

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ))



Рабочая программа дисциплины (модуля),
как компонент образовательной программы
базового высшего образования
по направлению подготовки
09.03.01 Информатика и вычислительная техника,
утвержденной первым проректором РУТ (МИИТ)
Тимониным В.С.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Теория графов и комбинаторика

Направление подготовки: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Направленность (профиль): Вычислительные системы и сети

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде
электронного документа выгружена из единой
корпоративной информационной системы управления
университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная РУТ (МИИТ)
ID подписи: 1343395
Подписал: И.о. заведующего кафедрой Тищенко Сергей
Александрович
Дата: 18.06.2026

1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целями освоения дисциплины «Теория графов и комбинаторика» являются: знакомство с фундаментальными понятиями и математическим аппаратом теории графов; изучение основных задач теории графов, алгоритмов и методов их решения; формирование навыков эффективно применять модели теории графов для решения прикладных задач/

Задачами дисциплины являются:

- овладение базовыми понятиями, основными определениями и элементарными результатами дискретной математики, необходимыми в практической деятельности;
- умение описывать дискретные математические объекты, строить прикладные дискретные математические модели и работать с ними.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

ОПК-1 - Способен применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

Знать:

- основные формулы комбинаторики;
- основные понятия теории графов;
- способы представления графов;
- часто встречающиеся прикладные задачи теории графов;
- основные алгоритмы теории графов область их применения.

Уметь:

- применять комбинаторные формулы для подсчёта числа различных комбинаций;
- записывать матрицы смежности и инцидентности графа;
- определять тип графа;
- решать задачи нахождения эйлерова и гамильтонова цикла;
- находить кратчайшее остовное дерево.

Владеть:

- навыками применения комбинаторных формул;

- навыками матричного задания графов;
- навыками применения алгоритмов Краскала, Прима, Дейкстры, Форда-Беллмана, Флойда для решения задач на графах.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 3 з.е. (108 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов	
	Всего	Семестр №4
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	64	64
В том числе:		
Занятия лекционного типа	32	32
Занятия семинарского типа	32	32

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 44 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Основные принципы комбинаторики. Рассматриваемые вопросы: -Конечные и счетные множества, мощность множества; -Прямое (Декартово) произведение множеств; -Правила суммы и произведения; -Принцип Дирихле;
2	Размещения, сочетания и перестановки с повторениями и без повторений. Рассматриваемые вопросы: -Упорядоченные выборки: перестановки и размещения с повторениями и без повторений -Неупорядоченные выборки: сочетания с повторениями и без повторений;
3	Свойства биномиальных коэффициентов. Рассматриваемые вопросы: -Основные комбинаторные тождества; -Бином Ньютона. Треугольник Паскаля.
4	Правило включения-исключения. Рассматриваемые вопросы: -Характеристическая функция множества; -Вывод формулы включения-исключения; -Приемы применения формулы включения-исключения.
5	Подстановки. Рассматриваемые вопросы: -Подстановки на конечном множестве, умножение подстановок; -Циклические подстановки; -Транспозиции; -Симметрическая группа S_n.
6	Рекуррентные последовательности. Рассматриваемые вопросы: -Однородные рекуррентные последовательности; -Характеристический многочлен рекуррентной последовательности; -Решение рекуррентных соотношений для простых корней; -Решение рекуррентных соотношений для кратных корней; -Последовательность Фибоначчи; -Понятие производящей функции.
7	Введение в теорию графов. Рассматриваемые вопросы: -История возникновения и развития теории графов; -Основные понятия и определения: понятие графа, вершины, ребра, дуги, ориентированные и неориентированные графы, простой граф, петли, кратные ребра, виды графов, подграфы; -Степени вершин. Способы задания графов; -Матрица смежности, матрица инцидентности графа. -Изоморфизм графов.
8	Деревья. Рассматриваемые вопросы: -Понятие дерева, листа, леса; -Неориентированные и ориентированные деревья; -Корневые деревья. -Метрические характеристики графов: эксцентриситет, диаметр, радиус, центр. -Теорема о центре дерева.
9	Кодирование деревьев. Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	-Канонический код; -Код Прюфера; -Изоморфизм деревьев.
10	Остовные деревья. Рассматриваемые вопросы: -Понятие остова(каркаса) графа; -Матрица Киргхофа; -Теорема Киргхофа. - Построение кратчайшего остовного дерева: алгоритм Краскала, алгоритм Прима.
11	Обходы графов. Рассматриваемые вопросы: - Путь, простой путь, циклический путь, цепь, цикл; - Достижимость и связность, компоненты связности. Сильные компоненты графа и конденсация; - База и антибаза графа.
12	Эйлеровы и гамильтоновы графы. Рассматриваемые вопросы: - Понятие эйлерова пути, эйлерова цикла, эйлерова графа. Необходимые и достаточные условия существования эйлерова пути; - Критерий эйлеровости графа; - Понятие гамильтонова пути, гамильтонового цикла, гамильтонового графа. Достаточное условие гамильтоновости графа.
13	Планарные графы. Рассматриваемые вопросы: -Формула Эйлера, графы K_5 и K_3 ;3; -Операции на графах: подразбиение и стягивание; -Теорема Понтрягина-Куратовского; -Критерий Вагнера.
14	Кратчайшие пути в графах. Рассматриваемые вопросы: - Понятие взвешенного графа; - Постановка задачи нахождения кратчайшего пути во взвешенном графе; - Алгоритм Форда-Беллмана. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Флойда.
15	Построение максимального потока. Рассматриваемые вопросы: - Понятие потока. Постановка задачи; - Алгоритм Форда-Фолкерсона построения максимального потока.
16	Дискретные модели теории графов Рассматриваемые вопросы: - Задача об изоморфизме графов; - Задачи о раскрасках графов (Рёберные и вершинные раскраски. Раскраски плоских графов); - Задача о покрытии конечного множества системой его подмножеств.

