

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ))



Рабочая программа дисциплины (модуля),
как компонент образовательной программы
базового высшего образования
по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика,
утвержденной первым проректором РУТ (МИИТ)
Тимониным В.С.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Системы дифференциальных уравнений

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математическое моделирование и системный анализ

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде
электронного документа выгружена из единой
корпоративной информационной системы управления
университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная РУТ (МИИТ)
ID подписи: 1343395
Подписал: И.о. заведующего кафедрой Тищенко Сергей
Александрович
Дата: 18.06.2026

1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целью освоения учебной дисциплины (модуля) являются:

- освоение одного из самых развитых современных языков описания различных математических моделей - языка систем дифференциальных уравнений;
- получение знаний, приобретение навыков решения задач из области систем дифференциальных уравнений, необходимых для практического применения методов и моделей в исследовательской и профессиональной деятельности;
- обучение студента применению основных понятий и задач, связанных с системами дифференциальных уравнений.

Задачами дисциплины (модуля) являются:

- изучение базовых понятий теории систем дифференциальных уравнений;
- освоение основных приёмов решения практических задач по темам дисциплины;
- овладение студентами основами дисциплины и его приложений в различных областях знаний, необходимыми для успешного изучения последующих математических и других естественнонаучных дисциплин.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

ОПК-1 - Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

Знать:

- постановки задач, основные теоремы о существовании и единственности решения задач;
- основные типы систем дифференциальных уравнений и методы их решений;
- основные понятия теории устойчивости, связанных с системами дифференциальных уравнений.

Уметь:

- решать дифференциальные уравнения первого, второго и высших порядков;
- находить решение начальной и краевой задач для дифференциальных уравнения;
- решать системы дифференциальных уравнений, исследовать устойчивость решений.

Владеть:

- навыками применения различных методов решения однородных и неоднородных дифференциальных уравнений и систем уравнений;
- методами исследования устойчивости решений.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 5 з.е. (180 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов	
	Всего	Семестр №5
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	80	80
В том числе:		
Занятия лекционного типа	32	32
Занятия семинарского типа	48	48

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 100 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Рассматриваемые вопросы: - Определение нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка, её порядок и решение. - Задача Коши для системы: начальные условия, теорема существования и единственности решения. - Связь между системой n уравнений первого порядка и одним уравнением n -го порядка.
2	Линейные системы дифференциальных уравнений. Общая теория. Рассматриваемые вопросы: - Определение линейной однородной и неоднородной системы с постоянными и переменными коэффициентами. - Свойства решений линейной однородной системы (принцип суперпозиции). - Фундаментальная матрица решений и её свойства. Определитель Вронского для систем.
3	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Рассматриваемые вопросы: - Поиск решения в виде $x = v \cdot \exp(\lambda t)$, сведение к задаче на собственные значения матрицы. - Характеристическое уравнение матрицы и его корни. - Построение фундаментальной системы решений для случая простых действительных собственных значений.
4	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Случай кратных и комплексных собственных значений. Рассматриваемые вопросы: - Построение решений при наличии кратных собственных значений (присоединённые векторы, жорданова форма). - Случай комплексно-сопряжённых собственных значений: выделение действительной и мнимой частей. - Запись общего решения в действительной форме.
5	Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных. - Структура общего решения неоднородной системы (сумма частного решения и общего решения однородной). - Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для систем. - Решение системы с помощью фундаментальной матрицы.
6	Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод подбора (неопределённых коэффициентов). Рассматриваемые вопросы: - Применение метода подбора для систем с правой частью специального вида (квазимногочлены). - Правило выбора формы частного решения с учётом резонанса (совпадения с собственными

