{2} \cdot 3 = 30$

?

Ответ: 30.

№6. $\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y) = 15xy \\ (x^4+y^4)(x^2+y^2) = 85x^2y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} ((x+y)^2 - 2xy)(x+y) = 15xy \\ ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} xy = a \\ x+y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b^2-2a)b = 15a \\ (b^2-2a)^2 - 2a^2 = 85a^2 \end{cases}$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Каваносян Сюзанна Тиграновна (дата рождения 07.07.1998)
ученица 11 класса, гимназия НОУ Гимназия "Школа бизнеса" (сочи)
регистрация № **44148**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Каваносян)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1. Пусть x - всего апельсинов

$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ - I отдали

$x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$ - осталось

$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ - II отдали

$x - \left(\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4}\right) = x - \left(\frac{3x+3}{4}\right) = \frac{x-3}{4}$ - осталось

$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$ - III отдали

$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} = x$

$4x + 4 + 2x + 2 + x + 1 - 8x = 0$

$-x + 7 = 0$

$x = 7$.

Значит, $\frac{x+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$ - I.

$\frac{x+1}{4} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2$ - II

$\frac{x+1}{8} = \frac{7+1}{8} = 1$ - III

Ответ: всего - 7 апельсинов.

1-ый получил 4,

2-ой получил 2,

3-ий получил 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	±	+	+	−	0	0	0	4

48 дней

Регистрация №44148 Страница 01 из 05

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

2. $\begin{cases} mn + kl = 13, \\ nk - ml = 6, \end{cases} \begin{cases} n = \frac{13 - kl}{m} \\ n = \frac{6 + ml}{k} \end{cases}$ $kl < 13$.

Методом подбора найдем значения m, l, k, n

Учитывая, что $kl < 13$, ~~то~~ пусть

$kl = 5$, $k = 5$, $l = 1$.

$n = \frac{13 - 5 \cdot 1}{m} = \frac{8}{m}$

$n = \frac{6 + m \cdot 1}{5} = \frac{6 + m}{5}$

$m = 4$, т.к. n – натуральное число (при $m = 8$, $m = 1$, $m = 2$ тождество не выполняется)

$\begin{cases} n = \frac{8}{4} \\ n = \frac{6+4}{5} \end{cases} \begin{cases} n = 2 \\ n = 2 \end{cases}$ (+)

$n = 2$, $m = 4$, $k = 5$, $l = 1$.

Для доказательства подставим в систему:

$\begin{cases} 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 13, \\ 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 6, \end{cases} \begin{cases} 13 = 13 \\ 6 = 6 \end{cases}$

Ответ: $n = 2$, $m = 4$, $k = 5$, $l = 1$.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3. $\ln 1,2 > \frac{1}{6}$

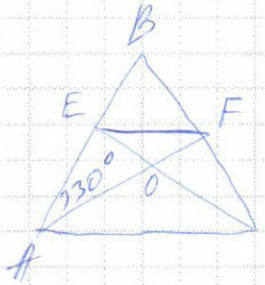
$\ln \frac{6}{5} > \frac{1}{6} = \log_e e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}$

$\left(\frac{6}{5}\right)^6 > \left(\sqrt[6]{e}\right)^6$

$\approx 2,98 > e \approx 2,7$

Ответ: $\ln 1,2 > \frac{1}{6}$.

4



Дано: $\triangle ABC$,

AF и CE – медианы,

Док-ть: $\angle BAF = \angle BCE = 30°$,

по $\triangle ABC$ – равн.

Док-во.

~~1) $\triangle AFB \sim \triangle CEB$, по двум углам~~

1) Рассмотрим $\triangle AFB$ и $\triangle CEB$

$\angle A = \angle C$, $\angle B$ – общ. $\Rightarrow \triangle AFB \sim \triangle CEB$ – по двум углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BF}{EB} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{BF}{EB} = \frac{2EB}{2BF}$

$2BF^2 = 2EB^2$

$BF = EB \Rightarrow AB = BC. \Rightarrow \triangle ABC$ – равноб.

$\triangle ABF$. $BF = a$, $AB = 2a$, $\angle A = 30°$, $\angle AFB = \alpha$.

по т. синусов $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{2a}{\sin \alpha}$, $\alpha = 90°$. $\Rightarrow \triangle ABF$ – прямоуг.

Т.к. $\triangle ABC$ – равноб., $\angle A = \angle C = 60°$, т.е. $\triangle ABC$ – правильный.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

5. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x > 2$

$1 - \cos^2 x + 1 - \cos^2 2x + 1 - \cos^2 3x + 1 - \cos^2 4x > 2$

$2 > \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x$

$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x < 2$

$\frac{\cos 2x + 1}{2} + \frac{\cos 4x + 1}{2} + \frac{\cos 6x + 1}{2} + \frac{\cos 8x + 1}{2} < 2$

$\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 6x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 8x}{2} + \frac{1}{2} < 2$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x < 0$

$\cos 2x + \cos 8x + \cos 4x + \cos 6x < 0$

$2\cos \frac{2x+8x}{2} \cos \frac{2x-8x}{2} + 2\cos \frac{4x+6x}{2} \cdot \cos \frac{4x-6x}{2} < 0$

$2\cos 5x \cos 3x + 2\cos 5x \cos x < 0$

$\cos 5x \cos 3x + \cos 5x \cos x < 0$

$\cos 5x (\cos 3x + \cos x) < 0$

$\cos 5x \cdot 2\cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} < 0$

$\cos 5x \cdot 2\cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} < 0$

$\cos 5x \cdot 2\cos 2x \cdot \cos x < 0$

$\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x < 0$

$\cos 5x \cos 2x \cdot \cos x < 0$

$\cos 5x = 0$ $\cos 2x = 0$ $\cos x = 0$

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos 5x < 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < x < \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} n \\ -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos 5x > 0 \\ \cos 2x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < x < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos 5x > 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < x < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos 5x < 0 \\ \cos 2x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < x < \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Ботвинкина Мария Сергеевна (дата рождения 24.06.1998)
ученица 11 класса, средняя школа МОУ СОШ №5 (Белореченск)
регистрация № **46375**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 7 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Ботвинкина)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 3

① Пусть x - всего было апельсинов, тогда первый сын получил $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$ ап., второй - $\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)$, а третий $\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\right)$ апельсинов, тогда:

а) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}=x \quad |\cdot 8$

$4x+4+2x+2+x+1-8x=0$

$-x=-7$

$x=7$

б) $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$

$\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$

$\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=1$

+

Ответ: 7 - всего апельсинов, 4 - первый, 2 - второй, 1 - третий.

③ $\ln 1{,}2$ или $\frac{1}{6}$

$\log_e 1{,}2$ или $\log_e e^{\frac{1}{6}}$

$(1{,}2)^6$ или $\left(\sqrt[6]{e}\right)^6$

где расчеты?

$(1{,}2)^6 \approx 2{,}99$ или $e \approx 2{,}7$

$2{,}99 > 2{,}7$, значит $\ln 1{,}2 > \frac{1}{6}$

±

Ответ: $\ln 1{,}2 > \frac{1}{6}$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	±	±	+	±	−	0	0	5

5 б реш

решения

Регистрация №46375 Страница 01 из 07

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

② $\begin{cases} mn + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases} \begin{cases} n = \frac{13 - kl}{m} \\ n = \frac{6 + ml}{k} \end{cases}$

Методом подбора найдем значение m, l, k, n:

Учитывая, что $kl < 13$ (т.к. натуральное число) то:

Пусть $kl = 5$; $k = 5$, $l = 1$

$\begin{cases} n = \frac{13 - 5 \cdot 1}{m} = \frac{8}{m} \\ n = \frac{6 + m \cdot 1}{5} = \frac{6 + m}{5} \end{cases}$

$m = 4$, т.к. n - натуральное число (при $m = 8$, $m = 1$, $m = 2$ тождество не выполняется)

$\begin{cases} n = \frac{8}{4} \\ n = \frac{6 + 4}{5} \end{cases} \begin{cases} n = 2 \\ n = 2 \end{cases}$

$n = 2$, $m = 4$, $k = 5$, $l = 1$. Для доказательства подставим в систему:

$\begin{cases} 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 13 \\ 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 6 \end{cases} \begin{cases} 13 = 13 \\ 6 = 6 \end{cases}$

Ответ: $n = 2$; $m = 4$; $k = 5$; $l = 1$.

А другие решения?

±

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

③ Рассмотрим решение задания № 3 вторым способом

$y = \ln x$

По теореме Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, где $c \in (a; b)$

Пусть $f(x) = \ln x$, тогда $f'(a) = \frac{1}{x}$, $b = n+1$, $a = n$.

$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}(n+1-n) = \frac{1}{c}$, где $n < c < n+1 \Rightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{n+1}$

$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c} > \frac{1}{n+1}$

$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$

$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$

тогда $\ln 1{,}2 = \ln(1+0{,}2) = \ln\left(1+\frac{1}{5}\right) > \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$

$\ln 1{,}2 > \frac{1}{6}$

Ответ: $\ln 1{,}2 > \frac{1}{6}$

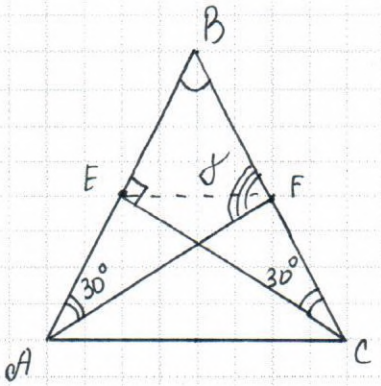
Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

④



Дано: $\triangle ABC$; AF, CE - медианы

$\angle BAF = \angle BCE = 30°$

Доказать, что $\triangle ABC$ - правильной

Решение

1) $\triangle AFB \sim \triangle CEB$ (по двум углам)

$\frac{EB}{BF} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{EB}{BF} = \frac{2BF}{2EB} \Rightarrow \frac{EB}{BF} = \frac{BF}{EB} \Rightarrow EB = BF$

т.к. $EB = BF$ (EC, AF - медианы), то $AB = BC$, т.е. $\triangle ABC$ - равнобедрен.

2) Рассмотрим $\triangle ABF$: пусть $BF = a$, тогда $AB = 2a$

$\angle ABF = \gamma$, то по теореме синусов: $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{2a}{\sin\gamma} \Rightarrow$

$\sin\gamma = \frac{\sin 30° \cdot 2a}{a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \gamma = 90° \Rightarrow \triangle ABF$ - прямоугольный,

$\angle CBF = 60° \Rightarrow \angle ABC = 60°$

3) Т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный, а $\angle CBF = 60°$, то $\angle BAC = \angle BCA = 60° \Rightarrow$

$\triangle ABC$ - равносторонний, т.е. правильный

7

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

⑥ $\begin{cases}(x^2+y^2)(x+y)=15xy\\(x^4+y^4)(x^2+y^2)=85x^2y^2\end{cases}$ $\begin{cases}((x+y)^2-2xy)(x+y)=15xy\\((x+y)^4-4xy\cdot(x+y)^2+2x^2y^2)((x+y)^2-2xy)=85x^2y^2\end{cases}$

$(x^4+y^4)(x^2+y^2)=85(xy)^2$

$(x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2)(x^2+y^2)=85x^2y^2$

$((x^2+y^2)^2-2x^2y^2)((x+y)^2-2xy)=85x^2y^2$

$((x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2)((x+y)^2-2xy)=85x^2y^2$

Пусть $\begin{cases}(x+y)=a\\x\cdot y=b\end{cases}$, тогда

$\begin{cases}(a^2-2b)a=15b\\(a^4-4b\cdot a^2+2b^2)(a^2-2b)=85b^2\end{cases}$ $\begin{cases}b=\dfrac{a^2}{15+2a}\\(a^4-4ba^2+2b^2)(a^2-2b)=85b^2\end{cases}$

$\left(a^4-\frac{4a^4}{15+2a}+\frac{2a^4}{(15+2a)^2}\right)\left(a^2-\frac{2a^2}{15+2a}\right)=\frac{85a^4}{(15+2a)^2}$ $\quad|\cdot(15+2a)^2$

$(a^4(15+2a)^2-4a^4(15+2a)+2a^4)(a^2(15+2a)^2-2a^2(15+2a))=85a^4$

$a^4((15+2a)^2-4(15+2a)+2)(a^2(15+2a)^2-2a^2(15+2a))=85a^4$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(5) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x > 2$

$1-\cos^2 x + 1-\cos^2 2x + 1-\cos^2 3x + 1-\cos^2 4x > 2$

$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x < 2$

$\frac{\cos 2x + 1}{2} + \frac{\cos 4x + 1}{2} + \frac{\cos 6x + 1}{2} + \frac{\cos 8x + 1}{2} < 2$

$\frac{\cos 2x}{2} + 0,5 + \frac{\cos 4x}{2} + 0,5 + \frac{\cos 6x}{2} + 0,5 + \frac{\cos 8x}{2} + 0,5 < 2$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x < 0$

$\cos 2x + \cos 8x + \cos 4x + \cos 6x < 0$

$2\cos\frac{2x+8x}{2}\cos\frac{2x-8x}{2} + 2\cos\frac{4x+6x}{2}\cdot\cos\frac{4x-6x}{2} < 0$

$2\cos 5x \cdot \cos 3x + 2\cos 5x \cdot \cos x < 0$

$\cos 5x (\cos 3x + \cos x) < 0$

$\cos 5x \cdot 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} < 0$

$\cos 5x \cdot 2\cos 2x \cdot \cos x < 0$

$\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x < 0$

а) $\cos 5x = 0$ б) $\cos 2x = 0$ в) $\cos x = 0$

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n, n \in Z$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

1) $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos 5x < 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos 5x > 0 \\ \cos 2x < 0 \end{cases}$ или 3) $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos 5x > 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}$ или 4) $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos 5x < 0 \\ \cos 2x < 0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < x < \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} n \\ -\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < x < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$

+

−

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3) $\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < x < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < x < \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

Казанский филиал МИИТ - г.Казань

(Адрес площадки: 420078, Республика Татарстан, г Казань, ул Революционная, д 44)

Титульный лист работы

Трапезникова Алия Дмитриевна (дата рождения 19.11.1997)
ученица 11 класса, лицей 131 (г. Казань)
регистрация № **45186**, 2 вариант

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 09 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Трапезникова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Монахов Н.А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Казанский филиал МИИТ - г.Казань

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача № 1

Обозначим: x - время, за которое планировалось закончить вспашку (в часах), S - общая площадь участка (в сотках).

По плану, комбайн должен был вспахивать в среднем 9 соток в час, то есть $\frac{S}{9} = x$ (1). Однако в задуманном темпе он вспахал только половину поля, а оставшуюся вспахивал с производительностью 6 соток/час, при этом увеличив время работы на час, то есть $\frac{S/2}{9} + \frac{S/2}{6} = x + 1$ (2).

Осталось решить систему уравнений (1) и (2):

Из (1): $S = 9x$. Теперь домножим обе стороны равенства (2) на 36 и заменим в нем S на $9x$; получим $45x = 36x + 36 \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow S = 36$, а $x = 4$.

Таким образом, общая площадь участка фермера - 36 соток, а начало работ было запланировано на $9 - 4 = 5$ часов вечера.

(+)

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ 9
+	+	(−)	+	+	0	+	(+)	5

5 баллов

Арсентьев

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача №2

Первым делом заметим: так как исходные x_1, x_2, x_3 и x_4 – натуральны, то и все их попарные произведения тоже натуральны. Но тогда $x_1 x_2 \geq 1$, тогда $x_3 x_4 \leq 10$, и аналогично $x_1 x_2 \leq 10$. Откуда x_1, x_2, x_3 и $x_4 \leq 10$. (1).

Теперь заметим: так как $x_1 x_2 + x_3 x_4 = 11$, то $НОД(x_1 x_2; x_3 x_4) = 1$ (так как сумма натуральных чисел делится на НОД слагаемых, а 11 делится только на 1 и 11, но и $x_1 x_2$, и $x_3 x_4$ меньше одиннадцати). Откуда $НОД(x_1; x_3) = НОД(x_1; x_4) = НОД(x_2; x_3) = НОД(x_2; x_4) = 1$, так как если хоть один из этих НОДов больше 1, то и $НОД(x_1 x_2; x_3 x_4)$ больше 1.

Аналогично: так как $x_1 x_3 - x_2 x_4 = 1$, то $НОД(x_1 x_3; x_2 x_4) = 1$, откуда $НОД(x_1; x_2) = НОД(x_3; x_4) = 1$.

Таким образом $\forall i,j \in [1;4]$: $НОД(x_i; x_j) = 1$. Отсюда в частности, следует, что все x_i различны и равны 1. Пусть среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4 не более одной единицы. Заметим, что в таких условиях уравнение вида $x_i x_j = a$, где $a \in \{2; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$ имеет два решения: $x_i = 1$, $x_j = a$ и $x_j = 1$, $x_i = a$. Но среди чисел x_1, x_2, x_3 и x_4 не более одной единицы, поэтому среди чисел $x_1 x_2$ и $x_3 x_4$ не более одного принадлежащего множеству $\{2; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$. Но заметим: $x_1 x_2 + x_3 x_4 = 11$, поэтому мы хотим найти a такое, что среди чисел a и $11-a$ не более одного принадлежащего множеству $\{2; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$. Среди натуральных чисел, не превосходящих 10-ти, таких a четыре штуки: 10, 6, 5 и 1. Однако заметим, что уравнение $x_i x_j = 1$ не имеет решения вообще при условии, что единицы среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4 не более одной, поэтому остаются варианты $a = 5$ и $a = 6$, т.е. либо $x_1 x_2 = 5$, $x_3 x_4 = 6$, либо $x_1 x_2 = 6$, $x_3 x_4 = 5$. Но тогда, очевидно, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1, 2, 3, 5\}$. Но тогда, очевидно, чтобы $x_1 x_3 - x_2 x_4 = 1$ нужно, чтобы $x_1 x_3 = 6$, а $x_2 x_4 = 5$, но такого быть не может, так как $x_1 x_3 \neq x_1 x_2$ и $x_1 x_3 \neq x_3 x_4$. Таким образом, не более одной единицы среди

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача № 2 (продолжение)

чисел x_1, x_2, x_3, x_4 быть не может.

Теперь пусть среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4 3 единицы (все единицами быть, очевидно, не могут), тогда четвёртое из чисел, очевидно, 10. Но тогда невозможно, что $x_1x_3 - x_2x_4 = 1$.

Таким образом, среди чисел x_1, x_2, x_3 и x_4 ровно 2 единицы. Тогда обозначим два отличных от единицы числа как a и b. Возможны 4 варианта:

$x_1, x_2 = 1$; $x_1, x_4 = 1$; $x_2, x_3 = 1$; $x_3, x_4 = 1$. (x_1 и x_3 не могут быть равны 1, т.к. тогда $x_2x_4 = 0$; x_2x_4 не могут быть равны 1, т.к. тогда $x_1x_3 = 2$, т.е. x_1 или $x_3 = 1$, т.е. единице 2, а 3). Разберём все 4 случая:

I) $\begin{cases} 1 + x_3x_4 = 11 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4(x_4+1) = 10 \\ x_3 = x_4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4^2 + x_4 = 10 \\ x_3 = x_4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} \notin \mathbb{N} \\ x_3 = x_4 + 1 \end{cases}$

решений в натуральных числах нет

II) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_2 + 1 = 11 \\ x_3 = x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_3 = 6 \end{cases}$

III) $\begin{cases} x_1 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 + 1 + x_4 = 11 \\ x_1 = x_4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 5 \\ x_1 = 6 \end{cases}$

IV) $\begin{cases} x_1x_2 + 1 = 11 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_2+1)x_2 + 1 = 11 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 + x_2 = 10 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} \notin \mathbb{N} \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases}$

решений в натуральных числах нет.

Из того, получаем решения (II и III случаи):

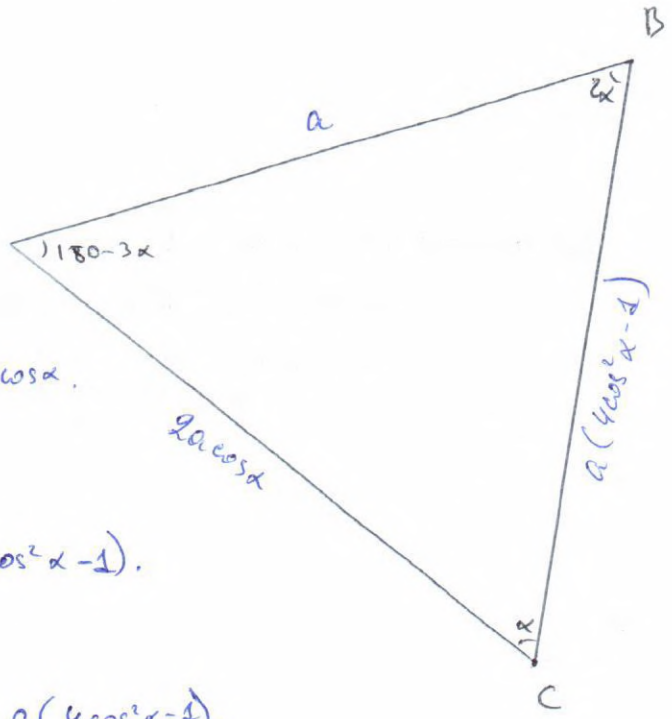
$x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 1$;

$x_1 = 6, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 5$.

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача №4



Обозначим: $\angle C = \alpha$, $AB = a$,

Тогда $\angle B = 2\alpha$, $\angle A = 180 - 3\alpha$

Выразим сторону AC и BC через теорему синусов:

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2\cos\alpha \Rightarrow AC = 2a\cos\alpha.$$

$\sin(180-3\alpha) =$

Заменим: $\sin 3\alpha = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1).$

Выразим BC:

$$\frac{BC}{\sin 3\alpha} = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow BC = a(4\cos^2\alpha - 1).$$

Заменим: $AC^2 = 4a^2\cdot\cos^2\alpha$.

