

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**  
**(РУТ (МИИТ))**



Рабочая программа дисциплины (модуля),  
как компонент образовательной программы  
базового высшего образования  
по направлению подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика,  
утвержденной первым проректором ФГАОУ ВО  
РУТ (МИИТ) Тимониним В.С.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Системы дифференциальных уравнений**

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математическое моделирование и системный анализ

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде  
электронного документа выгружена из единой  
корпоративной информационной системы управления  
университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная ФГАОУ ВО РУТ  
(МИИТ)

ID подписи: 1343395

Подписал: И.о. заведующего кафедрой Тищенко Сергей  
Александрович

Дата: 01.09.2026

## 1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целью освоения учебной дисциплины (модуля) являются:

- освоение одного из самых развитых современных языков описания различных математических моделей - языка систем дифференциальных уравнений;
- получение знаний, приобретение навыков решения задач из области систем дифференциальных уравнений, необходимых для практического применения методов и моделей в исследовательской и профессиональной деятельности;
- обучение студента применению основных понятий и задач, связанных с системами дифференциальных уравнений.

Задачами дисциплины (модуля) являются:

- изучение базовых понятий теории систем дифференциальных уравнений;
- освоение основных приёмов решения практических задач по темам дисциплины;
- овладение студентами основами дисциплины и его приложений в различных областях знаний, необходимыми для успешного изучения последующих математических и других естественнонаучных дисциплин.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

**ОПК-1** - Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

### **Знать:**

- постановки задач, основные теоремы о существовании и единственности решения задач;
- основные типы систем дифференциальных уравнений и методы их решений;
- основные понятия теории устойчивости, связанных с системами дифференциальных уравнений.

### **Уметь:**

- решать дифференциальные уравнения первого, второго и высших порядков;
- находить решение начальной и краевой задач для дифференциальных уравнения;
- решать системы дифференциальных уравнений, исследовать устойчивость решений.

**Владеть:**

- навыками применения различных методов решения однородных и неоднородных дифференциальных уравнений и систем уравнений;
- методами исследования устойчивости решений.

### 3. Объем дисциплины (модуля).

#### 3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 5 з.е. (180 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

| Тип учебных занятий                                       | Количество часов |            |
|-----------------------------------------------------------|------------------|------------|
|                                                           | Всего            | Семестр №5 |
| Контактная работа при проведении учебных занятий (всего): | 80               | 80         |
| В том числе:                                              |                  |            |
| Занятия лекционного типа                                  | 32               | 32         |
| Занятия семинарского типа                                 | 48               | 48         |

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 100 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля).

##### 4.1. Занятия лекционного типа.

| №<br>п/п | Тематика лекционных занятий / краткое содержание                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1        | <p>Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия.</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Определение нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка, её порядок и решение.</li><li>- Задача Коши для системы: начальные условия, теорема существования и единственности решения.</li><li>- Связь между системой <math>n</math> уравнений первого порядка и одним уравнением <math>n</math>-го порядка.</li></ul>  |
| 2        | <p>Линейные системы дифференциальных уравнений. Общая теория.</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Определение линейной однородной и неоднородной системы с постоянными и переменными коэффициентами.</li><li>- Свойства решений линейной однородной системы (принцип суперпозиции).</li><li>- Фундаментальная матрица решений и её свойства. Определитель Вронского для систем.</li></ul>                                            |
| 3        | <p>Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Поиск решения в виде <math>x = v \cdot \exp(\lambda t)</math>, сведение к задаче на собственные значения матрицы.</li><li>- Характеристическое уравнение матрицы и его корни.</li><li>- Построение фундаментальной системы решений для случая простых действительных собственных значений.</li></ul>                  |
| 4        | <p>Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Случай кратных и комплексных собственных значений.</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Построение решений при наличии кратных собственных значений (присоединённые векторы, жорданова форма).</li><li>- Случай комплексно-сопряжённых собственных значений: выделение действительной и мнимой частей.</li><li>- Запись общего решения в действительной форме.</li></ul> |
| 5        | <p>Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Структура общего решения неоднородной системы (сумма частного решения и общего решения однородной).</li><li>- Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для систем.</li><li>- Решение системы с помощью фундаментальной матрицы.</li></ul>                                                                               |
| 6        | <p>Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод подбора (неопределённых коэффициентов).</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Применение метода подбора для систем с правой частью специального вида (квазимногочлены).</li><li>- Правило выбора формы частного решения с учётом резонанса (совпадения с собственными</li></ul>                                                                                   |