4.2. Занятия семинарского типа.

Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Задачи на применение основных комбинаторных принципов: правил суммы и произведения, принципа Дирихле.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	- краткий разбор правила суммы (OR), правила произведения (AND) и принципа Дирихле на простых прототипах; - решение задач трех типов — на взаимоисключающие случаи, последовательный выбор с ограничениями и задачи на гарантию совпадений; 10-минутный квиз на определение метода без вычислений; - разбор типичных ошибок и комбинаторная ловушка «двойного счета».
2	Задачи на вычисление числа размещений, сочетаний и перестановки повторениями и без повторений. - разбор базовых формул: различие между упорядоченными наборами и неупорядоченными; введение факториала, вывод формулы сочетаний через размещения; -переход к повторениям: решение задач на перестановки с повторениями, сочетания с повторениями и размещения с повторениями; разграничение условий: выбор «из мешка без возврата» против выбора «из полного набора с возвратом»; - дифференцированные задачи на распознавание типа подсчета в смешанных условиях; поиск типичных ошибок при выборе между размещениями и сочетаниями.
3	Доказательство комбинаторных тождеств. - алгебраический метод: доказательство тождеств через преобразования формул и свойства факториалов; разбор классических примеров: вывод формулы, свертка Вандермонда, треугольник Паскаля как рекуррентное соотношение; - комбинаторный смысл: метод прямого подсчета двумя способами ; объяснение логики «мы считаем одно и то же множество объектов по разным правилам» на примере доказательства равенства или суммы элементов строки треугольника Паскаля ; - решение задач, требующих комбинирования подходов — использование метода дополнения, подстановки частных значений для проверки гипотез, бином Ньютона для суммирования рядов с биномиальными коэффициентами и комбинаторные рассуждения о выборе из нескольких групп.
4	Задачи с использованием формулы включения-исключения. - разбор формулы для двух и трех множеств, переход к общему случаю ; понятие «двойного счета» как мотивация метода, связь с методом дополнения; - подсчет чисел в диапазоне, делящихся хотя бы на одно из заданных чисел, использование наименьшего общего кратного (НОК) при вычислении мощностей пересечений; - решение задач на беспорядки, задачи о соседстве и распределение предметов по ящикам с запретом пустых ящиков через альтернативу принципу Дирихле.
5	Подстановки на конечном множестве, умножение подстановок, группа подстановок. - понятие подстановки как биекции конечного множества на себя. Разбор двухстрочной записи, переход к циклической форме, выделение неподвижных точек; - умножение (композиция) подстановок — правило «справа налево». Свойства операции: ассоциативность, существование нейтрального элемента (тождественная подстановка), обратимость каждого элемента. Понятие транспозиции; - проверка аксиом группы на примере симметрической и знакопеременной групп. Четные и нечетные подстановки через инверсии или разложение в произведение транспозиций. Порядок группы и простейшие подгруппы (циклические).