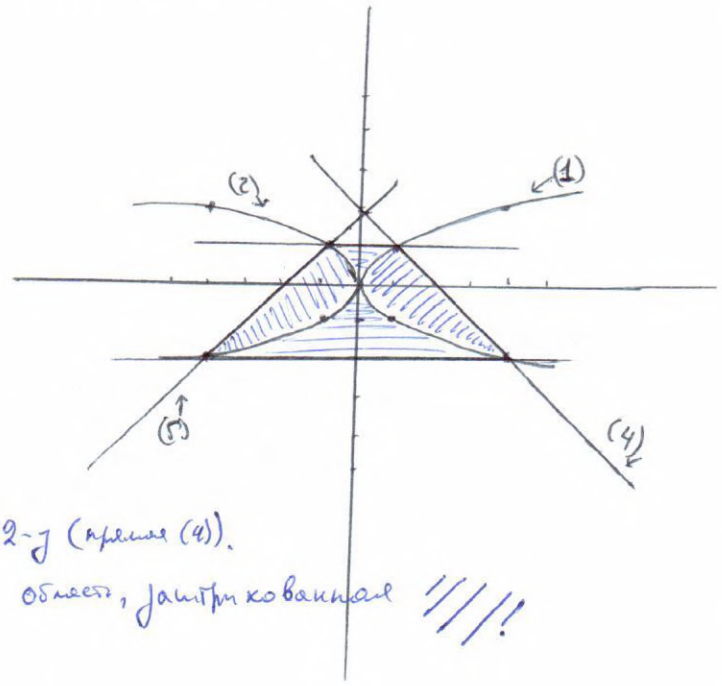
С другой стороны, $AB(AB+BC) = a(a + a(4\cos^2\alpha - 1)) = a^2(1 + 4\cos^2\alpha - 1) = 4a^2\cos^2\alpha$.

Таким образом, $AC^2 = 4a^2\cos^2\alpha = AB(AB+BC)$, что и требовалось доказать.

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача №7.



Рассмотрим 3 случая:

I. $x \geq y^2$, тогда:

$|x-y^2|+|x+y^2| = 2x \leq 4-2y \Rightarrow x \leq 2-y$

Соотношению ~~Область~~ $x \geq y^2$ соответствует внутренность параболы $x=y^2$ (параболе (1) на рисунке), соотношению $x \leq 2-y$ соответствует область слева от прямой $x=2-y$ (прямая (4)).

Таким образом, системе $\begin{cases} x \geq y^2 \\ x \leq 2-y \end{cases}$ соответствует область, заштрихованная ////!

II. $x \leq -y^2$, тогда

$|x-y^2|+|x+y^2| = -2x \leq 4-2y \Rightarrow x \geq y-2$.

Соотношению $x \geq y^2$ соответствует внутренность параболы $x=-y^2$ (парабола (2)), соотношению $x \geqslant y-2$ соответствует область справа от прямой $x=y-2$ (прямая (3)). Таким образом, системе $\begin{cases} x \leq -y^2 \\ x \geqslant y-2 \end{cases}$ соответствует область, заштрихованная \\\!.

III. $-y^2 \leq x \leq y^2$, тогда

~~$|x-y^2|+|x+y^2| = -2y^2 \leq 4-2y \Rightarrow y^2+y-2 \geq 0$.~~

Соотношению $-y^2 \leq x \leq y^2$ соответствует пересечение внешностей парабол (1) и (2), а соотношению $y^2+y-2 \geq 0$ соответствует полоска между прямыми $y=1$ и $y=-2$.

Тогда системе $\begin{cases} -y^2 \leq x \leq y^2 \\ y^2+y-2 \geq 0 \end{cases}$ соответствует область, заштрихованная =.

Заметим: объединение всех заштрихованных областей образует трапецию с вершинами в точках $(1;1)$; $(4;-2)$; $(-4;-2)$; $(-1;1)$. Ее высота, очевидно, равна 3, меньшее основание равно 2, большее – 8. Тогда ее площадь $S = 3 \cdot \left(\frac{2+8}{2}\right) = 3 \cdot 5 = 15$.

Ответ: 15

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача №3

Ответ: $\ln 1{,}01 < \frac{2}{201}$.

Докажем это:

$\ln 1{,}01 < \frac{2}{201} \Leftrightarrow (1{,}01)^{201} < e^2 \geq 7{,}34$ откуда это, где вычислили!

Заметим: $(1{,}01)^n = 1 \cdot C_n^0 + 10^{-2} \cdot C_n^1 + 10^{-4} \cdot C_n^2 + \dots + 10^{-2i} \cdot C_n^i + \dots + 10^{-2n} \cdot C_n^n$, так как каждое умножение на 1,01 числа x, это сумма $x + 0{,}01x$. Если данную сложение „в столбик", то можно заметить, что возведение числа 1,01 в степень похоже на вычисление строк треугольника Паскаля.

Таким образом $(1{,}01)^{201} = 1 \cdot C_{201}^0 + 10^{-2} \cdot C_{201}^1 + \dots \approx 1 + 10^{-2} \cdot 201 + 10^{-4} \cdot 20100 + \dots =$

$= 1 + 2{,}01 + 2{,}01 + 0{,}013333 + \dots \leq 1 + 2{,}01 + 2{,}01 \cdot 199 \cdot 0{,}01 = 5{,}02 + 2{,}189 = 7{,}209 <$

$< 7{,}34 < e^2$.

Таким образом $e^2 > (1{,}01)^{201}$, откуда $\Leftrightarrow 201 \cdot \ln 1{,}01 < 2 \Rightarrow \ln 1{,}01 < \frac{2}{201}$,

что и требовалось доказать.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Казанский филиал МИИТ - г.Казань

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача № 8

Заметим: если у заданного уравнения есть корень $x=w$ (и $w\neq 1$), то у него также есть корень $x=2-w$ (так как если мы всюду вместо x подставим $2-x$, мы получим то же уравнение). Таким образом, если при каком-то a уравнение имеет единственное решение, то это решение $x=1$.

Подставим $x=1$:

$\sqrt{1+2a}+\sqrt{1+2a}=2(1+2a)$, отсюда $1+2a\geq 0$. Преобразуем, получим:

$2\sqrt{1+2a}=2(1+2a) \Rightarrow 1=\sqrt{1+2a} \Rightarrow a=0$. потеря $a=-1/2$

Осталось проверить, нет ли при $a=0$ других решений:

Подставим $a=0$, получим:

$\sqrt{2-x}+\sqrt{x}=2$, откуда $x\geq 0$ и $2-x\geq 0$.

Преобразуем, получим: $2-x=4+x-4\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x}=x+1$.

Возведём обе стороны равенства в квадрат, получим: $4x=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2=0$.

У этого уравнения корень действительно только один: $x=1$

Из того, ответ: $a=0$. потеря корня $a=-1/2$

7

Регистрация №45186

Страница 7 из 9

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача №5

Преобразуем исходное выражение:

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = \sin x(1 + 4\cos^2 x - 1) + \sin 2x(1 + 2\cos 2x) =$

$= 4\sin x\cos^2 x + 2\sin x\cos x(4\cos^2 x - 2 + 1) = 4\sin x\cos^2 x + 2\sin x\cos x(4\cos^2 x - 1)$ (1)

Обозначим $a = \sin x$, $c = 2\cos x$, тогда перепишем (1):

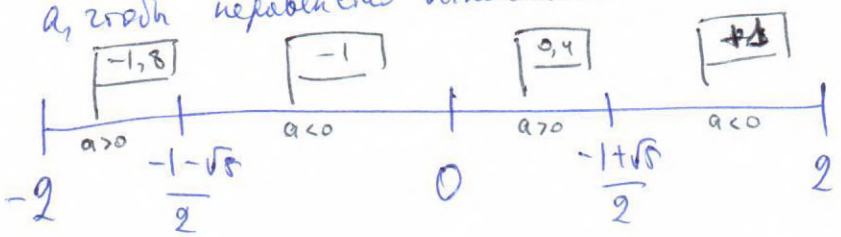
(1) $= ac^2 + ac(c^2 - 1) = ac(c^2 + c - 1) < 0$ (2).

Найдём точки, в которых неравенство (2) обращается в равенство:

$a = 0$, $c = 0$, $c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Так как $a = \sin x$, $c = 2\cos x$, то $a = 0 \Rightarrow c = \pm 2$. Кроме того, заметим: $c \in [-2; 2]$.

Итак, мы вычислили значения c, при которых неравенство (2) обращается в равенство. Теперь „методом интервалов" поймём, на каких интервалах какой знак должно иметь a, чтобы неравенство выполнялось:



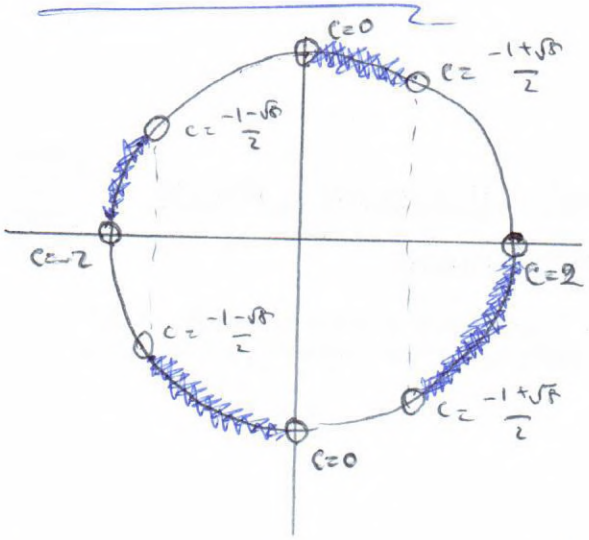
Подставим в качестве промежуточных значений c те, что мы вычислили в „флажки", получим, что $c \in (-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ $a > 0$; $c \in (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 0)$ $a < 0$; $c \in (0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ $a > 0$; $c \in (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 2)$ $a < 0$.

Вспомним, что $c = 2\cos x$, $a = \sin x$.

Нанесём решения на координатную окружность:

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача №5 (продолжение)



Закрашен подходящая часть координатной окружности.

Осталось "снять" ответ:

$x \in \left(\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(\arccos\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\right);\ \pi+2\pi k\right) \cup \left(-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right);\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup$

$\cup \left(-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right);\ 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

+

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Фадеев Алексей Дмитриевич (дата рождения 18.08.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МОУ СОШ №17 (г. Тверь)
регистрация № 47502

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 3 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Фадеев)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Иванова А.П.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам. Вариант 1

⑤ $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \geq 2$

$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} \geq 2.$

$4 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x \geq 4.$

$2\cos x \cdot \cos 3x + 2\cos x \cos 7x \geq 0$

$2\cos x (\cos 3x + \cos 7x) \geq 0$

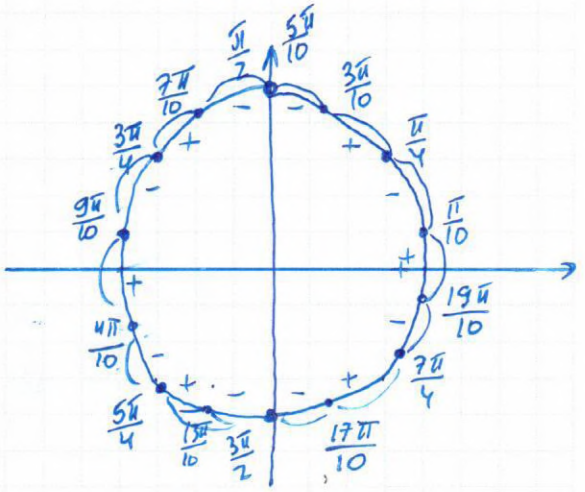
$4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x \geq 0$

1) $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

2) $\cos 2x = 0$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, нет.

3) $\cos 5x = 0$ $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi p}{5}$, $p \in Z$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{10} \\ \frac{7\pi}{10} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ \frac{9\pi}{10} \leq x \leq \frac{11\pi}{10} \\ \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{13\pi}{10} \\ \frac{17\pi}{10} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}. \\ \frac{19\pi}{10} \leq x \leq \frac{21\pi}{10} \end{array}\right.$ (+)



③ $\log_{1,1} \frac{1}{11}$

$\log_{1,1} \frac{11}{10} = \log_{1,1} 11 - \log_{1,1} 10 = \log_{1,1} 11 - 1$

$\log_{1,1} 11 \vee \frac{12}{11}$

$11 \vee 10^{\frac{12}{11}}$

$1,1 \vee 10^{\frac{1}{11}}$

$(1,1)^{11} < 10$

$\Downarrow$

$\log_{1,1} 1,1 < \frac{1}{11}$

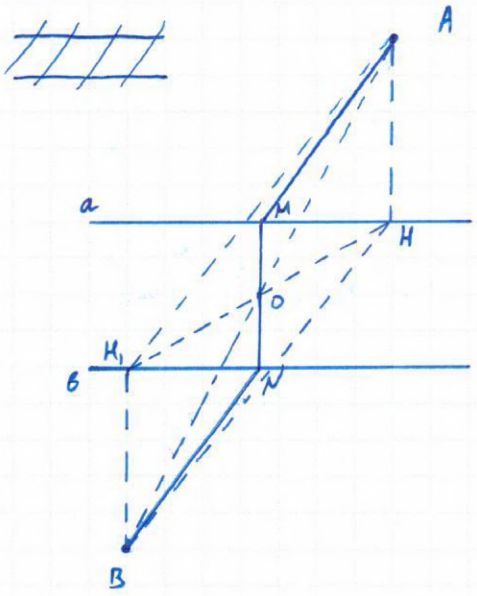
Ошибка

(√) (−)

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	0	−	+	(+)	+	0	0	4

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(4)



1) Д.п. $AH \perp a$
$BH_1 \perp b$

2) $a \parallel b$
$AH \perp a$
$BH_1 \perp b$ $\Rightarrow BH_1 \parallel AH$

3) AH, BH
$BH_1 \parallel AH$ $\Rightarrow AH_1BH$ - трапеция

4) AH_1BH - трапеция. $\Leftrightarrow$ AH_1BH - параллелограмм
$BH_1 = AH$ (по усл.)

5) AH_1BH - параллелограмм $\Rightarrow$ $BO = OA$
т. O - точка пересечения диагоналей. $H_1O = OH$.

6) Проведем $MN \perp a, b$. через точку O $\Rightarrow$ путь AMNB из A в B будет кратчайшим.

+

(6) $\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30 \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} xy(x^2+y^2) + 2x^2y^2 + x^2y^2(x+y) = 30 \\ xy(x+y) + xy + x + y = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} xy((x+y)^2 - 2xy) + 2x^2y^2 + x^2y^2(x+y) = 30 \\ xy(x+y) + xy + x + y = 1 \end{cases}$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Пусть $\begin{cases} xy = a \\ x+y = b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a(b^2-2a) + 2a^2 + a^2b = 30 \\ ab + a + b = 11 \end{cases}$

$ab^2 - 2a^2 + 2a^2 + a^2b = ab(a+b) = 30$

$\begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ ab + (a+b) = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} ab = 6 \\ a+b = 5 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} ab = 5 \\ a+b = 6 \end{cases}$

1) $\begin{cases} ab = 6 \\ a+b = 5 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = 2 \\ x+y = 3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} xy = 2 \\ x+y = 3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} xy = 3 \\ x+y = 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 3 \\ x+y = 2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ \frac{y^2-2y+3}{y} = 0 \end{cases}$ $\quad$ $y^2 - 2y + 3 = 0$, $D < 0$, $\varnothing$

$\begin{cases} y = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{2}{5-\sqrt{21}} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} y = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{2}{5+\sqrt{21}} \end{cases}$

2) $\begin{cases} ab = 5 \\ a+b = 6 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = 5 \\ x+y = 1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = \frac{5}{y} \\ \frac{5}{y} + y^2 = 1 \end{cases}$ $\quad$ $y^2 - y + 5 = 0$, $D < 0$, $\varnothing$

$\begin{cases} xy = 5 \\ x+y = 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 1 \\ x+y = 5 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} + y = 5 \end{cases}$ $\quad$ $y^2 - 5y + 1 = 0$, $D = 25 - 4 = 21$

$\begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 1 \end{cases}$ (+)

$\begin{cases} y = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

Ответ: $(1;2)(2;1)\left(\frac{2}{5+\sqrt{21}}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{2}{5-\sqrt{21}}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

СГУВТ - г.Новосибирск

(Адрес площадки: 630099, Новосибирская область, г Новосибирск, ул Щетинкина, д 33)

Титульный лист работы

Ковалько Александр Владимирович (дата рождения 06.08.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МБОУ СОШ №84 (Кемерово)
регистрация № **46054**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Ковалько)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Камафулина К.В.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
−	±	+	0	0	0	+	+	3

Задание 1.

Пусть y - кол-во работы, а z - время, за которое ее выполнили. Тогда $\frac{y}{8} = z$ - если бы трактора не сломались. Так как работа была выполнена на 4 часа позже, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y}{8} = z, \Rightarrow y = 8z \\ \frac{\frac{1}{3}y}{8} + \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}y}{6} + \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}y}{5} = z + 4; \end{cases}, \text{ где}$$

$\frac{\frac{1}{3}y}{8}$ - выполненная работа до первой поломки,

$\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}y}{6}$ - выполненная работа до второй поломки,

$\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}y}{5}$ - оставшаяся часть работы.

Решаем второе уравнение:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 8z + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot 8z + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot 8z = z + 4$$

$$\frac{1}{3}z + \frac{2}{9}z + \frac{4}{5}z = z + 4$$

$$\frac{61}{45}z = z + 4$$

$$z = \frac{45}{4} = 11{,}25 \text{ часов.}$$

Из первого уравнения находим площадь

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

поля: $y = 11{,}25 \cdot 8 = 90$ га

Далее находим в котором часу начали вспашку: $12 - 11{,}25 = 0{,}75 =$ 0 часов 45 минут

Ответ: 90 га; 80 ч. 45 мин.

Задание 2. !!! Все выводы только в натур. числах.

1. Рассмотрим первое уравнение:

$xy + tz = 7$, ниже запишу способы получения числа 7

$1 + 6 = 7$ - не подходит, т.к. если $x > t$, $y > z$, то $xy > zt$ (в натуральных числах; > 0)

$2 + 5 = 7$ - не подходит по выводу выше.

$3 + 4 = 7$ - не подходит по выводу выше.

$4 + 3 = 7$ - хоть это и подходит по $xy > zt$, но нет. Так как $4 = 2 \cdot 2$ или $4 = 4 \cdot 1$, а $3 = 3 \cdot 1$. Т.е. нарушается или $x > t$ или $y > z$

$5 + 2 = 7$ - тоже не подходит, $5 = 5 \cdot 1$, а $2 = 2 \cdot 1$, т.е. нарушаются условия $x > t$ или $y > z$

$6 + 1 = 7$.

Т.е. единственное решение первого уравнения когда $t = 1$; $z = 1$ и $\frac{x=2 \quad y=3}{x=3 \quad y=2}$. При заданных числах второе уравнение имеет решение.

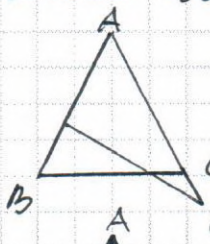
Ответ: $(x=2 \; y=3 \; t=1 \; z=1)$ и $(x=3 \; y=2 \; t=1 \; z=1)$.

Задание 4.

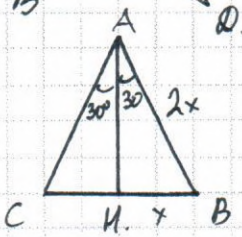
Сначало нужно сказать, что равно~~бедренный~~ сторонний

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

треугольник - треугольник с наибольшей площадью, при условии, что все дискриминанты меньше какого либо числа.



т.е. будем искать площадь ~~равностороннего~~ равностороннего треугольника с дискриминантами равными единице.



Из $\triangle AHB$: $AB^2 = AH^2 + HB^2$; т.к $\angle A = 30°$, то $AB = 2HB$. по теореме Пифагора:

$4x^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

т.е. $S_{\triangle ABC} = HB \cdot AH = \sqrt{\frac{1}{3}}$, т.е. мы извлекаем корень из числа меньше единицы $\Rightarrow$ после извлечения корня число будет по прежнему меньше единицы, что и требовалось доказать. ▨

Задание 3.

$\ln 1{,}25 = \log_e 1{,}25$: $\log_e 1{,}25 \;?\; 0{,}2$

т.е. нам нужно $e^{0{,}2} \;?\; 1{,}25 \;|\wedge 5$

возвести $1{,}25^5$ и сравнить $e \;?\; 1{,}25^5$

с e ($e \approx 2{,}71\ldots$) $2{,}71 < 3{,}05175$

$1{,}25^2 = 1{,}5625$

$1{,}25^4 = 1{,}5625^2 \approx 2{,}4414$

$1{,}25^5 = 2{,}4414 \cdot 1{,}25 = 3{,}05175$

~~Ответ: 1,25 ок~~

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

А теперь сравним $\ln 1{,}25$ с числом $0{,}5$

$\log_e 1{,}25 \;?\; 0{,}5$

$e^{0{,}5} \;?\; 1{,}25 \quad |\,^2$

$2{,}71 \;>\; 1{,}5625$

Таким образом, число $\log_e 1{,}25$ лежит между $0{,}2$ и $0{,}5$, из чего можно сделать вывод, что $\log_e 1{,}25 > 0{,}2$

Ответ: $\log_e 1{,}25 > 0{,}2$

Задание 7.