| №<br>п/п | Тематика лекционных занятий / краткое содержание                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          | значениями матрицы).<br>- Сравнение метода подбора и метода вариации для систем.                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 7        | Матричная экспонента и её применение к решению линейных систем.<br>Рассматриваемые вопросы:<br>- Определение матричной экспоненты $\exp(At)$ как суммы ряда.<br>- Свойства матричной экспоненты (дифференцирование, коммутирующие матрицы).<br>- Использование матричной экспоненты для записи общего решения однородной и неоднородной систем (формула Коши).                  |
| 8        | Вычисление матричной экспоненты через жорданову форму матрицы.<br>Рассматриваемые вопросы:<br>- Приведение матрицы к жордановой нормальной форме.<br>- Вычисление $\exp(At)$ для жордановых клеток.<br>- Примеры вычисления матричной экспоненты для матриц второго и третьего порядков.                                                                                        |
| 9        | Системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Метод последовательных приближений.<br>Рассматриваемые вопросы:<br>- Постановка задачи Коши для линейной системы с переменными коэффициентами.<br>- Метод последовательных приближений Пикара для систем.<br>- Условия сходимости ряда Пикара и оценка погрешности.                                                    |
| 10       | Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений. Основные понятия.<br>Рассматриваемые вопросы:<br>- Определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости.<br>- Геометрическая интерпретация устойчивости на фазовой плоскости.<br>- Классификация точек покоя для линейных однородных систем второго порядка (узел, седло, фокус, центр). |
| 11       | Исследование устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами.<br>Рассматриваемые вопросы:<br>- Критерий устойчивости по собственным значениям матрицы (вещественные части корней характеристического уравнения).<br>- Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.<br>- Критерий Рауса – Гурвица для систем высших порядков.                              |
| 12       | Прямой метод Ляпунова (второй метод Ляпунова).<br>Рассматриваемые вопросы:<br>- Понятие функции Ляпунова и её производной в силу системы.<br>- Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.<br>- Теоремы о неустойчивости (теорема Четаева). Построение функций Ляпунова для простейших систем.                                                             |
| 13       | Фазовая плоскость. Качественное исследование автономных систем второго порядка.<br>Рассматриваемые вопросы:<br>- Автономные системы на плоскости. Фазовые траектории и фазовый портрет.<br>- Особые точки и их классификация (узел, седло, фокус, центр).<br>- Предельные циклы. Теорема Пуанкаре.                                                                              |
| 14       | Приближённые методы решения систем. Метод малого параметра.<br>Рассматриваемые вопросы:<br>- Понятие регулярного и сингулярного возмущения.                                                                                                                                                                                                                                     |

| №<br>п/п | Тематика лекционных занятий / краткое содержание                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Разложение решения в ряд по малому параметру.</li> <li>- Применение метода малого параметра к слабонелинейным системам.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 15       | <p>Уравнения в частных производных первого порядка.</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Методы решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений</li> <li>- Решение уравнений в частных производных первого порядка</li> <li>- Построение поверхности, удовлетворяющей уравнению и проходящую через заданную кривую</li> </ul>                                                                 |
| 16       | <p>Элементы теории бифуркаций и обзор приложений систем дифференциальных уравнений.</p> <p>Рассматриваемые вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Понятие бифуркации. Бифуркация «седло-узел».</li> <li>- Бифуркация Андронова – Хопфа и рождение предельного цикла.</li> <li>- Примеры прикладных задач, сводящихся к системам: модели Лотки – Вольтерра, модель хищник-жертва, математические модели в механике и биологии.</li> </ul> |