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
6	Однородные рекуррентные последовательности: характеристическое уравнение, нахождение формулы общего члена. - определение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами, связь с числами Фибоначчи. Поиск решения в виде геометрической прогрессии и вывод характеристического уравнения; - разбор трех случаев для корней характеристического уравнения: различные вещественные корни, кратный корень и пара комплексно-сопряженных корней. Запись формулы общего члена последовательности через неопределенные коэффициенты; - решение задач на использование начальных условий для составления системы линейных уравнений относительно коэффициентов. Проверка полученной формулы общего члена обратной подстановкой в исходное рекуррентное соотношение.
7	Способы задания графов: граф как отношение; матрица смежности, матрица инцидентности графа. - формальное определение графа через множество вершин и отношение смежности на нем. Различие ориентированных и неориентированных графов, наличие петель и кратных ребер; - построение квадратной матрицы размера $n \times n$. Правила заполнения для разных типов графов: симметричность в простом неориентированном случае, подсчет количества путей длины 2 через возведение матрицы в квадрат, веса ребер. - построение прямоугольной матрицы, связь «вершина — ребро». Особенности заполнения для ориентированных графов и неориентированных (единицы в соответствующих строках). Сравнение компактности обоих способов задания.
8	Мультиграфы: кратные ребра и петли; матрица смежности, матрица инцидентности графа. - расширение понятия графа: введение кратных ребер (несколько соединений между одной парой вершин) и петель (ребро, ведущее вершину в саму себя). Степень вершины с учетом вклада петель (каждая петля добавляет 2 к степени); - построение квадратной матрицы, где на пересечении строк и столбца записывается количество ребер между соответствующими вершинами. Значения на главной диагонали — удвоенное число петель у каждой вершины; - построение прямоугольной матрицы. Правила заполнения для обычных ребер и петель (столбец петли содержит двойку в строке соответствующей вершины или остается нулевым в зависимости от принятого соглашения), сравнение информативности матриц при наличии кратных дуг.
9	Орграфы: способы задания; матрицы смежности, инцидентности, достижимости орграфа. - понятие ориентированного графа (орграфа), дуги, полустепени захода и исхода. Различие между простым орграфом, мультиорграфом и псевдографом. Визуализация на доске: как направление ребра меняет структуру; - построение матрицы смежности и инцидентности. Правила заполнения для петель и кратных дуг; сумма по строке — полустепень исхода, по столбцу — захода; - определение матрицы достижимости. Алгоритм Уоршелла для вычисления R^* через побитовые операции над строками матрицы смежности или возведение матрицы в степени с использованием булевой арифметики. Практика поиска сильно связанных компонент по полученной матрице.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
10	Неориентированные и ориентированные деревья. Кодирование деревьев. - неориентированные деревья как связные ациклические графы, эквивалентность определений. Понятие корня, уровней, листьев и внутренних узлов в ориентированных деревьях (арборесценциях); - алгоритм Краскала и Прима для поиска минимального остовного дерева во взвешенном графе. Матричная теорема о деревьях (матрица Кирхгофа) для подсчета их точного количества; - построение кодов Прюфера для восстановления помеченного неориентированного дерева по последовательности длины. Обратная процедура: восстановление структуры дерева из кода. Обсуждение применения кодирования для решения задач на перечисление деревьев Кэли.
11	Остовные деревья; построения кратчайшего остовного дерева: алгоритм Краскала, алгоритм Прима. - понятие остова связного неориентированного графа, количество ребер. Матричная теорема о деревьях для подсчета их общего числа (матрица Кирхгофа). Постановка задачи поиска минимального остовного дерева (MST) во взвешенном графе. - жадная стратегия «от самого легкого ребра». Пошаговый разбор с использованием структуры данных DSU (система непересекающихся множеств) для проверки на отсутствие циклов. Оценка сложности и типичные ошибки при сортировке ребер. - жадная стратегия «растущего кластера» (поиск в ширину через приоритетную очередь). Сравнение с алгоритмом Дейкстры. Практика трассировки обоих алгоритмов на одном графе: анализ случаев, когда они выбирают разные последовательности ребер, но приходят к одинаковому весу или разным вариантам MST.
12	Операции над графами. Применение теорем Понтрягина-Куратовского и Вагнера. Алгоритм проверки планарности и плоской укладки. - определение планарности, гомеоморфизма (подразбиения ребер) и минора графа (удаление вершин/ребер и стягивание ребер). Базовые операции: удаление вершины или ребра, стягивание ребра, дополнение графа. - формулировка условий через запрещенные подграфы с подразделениями и миноры соответственно. Разбор примеров поиска «запрещенной конфигурации» в сложных графах. - практическое применение критерия де Фрейсекса — Розенштиля . Этапы построения плоской укладки: вставка путей, фиксация циклов и распределение оставшихся ребер внутри граней.
13	Необходимые и достаточные условия существования эйлера пути; Критерий эйлеровости графа; - понятие эйлера пути (проходит по всем ребрам ровно один раз) и цикла (замкнутый путь). Условие связности графа (без учета изолированных вершин) как обязательное требование. - формулировка теоремы: цикл существует тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны; путь — когда в графе ровно две вершины имеют нечетную степень (начало и конец пути). - условия существования эйлера пути/цикла в орграфах (сильная связность и равенство полустепеней захода и исхода). Практика построения путей с помощью алгоритма Флэри или алгоритма Иерхольдера-Жюлиарда (выбор мостов в последнюю очередь). Разбор контрпримеров на основе задачи о семи мостах Кёнигсберга.
14	Понятие гамильтонова пути, гамильтонового цикла, гамильтонового графа. Достаточное условие гамильтоновости графа. - понятия гамильтонова пути, цикла (замкнутого пути) и графа. Отличие от эйлеровых графов: прохождение по всем вершинам, а не ребрам. История задачи о «кругосветном путешествии» У. Гамильтона на додекаэдре. - отсутствие общего необходимого и достаточного критерия существования гамильтонова цикла (задача является NP-полной). Базовые требования к графу: связность и отсутствие висячих вершин. - разбор теорем Оре и Дирака . Теорема Бонди — Хватала через замыкание графа. Практика проверки условий на конкретных примерах.