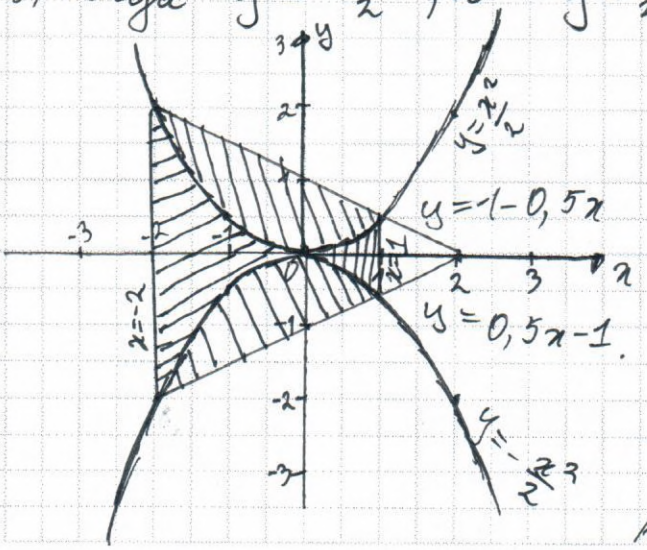
$$\left|y-\frac{x^2}{2}\right| + \left|y+\frac{x^2}{2}\right| \le 2-x.$$

1) Когда $y > \frac{x^2}{2}$, то $y-\frac{x^2}{2}+y+\frac{x^2}{2} \le 2-x \Rightarrow y \le 1-0{,}5x$

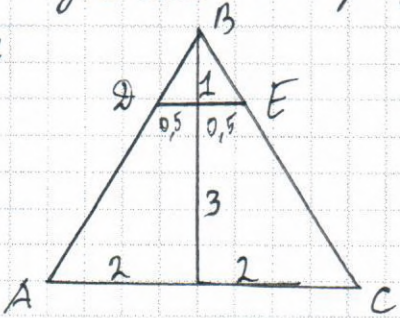
2) Когда $-\frac{x^2}{2} < y < \frac{x^2}{2}$, то $-y+\frac{x^2}{2}+y+\frac{x^2}{2} \le 2-x \Rightarrow x^2+x-2 \le 0$

т.е. $x > -2$, $x < 1$

3) Когда $y < -\frac{x^2}{2}$, то $-y+\frac{x^2}{2}-y-\frac{x^2}{2} \le 2-x \Rightarrow y \ge 0{,}5x-1$.



Таким образом у нас получился усеченный треугольник



Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$S_{*ADEC} = S_{ABC} - S_{BDe} = 2 \cdot 4 - 0,5 \cdot 1 = 8 - 0,5 = 7,5$

Ответ: $S = 7,5$

Задание 8.

1. Найдем, когда $-6x + x^2 = 0$ и $+6x + x^2 = 0$.

Они обращаются в 0 при одном значении равном 4-ем.

значит $\sqrt{9b^2} + \sqrt{9b^2} = 6a$.

$3b + 3b = 6a$

$b = a$

т.е. когда $b = a$ уравнение имеет единственное решение.

Ответ: $b = a$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Дронова Ангелина Данииловна (дата рождения 03.08.1998)
ученица 11 класса, лицей 23 (Сочи)
регистрация № **49399**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Дронова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1.

Площадь поля S, тогда

$\frac{S}{8}$ (ч) - время по плану.

$\frac{\frac{1}{3}S}{8}$ (ч) - время на $\frac{1}{3}$ часть поля

$\frac{\frac{1}{4}S}{6}$ (ч) = время на след $\frac{1}{4}$ часть поля.

$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{12}$ часть поля осталась, тогда

$\frac{\frac{5}{12}S}{5}$ (ч) - время на оставшуюся часть поля.

т.к работа закончена на 4ч позже, чем планировалось, отсюда составим ур-е:

$\frac{S}{24}+\frac{S}{24}+\frac{S}{12}-\frac{S}{8}=4 \mid \cdot 24$

$S+S+2S-3S=96$

$S=96$ (га) - площадь поля

$\frac{96}{8}=12$ (ч) - время по плану значит планировали начинать в 00:00 ч.

Ответ: 00:00 ч. 96 га. (+)

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	±	±	∓	−	0	0	0	3

35 баллов

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2.

$\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz + yt = 5 \end{cases}$, при $x > t$ и $y > z$

Число „7" можно разложить, как:

~~6~~ + 1 = 7, ~~с помощью~~

5 + 2 = 7

4 + 3 = 7

3 + 4 = 7

2 + 5 = 7

1 + 6 = 7.

Число „5" можно разложить, как:

4 + 1 = 5

3 + 2 = 5

2 + 3 = 5

1 + 4 = 5.

С помощью подбора чисел найдем x, y, t, z.

~~3~~ Рассмотрим первую систему: 1

$\begin{cases} 6 + 1 = 7. \\ 3 + 2 = 5 \end{cases}$, допустим $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, $t = 1$,

тогда условие

$\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz + yt = 5 \end{cases}$, будет выполняться. => Ответ: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, $t = 1$.

А другие решения?

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

$\ln 1,25 = \log_e 1,25 = \log_{2,718\ldots} 1,25$

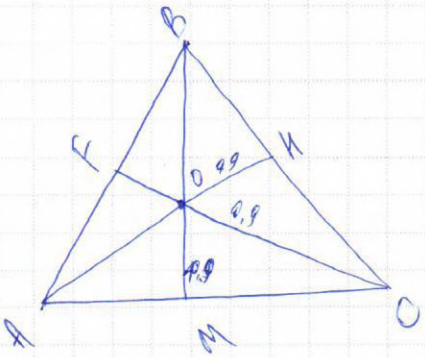
$(2,718\ldots)^x = 1,25$

$x = 0,223 \Rightarrow \log_e 1,25 = \ln 1,25 = 0,223$, отсюда

Ответ: $\ln 1,25 > 0,2$.

1

№4.



Дано:

$FC < 1$

$AH < 1$

$BM < 1$

Док-ть: что $S(ABC) < 1$.

Док-во:



$FO < 0,5$

$1 > AO$ и $BO > FO$, отсюда

$AB < 1$, отсюда

$BC < 1$

7

BM может быть > 1, но < 2 при максимальных значениях катетов

$S_{ABC} = \frac{0,9 \cdot 0,9 \cdot 1,0}{2} = 0,7695$

~~Если~~ Если биссектрисы < 1, то и $S_\Delta < 1$

что.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x > 0$

$2\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos x \cdot \cos 3x > 0$

$\cos x = 0$ или $\cos 2x + \cos 3x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

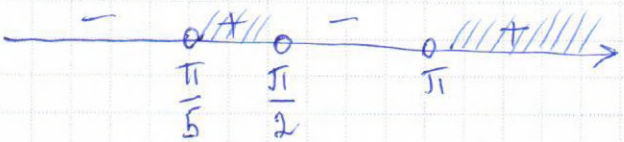
$2\cos \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0$,

$\cos \frac{5x}{2} = 0$ или $\cos \frac{x}{2} = 0$

$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ или $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$.

$5x = \pi + 2\pi k, k \in Z$ или $x = \pi + 2\pi m, m \in Z$.

$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z$



Ответ: $\left(\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{2}\right) \cup (\pi; +\infty)$

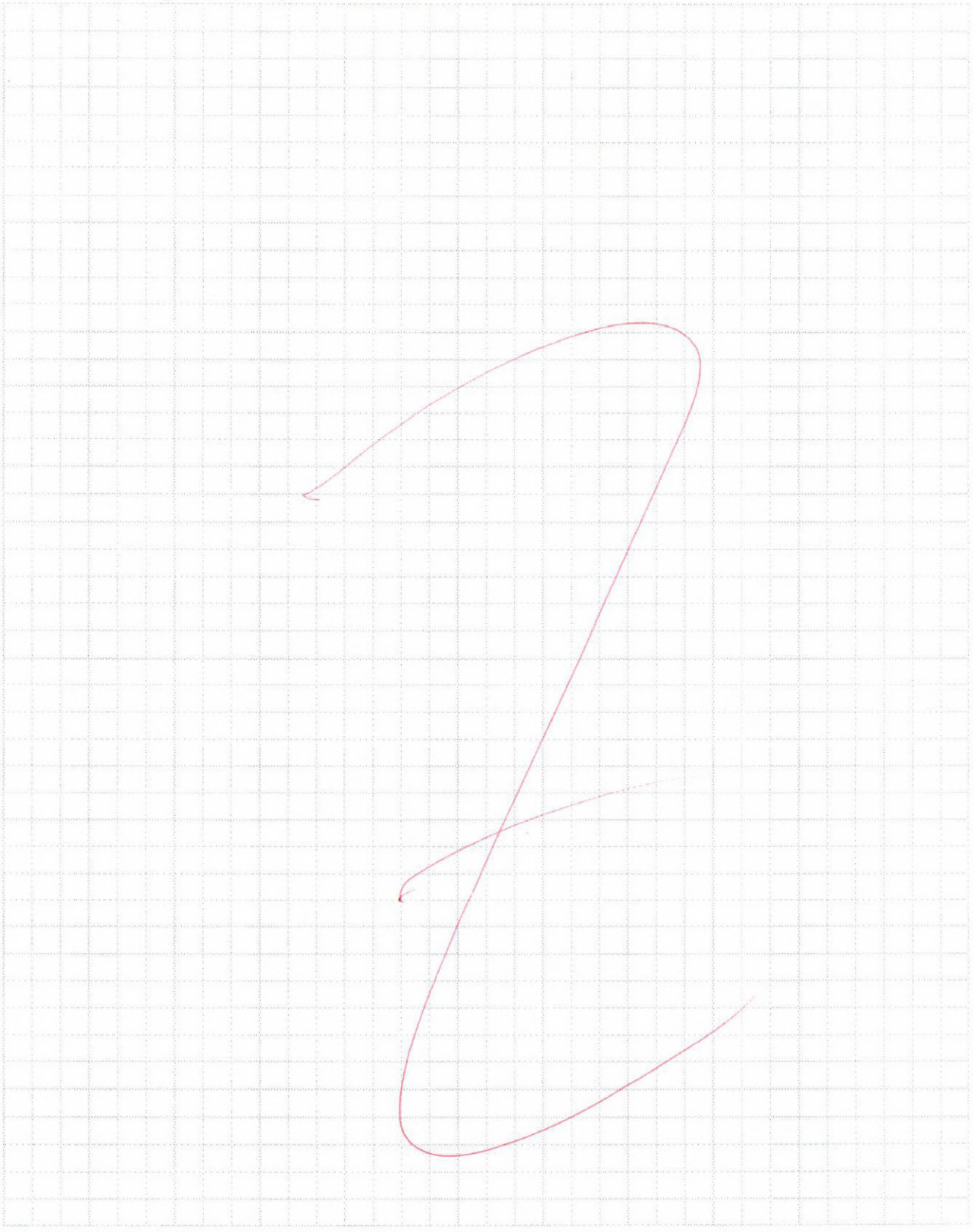
Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

(Адрес площадки: Новосибирская область, г Карасук, ул Тургенева, д 14)

Титульный лист работы

Баймуратова Сания Азаматовна (дата рождения 07.03.1999)
ученица 11 класса, лицей МБОУ технический лицей №176 (г.Карасук)
регистрация № **45128**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 5 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Баймуратова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

$\ln 1{,}25 \vee 0{,}2$ $\quad a^b = c \Rightarrow b = \log_a c$

$\ln 1{,}25 = \log_e 1{,}25$

Пусть $\ln 1{,}25 = x$, тогда $e^x = 1{,}25$

Необходимо сравнить x и $0{,}2$

$0{,}2 < X < 0{,}3$ $\quad \begin{pmatrix} e^{0{,}2} \approx 1{,}22 \\ e^{0{,}3} \approx 1{,}38 \end{pmatrix}$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	−	0	+	0	0	+	3

$\left.\begin{array}{l} X > 0{,}2 \\ X \vee 0{,}2 \end{array}\right\} \ln 1{,}25 > 0{,}2$

Ответ: $\ln 1{,}25 > 0{,}2$

№5

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x > 0$

Воспользуемся формулой для суммы тригонометрических функций:

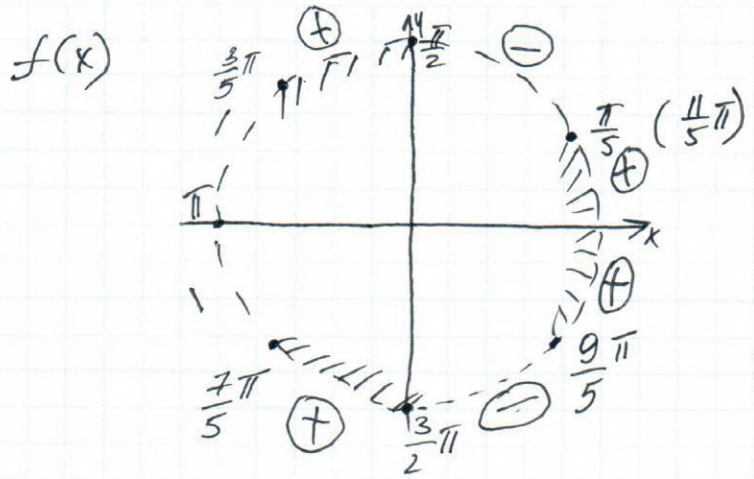
$2\cos\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 0$

$2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$

$f(x) = 2\cos\frac{5x}{2} \cdot 2\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{5x}{2} = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 5x = \pi + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \pi + 2\pi n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \pi + 2\pi n \end{array}\right.$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3}{5}\pi+2\pi n\right) \cup \left(\frac{7}{5}\pi+2\pi n;\ \frac{3}{2}\pi+2\pi n\right) \cup$

$\cup \left(\frac{9}{5}\pi+2\pi n;\ \frac{11}{5}+2\pi n\right)$

№1

Пусть x - площадь поля, y - время начала работы (если считать, начиная с 00:00)

$$\begin{cases} \frac{X}{8} = 12-y \text{ - работали бы, если бы часть тракторов не сломалась} \\ \frac{X}{3\cdot 8} + \frac{X}{4\cdot 6} + \frac{X\cdot\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}{5} = 16-y \text{ - работали с поломками} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{24} + \frac{x}{24} + \frac{5x}{12\cdot 5} = 16-y \quad (1) \\ x = 96-8y \end{cases}$$

Решим уравнение 1

$$\frac{x}{12} + \frac{2x}{24} = 16-y$$

$$\frac{4x}{24} = 16-y$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\frac{4(96-8y)}{24} = 16-y$$

$384 - 32y = 384 - 24y$

$384 - 32y - 384 + 24y = 0$

$24y = 32y$

$y = 0$ - то есть трактора начали работать в полночь (00:00)

$$\begin{cases} x = 96 - 8y \Rightarrow x = 96\,га \\ y = 0 \end{cases}$$

Ответ: площадь поля = 96 га

время начала 00:00 (полночь)

№8 $\sqrt{9b^2 - 6x + x^2} + \sqrt{9b^2 + 6x + x^2} = 6a$ ОДЗ: $a \geq 0$

Предположим, что x_1 - корень, тогда $-x_1$ тоже будет корнем, но необходимо, чтобы было един. решение $\Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{9b^2} + \sqrt{9b^2} = 6a$

$$\left.\begin{array}{l} 6|b| = 6a \\ a \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

Пусть $3a = t$ $t > 0$

$\sqrt{t^2 + 6x + x^2} + \sqrt{t^2 + 6x + x^2} = 2t$

$\left(\sqrt{t^2 + 6x + x^2}\right)^2 = \left(2t - \sqrt{t^2 - 6x + x^2}\right)^2$

$3x = t^2 - t\sqrt{t^2 - 6x + x^2}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\left(t\sqrt{t^2-6x+x^2}\right)^2=(t^2-3x)^2$

$x^2t^2=9x^2 \quad x^2t^2-9x^2=0$

$x^2(t^2-9)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ t=\pm 3 \quad (t>0) \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ t=3 \end{array}\right.$

Если $t=3$, то x - любое, а необходимо единственное решение $\Rightarrow 3a\neq 3 \Rightarrow a\neq 1$ $(t\neq 3)$

Ответ: при всех a, кроме 1

№2

$\begin{cases} xy+zt=7 \\ xz+yt=5 \end{cases}{}^{+/-} \quad x>t,\ y>z$

$\begin{cases} xy+zt+xz+yt=12 \\ xy+zt-xz-yt=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x(y+z)+t(y+z)=12 \\ x(y-z)-t(y-z)=2 \end{cases}$

$\begin{cases} (y+z)(x+t)=12 \\ (y-z)(x-t)=2 \end{cases}$ $y+z, x+t, y-z, x-t$ - нат. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y-z=1 \\ (x-t)=2 \\ y+z=1 \\ x+t=12 \end{array}\right.$ $2y=2 \quad y=1$ $2z=0 \quad z=0 \notin N$ $\Big\} \in \phi$

$\left[\begin{array}{l} y-z=2 \\ x-t=1 \\ y+z=1 \\ x+t=12 \end{array}\right. \Rightarrow \phi$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\begin{cases} y-z=1 \\ x-t=2 \\ y+z=12 \\ x+t=1 \ (\in \phi) \end{cases} \Rightarrow 2y=13 \ (y \notin N) \ \phi \qquad \begin{cases} y-z=2 \\ x-t=1-\phi \\ y+z=12 \\ x+t=1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} y-z=1 \\ x-t=2 \\ y+z=2 \\ x+t=6 \end{cases}\right) 2y=3 \quad y \notin N \Rightarrow \phi \qquad \left.\begin{cases} y-z=2 \\ x-t=1 \\ y+z=2 \\ x+t=6 \end{cases}\right) 2x=7 \quad x \notin N \ \phi$$

$$\begin{cases} y-z=1 \\ x-t=2 \\ y+z=3 \\ x+t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ 2z=2 \\ 2x=6 \\ 2t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ x=3 \\ t=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-z=2 \\ x-t=1 \\ y+z=3 \\ x+t=4 \end{cases} \quad 2x=5 \quad x \notin N \ \phi$$

$$\begin{cases} y-z=1 \\ x-t=2 \\ y+z=6 \\ x+t=2 \end{cases} \quad 2y=7 \quad y \notin N \qquad \begin{cases} y-z=2 \\ x-t=1 \\ y+z=6 \\ x+t=2 \end{cases} \quad 2x=3 \ \phi$$

$$\begin{cases} y-z=1 \\ x-t=2 \\ y+z=4 \\ x+t=3 \end{cases} \quad 2x=5 \quad x \notin N \ \phi \qquad \begin{cases} y-z=2 \\ x-t=1 \\ y+z=4 \\ x+t=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=1 \\ x=2 \\ t=1 \end{cases}$$

Ответ: $\{3;2;1;1\}, \{2;3;1;1\}$ (x y z t)

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

(Адрес площадки: Новосибирская область, г Карасук, ул Тургенева, д 14)

Титульный лист работы

Мельник Мария Сергеевна (дата рождения 05.05.1999)
ученица 11 класса, лицей МБОУ технический лицей №176 (Карасук)
регистрация № **44592**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 6 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Мельник)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1 Пусть S – кол-во всех апельсинов

x – кол-во апельсина, тогда первому, второму и третьему соответственно добавится:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
7	–	+	7	0	0	+	7	3

$$I = \frac{S}{2} + x$$

$$II = \frac{S - \left(\frac{S}{2}+x\right)}{2} + x = \frac{\frac{S}{2}+x}{2} = \frac{S}{4} + \frac{x}{2}$$

$$III = \frac{S - \left(\frac{S}{2}+x\right) - \left(\frac{S}{4}+\frac{x}{2}\right)}{2} + x = \frac{\frac{S}{4} - \frac{2}{2}x}{2} + x = \frac{S}{8} + \frac{x}{4}$$

т.к. после этого у отца апельсинов не осталось, значит $I + II + III = S$

$$\frac{S}{2}^{(4} + \frac{x}{1}^{(8} + \frac{S}{4}^{(2} + \frac{x}{2}^{(4} + \frac{S}{8} + \frac{x}{4}^{(2} = \frac{S}{1}^{(8} \quad \text{– под общий знаменатель}$$

$$4S + 8x + 2S + 4x + S + 2x = 8S$$

$S = 14x$ т.к. x – $\frac{1}{2}$ апельсина $\Rightarrow S = 7$ апельсинов

тогда I получим: $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$

$$II - \frac{(7-4)}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$III - \frac{(7-4-2)}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ответ: всего = 7; $I = 4$; $II = 2$; $III = 1$ апельсин.

№3 Какое из чисел: $\ln 1{,}2$ или $\frac{1}{6}$ больше?

1) $\ln$ – натуральный логарифм, т.е. $\log_e$, т.е. сравниваем числа $\log_e 1{,}2$ и $\frac{1}{6}$

2) представим $\frac{1}{6}$ как $\log_e (e)^{\frac{1}{6}} = \log_e \sqrt[6]{e}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3) $\log_e 1,2 \quad \log_e \sqrt[6]{e}$ - сначала логарифмы

$1,2 \quad \sqrt[6]{e}$ - представим 1,2 как $\sqrt[6]{1,2^6}$

$\sqrt[6]{1,2^6} \quad \sqrt[6]{e}$ - подкоренные выражения равны

$1,2^6 \quad e$

4) т.к. $e \approx 2,8$

$1,2^6 = \left(\frac{12}{10}\right)^6 = \frac{2^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6}{2^6 \cdot 5^6} = \frac{6^6}{5^6} \approx 2,99$?V

5) из п.4 следует, что $\ln 1,2 > \frac{1}{6}$

Ответ: $\ln 1,2 > \frac{1}{6}$

№2

$$\begin{cases} mn + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases}$$

1) сложим эти два уравнения:

$mn + kl + nk - ml = 19$

2) вычтем из 1-го уравнения 2-е:

$mn + kl - nk + ml = 7$

3) теперь имеем систему:

$$\begin{cases} mn + kl + nk - ml = 19 \\ mn + kl - nk + ml = 7 \end{cases}$$ сложим эти 2 уравнения

$2mn + 2kl = 26$

$mn + kl = 13$

нечетное число

$mn + kl =$ нечетное число

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4) т.к. сумма двух чисел может быть нечетной, если одно из слагаемых четное, другое - нечетное, то

{ m - чет, k - нечет } { m - нечет, k - чет }

произведение 2-х чисел четное, если: 1) оба четные;
2) 1 - чет, 2 - нечет.

произведение 2-х чисел нечетное, если 1) оба числа нечетные.

1-я система:

m - чет	m - чет	m - нечет	k - нечет
n - чет	n - нечет	n - чет	l - нечет

2-я система:

m - нечет	k - чет	k - чет	k - нечет
n - нечет	l - чет	l - нечет	l - чет

№8 $\sqrt{x^2+4x+4a^2} + \sqrt{x^2-4x+4a^2} = 4b$ $b - ?$ 1 решение

Если x - является решением уравнения, то $-x$ - является решением уравнения $\Rightarrow$ x может быть равен только 0

$x = 0$

$\sqrt{4a^2} + \sqrt{4a^2} = 4b$ $\quad |a| = b$

$2|a| + 2|a| = 4b$ $\quad$ при $b \geq 0$

$2|a| = 2b$

Ответ: при $b \geq 0$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

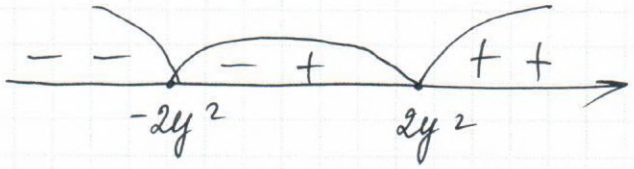
Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7

$S_{фигуры}$ - ?