## 4.2. Занятия семинарского типа.

### Практические занятия

| №<br>п/п | Тематика практических занятий/краткое содержание                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1        | <p>Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Задача Коши.</p> <p>В результате работы на практических занятиях студент записывает нормальную систему дифференциальных уравнений по заданному уравнению <math>n</math>-го порядка и наоборот, приводит систему к векторно-матричному виду, а также ставит задачу Коши для системы и проверяет условия теоремы существования и единственности.</p>                                 |
| 2        | <p>Линейные системы. Фундаментальная матрица и вронскиан.</p> <p>В результате работы на практических занятиях студент проверяет линейную независимость решений системы с помощью определителя Вронского, строит фундаментальную матрицу решений для линейных систем второго и третьего порядков и использует её для записи общего решения однородной линейной системы</p>                                                                   |
| 3        | <p>Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера (случай простых действительных корней).</p> <p>В результате работы на практических занятиях студент составляет характеристическое уравнение для матрицы системы, находит собственные значения и собственные векторы, а затем строит фундаментальную систему решений и общее решение для случая различных действительных корней характеристического уравнения.</p> |
| 4        | <p>Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами (случай кратных действительных корней).</p> <p>В результате работы на практических занятиях студент строит решение системы в случае кратных собственных значений с использованием присоединённых векторов, записывает общее решение через жордановы клетки и применяет этот метод к системам второго и третьего порядков.</p>                                                   |
| 5        | <p>Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами (случай комплексно-сопряжённых корней).</p> <p>В результате работы на практических занятиях студент находит комплексно-сопряжённые собственные значения и соответствующие им собственные векторы, выделяет действительную и мнимую части комплексного решения и записывает общее решение системы в действительной форме через синусы и косинусы.</p>                            |

| №<br>п/п | Тематика практических занятий/краткое содержание                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6        | <p><b>Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных (Лагранжа).</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент применяет метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородных линейных систем, составляет и решает систему уравнений для производных варьируемых функций и записывает общее решение неоднородной системы через фундаментальную матрицу.</p> |
| 7        | <p><b>Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод подбора (неопределённых коэффициентов).</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент подбирает частное решение неоднородной системы по виду правой части (квазимногочлены), корректирует его при наличии резонанса и находит общее решение системы без использования интегрирования.</p>                                             |
| 8        | <p><b>Матричная экспонента. Определение и основные свойства.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент вычисляет матричную экспоненту для диагональных и жордановых матриц, проверяет её свойства (дифференцирование, коммутирование) и записывает решение однородной системы в виде <math>x(t) = \exp(At) \cdot x(0)</math>.</p>                                                                         |
| 9        | <p><b>Вычисление матричной экспоненты. Формула Коши.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент вычисляет матричную экспоненту для матриц второго порядка с различными типами собственных значений, применяет формулу Коши для записи решения неоднородной системы и решает задачи Коши с использованием матричной экспоненты.</p>                                                                         |
| 10       | <p><b>Линейные системы с переменными коэффициентами. Метод Пикара.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент строит последовательные приближения Пикара для линейной системы с переменными коэффициентами, оценивает погрешность приближённого решения и применяет метод к конкретным системам второго порядка.</p>                                                                                       |
| 11       | <p><b>Устойчивость решений. Определения и классификация точек покоя.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент определяет тип точки покоя (узел, седло, фокус, центр) для линейной системы второго порядка по собственным значениям матрицы, строит фазовые портреты и исследует устойчивость тривиального решения.</p>                                                                                   |
| 12       | <p><b>Исследование устойчивости линейных систем. Критерий Рауса – Гурвица.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент применяет критерий Рауса – Гурвица для проверки устойчивости линейных систем третьего и четвёртого порядков, строит характеристический полином и определяет условия устойчивости по его коэффициентам.</p>                                                                           |
| 13       | <p><b>Прямой метод Ляпунова. Функции Ляпунова.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент подбирает функцию Ляпунова для простейших нелинейных систем в виде квадратичной формы, вычисляет её производную в силу системы и делает вывод об устойчивости или асимптотической устойчивости нулевого решения.</p>                                                                                             |
| 14       | <p><b>Теорема Четаева о неустойчивости.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент применяет теорему Четаева для доказательства неустойчивости решений нелинейных систем, строит функцию Четаева и определяет область, в которой выполнены условия теоремы.</p>                                                                                                                                            |
| 15       | <p><b>Фазовая плоскость. Построение фазовых портретов линейных систем.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент строит фазовые траектории для линейных систем второго порядка, изображает фазовые портреты для узла, седла, фокуса и центра и анализирует поведение траекторий в зависимости от параметров системы.</p>                                                                                  |
| 16       | <p><b>Фазовые портреты нелинейных систем. Локализация особых точек.</b></p> <p>В результате работы на практических занятиях студент находит особые точки нелинейной системы, линеаризует систему в окрестности каждой особой точки и строит качественный фазовый портрет на основе анализа линеаризованных систем.</p>                                                                                                          |