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
15	Применение алгоритмов Форда-Беллмана, Дейкстры, Флойда нахождения кратчайшего пути в графе. - сравнение методов поиска кратчайших путей из одного источника. Алгоритм Дейкстры для графов с неотрицательными весами через приоритетную очередь. Алгоритм Форда — Беллмана, допускающий отрицательные веса ребер и позволяющий обнаружить отрицательные циклы. - динамическое программирование для нахождения матрицы расстояний в ориентированном взвешенном графе со сложностью $O(n^3)$. Обработка отрицательных весов и восстановление самих путей через матрицу предков. - решение комплексной задачи на одном наборе данных. Сценарии применения: протоколы маршрутизации (RIP использует идеи Форда — Беллмана), транспортные сети (Дейкстра). Поиск ошибок при наличии отрицательного цикла и ручная пошаговая проверка работы алгоритма Флойда на матрице смежности.
16	Постановка задачи нахождения кратчайшего пути во взвешенном орграфе: -определение взвешенного ориентированного графа (орграфа), весов рёбер, пути и его стоимости. Формальная постановка задачи: заданы граф, функция весов и пара вершин. Требуется найти путь с минимальной суммарной стоимостью. Обсуждение условий применимости алгоритмов (неотрицательность весов) и типичных ошибок при моделировании. - точные полиномиальные методы для неотрицательных весов (алгоритм Дейкстры — идея жадного выбора, работа с приоритетной очередью, псевдокод; алгоритм Беллмана — Форда — возможность работы с отрицательными весами, обнаружение циклов); эвристические подходы). Сравнительная таблица сложности у Дейкстры против у Беллмана — Форда и ограничений каждого метода. -пошаговое выполнение алгоритма Дейкстры на небольшом орграфе (инициализация расстояний, релаксация рёбер, обновление очереди). Демонстрация восстановления кратчайшего пути через массив предков. Обсуждение прикладных областей (навигационные системы, маршрутизация трафика в сетях TCP/IP, логистика, анализ социальных графов) и возможных расширений (задача о нескольких источниках, поиск путей между всеми парами вершин — алгоритм Флойда — Уоршелла).

4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Работа с лекционным материалом.
2	Работа с литературой.
3	Текущая подготовка к занятиям.
4	Подготовка к промежуточной аттестации.
5	Подготовка к промежуточной аттестации.
6	Подготовка к текущему контролю.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
----------	----------------------------	---------------

1	Алексеев, В. Е. Теория графов : учебное пособие / В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова. — Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. — 119 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система	https://e.lanbook.com/book/153421 (дата обращения: 03.06.2026)
2	Велигура А.Н. Комбинаторика и теория графов для кибербезопасности- Учебное пособие. Конспект лекций [Электронный ресурс]. М.: НИЯУ МиФи. 2021.- 200 с	https://reader.lanbook.com/book/284441#4
3	Наливайко, Л. В. Комбинаторика, теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / Л.В. Наливайко, Д.С. Шунскайте. - Москва : ИНФРА-М, 2024. - 296 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-16-112491-8	https://znanium.ru/catalog/product/2148319 (дата обращения: 03.06.2026)
4	Тюрин, С.Ф. Теория графов и её приложения : учеб. пособие. - Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. - 159 с.	https://reader.lanbook.com/book/160869#2

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

- Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru>);
- Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (www.elibrary.ru);
- Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru/>);
- Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>);

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

- Операционная система Windows;
- Microsoft Office;
- Поисковые системы.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Для проведения занятий лекционного типа требуются аудитории, оснащенные компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Зачет в 4 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

старший преподаватель кафедры
«Математическое моделирование
сложных систем» Института
железнодорожного транспорта

В.А. Пестин

Согласовано:

Заведующий кафедрой ВССиИБ

Б.В. Желенков

и.о. заведующего кафедрой ПМ

С.А. Тищенко

Председатель учебно-методической
комиссии

Н.А. Андриянова