$|x-2y^2|+|x+2y^2|-8+4y\le 0$

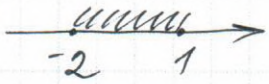
избавимся от модулей: $\begin{cases} x=2y^2 \\ x=-2y^2 \end{cases}$



$\begin{cases} x<-2y^2 \\ -x+\cancel{2y^2}-x-\cancel{2y^2}-8+4y\le 0 \\ y\le \frac{1}{2}x+2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2y^2\le x\le 2y^2 \\ -\cancel{x}+2y^2+\cancel{x}+2y^2-8+4y\le 0 \\ y^2+y-2\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>2y^2 \\ x-\cancel{2y^2}+x+\cancel{2y^2}-8+4y\le 0 \\ y\le 2-\frac{1}{2}x \end{cases}$

$y=\frac{1}{2}x+2$

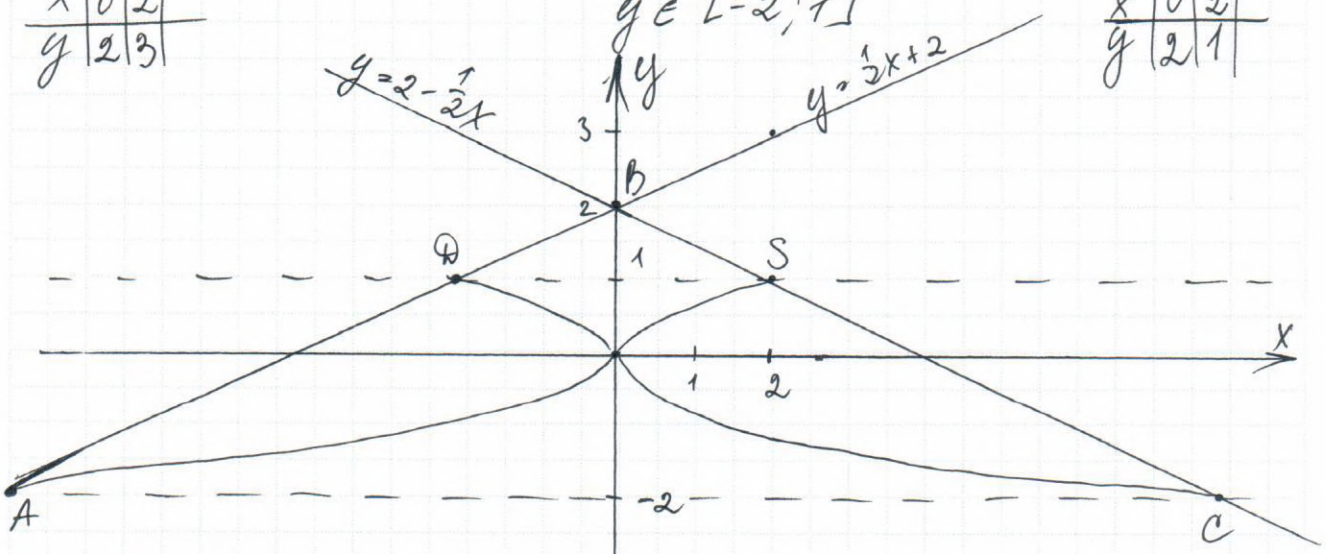
x	0	2
y	2	3



$y\in[-2;1]$

$y=2-\frac{1}{2}x$

x	0	2
y	2	1



т.к. $y\le\frac{1}{2}x+2$ и $y\le 2-\frac{1}{2}x$

а также $y\in[-2;1]$

f определена в ~~△ABC~~ четырёхугольнике ADSC

ADSC - трапеция ($DS \parallel AC$)

$S_{трап}=\frac{a+b}{2}\cdot h$

$S_{трап}=\frac{DS+AC}{2}\cdot h=\frac{4+16}{2}\cdot 3=30$

Ответ: 30 кв.ед.

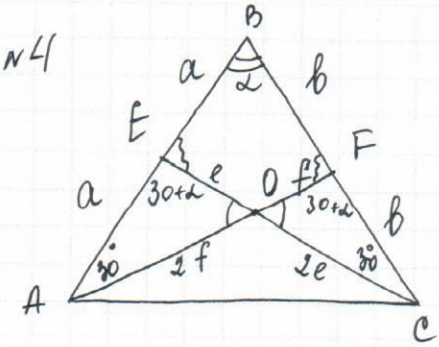
Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4



Дано:
$\triangle ABC$
AF, CE - медианы
$\angle BAF = \angle BCE = 30°$

$\triangle ABC$ - правильный

1) $\angle AOE = \angle COF$ (вертикальные)

2) $\triangle ABF$: $\angle AFB = 180 - 30 - \alpha = 150 - \alpha$ ($\sum \angle \triangle = 180°$)
аналогично $\angle CEB = 150 - \alpha$

3) из п. 2 $\Rightarrow$ что $\angle AEC = \angle AFC = 180 - (150 - \alpha) =$
$= 30 + \alpha$ (смежные углы)

4) $\angle AOE = \angle COF$ (п. 1)
$\angle BAF = \angle BCE$ (Условие)
$\angle AEC = \angle AFC$ (п. 3)
$\Rightarrow \triangle AEO \sim \triangle CFO$ (по 3-м углам)

5) напишем подобие $\triangle AEO$ и $\triangle CFO$:

$$\frac{AE}{FC} = \frac{EO}{OF} = \frac{AO}{CO}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f} = \frac{2f}{2e}$$

$$\frac{e}{f} = \frac{f}{e}$$

$$e^2 = f^2, \text{ т.к. } \begin{matrix} e \geq 0 \\ f \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow e = f, \text{ тогда } \frac{a}{b} = \frac{e}{e} = 1$$

отрезки $AE = EB = a$
$FC = BF = b$
т.к. AF и CE - медианы

т.к. медианы делятся ой вершиной 2:1 $\Rightarrow$ $CC = 2OF$
$OA = 2OF$
пусть $OE = e$, $OF = f$ тогда $CC = 2e$, $OA = 2f$

$a = b$

6) из п. 5 следует, что $AB = BC$, значит $\triangle ABC$ равнобедренный $\Rightarrow \angle BAC = BCA = 60 - \frac{\alpha}{2}$ ($\sum \angle B \triangle ABC$)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

7) $\triangle EBC$, напишем теор. синусов:

$$\frac{BC}{\sin \angle BEC} = \frac{EB}{\sin \angle ECB}$$

$$\frac{2a}{\sin(150-\alpha)} = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin(150+\alpha) = 1$$

т.к. $\sin 90 = 1 \Rightarrow 150-\alpha = 90$

$\alpha = 60^\circ$

8) т.к. четырехугольник равнобедренной и угол при вершине $= 60^\circ \Rightarrow$ треугольник равносторонний т.е. правильный.

Ответ: $\triangle ABC$ - правильный

№6

$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y) = 15xy \\ (x^4+y^4)(x^2+y^2) = 85x^2y^2 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ $\quad x+y=a$, $xy=b$ – введем новые переменные

тогда система примет вид:

$$\begin{cases} (a^2-2b)a = 15b \\ (a^2-2b)^2-2b^2)(a^2-2b) = 85b^2 \end{cases}$$ поделим 2-е уравнение на 1-е

$$\frac{(a^2-2b)^2-2b^2}{a} = \frac{17b}{3}$$

$$\frac{(a^2-2b-\sqrt{2}b)(a^2-2b+\sqrt{2}b)}{a} = \frac{17b}{3}$$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

(Адрес площадки: Новосибирская область, г Карасук, ул Тургенева, д 14)

Титульный лист работы

Симаков Дмитрий Григорьевич (дата рождения 24.03.1998)
ученик 11 класса, лицей МБОУ Технический лицей №176 (Карасук)
регистрация № **46875**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 5 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Симаков)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Филиал СГУВТ в городе Карасук - г.Карасук

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	0	−	+	0	0	+	−	3

№1

x - всего апельсинов у отца

1 сын - $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2 сын - $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

3 сын - $\frac{1}{2}(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$

} вместе x

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} = x$

$\frac{1}{8}x = \frac{7}{8}$

$x = 7$

1 сын - $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$

2 сын - $\frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2$

3 сын - $\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$

Ответ: 7 ап. - у отца; 4 ап. - у 1 сына; 2 ап. - у 2 сына; 1 ап. - у 3 сына.

№3

$\ln \frac{1,2}{1} \vee \frac{1}{6}$

$\ln 1,2 \vee \ln e^{\frac{1}{6}}$

$1,2 \vee e^{\frac{1}{6}}$

$1,2 \vee \sqrt[6]{e}$

? $2,99 \vee e$

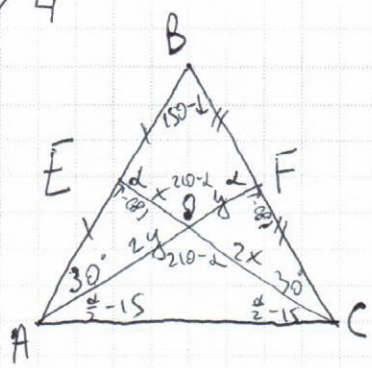
$2,99 \vee 2,7$

$2,99 > 2,7 \Rightarrow \ln 1,2 > \frac{1}{6}$

Ответ: $\ln 1,2$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4



$\triangle BAF \sim \triangle BCE$ (по двум углам) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BFA = \angle BEC$ (обозначим α) и
$\frac{BA}{BC} = \frac{AF}{CE} = \frac{BF}{BE}$

Медиана делится точкой пересечения медиан в отношении 2 к 1, начиная от вершины, значит $CO = 2x$, $OE = x$, $AO = 2y$, $OF = y$

$\angle CFO = \angle AEO = 180 - \alpha$, т.к. они смежные с углом α.

$\triangle AOE \sim \triangle COF$ (по двум углам) $\Rightarrow$ $\frac{AO_{(2y)}}{CO_{(2x)}} = \frac{OE_{(x)}}{OF_{(y)}} = \frac{AE}{CF}$

$\frac{2y}{2x} = \frac{x}{y}$; $2x^2 = 2y^2$; $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

Из $\triangle BAF$: $\angle B = 180 - 30 - \alpha = 150 - \alpha$

Из ч-ника $EOFB$: $\angle O = 360 - 150 + \alpha - \alpha - \alpha = 210 - \alpha$

$\angle EOF$ и $\angle AOC$ - верт. $\Rightarrow \angle AOC = \angle EOF = 210 - \alpha$

$AO = 2y$, $CO = 2x$, $x = y$ $\Rightarrow AO = CO \Rightarrow \triangle AOC$ - р/б $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA$

Из $\triangle AOC$: $\angle OAC = \angle OCA = \frac{180 - 210 + \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - 15$

Из $\triangle COF$: $FO = \frac{1}{2} OC$, $\angle C = 30°$, OF лежит напротив $\angle C$ $\Rightarrow \triangle COF$ - п/у $\Rightarrow$ $\angle CFO = 90°$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4 (продолжение)

$\left.\begin{array}{l}\angle CFO = 90^\circ \\ \angle CFO = 180 - \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow 180 - \alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = 30 + \frac{90}{2} - 15 = 30 + 30 = 60^\circ \\ \angle ACB = 30 + \frac{90}{2} - 15 = 30 + 30 = 60^\circ \\ \angle CBA = 150 - 90 = 60^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC$ - правильный ч.т.д.

№8

Если x - решение этого уравнения, то $(-x)$ - также будет решением этого уравнения. Тогда уравнение имеет единственный корень, когда $x = 0$.

$\sqrt{0^2 + 4\cdot 0 + 4a^2} + \sqrt{0^2 - 4\cdot 0 + 4a^2} = 4b$

$\sqrt{4a^2} + \sqrt{4a^2} = 4b$

$2|a| + 2|a| = 4b$

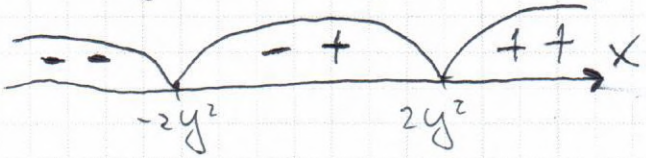
$4|a| = 4b$

$b = |a|$

Ответ: при $b \geq 0$

№7

$|x - 2y^2| + |x + 2y^2| \leq 8 - 4y$



Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1) $x \le -2y^2$

$-x + 2y^2 - x - 2y^2 \le 8 - 4y$

$-2x \le 8 - 4y$

$4y \le 8 + 2x$

$y \le 2 + \frac{1}{2}x$

2) $-2y^2 \le x \le 2y^2$

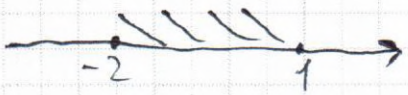
$-x + 2y^2 + x + 2y^2 \le 8 - 4y$

$4y^2 \le 8 - 4y$

$y^2 + y - 2 \le 0$

$D = 9$

$\left[\begin{array}{l} y \le 1 \\ y \le -2 \end{array}\right.$



$y \in [-2; 1]$

3) $x \ge 2y^2$

$x - 2y^2 + x + 2y^2 \le 8 - 4y$

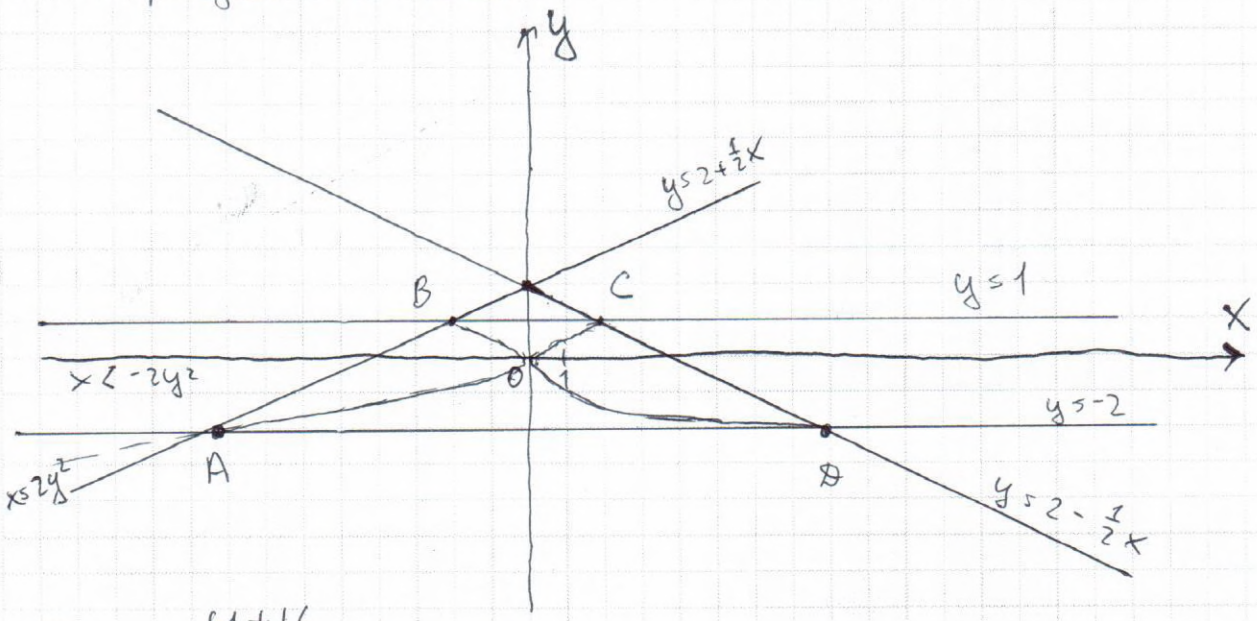
$2x \le 8 - 4y$

$4y \le 8 - 2x$

$y \le 2 - \frac{1}{2}x$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7 (продолжение)



$S_{ABCD} = \frac{4+16}{2} \cdot 3 = 30$ кв. ед.

Ответ: 30 кв. ед.

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников
«Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету физика

Елецкий филиал МИИТ - г.Елец

(Адрес площадки: 399773, Липецкая область, г Елец, ул Вермишева, д 12)

Титульный лист работы

Поздняков Кирилл Викторович (дата рождения 18.04.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МОУ СОШ №10 (Елец)
регистрация № **45190**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 2 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Поздняков)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 12 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Елецкий филиал МИИТ - г.Елец

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

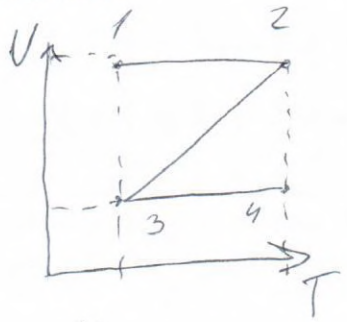
В-1 $\Sigma = 3,5$

1) Дано:

$\Delta T = 100K$

$Q - ?$

Решение



1-2: $V = const$, $A = 0$

$Q_{12} = \Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} \nu R T_2 - \frac{3}{2} \nu R T_1 = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$

2-3: $Q_{23} = U_{23} - A_{газа} = U_3 - U_2 - \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R T_3 - \frac{3}{2} \nu R T_2 - \nu R \Delta T = -\frac{3}{2} \nu R \Delta T - \nu R \Delta T = -\frac{5}{2} R \Delta T$

3-4: $V = const \Rightarrow A = 0$

$Q_{34} = \frac{3}{2} R \Delta T$ 2,0

$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} = \frac{3}{2} R \Delta T - \frac{5}{2} R \Delta T + \frac{3}{2} R \Delta T =$

$= \frac{1}{2} R \Delta T = 0,5 \cdot 8,31 \cdot 100 = 415,5$ Дж

Ответ: 415,5 Дж

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4) Дано:

$I_1 = const$

$I_{2max} = 0,1 I_1$

$\Delta Q - ?$

Решение

$\Delta Q = Q_1 - Q_2$

$Q_1 = I^2 R$

$Q_1 = \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 X_L = \frac{0,01 I_1^2}{2} X_L$

$\Delta Q = I_1^2 R - 5 \cdot 10^{-3} I_1^2 X_L$ 0,5

Ответ: $\Delta Q = I_1^2 R - 5 \cdot 10^{-3} I_1^2 X_L$

2) Дано:

$R = 5 см$

$v = 3 \cdot 10^5 м/с$

$m = 6,68 \cdot 10^{-27}$

$Q - ?$

Решение

По II Закону Ньютона:

$F_л = ma$

$k \frac{q_2 \cdot Q}{R^2} = m \frac{v}{t}$, приняв $t = 1 с$ получим

$Q = \frac{m v R^2}{k q_2 \cdot t} = \frac{6,68 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^9 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 1} =$

$= 17,4 \cdot 10^{-15} Кл$ 1,0

Ответ: $Q = 17,4 \cdot 10^{-15} Кл$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Степанов Михаил Витальевич (дата рождения 08.03.1994)
ученик 9 класса, колледж Сочинский финансово-юридический колледж (Сочи Краснодарский край)
регистрация № **44604**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 8 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Степанов)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1 Вариант №4.

Обозначим площадь всего поля - S тогда время по плану $\frac{S}{8}$ (ч) $\Rightarrow$ время на обработку $\frac{1}{3}$ поля $= \frac{\frac{1}{3}S}{8}$ (ч) $\Rightarrow$ время на обработку оставшейся $\frac{1}{4}$ части поля $= \frac{\frac{1}{4}S}{6}$ (ч) $\Rightarrow$ остаток не вспаханого поля составит $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{12}$ часть поля, тогда $\frac{\frac{5}{12}S}{5}$ (ч) составит время на оставшуюся часть поля.

Следуя из того что на выполнение работы ушло на 4 часа больше составим уравнение.

$\frac{S}{24}+\frac{S}{24}+\frac{S}{12}-\frac{S}{8}=4 \quad / \cdot 24$

$S+S+2S-3S=96$

$S=96$ (га) - площадь всего поля, зная это можно найти время по плану: $\frac{96}{8}=12$ (ч) $\Rightarrow$

$12-12=00:00$ (ч) - время начала работы.

Ответ: 96 га; в 0 часов начало работы.

+

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	−	±	∓	±	−	−	−	3

3б

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2

$$\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz + yt = 5 \end{cases} \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x > t \\ y > z \end{matrix}$$

$y(x+t) + z(x+t) = 12$

$(x+t)(y+z) = 12$

$(2+1)(3+1) = 12$

Ответ: $(x=3; y=2; t=1; z=1)$

или

$(x=2; y=3; t=1; z=1)$

12	2
6	2
3	3
1	

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3.

Для того что бы сравнить $\ln 1{,}25$ и $0{,}2$; рассмотрим их разность $\ln 1{,}25 - 0{,}2$; для этого число $0{,}2$ логарифмируем $\Rightarrow \ln\frac{5}{4} - \ln e^{\frac{1}{5}} = \ln\left(\frac{5}{4} : \sqrt[5]{e}\right) > 0$ так как $\left(\frac{5}{4} : \sqrt[5]{e}\right) > 1$; $\Rightarrow \frac{5}{4} > \sqrt[5]{e}$ так как $\left(\frac{5}{4}\right)^5 > e$;

$e \approx 2{,}7$ $3 > 2{,}7$

$\left(\frac{5}{4}\right)^5 \approx 3$ откуда это

Ответ: $\ln 1{,}25 > 0{,}2$

где вычисления?