| №<br>п/п | Тематика практических занятий/краткое содержание                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 17       | <b>Предельные циклы. Теорема Пуанкаре.</b><br>В результате работы на практических занятиях студент проверяет условия теоремы Пуанкаре для заданной нелинейной системы, находит область, содержащую предельный цикл, и анализирует существование автоколебаний.                                                                             |
| 18       | <b>Метод малого параметра для систем. Регулярные возмущения.</b><br>В результате работы на практических занятиях студент раскладывает решение системы в ряд по малому параметру, последовательно находит коэффициенты разложения и оценивает погрешность приближённого решения.                                                            |
| 19       | <b>Метод малого параметра. Сингулярные возмущения.</b><br>В результате работы на практических занятиях студент применяет метод сингулярных возмущений к быстрым и медленным переменным, строит внешнее и внутреннее разложения (пограничные слои).                                                                                         |
| 20       | <b>Уравнение Ван дер Поля. Метод усреднения.</b><br>В результате работы на практических занятиях студент приводит уравнение Ван дер Поля к системе, применяет метод усреднения Крылова – Боголюбова для нахождения приближённого решения.                                                                                                  |
| 21       | <b>Модель Лотки – Вольтерра (хищник-жертва).</b><br>В результате работы на практических занятиях студент строит математическую модель Лотки – Вольтерра, находит её особые точки, строит фазовый портрет и анализирует циклические колебания численности популяций.                                                                        |
| 22       | <b>Нелинейные системы дифференциальных уравнений</b><br>В результате работы на практических занятиях студент ищет решения нелинейных систем дифференциальных уравнений, используя метод интегрируемых комбинаций                                                                                                                           |
| 23       | <b>Уравнения в частных производных первого порядка</b><br>В результате работы на практических занятиях студент сводит уравнение первого порядка к нелинейной системе и находит его решение, решает задачу проведения поверхности, удовлетворяющую дифференциальному уравнению, через заданную кривую                                       |
| 24       | <b>Итоговый практикум по системам дифференциальных уравнений.</b><br>В результате работы на практических занятиях студент уверенно применяет все изученные методы для решения линейных и нелинейных систем, строит фазовые портреты, исследует устойчивость и бифуркации, а также решает прикладные задачи из механики, биологии и физики. |

#### 4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

| №<br>п/п | Вид самостоятельной работы                            |
|----------|-------------------------------------------------------|
| 1        | Изучение учебной литературы из приведенных источников |
| 2        | Подготовка к практическим занятиям                    |
| 3        | Подготовка к промежуточной аттестации.                |
| 4        | Подготовка к текущему контролю.                       |

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

| №<br>п/<br>п | Библиографическое описание                                                                                                                                                                                                     | Место доступа                                                                                                                                             |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1            | Мышкис, А. Д.<br>Лекции по высшей математике : учебное пособие / А. Д. Мышкис. — 6-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 688 с. — ISBN 978-5-8114-0572-5                                                             | <a href="https://search.rsl.ru/ru/record/01004406831?ysclid=mc95fowwzr46078329">https://search.rsl.ru/ru/record/01004406831?ysclid=mc95fowwzr46078329</a> |
| 2            | Петровский, И. Г.<br>Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / И. Г. Петровский ; под редакцией А. Д. Мышкиса, О. А. Олейник. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 208 с. — ISBN 978-5-9221-1144-7 | <a href="https://znanium.ru/read?id=254610">https://znanium.ru/read?id=254610</a> (дата обращения: 23.06.2025)                                            |
| 3            | Арнольд, В. И.<br>Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В. И. Арнольд. — 2-е изд., стереотип. — Москва : МЦНМО, 2020. — 341 с. — ISBN 978-5-4439-3254-5                                                          | <a href="https://znanium.ru/read?id=309171">https://znanium.ru/read?id=309171</a> (дата обращения: 23.06.2025)                                            |

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

- Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru>);

- Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru) );
- Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru/>);
- Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>);
- Интернет-университет информационных технологий (<http://www.intuit.ru/>).

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

- Операционная система Windows;
- Microsoft Office;
- MS Teams;
- Поисковые системы.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Экзамен в 5 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, к.н. кафедры  
«Математическое моделирование  
сложных систем» Института  
железнодорожного транспорта

М.К. Турцынский

Согласовано:

и.о. заведующего кафедрой ПМ

С.А. Тищенко

и.о. заведующего кафедрой ММСС

С.А. Тищенко

Председатель учебно-методической  
комиссии

Н.А. Андриянова