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	значениями матрицы). - Сравнение метода подбора и метода вариации для систем.
7	Матричная экспонента и её применение к решению линейных систем. Рассматриваемые вопросы: - Определение матричной экспоненты $\exp(At)$ как суммы ряда. - Свойства матричной экспоненты (дифференцирование, коммутирующие матрицы). - Использование матричной экспоненты для записи общего решения однородной и неоднородной систем (формула Коши).
8	Вычисление матричной экспоненты через жорданову форму матрицы. Рассматриваемые вопросы: - Приведение матрицы к жордановой нормальной форме. - Вычисление $\exp(At)$ для жордановых клеток. - Примеры вычисления матричной экспоненты для матриц второго и третьего порядков.
9	Системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Метод последовательных приближений. Рассматриваемые вопросы: - Постановка задачи Коши для линейной системы с переменными коэффициентами. - Метод последовательных приближений Пикара для систем. - Условия сходимости ряда Пикара и оценка погрешности.
10	Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений. Основные понятия. Рассматриваемые вопросы: - Определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости. - Геометрическая интерпретация устойчивости на фазовой плоскости. - Классификация точек покоя для линейных однородных систем второго порядка (узел, седло, фокус, центр).
11	Исследование устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами. Рассматриваемые вопросы: - Критерий устойчивости по собственным значениям матрицы (вещественные части корней характеристического уравнения). - Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. - Критерий Рауса – Гурвица для систем высших порядков.
12	Прямой метод Ляпунова (второй метод Ляпунова). Рассматриваемые вопросы: - Понятие функции Ляпунова и её производной в силу системы. - Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. - Теоремы о неустойчивости (теорема Четаева). Построение функций Ляпунова для простейших систем.
13	Фазовая плоскость. Качественное исследование автономных систем второго порядка. Рассматриваемые вопросы: - Автономные системы на плоскости. Фазовые траектории и фазовый портрет. - Особые точки и их классификация (узел, седло, фокус, центр). - Предельные циклы. Теорема Пуанкаре.
14	Приближённые методы решения систем. Метод малого параметра. Рассматриваемые вопросы: - Понятие регулярного и сингулярного возмущения.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- Разложение решения в ряд по малому параметру. - Применение метода малого параметра к слабонелинейным системам.
15	Уравнения в частных производных первого порядка. Рассматриваемые вопросы: - Методы решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений - Решение уравнений в частных производных первого порядка - Построение поверхности, удовлетворяющей уравнению и проходящую через заданную кривую
16	Элементы теории бифуркаций и обзор приложений систем дифференциальных уравнений. Рассматриваемые вопросы: - Понятие бифуркации. Бифуркация «седло-узел». - Бифуркация Андронова – Хопфа и рождение предельного цикла. - Примеры прикладных задач, сводящихся к системам: модели Лотки – Вольтерра, модель хищник-жертва, математические модели в механике и биологии.

4.2. Занятия семинарского типа.

Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Задача Коши. В результате работы на практических занятиях студент записывает нормальную систему дифференциальных уравнений по заданному уравнению n-го порядка и наоборот, приводит систему к векторно-матричному виду, а также ставит задачу Коши для системы и проверяет условия теоремы существования и единственности.
2	Линейные системы. Фундаментальная матрица и вронскиан. В результате работы на практических занятиях студент проверяет линейную независимость решений системы с помощью определителя Вронского, строит фундаментальную матрицу решений для линейных систем второго и третьего порядков и использует её для записи общего решения однородной линейной системы
3	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера (случай простых действительных корней). В результате работы на практических занятиях студент составляет характеристическое уравнение для матрицы системы, находит собственные значения и собственные векторы, а затем строит фундаментальную систему решений и общее решение для случая различных действительных корней характеристического уравнения.
4	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами (случай кратных действительных корней). В результате работы на практических занятиях студент строит решение системы в случае кратных собственных значений с использованием присоединённых векторов, записывает общее решение через жордановы клетки и применяет этот метод к системам второго и третьего порядков.
5	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами (случай комплексно-сопряжённых корней). В результате работы на практических занятиях студент находит комплексно-сопряжённые собственные значения и соответствующие им собственные векторы, выделяет действительную и мнимую части комплексного решения и записывает общее решение системы в действительной форме через синусы и косинусы.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
6	Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных (Лагранжа). В результате работы на практических занятиях студент применяет метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородных линейных систем, составляет и решает систему уравнений для производных варьируемых функций и записывает общее решение неоднородной системы через фундаментальную матрицу.
7	Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод подбора (неопределённых коэффициентов). В результате работы на практических занятиях студент подбирает частное решение неоднородной системы по виду правой части (квазимногочлены), корректирует его при наличии резонанса и находит общее решение системы без использования интегрирования.
8	Матричная экспонента. Определение и основные свойства. В результате работы на практических занятиях студент вычисляет матричную экспоненту для диагональных и жордановых матриц, проверяет её свойства (дифференцирование, коммутирование) и записывает решение однородной системы в виде $x(t) = \exp(At) \cdot x(0)$.
9	Вычисление матричной экспоненты. Формула Коши. В результате работы на практических занятиях студент вычисляет матричную экспоненту для матриц второго порядка с различными типами собственных значений, применяет формулу Коши для записи решения неоднородной системы и решает задачи Коши с использованием матричной экспоненты.
10	Линейные системы с переменными коэффициентами. Метод Пикара. В результате работы на практических занятиях студент строит последовательные приближения Пикара для линейной системы с переменными коэффициентами, оценивает погрешность приближённого решения и применяет метод к конкретным системам второго порядка.
11	Устойчивость решений. Определения и классификация точек покоя. В результате работы на практических занятиях студент определяет тип точки покоя (узел, седло, фокус, центр) для линейной системы второго порядка по собственным значениям матрицы, строит фазовые портреты и исследует устойчивость тривиального решения.
12	Исследование устойчивости линейных систем. Критерий Рауса – Гурвица. В результате работы на практических занятиях студент применяет критерий Рауса – Гурвица для проверки устойчивости линейных систем третьего и четвёртого порядков, строит характеристический полином и определяет условия устойчивости по его коэффициентам.
13	Прямой метод Ляпунова. Функции Ляпунова. В результате работы на практических занятиях студент подбирает функцию Ляпунова для простейших нелинейных систем в виде квадратичной формы, вычисляет её производную в силу системы и делает вывод об устойчивости или асимптотической устойчивости нулевого решения.
14	Теорема Четаева о неустойчивости. В результате работы на практических занятиях студент применяет теорему Четаева для доказательства неустойчивости решений нелинейных систем, строит функцию Четаева и определяет область, в которой выполнены условия теоремы.
15	Фазовая плоскость. Построение фазовых портретов линейных систем. В результате работы на практических занятиях студент строит фазовые траектории для линейных систем второго порядка, изображает фазовые портреты для узла, седла, фокуса и центра и анализирует поведение траекторий в зависимости от параметров системы.
16	Фазовые портреты нелинейных систем. Локализация особых точек. В результате работы на практических занятиях студент находит особые точки нелинейной системы, линеаризует систему в окрестности каждой особой точки и строит качественный фазовый портрет на основе анализа линеаризованных систем.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
17	Предельные циклы. Теорема Пуанкаре. В результате работы на практических занятиях студент проверяет условия теоремы Пуанкаре для заданной нелинейной системы, находит область, содержащую предельный цикл, и анализирует существование автоколебаний.
18	Метод малого параметра для систем. Регулярные возмущения. В результате работы на практических занятиях студент раскладывает решение системы в ряд по малому параметру, последовательно находит коэффициенты разложения и оценивает погрешность приближённого решения.
19	Метод малого параметра. Сингулярные возмущения. В результате работы на практических занятиях студент применяет метод сингулярных возмущений к быстрым и медленным переменным, строит внешнее и внутреннее разложения (пограничные слои).
20	Уравнение Ван дер Поля. Метод усреднения. В результате работы на практических занятиях студент приводит уравнение Ван дер Поля к системе, применяет метод усреднения Крылова – Боголюбова для нахождения приближённого решения.
21	Модель Лотки – Вольтерра (хищник-жертва). В результате работы на практических занятиях студент строит математическую модель Лотки – Вольтерра, находит её особые точки, строит фазовый портрет и анализирует циклические колебания численности популяций.
22	Нелинейные системы дифференциальных уравнений В результате работы на практических занятиях студент ищет решения нелинейных систем дифференциальных уравнений, используя метод интегрируемых комбинаций
23	Уравнения в частных производных первого порядка В результате работы на практических занятиях студент сводит уравнение первого порядка к нелинейной системе и находит его решение, решает задачу проведения поверхности, удовлетворяющую дифференциальному уравнению, через заданную кривую
24	Итоговый практикум по системам дифференциальных уравнений. В результате работы на практических занятиях студент уверенно применяет все изученные методы для решения линейных и нелинейных систем, строит фазовые портреты, исследует устойчивость и бифуркации, а также решает прикладные задачи из механики, биологии и физики.

4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Изучение учебной литературы из приведенных источников
2	Подготовка к практическим занятиям
3	Подготовка к промежуточной аттестации.
4	Подготовка к текущему контролю.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/ п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике : учебное пособие / А. Д. Мышкис. — 6-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 688 с. — ISBN 978-5-8114-0572-5	https://search.rsl.ru/ru/record/01004406831?ysclid=mc95fowwzr46078329
2	Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / И. Г. Петровский ; под редакцией А. Д. Мышкиса, О. А. Олейник. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 208 с. — ISBN 978-5-9221-1144-7	https://znanium.ru/read?id=254610 (дата обращения: 23.06.2025)
3	Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В. И. Арнольд. — 2-е изд., стереотип. — Москва : МЦНМО, 2020. — 341 с. — ISBN 978-5-4439-3254-5	https://znanium.ru/read?id=309171 (дата обращения: 23.06.2025)

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

- Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru>);

- Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (www.elibrary.ru);
- Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru/>);
- Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>);
- Интернет-университет информационных технологий (<http://www.intuit.ru/>).

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

- Операционная система Windows;
- Microsoft Office;
- MS Teams;
- Поисковые системы.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Экзамен в 5 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, к.н. кафедры
«Математическое моделирование
сложных систем» Института
железнодорожного транспорта

М.К. Турцынский

Согласовано:

и.о. заведующего кафедрой ПМ
Председатель учебно-методической
комиссии

С.А. Тищенко

Н.А. Андриянова