+

Регистрация №44604

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4

Максимальная площадь треугольника, удовлетворяющая условиям, будет в равностороннем треугольнике, с биссектрисами равными 1. Биссектриса и высота совпадают следуя из этого составим уравнение и найдем площадь:

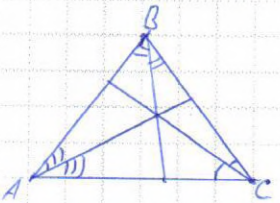
$x^2 + 1 = (2x)^2$

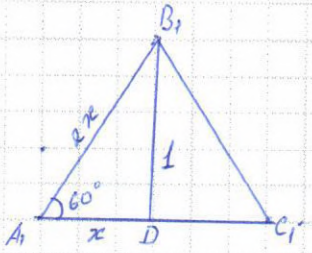
$3x^2 = 1$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 1 = x = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$

при уменьшении биссектрисы площадь соответственно будет уменьшаться.





Регистрация №44604

Страница 04 из 08

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x > 0$

$(\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x \cos 3x) > 0$

$2\cos 2{,}5x \cdot \cos 1{,}5x + 2\cos 2x \cdot \cos 0{,}5x > 0$

$2\cos 2{,}5x(\cos 1{,}5x + \cos 0{,}5x) > 0$

$2\cos 2{,}5x \cdot 2\cos x \cdot \cos 0{,}5x > 0$

$\cos 2{,}5x \cdot \cos x \cdot \cos 0{,}5x > 0$

Найдем нули функции:

1) $\cos 2{,}5x = 0$

$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ где $n \in Z$

$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}n$ где $n \in Z$

2) $\cos x = 0$

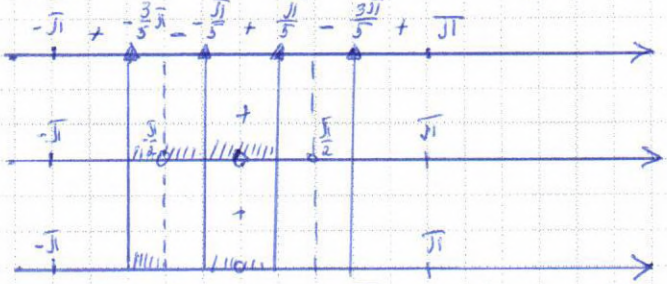
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ где $n \in Z$

3) $\cos 0{,}5x = 0$

$0{,}5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ где $n \in Z$

$x = \pi + 2\pi n$ где $n \in Z$

Исходя из данного решения минимальный общий период 2π из этого следует нахождение решения на $[-\pi; \pi]$



что?

$x \in (-\frac{3}{5}\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n) \cup (-\frac{\pi}{5} + 2\pi n; \frac{\pi}{5} + 2\pi n) \cup (\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3}{5}\pi + 2\pi n)$

??

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6

$$\begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{5}{4} \\ \frac{x^4+y^4}{1+x^4y^4} = \frac{257}{32} \end{cases}$$

1) пусть $x+y=a$

$xy=b$

2) $\frac{x+y}{1+xy} = \frac{a}{1+b} \Rightarrow \frac{a}{1+b} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{5+5b}{4}$

3) $x^4+y^4 = x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 = (x^2+2xy+y^2-2xy)^2 - 2x^2y^2 = ((x+y)^2-2xy)^2-2x^2y^2 = (a^2-2b)^2-2b^2$

$$\frac{x^4+y^4}{1+x^4y^4} = \frac{(a^2-2b)^2-2b^2}{1+b^4} = \frac{257}{32}$$

составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a}{1+b} = \frac{5}{4} \\ \frac{(a^2-2b)^2-2b^2}{1+b^4} = \frac{257}{32} \end{cases}$$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

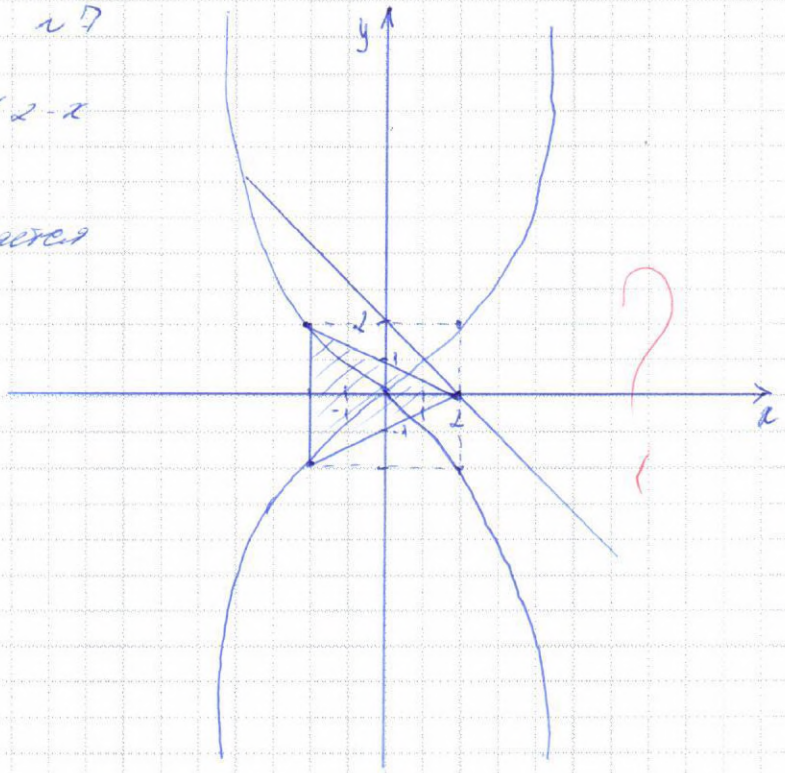
№7

$|y - \frac{x^2}{2}| + |y + \frac{x^2}{2}| \le 2 - x$

искомая фигура является треугольником

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

Ответ: 8



Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8

$\sqrt{9b^2-6x+x^2}+\sqrt{9b^2+6x+x^2}=6a$; при $a\geq 0$

$\sqrt{(x^2+9b^2)-6x}+\sqrt{(x^2+9b^2)+6x}=6a$

возведём обе части уравнения в квадрат

$x^2+9b^2-6x+x^2+9b^2+6x$

$2x^2+18b^2+2\sqrt{[(x^2+9b^2)-6x][(x^2+9b^2)+6x]}=36a^2 \;/:2$

$x^2+9b^2+\sqrt{(x^2+9b^2)^2-(6x)^2}=36a^2$

$(x^2+9b^2)^2-36x^2=[36a^2-(x^2+9b^2)]^2$

$36x^2=-36^2\cdot a^4+2\cdot 36a^2\cdot(x^2+9b^2)$

$x^2=2a^2(x^2+9b^2)=36a^4$

$x^2=\dfrac{18a^2b^2-36a^4}{1-2a^2}$ $\Rightarrow$ $a\geq 0$ и $a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$, при $b^2=2a^2$ - это является единственным возможным решением

Ответ: $a\geq 0$ и $a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$? −

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Русаков Игорь Вячеславович (дата рождения 05.12.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МБОУ СОШ №24 (Г.Сочи)
регистрация № **46690**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 4 | | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Русаков)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1.

Обозначим за x - апельсин, и составим ур-ние.

$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ - отдали первому.

$x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$ - осталось

$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ - отдали второму.

$x - \left(\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4}\right) = x - \left(\frac{3x+3}{4}\right) = x - \frac{3}{4}$ - осталось.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$ ~~остаюсь~~ отдали третьему.

$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} = x$

$4x + 4 + 2x + 2 + x + 1 - 8x = 0$

$-x + 7 = 0$

$x = 7$

±

Ответ: 7.

1	2	3	4	5	6	7	8	2
±	−	±	∓	0	0	−	0	3

3 балла

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2

$$\begin{cases} mn + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} n = \frac{13 - kl}{m} \\ n = 6 + \frac{ml}{k} \end{cases}$$

Методом подбора находим числа L и K

$kl < 13$

Предположим, что $kl = 5$

$k = 1 \quad L = 5$

(5) (1)

1) $n = \frac{13 - kl}{m}$; => $n = \frac{13 - 5}{m} = \frac{8}{m} = \frac{8}{4} = 2$ $m = 4$, $n = 2$.

1. $2 = \frac{13 - 5}{4} \Rightarrow 2 = 2$

2. $2 = \frac{6 + 4}{5} \Rightarrow 2 = 2.$

№3.

$\ln 1,2 > \frac{1}{6}$

$\ln \frac{6}{5} > \frac{1}{6} = \log_e e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}$

$\left(\frac{6}{5}\right)^6 > \left(\sqrt[6]{e}\right)^6$

$\approx 2,98 > e = 2,7.$

Ответ: $\ln 1,2 > \frac{1}{6}$.

Где расчеты? +

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

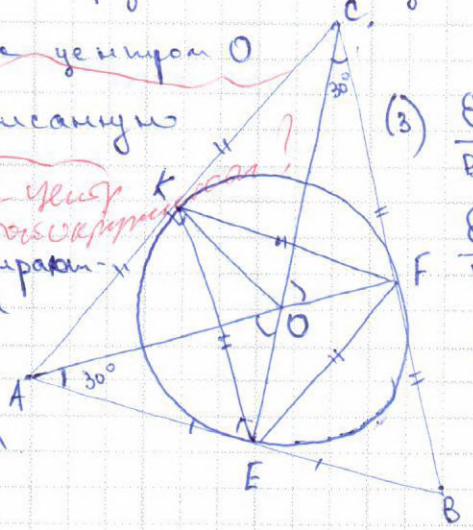
№4.

Док-ть, что $\triangle ABC$ - правильный.

1. Т.к угол $BAF = \angle BCE$, а углы AOE и COF равны, (как вертикальные) то $\angle AEO = CFO$, значит эти треугольники подобны.

2. Начертим окружность с центром O в треугольник ABC - вписанную окружность.

Почему т. O - центр этой окружности?



3. Т.к $\triangle ECF$ и $\triangle AFE$ опираются на одну хорду и два угла у них равны, то эти треугольники равны. Значит $CF = FB = EB = AE$.

(3) $\frac{EB}{BF} = \frac{CB}{AB}$

$\frac{EB}{BF} = \frac{2BF}{2EB}$

$2EB^2 = 2BF^2$

$EB = BF$

$AB = BC$.

Значит $\triangle ABC$ равнобедр

4. Проведем хорду KF; $KF = EF = CF = EK$.

KF - средняя линия ACB, значит $KF = \frac{AB}{2} = AE = EB = FB$.

5. Т.к EF - средняя линия $\triangle ABC$, то $AC = 2EF$, значит все стороны треугольника равны.

$\pm$

Регистрация №46690 Страница 03 из 4

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016

13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7.

$|x-2y^2|+|x+2y^2| \le 8-4y$

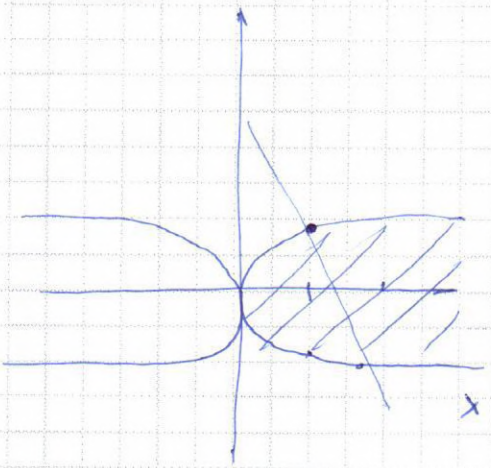
1) $x-2y^2 \ge 0$ $\quad x+2y^2 \ge 0$

$x \ge 2y^2$ $\quad x \ge -2y^2$

$x-2y^2+x+2y^2 \le 8-4y$

$4y \le -2x+8$

$y \le -\frac{1}{2}x+2.$



2. $x-2y^2 < 0$ $\quad x+2y^2 < 0$

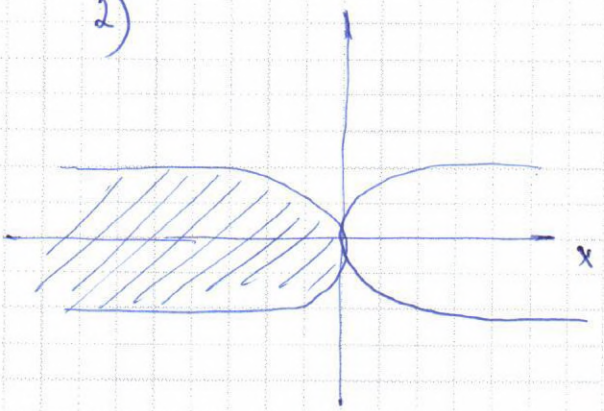
$x < 2y^2$ $\quad x < -2y^2$

$-x+2y^2-x-2y^2 \le 8-4y$

$-2x \le 8-4y$

$4y \le 2x+8$

$y = \frac{1}{2}x+2$



3. $x-2y^2 > 0$ $\quad x+2y^2 < 0$

$x-2y^2-x-2y^2 \le 8-4y$

$-4y^2 \le 8-4y$

$-4y^2+4y-8 \le 0$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

(Адрес площадки: 354065, Краснодарский край, г Сочи, ул Красноармейская, д 30)

Титульный лист работы

Апанасевич Алексей Васильевич (дата рождения 20.09.1998)
ученик 11 класса, гимназия МОБУ гимназия №6 (Сочи)
регистрация № **44067**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника Апанасевич (Апанасевич)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2

$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_3 x_4 = 11 \\ x_1 x_3 - x_2 x_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{11 - x_3 x_4}{x_2} \\ x_1 = \dfrac{1 + x_2 x_4}{x_3} \end{cases} \qquad x_3 \cdot x_4 < 11$$

Методом подбора определим, что $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$; $x_4 = 1$

Сделаем проверку:

$1 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 12$ $\qquad$ $1 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 1$

$12 = 12$ $\qquad$ $1 = 1$

Других вариантов нет

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$; $x_4 = 1$

№3

$\ln 1{,}01$ или $\frac{2}{201}$

$1{,}01$ $\qquad$ $e^{\frac{2}{201}}$

$(1{,}01)^{201}$ $\qquad$ $\left(e^{\frac{2}{201}}\right)^{201}$

$(1{,}01)^{201}$ $\qquad$ e^2

~~Видно, что e^2 больше $(1{,}01)^{201}$ => $\ln 1{,}01 < \frac{2}{201}$~~

~~Ответ: $\frac{2}{201}$ больше $\ln 1{,}01$~~

$(1{,}01)^{201} \approx 7{,}38$ Откуда?

$e^2 \approx 7{,}29$

Значит $\ln 1{,}01 > \frac{2}{201}$

Ответ: $\ln 1{,}01$ больше $\frac{2}{201}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4

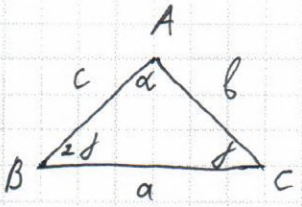
Дано:

$\angle B = 2\angle C$

Доказать:

$AC^2 = AB(AB+BC)$

Решение:



Пусть: $\angle A = \alpha$

$\angle B = 2\beta$

$\angle C = \beta$

$b^2 = c(c+a)$

$\alpha + 3\beta = 180$

$\alpha = 180 - 3\beta$

$\sin\alpha = \sin(180 - 3\beta) = \sin 3\beta$

По теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin 2\beta} = \frac{c}{\sin\beta} = 2R$$

+

Значит $a = 2R\sin 3\beta$; $b = 2R\sin 2\beta$; $c = 2R\sin\beta$

Запишем $AC^2 = AB(AB+BC)$ в виде $b^2 = c(c+a)$

1) $b^2 = 4R^2\sin^2 2\beta$

2) $c(c+a) = 2R\sin\beta(2R\sin\beta + 2R\sin 3\beta) = 4\sin\beta \cdot R^2(\sin\beta + \sin 3\beta) =$

$= 4R^2\sin\beta \cdot 2\sin 2\beta\cos\beta = 4R^2\sin^2 2\beta$

$b^2 = c(c+a)$

$4R^2\sin^2 2\beta = 4R^2\sin^2 2\beta$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x < 0$

$2\sin\frac{x+4x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{2x+3x}{2}\cos\frac{2x-3x}{2} < 0$

$\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} < 0$

Найдём нули функции

$\sin\frac{5x}{2} = 0$

$x = \frac{2}{5}\pi n, n \in Z$

$\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$

$2\cos\frac{\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}}{2}\cos\frac{\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}}{2} = 0$

$\cos x \cos\frac{x}{2} = 0$

$\cos x = 0$ $\quad\quad$ $\cos\frac{x}{2} = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\quad\quad$ $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Построив графики, находим пересечение решений ?

Ответ: $2\pi n - \frac{4\pi}{5} < x < \frac{1}{2}(4\pi n - \pi), n \in Z$

$2\pi n - \frac{2\pi}{5} < x < 2\pi n, n \in Z$

$2\pi n + \frac{2\pi}{5} < x < \frac{1}{2}(4\pi n + \pi), n \in Z$

$2\pi n + \frac{4\pi}{5} < x < 2\pi n + \pi, n \in Z$

7

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7

$|x-y^2|+|x+y^2| \le 4-2y$

1) $\begin{cases} x-y^2>0 \\ x+y^2>0 \end{cases}$

$x-y^2+x+y^2 \le 4-2y$

$y \le -x+2$

2) $\begin{cases} x-y^2<0 \\ x+y^2<0 \end{cases}$

$-x+y^2-x-y^2 \le 4-2y$

$-2x \le 4-2y$

$y \le x+2$

3) $\begin{cases} x-y^2>0 \\ x+y^2<0 \end{cases}$

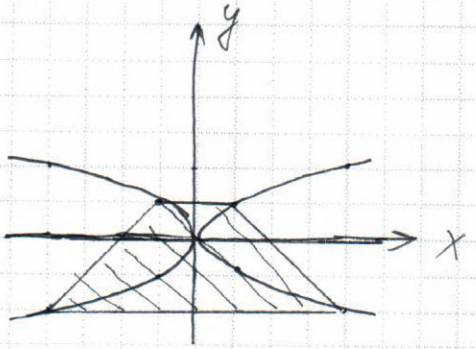
$x-y^2-x-y^2 \le 4-2y$

$y^2-y+2 \ge 0$

4) $\begin{cases} x-y^2<0 \\ x+y^2>0 \end{cases}$

$-x+y^2+x+y^2 \le 4-2y$

$y^2+y-2 \le 0$



+

Найдем площадь полученной фигуры

$S = \frac{8+2}{2} \cdot 3 = \frac{10}{2} \cdot 3 = 15$

Ответ: $S = 15$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

Поволжский филиал МИИТ - г.Саратов

(Адрес площадки: 410790, Саратовская область, г Саратов, ул Астраханская, д 1а)

Титульный лист работы

Евдокимова Ольга Андреевна (дата рождения 30.05.1998)
ученица 11 класса, средняя школа Лицей-интернат №6 ОАО "РЖД" (Саратов)
регистрация № **47963**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 4 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Евдокимова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Сильнова Л.В.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Поволжский филиал МИИТ - г.Саратов

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вар 1

5) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \geq 2$

$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} \geq 2 \quad |\cdot 2$

$\cancel{1} + \cos 2x + \cancel{1} + \cos 4x + \cancel{1} + \cos 6x + \cancel{1} + \cos 8x \geq \cancel{4}$

$(\cos 6x + \cos 4) + (\cos 2x + \cos 8x) \geq 0$

$2\cos 5x \cdot \cos 3x + 2\cos 5x \cos x \geq 0$

$2\cos 5x\,(\cos 3x + \cos x) \geq 0 \quad |:2$

$\cos 5x \cdot 2\cos 2x \cdot \cos x \geq 0 \quad |:2$

$\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \geq 0$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	−	−	+	+	+	−	−	3

3 б

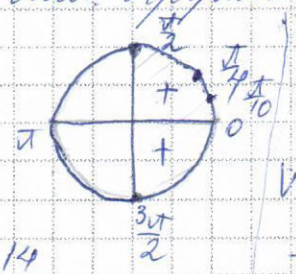
Решим неравенство методом интервалов:

Рассм выр. $\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \geq 0$ и найдем нули:

+

$\left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.$

Схематически изобразим нули на числ. окружности:



~~Ответ: $x \in [\frac{\pi}{2} + \pi n$~~

Ответ: $x \in [-\frac{\pi}{10} + 2\pi n; \frac{\pi}{10} + 2\pi n] \cup [\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3}{10}\pi + 2\pi n] \cup [\frac{2\pi}{5} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n] \cup [\frac{9\pi}{10} + 2\pi n; \frac{11\pi}{10} + 2\pi n] \cup [\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{13\pi}{10} + 2\pi n] \cup [\frac{17\pi}{10} + 2\pi n; \frac{7\pi}{11} + 2\pi n]$

2) $\begin{cases} xy + zt = 11 \\ xz + yt = 3 \end{cases}$ $\quad xy + zt + xz + yt = 14$

$x(y+z) + t(z+y) = 14$

$(y+z)(x+t) = 14 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+z=2 \\ x+t=7 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2-z \\ x = 7-t \end{cases} \end{array}\right.$ Подставим в искомую систему

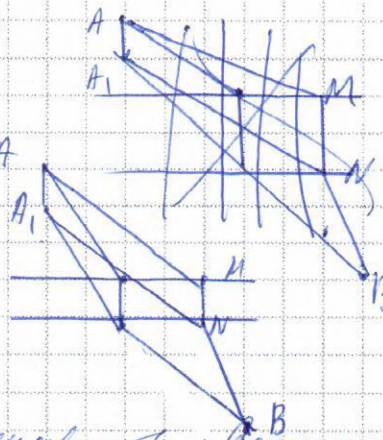
$\begin{cases} (2-z)\cdot(7-t) + zt = 11 \\ (7-t)\cdot z + (2-z)t = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 14 - 7z - 2t + zt + 2t = 11 \\ 7z - zt + 2t - 7t \end{cases}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\begin{cases} 27t - 7z - 2t = 8 \\ -27t + 7z + 2t = 3 \end{cases}$ – не имеет решений

т.к. x, y, z, t – натур. числа, т.е. $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1, t \geq 1$

4)



Предположим, что положение моста найдено. При пар-ном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$ т. A перейдет в некот. т. A_1, а т. M – в точку N. Тогда $AM + MN + NB = AA_1 + A_1N + NB \geq AA_1 + A_1B$ (нерав-во △), причем неравенство достигается за счет того, что т. A_1, N и B лежат на одной прямой, т.е. $BN \parallel AM$. => отложим от т. A отрезок AA_1 по величине равной ширине реки и ⊥ к ее направлению, соед. т. A_1 с т. B. Точка N, получ. при пересеч. A_1B с более близким к B берегом реки, опред. положение моста.

Если MN существенно меньше, чем расст., тогда им можно пренебречь – получается прямоуг. △ и кратчайшее расст. – есть гипотенуза.

3) $\ln 1{,}1 > \frac{1}{11}$, т.к. $\ln 1{,}1 \approx 0{,}095$, а $\frac{1}{11} \approx 0{,}090$ откуда это?

1) Пусть сумма – это S. Тогда

I лис. получил $a + (S-a)\cdot m = a + Sm - am$

II лис. получил $2a + (S - 2a + (S - (a + Sm - am))\cdot m$

Приравняем эти суммы, ведь по усл. они равны

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$a+Sm-am=2a+2Sm-3am-Sm^2+am^2$

$2a+2Sm-3am-Sm^2+am^2-a-Sm+am=0$

$a+Sm-2am-Sm^2+am^2=0$

$Sm-Sm^2=-am^2+2am-a$

$S(m-m^2)=a(-m^2+2m-1)$

$S(m-m^2)=-a(m^2-2m-1)$

$Sm(1-m)=-a(m-1)^2$

$Sm(m-1)=a(m-1)^2 \mid :m-1$

$Sm=a(m-1)$

$S=\frac{a(m-1)}{m}=\frac{am-a}{m}=a-\frac{a}{m}$

$m^2-2m-1=0$

$D=4-2\cdot1\cdot(-1)=0$

$m=\frac{2}{2}=1$

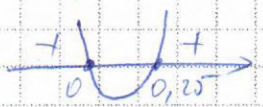
+

??

3) $\sqrt{a+2ax+x^2}+\sqrt{a-2ax+x^2}=2\sqrt{6}$

1. $\sqrt{a+2ax+x^2}\geq 0$. $a+2ax+x^2=0$ $D=4a^2-4\cdot a=4a^2-4a$

$D\geq 0$ при $4a^2-4a\geq 0$ $4a(4a-1)\geq 0$ $a=0$, $a=0{,}25$



$a\in(-\infty;0]\cup[0{,}25;+\infty)$

2. $\sqrt{a-2ax+x^2}\geq 0$.

$\sqrt{x^2-2ax+a}\geq 0$ $x^2-2ax+a=0$

$D=4a^2-4a$, $4a^2-4a\geq 0$.

−

6) $\begin{cases} x^3y+x^2y^2+2x^2y^2+x^2y^3=30 \\ x^2y+xy+x+y+xy^2=11 \end{cases}$ $\begin{cases} xy(x^2+x^2y+2xy+xy^2+y^2)=30 \\ xy(x+y)+xy+x+y=11 \end{cases}$

$\begin{cases} xy((x+y)^2+xy(x+y))=30, \\ xy(x+y)+xy+x+y=11 \end{cases}$ $\begin{cases} xy(x+y)(x+y+xy)=30 \\ xy(x+y)+xy+x+y=11 \end{cases}$

Замена: $x+y=a$, $xy=b$

$\begin{cases} ab(a+b)=30 \\ ab+(a+b)=11 \end{cases}$ Методом подбора имеем:

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Поволжский филиал МИИТ - г.Саратов

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\cancel{ab(a+b)=30}$

$\cancel{ab+}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}ab=6\\a+b=5\end{cases}\\ \begin{cases}ab=5\\a+b=6\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\\ \begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\\ \begin{cases}a=5\\b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\end{array}\right.$$

Вернемся к переменным:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=2\\xy=3\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=5\\xy=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=1\\xy=5\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\varnothing\\ \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{5-\sqrt{21}}{2}\\y=\frac{5+\sqrt{21}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

$\cancel{\begin{cases}x=\end{cases}}$

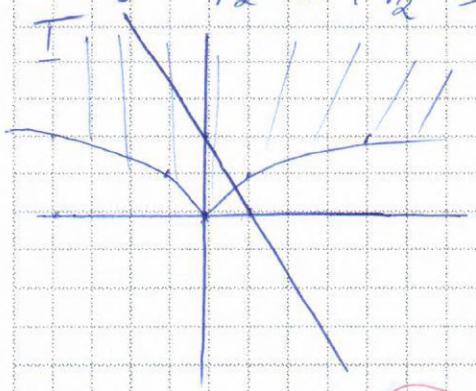
Ответ: $(2;1)\ (1;2)\ \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$ $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\ \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$

+

7) $\left|x-\frac{y^2}{2}\right|+\left|x+\frac{y^2}{2}\right|\le 2-y$

I с $\begin{cases}x-\frac{y^2}{2}\\x+\frac{y^2}{2}\ge 0\\x-\frac{y^2}{2}+x+\frac{y^2}{2}\le 2-y\end{cases}$ $\begin{cases}y^2\le 2x\\y^2\ge -2x\\y\le 2-2x\end{cases}$ $\begin{cases}y\le\sqrt{2x}\\x\ge 0\\y\le 0\\y\le 2-2x\end{cases}$ $x=0$ $S=0$

I



II с $\begin{cases}x-\frac{y^2}{2}\ge 0\\x+\frac{y^2}{2}<0\\x-\frac{y^2}{2}-x-\frac{y^2}{2}\le 2-y\end{cases}$ $\begin{cases}y^2\le 2x\\y^2<-2x\\2-y+y^2\ge 0\end{cases}$

$\begin{cases}y\le\sqrt{2x}\\y<\sqrt{2x}\\y-\text{л.ч.}\end{cases}$ Н.Ф. $y^2-y+2=0$

$D=1-8<0$ $\varnothing$

−

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

Воронежский филиал МИИТ - г.Воронеж

(Адрес площадки: 394026, Воронежская область, г Воронеж, ул Урицкого, д 75а)

Титульный лист работы

Жидких Никита Сергеевич (дата рождения 04.02.2000)
ученик 10 класса, средняя школа МБОУ СШ №68 г. Липецка (г. Липецк)
регистрация № **47580**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 05 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Жидких)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Лукин О.А.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Воронежский филиал МИИТ - г.Воронеж

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	±	−	+	−	0	0	0	3

№1

Пусть у отца было N апельсинов.

=> первому сыну он отдал $\frac{N}{2}+\frac{1}{2}=A$ апельсинов;

=> второму сыну $\frac{N-A}{2}+\frac{1}{2}$ апельсинов;

=> третьему - $\frac{N-A-A/2}{2}+\frac{1}{2}$ апельсинов,

т.к. если

$N/2+1/2=A \Rightarrow N=2A-1$

$\Rightarrow \frac{N-A}{2}+\frac{1}{2}=A/2$

$\Rightarrow \frac{N-A-A/2}{2}+\frac{1}{2}=A/4$

$\Rightarrow N=A+A/2+A/4$ (т.к. по условию апельсинов не осталось)

$\Rightarrow N=\frac{7A}{4}$ $N=2A-1$

$\Rightarrow 2A-1=\frac{7A}{4}$

$7A=8A-4 \Rightarrow A=4 \Rightarrow N=7$.

Тогда всего было 7 апельсинов,

первый получил $7/2+1/2=4$ апельсина

второй - $\frac{7-4}{2}+\frac{1}{2}=2$ апельсина

третий - $\frac{7-4-2}{2}+\frac{1}{2}=1$ апельсин.

Ответ: всего 7; 1-ый - 4, 2-ой - 2, 3-й - 1.

Регистрация №47580

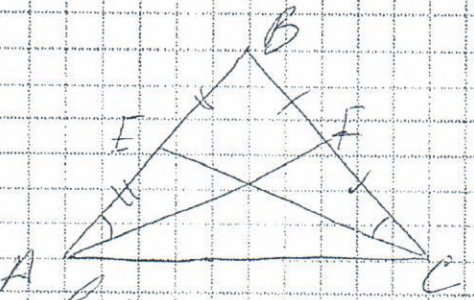
Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Воронежский филиал МИИТ - г.Воронеж

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4.



Дано:
$\triangle ABC$
AF и CE - медианы
$\angle BAF = \angle BCE = 30^\circ$

Док-ть:
$\triangle ABC$ - правильный

Док-во:

1) $\angle BCE = \angle BAF$, $\angle B$ - общий

$\Rightarrow \triangle BAF \sim \triangle BCE$ по 2-м углам

$\Rightarrow \frac{BF}{BE} = \frac{AF}{CE} = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow BE = \frac{BC \cdot BF}{AB}$ (1)

2) AF и CE - медианы $\Rightarrow BF = FC = \frac{BC}{2}$

$BE = AE = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow$ (1) $BE = \frac{2BF \cdot BF}{2BE}$

$2BE \cdot BE = 2BF \cdot BF$

$\Rightarrow BF = BE \Rightarrow AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ - р/б.

3) $\Rightarrow 2BE = BC$, $2BF = AB$ $\Rightarrow \triangle BAF$ и $\triangle BCE$ - прямоуг.
(т.к. против $\angle = 30^\circ$ лежит катет, равный ½ гипотенузы)

4) $\Rightarrow CE \perp AB \Rightarrow CE$ - медиана и высота

$\Rightarrow \triangle ABC$ - р/б, где $BC = AC$, а $AB = BC$

$\Rightarrow AB = BC = AC \Rightarrow \triangle ABC$ - правильный.

ч.т.д.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Воронежский филиал МИИТ - г.Воронеж

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2.

$$\begin{cases} mn+kl=13 \\ nk-ml=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2n^2+2mnkl+k^2l^2=169 \\ n^2k^2-2mnkl+m^2l^2=36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2n^2+m^2l^2+k^2n^2+k^2l^2=205$$

$$205=5\cdot 41$$

$$\Rightarrow (m^2+k^2)(n^2+l^2)=41\cdot 5$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m^2+k^2=41 \\ n^2+l^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} n^2+l^2=41 \\ m^2+k^2=5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=4 \\ n=2 \\ k=5 \\ l=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=1 \\ n=5 \\ k=2 \\ l=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

При перестановках значений исходная система не выполняется

$(m;n;k;l)\in N$

~~mn+kl~~

$\Rightarrow$ Ответ: $(4;2;5;1)$

$(1;5;2;4)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5

$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\Rightarrow$ умножив на 2, преобразуем:

$4 - \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x - \cos 8x = 4$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$

Используя $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ преобразуем:

$2\cos 5x \cos 6x + 2\cos 5x \cos 2x = 0$

$4\cos 5x \cos 4x \cos 2x = 0$

$4\cos 5x \cos 4x \cos 2x = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0 \\ \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \quad x = \left[\begin{array}{l}\pi/10 + \pi n/5 \\ \pi/8 + \pi n/4 \\ \pi/4 + \pi n/2\end{array}\right., \; n \in Z$

$\Rightarrow$ промежутки удовлетворяющие будут иметь такие углы.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения Воронежский филиал МИИТ - г.Воронеж

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3.

$\ln 1,2 \quad 1/6$

$\ln 1,2 = x$

$\Rightarrow e^x = 1,2$

Рассмотрим $e^{1/6}$

$e^{1/6} = \sqrt[6]{e} = y \quad e \approx 2,7$

$\sqrt[6]{2,7} = y$

$\Rightarrow y^6 = 2,7$

Если $y = 1,2$, то $y^6 > 2,7$

$\Rightarrow y < 1,2.$

$\Rightarrow e^x > y \Rightarrow x > 1/6$

т.е. $\ln 1,2 > 1/6.$

Ответ: $\ln 1,2 > 1/6.$

Регистрация №47580

Страница 05 из 05

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МБОУ СОШ №3 города Железногорска - г.Железногорск

(Адрес площадки: 307170, Курская область, г Железногорск, ул Парковая, д 10)

Титульный лист работы

Канивец Дмитрий Александрович (дата рождения 11.12.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МОУ СОШ №3 (Железногорск)
регистрация № **49524**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 6 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Канивец)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Завгуз Е.В.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МБОУ СОШ №3 города Железногорска - г.Железногорск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3 вариант

№1

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	0	+	+	+	−	3

Пусть x – все апельсины

$0,5(x+1)$ – получил 1-й сын

осталось $x-0,5(x+1)=0,5(x-1)$

$0,25(x-1)+0,5=0,25(x+1)$ – получил 2-й сын.

осталось $0,5(x-1)-0,25(x+1)=0,25(x+1)=0,25(x-3)$

$0,125(x-3)+0,5=0,125(x+1)$ – получил 3-й сын

Составим и решим уравнение.

$0,5(x+1)+0,25(x+1)+0,125(x+1)=x$

$0,875(x+1)=x$

$0,875x+0,875=x$

$0,125x=0,875$

$x=7$

$0,5(x+1)=0,5(7+1)=4$ – получил 1-й сын

$0,25(x+1)=0,25(7+1)=2$ – получил 2-й сын.

$0,125(x+1)=0,125(7+1)=1$ – получил 3-й сын.

Ответ: 7 апельсинов было изначально у отца, 4 апельсина он дал первому сыну, 2 апельсина второму сыну, 1 апельсин третьему сыну.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2

$K=2$	$m=1$	$l=4$	$n=5$
$K=5$	$m=4$	$l=1$	$n=2$

Переборам $K=2$; $m=1$; $l=4$; $n=5$

$K=5$; $m=4$; $l=1$; $n=2$

$l \neq 0$ $\quad m = \dfrac{2(2K-3)}{l}$ $\quad n = -\dfrac{l(kl-13)}{2(4K-3)}$

Ответ: $(2;1;4;5)$

$(5;4;1;2)$

№3

$\ln 1,2$ и $\frac{1}{6}$

сравним $e^{\frac{1}{6}}$ и $1,2$

$e^{\frac{1}{6}}$ и $\frac{6}{5}$

$\left(e^{\frac{1}{6}}\right)^6$ и $\left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625} \approx 2,9$

~~и~~ $e \approx 2,71$ $\quad u \approx 2,9$

получим

$e^{\frac{1}{6}} < 1,2 \Rightarrow e^{\frac{1}{6}} < e^x$

значит $\ln 1,2 > \frac{1}{6}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6

$(x^2+y^2)(x+y)=15xy$

$(x^4+y^4)(x^2+y^2)=85x^2y^2$

Пусть $x+y=u$

$xy=v$

$(x+y)^2=u^2 \quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2=u^4-4u^2v+4v^2-2v^2=u^4-4u^2v+2v^2$

$(u^2-2v)u=15\cdot v$

$(u^4-4u^2v+2v^2)(u^2-2v)=85\cdot v^2$

$u^2-2v=\frac{15v}{u}$

$u=0;\ v=0$

$u=6;\ v=8$

$u=\frac{-35}{3};\ v=\frac{1715}{9}$

1) $\begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \end{cases}$ $(0;0)$

2) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases}$ $z^2-6z+8=0$

$z_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$

$z_1=2;\ z_2=4$

$x=2 \quad y=4 \quad (2;4)$

$x=4 \quad y=2 \quad (4;2)$

3) $\begin{cases} x+y=-\frac{35}{3} \\ xy=\frac{1715}{9} \end{cases}$ $z^2+\frac{35}{3}z=\frac{1715}{9}=0$

$D<0$

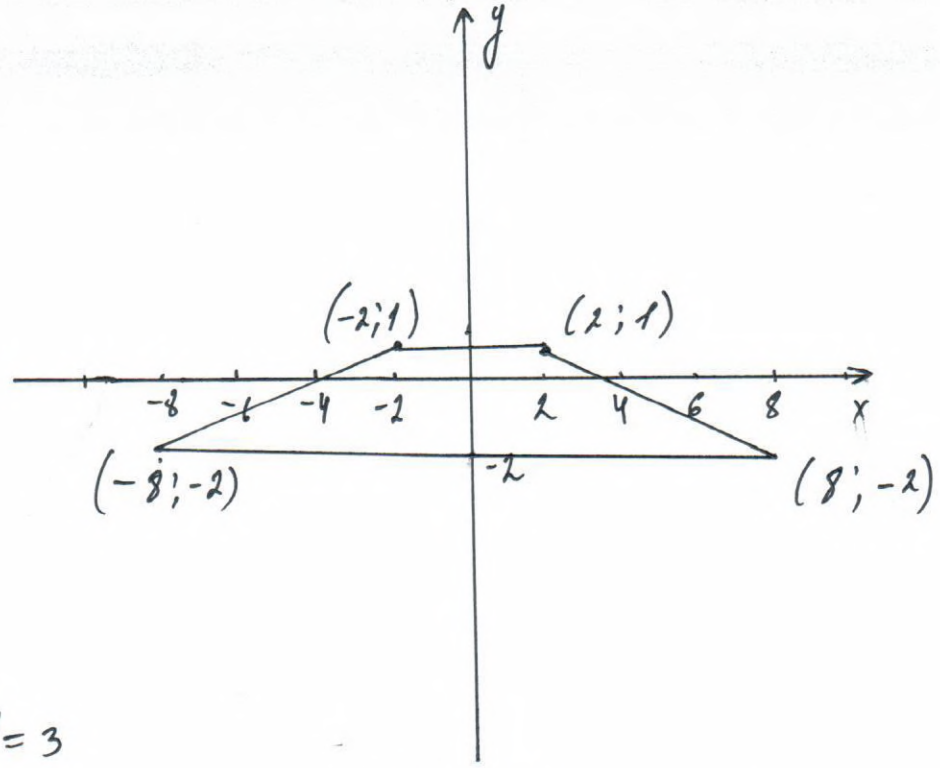
решений нет

Ответ: $(0;0)(2;4)(4;2)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7

$|x-2y^2| + |x+2y^2| \le 8-4y$



$h = 3$

$S_1 = 2+2 = 4$

$S_2 = 8+8 = 16$

$S = \frac{4+16}{2} \cdot 3 = 30$

Ответ: 30

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8

$\sqrt{x^2+4x+4a^2} + \sqrt{x^2-4x+4a^2} = 4b$

$b = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2+(x-4)x} + \frac{1}{4}\sqrt{4a^2+x(x+4)}$

$a<-1$; $b=\sqrt{a^2}$ $x=-2\sqrt{\frac{b^4-a^2b^2}{b^2-1}}$

$a<-1$ $b>\sqrt{a^2}$ $x=-2\sqrt{\frac{b^4-a^2b^2}{b^2-1}}$

$a=-1$; $b=1$ $-2 \le x \le 2$

Ответ: $a=0$; $b=0$; $x=0$

$a=\pm 1$; $b=1$ $x=0$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

N 5

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x > 2$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} > 2$$

$$1-\cos 2x + 1-\cos 4x + 1-\cos 6x + 1-\cos 8x > 4$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x < 0$$

$$2\cos\frac{2x+8x}{2}\cos\frac{2x-8x}{2} + 2\cos\frac{4x+6x}{2}\cos\frac{4x-6x}{2} < 0$$

$$\cos 5x \cdot \cos 3x + \cos 5x \cos x < 0$$

$$\cos 5x(\cos 3x + \cos x) < 0$$

$$\cos x \cdot \cos 2x \cos 3x < 0$$

① $\begin{cases} \cos 5x > 0 \\ \cos 2x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 5x > 0 \\ \cos 2x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 5x < 0 \\ \cos 2x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 5x < 0 \\ \cos 2x < \\ \cos x < 0 \end{cases}$

① $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{9\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{11\pi}{10} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$

② $\left(\frac{3\pi}{10} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \frac{17\pi}{10} + 2\pi k\right)$

③ $\left(\frac{\pi}{10} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{5}{10} + 2\pi k\right)$

④ $\left(\frac{\pi}{2}; + 2\frac{\pi}{k}; \frac{7\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{13\pi}{10} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МБОУ СОШ №3 города Железногорска - г.Железногорск

(Адрес площадки: 307170, Курская область, г Железногорск, ул Парковая, д 10)

Титульный лист работы

Поташников Никита Сергеевич (дата рождения 14.10.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МОУ СОШ №3 (Железногорск)
регистрация № **48638**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит 0 5 листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника Поташников (Поташников)

Подпись дежурного по аудитории Зайцев (Зайцев Е.В.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	0	+	7	+	−	3

№1

$a = \frac{1}{2}x + 0{,}5$ (первому)

$b = \frac{1}{2}(x+a) + 0{,}5 = (\frac{1}{2}x + 0{,}5) - \frac{1}{2}a = a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$ (второму)

$c = a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$ (третьему)

$x - a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = 0$

$x = \frac{7}{4}a$

$x = \frac{7}{4}(\frac{1}{2}x + 0{,}5)$

$x = \frac{7}{8}x + \frac{7}{8}$

$\frac{1}{8}x = \frac{7}{8}$

$x = 7$

Ответ: 7 апельсинов

№3

$\ln 1{,}2 \quad \frac{1}{6} \mid \cdot 6 \qquad 1{,}2^6 = 1{,}44$

$6\ln 1{,}2 \quad 1 \qquad 1{,}44 \times 1{,}44 = 576 \qquad 2{,}0736 \times 1{,}44 = 82944$

$\ln 1{,}2^6 \quad 1 \qquad 576 + 144 = 2{,}0736 \qquad 82944 + 20736 = 2{,}985984$

$\log_{2{,}71} 1{,}2^6 \quad 1$

$\log_{2{,}71} 2{,}985984 > \log_{2{,}71} 2{,}71$

$\ln 1{,}2 > \frac{1}{6}$

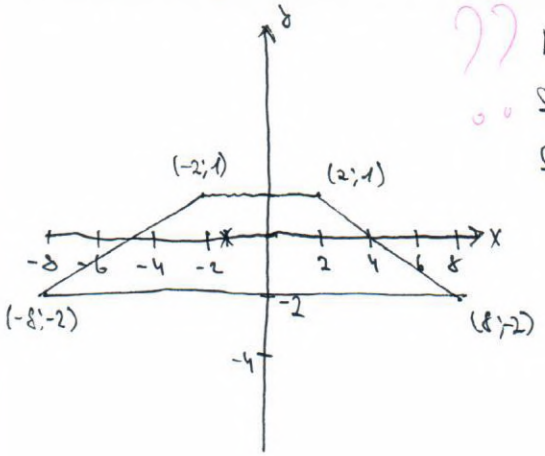
Ответ: $\ln 1{,}2 > \frac{1}{6}$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7

$|x-2y^2|+|x+2y^2| \le 8-4y$

Трапеция



$h = 3$

$S_1 = 2+2 = 4$

$S_2 = 8+8 = 16$

$S = \frac{4+16}{2} \cdot 3 = 30$

Ответ: 30

№2

Перебором $k=2;\ m=1;\ L=4;\ n=5$

$k=5;\ m=4;\ L=1;\ n=2$

$L \neq 0 \quad m = \frac{2(2k-3)}{L}; \quad n = \frac{L(kL-13)}{2(4k-3)}$

$4k-3 \neq 0$

Ответ: $(2;1;4;5)$

$(5;4;1;2)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4

$$b = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2 + x(x-4)} + \frac{1}{4}\sqrt{4a^2 + x(x+4)}$$

$a < -1$; $b = \sqrt{a^2}$; $x = -2\sqrt{\frac{b^4 - a^2b^2}{b^2-1}}$

$a < -1$; $b > \sqrt{a^2}$; $x = -2\sqrt{\frac{b^4 - a^2b^2}{b^2-1}}$

$a < -1$; $b \leq \sqrt{a^2}$; $x = 2\sqrt{\frac{b^4 - a^2b^2}{b^2-1}}$

$a = -1$; $b = 1$; $-2 \leq x \leq 2$

Ответ: $a = 0$; $b = 0$; $x = 0$.

$a = \pm 1$; $b = 1$; $x = 0$.

№5

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x > 2$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} > 2$$

$$1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x + 1 - \cos 6x + 1 - \cos 8x > 4$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x < 0$$

$$2\cos\frac{2x+8x}{2}\cos\frac{2x-8x}{2} + 2\cos\frac{4x+6x}{2}\cos\frac{4x+6x}{2} < 0$$

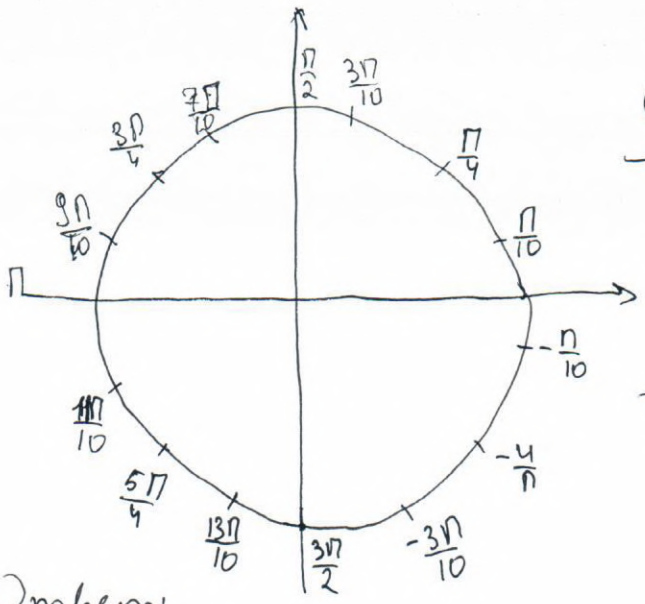
$$\cos 5x \cdot \cos 3x + \cos 5x \cos x < 0$$

$$\cos 5x (\cos 3x + \cos x) < 0$$

$$\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x < 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x > 0 \\ \cos 2x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 5x > 0 \\ \cos 2x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 5x < 0 \\ \cos 2x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 5x < 0 \\ \cos 2x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



$\cos x > 0 \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ 360°

$\cos x < 0 \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

$\cos 2x > 0 \quad -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$ 180°

$\cos 2x < 0 \quad \frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k.$

$\cos 5x > 0 \quad -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} < x < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$ 72°

$\cos 5x < 0 \quad \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} < x < \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$

Ответ:

1) $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{9\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{11\pi}{10} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$

2) $\left(\frac{3\pi}{10} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \frac{17\pi}{10} + 2\pi k\right)$

3) $\left(\frac{\pi}{10} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{10} + 2\pi k\right)$

4) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{7\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{13\pi}{10} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$

№6

$x + y = u$

$xy = v$

$(x+y)^2 = u^2 \; ; \; x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$

$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2-2v)^2 - 2\cdot v^2 = u^4 - 4u^2v + 4v^2 - 2v^2 =$

$= u^4 - 4u^2v + 2v^2$

$$\begin{cases} (u^2 - 2v)\cdot u = 15\cdot v \\ (u^4 - 4u^2v + 2v^2)(u^2 - 2v) = 85\cdot v^2 \end{cases}$$

$u^2 - 2v = \frac{15v}{u}$??

$u = 0 \; ; \; v = 0$

$u = 6 \; ; \; v = 8$

$u = -\frac{35}{3} \; ; \; v = \frac{1715}{9}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1) $\begin{cases} x+y=0 \\ x\cdot y=0 \end{cases}$ $(0;0)$

2) $\begin{cases} x+y=6 \\ x\cdot y=8 \end{cases}$

$z^2-6z+8=0$

$z_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$

$z_1=2$; $z_2=4$;

$x=2$; $y=4$ $(2;4)$

$x=4$; $y=2$ $(4;2)$

3) $\begin{cases} x+y=-\frac{35}{3} \\ xy=\frac{1715}{9} \end{cases}$

$z^2+\frac{35}{3}z+\frac{1715}{9}=0$

$D<0$ нет решений.

Ответ: $(0;0)$; $(2;4)$; $(4;2)$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

МБОУ СОШ №3 города Железногорска - г.Железногорск

(Адрес площадки: 307170, Курская область, г Железногорск, ул Парковая, д 10)

Титульный лист работы

Фролов Дмитрий Андреевич (дата рождения 01.11.1998)
ученик 11 класса, средняя школа МОУ "Средняя общеобразовательная школа №3" (Железногорск)
регистрация № **44294**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 6 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Фролов)

Подпись дежурного по аудитории _____ (Зайцев Е.В.)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант - 3

№1 $a = \frac{1}{2}x + 0{,}5$ - первому,

$b = \frac{1}{2}(x-a) + 0{,}5 = \left(\frac{1}{2}x + 0{,}5\right) - \frac{1}{2}a = a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$ - второму

$c = \frac{1}{2}(x-a-b) + 0{,}5 = \left(\frac{1}{2}x + 0{,}5\right) - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$

$x - a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = 0$

$x = \frac{7}{4}a$

$x = \frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}x + 0{,}5\right)$

$x = \frac{7}{8}x + \frac{7}{8}$

$\frac{1}{8}x = \frac{7}{8}$

$x = 7$

$a = \frac{1}{2}x + 0{,}5 = 3{,}5 + 0{,}5 = 4$

$b = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$c = \frac{1}{4}a = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

Ответ: 7, 4, 2, 1

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	0	+	+	+	0	3

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2. С помощью подарка можно получить

$1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 13$

$5 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 6$, т.е

$k=2; m=1; l=4; n=5$. или $k=5; m=4; l=1; n=2$.

~~Так же~~

Ответ: 2, 1, 4, 5 или 5, 4, 1, 2.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3. $\ln 1,2 \quad \frac{1}{6}$

$6\ln 1,2 \quad 1$

$\log_e 1,2^6 \quad \log_e e$; т.к $e > 1$, то если число под логарифмом больше, то и число больше, где число под логарифмом больше.

$1,2^6 \quad e$

$1,44^3 \quad e$

$1,44$

$\times 1,44$

576

$+ 576$

144

$2073,6$

$2,0736$

$\times 1,44$

82944

$+ 82944$

20736

$2,985984$

$2,985984 > 2,71$

Ответ первое число больше.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5 $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x > 2$

$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} > 2$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x < 0$

$2\cos\frac{2x+8x}{2}\cos\frac{2x-8x}{2} + 2\cos\frac{4x+6x}{2}\cos\frac{4x-6x}{2} < 0$

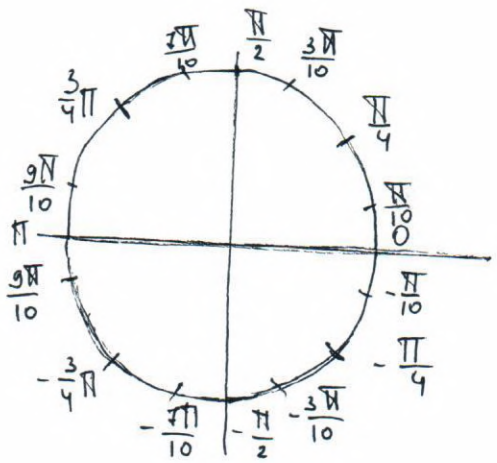
$2(\cos 5x \cdot \cos 3x + \cos 5x \cos x) < 0$

$\cos 5x (\cos 3x + \cos x) < 0$

$\cos 5x \cdot \cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} < 0$

$\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x < 0$

$\begin{cases} \cos 5x > 0 \\ \cos 2x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 5x > 0 \\ \cos 2x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 5x < 0 \\ \cos 2x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 6x < 0 \\ \cos 2x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$



$\cos x > 0 \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\cos x < 0 \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

$\cos 2x > 0 \quad -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$

$\cos 2x < 0 \quad \frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k$

$\cos 5x > 0 \quad -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$

$\cos 5x < 0 \quad \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} < x < \frac{3\pi}{10} + 2\pi k$

$\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{9\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{11\pi}{10} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$

$\left(\frac{3\pi}{10} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \frac{17\pi}{10} + 2\pi k\right)$

$\left(\frac{\pi}{10} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{10} + 2\pi k\right)$

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{7\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{13\pi}{10} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right).$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6. $x+y=u$

$xy=v$

$(x+y)^2=u^2$; $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2=u^4-4u^2v+4v^2-2v^2=u^4-4u^2v+2v^2$

$(u^2-2v)u=15v$

$(u^4-4u^2v+2v^2)(u^2-2v)=85v^2$

$u^2-2v=\frac{15v}{u}$??

1) $x+y=0$ $(0;0)$

$xy=0$

2) $x+y=6$ $z^2-6z+8=0$

$xy=8$ $z_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$

$z_1=2$; $z_2=4$

$x=2$; $y=4$ $(2;4)$

$x=4$; $y=2$ $(4;2)$

3) $\begin{cases} x+y=-\frac{35}{3} \\ xy=\frac{1715}{9} \end{cases}$ $z^2+\frac{35}{3}z+\frac{1715}{9}=0$

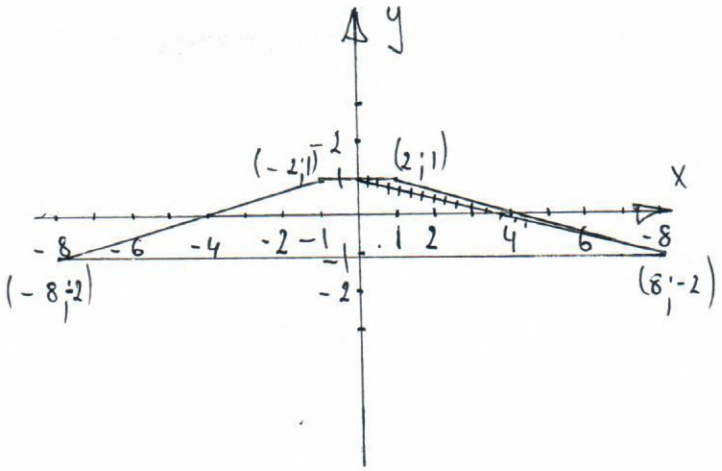
$D<0$ $\varnothing$ нет решений.

Ответ: $(0;0)$; $(2;4)$; $(4;2)$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7 $|x-2y^2|^2 + |x+2y^2| \le 8-4y$

Такое уравнение задаёт трапецию.



$a_1 = |-2-(-2)| = 4$

$a_2 = |8-(-8)| = 16$

$h = |1-(-2)| = 3$

$S_T = \frac{a_1+a_2}{2} h = \frac{4+16}{2} \cdot 3 = \frac{20}{2} \cdot 3 = 30.$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»

по общеобразовательному предмету математика

МГУПС (МИИТ) - г. Москва

(Адрес площадки: 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9)

Титульный лист работы

Зайкин Роман Александрович (дата рождения 05.06.1998)
ученик 11 класса, гимназия МБОУ Гимназия №3 (Уфа)
регистрация № **45384**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Зайкин)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2. $\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz + yt = 5 \end{cases}$, где $\begin{matrix} x > t \\ y > z \end{matrix}$ и $x, y, z, t \in N$ В-4

Т.к. $x, y, z, t \in N$, то можно расписать систему так:

$7 = 1 + 6$ $\quad$ $5 = 1 + 4$ и подставить переменные

$2 + 5$ $\quad$ $2 + 3$

$3 + 4$ $\quad$ $3 + 2$

$4 + 3$ $\quad$ $4 + 1$

$5 + 2$

$6 + 1$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	±	0	−	0	0	0	3

3б.

Подставим:

① а) ~~$xy = 1$~~ $\quad$ ~~$zt = 6$~~

б) ~~$xy = 2$~~ $\quad$ ~~$zt = 5$~~

✓ в) ~~$xy = 3$~~ $\quad$ ~~$zt = 4$~~

г) $xy = 4$ $\quad$ $zt = 3$

✓ д) ~~$xy = 5$~~ $\quad$ ~~$zt = 2$~~

е) $xy = 6$ $\quad$ $zt = 1$

~~По условию $x, y, z, t \in N$, тогда уберем все варианты, где произведение равно нечетному числу~~

По условию $x, y, z, t \in N$ и $\begin{matrix} x > t \\ y > z \end{matrix}$, значит $\begin{matrix} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{matrix}$; уберем все варианты, в которых $x = 1$ или $y = 1$

② а) ~~$xz = 1$~~ $\quad$ ~~$yt = 4$~~

✓ б) $xz = 2$ $\quad$ $yt = 3$

✓ в) $xz = 3$ $\quad$ $yt = 2$

г) ~~$xz = 4$~~ $\quad$ ~~$yt = 1$~~

Аналогично: уберем все варианты, в которых $x = 1$ или $y = 1$

Получаем следующие возможные комбинации:

гб, гв, еб, ев; проверив комбинации, получаем две верные: еб и ев

$\begin{cases} xy = 6 \to y = 3, x = 2 \\ zt = 1 \to z = 1, t = 1 \\ xz = 2 \to x = 2, z = 1 \\ yt = 3 \to t = 1, y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} xy = 6 \to x = 3, y = 2 \\ zt = 1 \to z = 1, t = 1 \\ xz = 3 \to z = 1, x = 3 \\ yt = 2 \to t = 1, y = 2 \end{cases}$

Смотри след-ую страницу

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Ответ: $x=2, y=3, z=1, t=1$ $\quad x=3, y=2, z=1, t=1$ (+)

№3. $\ln 1{,}25 > 0{,}2$

$\log_e 1{,}25 > 0{,}2$

$\log_e 1{,}25 > \log_e e^{0{,}2}$ ← знак не изменяется т.к. $e > 1$

$1{,}25 > e^{0{,}2}$

$\frac{5}{4} > \sqrt[5]{e}$

$\frac{5^5}{4^5} > e$ почему больше? где вычисления

Ответ: $>$ (±)

№5. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x > 0$

$\cos 3x + \cos x + \cos 4x + \cos 2x > 0$

$2\cos 2x \cos x + 2\cos 3x \cos x > 0$

$2\cos x(\cos 2x + \cos 3x) > 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\cos x > 0\\ \cos 2x + \cos 3x > 0\end{cases}\\ \begin{cases}2\cos x < 0\\ \cos 2x + \cos 3x < 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\cos 2x + \cos 3x = \cos 2x + \cos(x+2x) = \cos 2x + \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$

$= \cos 2x + \cos x \cos 2x - 2\sin^2 x \cos x = \cos 2x + \cos 2x \cos x - (1-\cos 2x)\cos x =$

$= \cos 2x + \cos 2x \cos x - \cos x + \cos 2x \cos x = \cos 2x + 2\cos 2x \cos x - \cos x =$

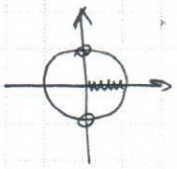
$= 2\cos^2 x - 1 + (2\cos^2 x - 1)\cdot 2\cos x - \cos x = 2\cos^2 x - 1 + 4\cos^3 x - 3\cos x =$

$= 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1$ Смотри след-ую страницу

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

① $\begin{cases} \cos x > 0 \\ 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 \geq 0 \end{cases}$

1) $\cos x > 0$



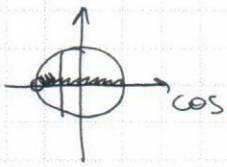
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$

$\cos x \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}; 1\right)$,

$\begin{cases} \cos x > -1 \\ \cos x < \frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$

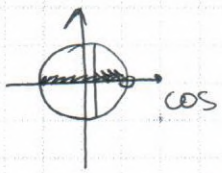
$\begin{cases} \cos x > \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ \cos x < 1 \end{cases}$

а) $\cos x > -1$ и $\cos x < \frac{1-\sqrt{5}}{4}$



$x \in \left(\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4} + 2\pi k; \pi + \pi k\right) \cup$
$\cup \left(\pi + \pi k; -\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \pi + 2\pi k\right), k \in Z$

б) $\cos x < 1$ и $\cos x > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$



$x \in \left(-\arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4} + 2\pi k; \pi k\right) \cup$
$\cup \left(\pi k; \arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4} + 2\pi k\right), k \in Z$

2) $4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 > 0$

$\cos x = t, \quad -1 \leq t \leq 1$

$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 > 0$

$t = -1, \quad -4 + 2 + 3 - 1 = 0$

$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 \;\big|\; t+1$
$4t^3 + 4t^2 \qquad\qquad 4t^2 - 2t - 1$
$-2t^2 - 3t$
$-2t^2 - 2t$
$-t - 1$
$-t - 1$
0

$4t^2 - 2t - 1 = 0$

$D = 1 + 4 = 5$

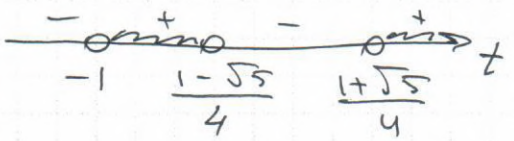
$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$\frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1 \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{4} > -1$

$\sqrt{5} < 3 \qquad -\sqrt{5} > -5$

$\sqrt{5} < \sqrt{9} \qquad \sqrt{5} < 5$

$\sqrt{5} < \sqrt{25}$



$t \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}; 1\right)$

Смотри след-ую страницу

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения МГУПС (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

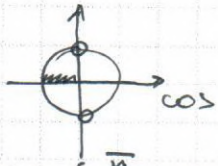
Решение 1-ой системы:

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z \\ x \in \left(-\arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k; \arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k\right), k\in Z \end{cases}$$

$$x \in \left(-\arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k; \arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k\right), k\in Z$$

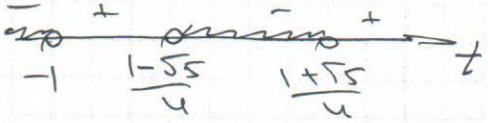
(2) $\begin{cases} \cos x<0 \\ \cos 2x+\cos 3x<0 \end{cases}$

$\cos x<0$



$x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$

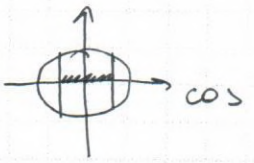
$4\cos^3 x+2\cos^2 x-3\cos x-1<0$



$t \in \left(\frac{1-\sqrt5}{4}; \frac{1+\sqrt5}{4}\right)$

$\cos x \in \left(\frac{1-\sqrt5}{4}; \frac{1+\sqrt5}{4}\right)$

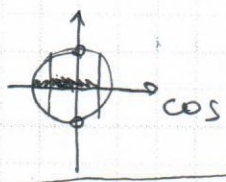
$$\begin{cases} \cos x > \frac{1-\sqrt5}{4} \\ \cos x < \frac{1+\sqrt5}{4} \end{cases}$$



$x \in \left(-\arccos\frac{1-\sqrt5}{4}+2\pi k; -\arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k\right) \cup \left(\arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k; \arccos\frac{1-\sqrt5}{4}+2\pi k\right), k\in Z$

Решение 2-ой системы:

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z \\ x \in \left(-\arccos\frac{1-\sqrt5}{4}+2\pi k; -\arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k\right) \cup \\ \cup \left(\arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k; \arccos\frac{1-\sqrt5}{4}+2\pi k\right), k\in Z \end{cases}$$



$$x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \arccos\frac{1-\sqrt5}{4}+2\pi k\right) \cup \left(-\arccos\frac{1-\sqrt5}{4}+2\pi+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$$

Ответ: $\left(-\arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k; \arccos\frac{1+\sqrt5}{4}+2\pi k\right) \cup$
$\cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \arccos\frac{1-\sqrt5}{4}+2\pi k\right) \cup \left(-\arccos\frac{1-\sqrt5}{4}+2\pi+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$

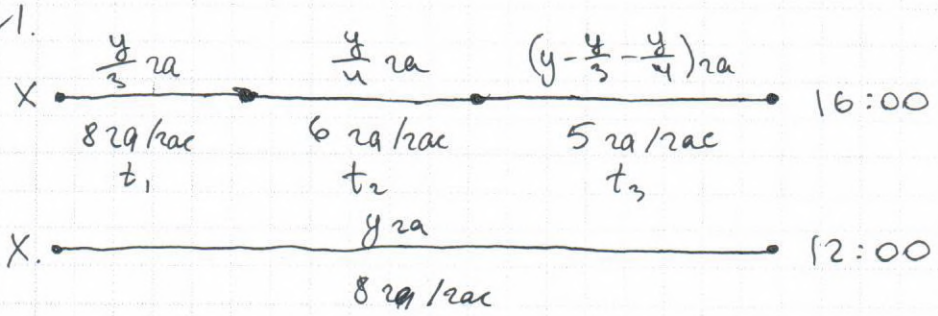
??

F

Смотри след-ую страницу

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1.



X - час, когда началась работа

y - площадь поля

На 3-ем участке было $(y-\frac{y}{3}-\frac{y}{4})$ га или

$\frac{3y}{4}-\frac{y}{3}=\frac{5y}{12}$ га, тогда

$$\begin{cases} \frac{y}{8}=12-x \\ \frac{\frac{y}{3}}{8}+\frac{\frac{y}{4}}{6}+\frac{\frac{5y}{12}}{5}=16-x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y}{8}=12-x \\ \frac{y}{6}=16-x \end{cases} \quad \begin{cases} y=8(12-x) \\ \frac{8(12-x)}{8_3}=16-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=8(12-x) \\ 48-4x=48-3x \end{cases} \quad \begin{cases} y=96 \\ x=0 \end{cases}$$

+

Ответ: 0:00 ; 96 га

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

ИрГУПС - г.Иркутск

(Адрес площадки: 664074, Иркутская область, г Иркутск, ул Чернышевского, д 15)

Титульный лист работы

Хабутдинова Анастасия Рифовна (дата рождения 14.01.1999)
ученица 11 класса, лицей МБОУ Лицей 2 (Иркутск)
регистрация № **48308**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 5 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Хабутдинова)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 4

①

v, га/час	t, час	S, га
8	x	S
8		$\frac{S}{3}$
6	$x+4$	$\frac{S}{4}$
5		$\frac{55}{12}$

$$\begin{cases} \frac{S}{8} = x \\ \frac{S}{24} + \frac{S}{24} + \frac{S}{12} = x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{S}{8} \\ \frac{S}{3} + \frac{S}{3} + \frac{2S}{3} = x+4 \end{cases} \Rightarrow 8x = S$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = 8x \\ 4x = 3x + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 96 \\ x = 12 \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	±	0	0	0	7	0	3

$S = 96$ га

т. к. работу нужно было закончить к 12:00 и бригада должна была для этого работать 12 часов, то работу начали в 0:00

Ответ: 96 га; 0:00

② $\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz + yt = 5 \end{cases}$ $x, y, z, t \in N$, $x > t$, $y > z$

+

т. к. все числа натуральные, то наименьшие значения t и z – 1 и 1.

при $t = 1$ и $z = 1$:

$$\begin{cases} xy + 1 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(5-y) = 6 \\ x = 5-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ x = 5-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3;2 \\ x = 2;3 \end{cases}$$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

при $t=1$ и $z=2$

$\begin{cases} xy+2=7 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+5x-5=0 \\ y=5-2x \end{cases}$ $D<0$ $x\in\varnothing$ $y\in\varnothing$

при $t=2$ и $z=1$

$\begin{cases} xy+2=7 \\ 2x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^2+5y-5=0 \\ x=5-2y \end{cases}$ $y\in\varnothing$ $x\in\varnothing$

при $t=2$ и $z=2$

$\begin{cases} xy+4=7 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ $x, y\in N$, $2x$ и $2y$ - чётные $\Rightarrow 2x+2y\neq 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x, y\in\varnothing$

при $t=1$ и $z=3$

$\begin{cases} xy+3=7 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=4 \\ y=5-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+4=0 \\ y\in\varnothing \end{cases}$ $D<0$, $x\in\varnothing$

при $t=3$ и $z=1$

$\begin{cases} xy+3=7 \\ x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y^2-5y+4=0 \\ x=5-3y \end{cases}$ $y\in\varnothing$ $x\in\varnothing$

при $t=2$ и $z=3$ либо при $t=3$ и $z=2$ во втором уравнении системы $2x+3y=5$ либо $3x+2y=5$ единственными решениями будет $x=1$ и $y=1$, но они не подходят по условию $x>t$, $y>z$. При больших t и z

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

x и y не будут целыми.

Ответ: $t=1; z=1; x=2; y=3$ или $t=1; z=1; x=3; y=2$.

③ $\ln 1,25 \quad 0,2$

$\begin{cases} e^{\ln 1,25} = 1,25 \\ e^{0,2} = \sqrt[5]{e} \end{cases}$

$\begin{cases} (1,25)^5 \approx 3,042 \\ (\sqrt[5]{e})^5 = e \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} 3,042 > e \\ \sqrt[5]{e} < 1,25 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln 1,25 > 0,2$

Ответ: $\ln 1,25 > 0,2$

⑧ $\sqrt{9b^2-6x+x^2} + \sqrt{9b^2+6x+x^2} = 6a$

$\begin{cases} 9b^2-6x+x^2 \geq 0 \\ 9b^2+6x+x^2 \geq 0 \\ 6a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \end{cases}$

$\left(\sqrt{9b^2-6x+x^2} + \sqrt{9b^2+6x+x^2}\right)^2 = (6a)^2$

$9b^2-6x+x^2+9b^2+6x+x^2+2\sqrt{(9b^2-6x+x^2)(9b^2+6x+x^2)} = 36a^2$

$\sqrt{(9b^2-6x+x^2)(9b^2+6x+x^2)} = 18a^2-9b^2-x^2$

$\left(\sqrt{(9b^2-6x+x^2)(9b^2+6x+x^2)}\right)^2 = (18a^2-9b^2-x^2)^2$

$81b^4 - 54xb^2 + 9b^2x^2 + 54xb^2 - 36x^2 - 6x3 + 6x3 + 9b^2x^2 + x^4 = 324a^4 + 81b^4 + x^4 - 324a^2b^2 - 36a^2x^2 + 18b^2x^2$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$-36y^2 = 324a^4 - 324a^2b^2 - 36a^2y^2$

$a^2(9a^2 - 9b^2) = x^2(a^2 - 1)$

$x^2 = \frac{9a^2(a^2-b^2)}{a^2-1}$ $\quad a \neq \pm 1$

Уравнение имеет единственное решение при $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$9a^2(a-b)(a+b) = 0$

$a = 0;\ a = b;\ a = -b$

Ответ: $a = 0;\ a = b$ при $b \geq 0,\ b \neq 1;\ a = -b$ при $b \leq 0;\ b \neq -1$

⑦ $\left|y - \frac{x^2}{2}\right| + \left|y + \frac{x^2}{2}\right| \leq 2 - x$

1) $y - \frac{x^2}{2} \geq 0,\ y + \frac{x^2}{2} \geq 0$

$y - \frac{x^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} \leq 2 - x$

$2y \leq 2 - x$

$y \leq 1 - \frac{x}{2}$

2) $y - \frac{x^2}{2} < 0,\ y + \frac{x^2}{2} \geq 0$

$-y + \frac{x^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} \leq 2 - x$

$x^2 + x - 2 \leq 0$

$x \in [-2; 1]$

3) $y - \frac{x^2}{2} < 0,\ y + \frac{x^2}{2} < 0$

$-y + \frac{x^2}{2} - y - \frac{x^2}{2} \leq 2 - x$

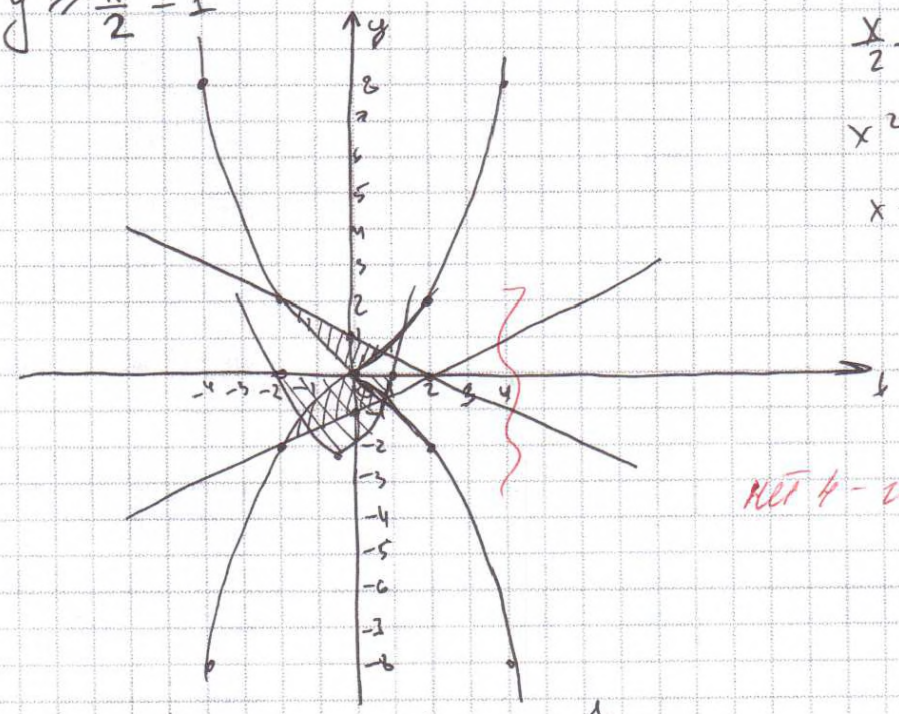
Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$y \geq \frac{x}{2} - 1$



$\frac{x}{2} - 1 = x^2 + x - 2$

$x^2 + \frac{x}{2} - 1 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

нет 4-го случая.

$$S = -\int_{-2}^{1} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1\right) dx + \int_{-2}^{1} \left(x^2 + x - 2\right) dx + \int_{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}}^{2} \left(-\frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 1\right) dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} - x\Big|_{-2}^{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_{-2}^{1} + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} - x\right)\Big|_{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}}^{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{4}{3} - 1 - 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 1 - 4 + \right.$$

$$+ \frac{1 + 17\sqrt{17} - 3\sqrt{17} - 51}{128} - \frac{3(1 - 2\sqrt{17} + 17)}{64} + \frac{1 + \sqrt{17}}{4} -$$

$$\left. - 4 + 3 - 2\right) = -\left(-8\frac{3}{4} - \frac{25}{64} + \frac{7\sqrt{17}}{64} - \frac{54}{64} - \frac{8\sqrt{17}}{64} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$$

$$= -\left(\frac{34 + \sqrt{17}}{4} - \frac{79 + \sqrt{17}}{64}\right) = \frac{623 + 2\sqrt{17}}{64}$$

+

Ответ: $S = \frac{623 + 2\sqrt{17}}{64}$

Межрегиональная отраслевая олимпиада школьников «Паруса надежды»
по общеобразовательному предмету математика

ИрГУПС - г.Иркутск

(Адрес площадки: 664074, Иркутская область, г Иркутск, ул Чернышевского, д 15)

Титульный лист работы

Шахнович Софья Дмитриевна (дата рождения 23.07.1998)
ученица 11 класса, лицей МБОУШР "Шелеховский лицей" (Шелехов)
регистрация № **45504**

– На решение задач отводится 4 часа (240 минут). Участники, явившиеся в аудиторию позже, чем через 30 минут после начала олимпиады, к участию в туре не допускаются.

– Для участия в олимпиаде необходимо предъявить паспорт, справку из школы о том, что Вы в ней обучаетесь, и этот титульный лист. С собой необходимо иметь также тёмно-синюю или чёрную ручку.

– На олимпиаде запрещается пользоваться любыми средствами связи (мобильными телефонами), электроникой (калькуляторами) и справочной литературой.

– Дежурный выдаёт участникам бумагу для черновиков. Черновики сдаются, но не проверяются.

– Работа выполняется на специальных бланках с регистрационным номером.

– За нарушение регламента олимпиады участник может быть отстранён от заключительного тура совместным решением ответственного представителя местного оргкомитета и наблюдателя центрального оргкомитета.

– В случае, если подпись участника на титульном листе (с заверением количества листов) отсутствует, он теряет право на апелляцию.

Работа содержит | 0 | 4 | листов (исключая титульный), имеющих одинаковые регистрационные номера.

Подпись участника _____ (Шахнович)

Подпись дежурного по аудитории _____ (_____)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы, не складывайте их пополам.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

① Обозначим за A всё поле, тогда Вариант №4.

$\frac{A}{3} : 8 га/час = \frac{A}{24}$ часа - вспахивали $\frac{1}{3}$ поле.

$\frac{A}{4} : 6 га/час = \frac{A}{24}$ часа - вспахивали $\frac{1}{4}$ поле.

$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-4-3}{12} = \frac{5}{7}$ поле осталось вспахать

$\frac{5A}{12} : 5 га/час = \frac{A}{12}$ часа - вспахивали $\frac{5}{12}$ поле.

$\frac{A}{24} + \frac{A}{24} + \frac{A}{12} = \frac{4A}{24} = \frac{A}{6}$ (часа) - всё время, за которое вспахали поле.

$\frac{A}{8}$ (часа) - изначально запланированное время вспахивания.

16:00 - 12:00 = 4 (часа) - то время, на которое вспахивали больше.

$\frac{A}{6} - \frac{A}{8} = 4$

$\frac{4A - 3A}{24} = 4$

$\frac{A}{24} = 4 \Rightarrow \boxed{A = 96 га}$

$t_{нач} = \frac{96}{8} = 12$ часов - планируемое время.

12:00 - 12 = 00:00 - начало работы

Ответ: 96 га; 00:00.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

+ + + 0 + 0 + 0 +

② $\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz + yt = 5. \end{cases}$

Напишем все возможные значения переменных с учетом $x > t$, $y > z$.

x	t	y	z
2	1	2	1
3	12	3	12
4	123	4	123
5	1234	5	1234
6	12345	6	12345
7	123456	7	123456
8	1234567	8	1234567
9	12345678	9	12345678

Так же запишем все возможные значения для суммы.

$xy + zt = 7$	$xz + yt = 5$
1 + 6	1 + 4
6 + 1	4 + 1
2 + 5	3 + 2
5 + 2	2 + 3
3 + 4	
4 + 3	

Т.к в значениях x и y не может быть 1, то единственное возможное ?

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

значение $x \cdot y = 6$. $\Rightarrow$ $x=3; y=2; z_1=1; t=1$
$x=2; y=3; z_1=1; t=1$. (+)

Так же единственно возможными значениями могут быть.

$\begin{cases} xz=3 \\ yt=2 \end{cases}$ $\begin{cases} xz=2 \\ yt=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=3; y=2; z=1; t=1$
$x=2; y=3; z=1; t=1$.

Ответ: 1) $x=3; y=2; z=1; t=1$;
2) $x=2; y=3; z=1; t=1$.

③ $\ln 1,25 > 0,2$ $\ln 1,25$ $\ln 0,2^e$

$\ln 1,25 = \log_e 1,25$ $0,2^e < 1$, т.к $\left(\frac{1}{5}\right)^e = \frac{1}{5^e}$

$e \approx 2,7$ т.к $e \approx 2,7$, $2,7 > 2$; $\frac{1}{5^e} < \frac{1}{5^2}$

$\frac{1}{5^e} < \frac{1}{25}$; $\frac{1}{5^e} < 0,25$, ?

$1,25 > 0,25$

$\Rightarrow \ln 1,25 > \ln 0,2^e$.

Ответ: $\ln 1,25$ больше, чем число 0,2.

⑤ $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x > 0$.

$(\cos x + \cos 3x) + (\cos 2x + \cos 4x) > 0$.

метод интервалов из триг. сокр

$2\cos 2x \cos x + 2\cos 3x \cos x > 0$

$2\cos x \cdot (\cos 2x + \cos 3x) > 0$.

$2\cos x \cdot 2\cos\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} > 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow$

(−) $\cos 2x + \cos 3x > 0$ т.к $\cos 2x \in [-1;1]$, $\cos 3x \in [-1;1] \Rightarrow$

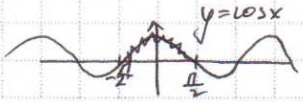
$\cos\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow$

$\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow$

что все вариации $\in [-2;2]$, но вместе эти 2 слагаемых никогда не смогут достигнуть ни максимума, ни минимума, а так же не будут $=0 \Rightarrow$

$\cos 2x + \cos 3x > 0$. ? $\Rightarrow$ чтобы нер-во выполнялось $2\cos x > 0$

$\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$ (+)



Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Например, при $x = \frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = -1 + 0 = -1$

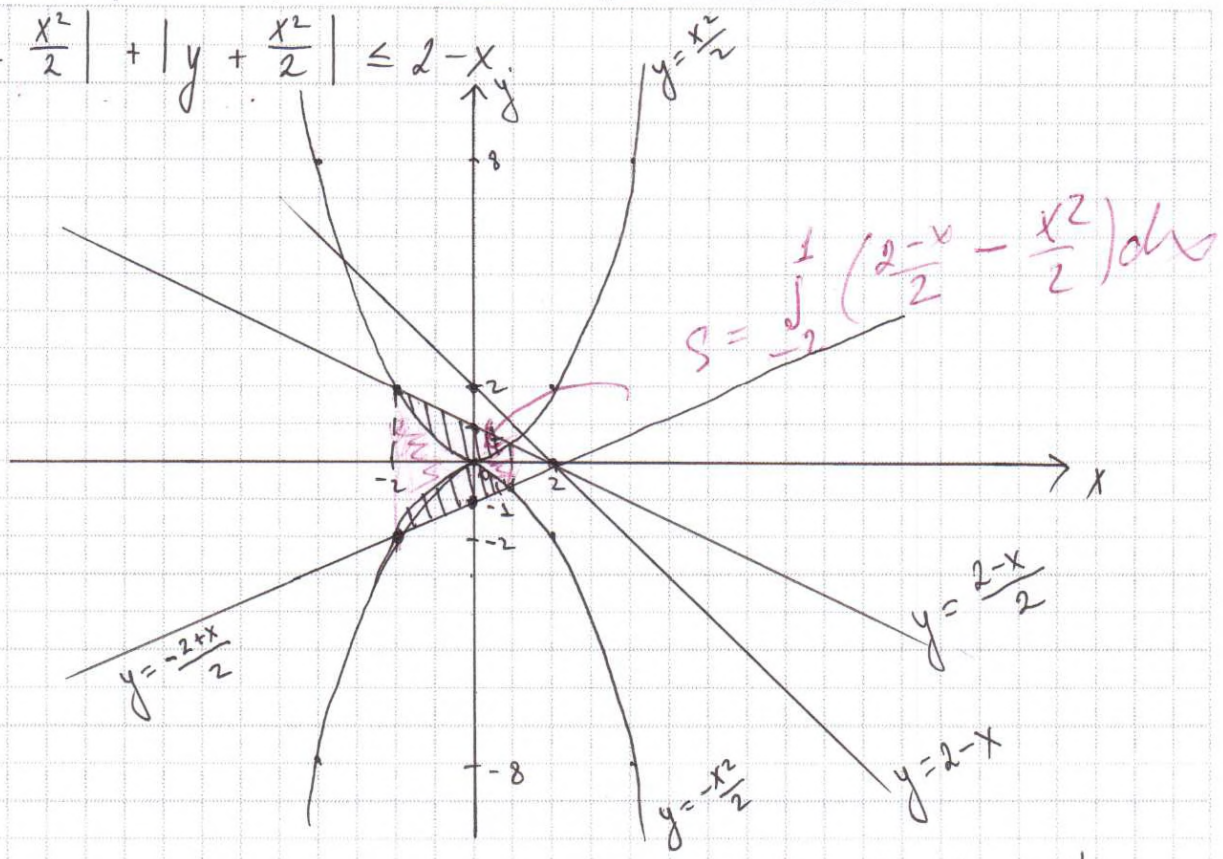
Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

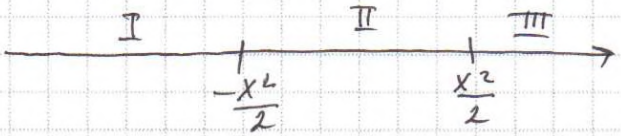
⑦ $\left|y-\frac{x^2}{2}\right|+\left|y+\frac{x^2}{2}\right|\le 2-x$.



1) Построим прямую $y\le 2-x$ (точки $(2;0)$; $(0;-2)$), проверим выполнение нер-ва при $x=0$; $y=0 \Rightarrow 0\le 2$ (верно) $\Rightarrow x\in(-\infty;2)$

2) Раскроем модуль на промежутках

$S=\frac{1+4}{2}\cdot 3$



Для удобства построим $y=\frac{x^2}{2}$ (парабола с вершиной в точке $(0;0)$, ветви вверх доп. точки $(-2;2)$ $(2;2)$ $(-4;8)$ $(4;8)$)

$y=-\frac{x^2}{2}$ (парабола с вершиной в точке $(0;0)$, ветви вниз, доп. точки $(-2;-2)$; $(2;-2)$ $(4;-8)$ $(-4;8)$).

Ⅰ $y\in(-\infty;-\frac{x^2}{2})$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2016 13 марта 2016г. (очный тур)

Место проведения ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\frac{x^2}{2} - y - y - \frac{x^2}{2} \le 2 - x$

$-2y \le 2 - x$

$y \ge \frac{-2+x}{2}$

x	0	-2
y	-1	-2

(II) $y \in [-\frac{x^2}{2}; \frac{x^2}{2}]$

гр. точки пересечения лев т. (0;0)

(III) $y \in (\frac{x^2}{2}; +\infty)$

$y - \frac{x^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} \le 2 - x$

$2y \le 2 - x$

$y \le \frac{2-x}{2}$

x	0	2	-2
y	1	0	2

Мои вирши, что заштрихованные области симметричны друг другу, поэтому найдем S_1 криволин. трапеции. $F(x) = \left|_a^b\right. F(b) - F(a)$

$F(x) = \frac{x^2}{2}$

$F(x) = \int_{-2}^{1} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{9}{6} = 1{,}5$

$S_{общая} = 1{,}5 \cdot 2 = 3.$

Ответ: 3.

+

Председателю апелляционной комиссии

Участника олимпиады Шахович Софье Дмитриевна
(фамилия, имя, отчество)

проживающего г. Иркутск ул. Мира д 82 кв 25
(адрес)

ЗАЯВЛЕНИЕ

Прошу пересмотреть количество баллов, полученное мной на олимпиаде школьников «Паруса надежды» по физике/математике в связи с тем, что

решила 3 задачу правильно, но за задачу стоит 0 баллов.

Дата 7.04.2016 Подпись Шах

Резолюция апелляционной комиссии

Количество баллов 2 поставлено ~~правильно, исправлению не подлежит~~ /неправильно, смотри акт № 1 от 7.04.16 2016 года.
(ненужное зачеркнуть)

Председатель апелляционной комиссии

Председатель жюри

Члены жюри

АКТ
Апелляционной комиссии
№ 1 от 07.04.2016 года

Была проведена повторная проверка олимпиадной работы по математике №45504.

Принято решение добавить 1 балл за выполнение задание 3.

Окончательная сумма баллов 3

Председатель апелляционной комиссии _____

Председатель жюри

Г. Д. Гефан