

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ))



Рабочая программа дисциплины (модуля),
как компонент образовательной программы
базового высшего образования
по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика,
утвержденной первым проректором ФГАОУ ВО
РУТ (МИИТ) Тимониним В.С.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Теория случайных процессов

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математическое моделирование и системный анализ

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде
электронного документа выгружена из единой
корпоративной информационной системы управления
университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная ФГАОУ ВО РУТ
(МИИТ)

ID подписи: 1343395

Подписал: И.о. заведующего кафедрой Тищенко Сергей
Александрович

Дата: 01.09.2026

1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целями освоения дисциплины «Стохастические процессы» являются:

- ? фундаментальная подготовка в области теории случайных процессов;
- ? формирование у обучающегося компетенций в области стохастического

- ? анализа, необходимых при решении различных задач, возникающих в экономике, финансах, промышленности.

Задачами освоения данной дисциплины являются:

- ? овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

- ? обучение студента применению основных понятий и моделей стохастических процессов

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

ОПК-1 - Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

Знать:

постановки классических задач стохастического анализа; основные понятия теории случайных процессов

Уметь:

разрабатывать методики выполнения задач стохастического анализа и применять их в информационно-технологическом проекте.

Владеть:

методиками стохастического анализа.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 4 з.е. (144 академических часа(ов)).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов	
	Всего	Семестр №5
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	64	64
В том числе:		
Занятия лекционного типа	32	32
Занятия семинарского типа	32	32

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 80 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Фундамент теории вероятностей. Рассматриваемые вопросы: - вероятностное пространство; - случайные величины и законы распределения; - числовые характеристики
2	Многомерные распределения и условные характеристики Рассматриваемые вопросы: - системы случайных величин; - условные вероятности, условные распределения и условное математическое ожидание; - сходимость случайных величин.
3	Определение случайного процесса и базовые примеры. Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- конечномерные распределения; - теорема Колмогорова о согласованности; - простое и обобщённое случайное блуждание как дискретный прообраз диффузии; - понятие белого шума как обобщённого случайного процесса.
4	Среднеквадратическое дифференцирование и интегрирование случайных процессов. Рассматриваемые вопросы: - стационарность в широком смысле; - свойства корреляционной функции; - спектральная плотность, теорема Винера-Хинчина; - белый шум как стационарный процесс с постоянной спектральной плотностью и его роль в теории линейных систем.
5	Стационарные процессы, спектральное разложение и белый шум. Рассматриваемые вопросы: - стационарность в широком смысле; - свойства корреляционной функции; - спектральная плотность, теорема Винера-Хинчина; - белый шум как стационарный процесс с постоянной спектральной плотностью и его роль в теории линейных систем.
6	Гауссовские случайные процессы. Рассматриваемые вопросы: - определение через конечномерные распределения; - свойства: независимость некоррелированных гауссовских величин, линейные преобразования; - стационарные гауссовские процессы.
7	Процессы с независимыми приращениями: пуассоновский процесс. Рассматриваемые вопросы: - определение и свойства; - однородный и неоднородный пуассоновский процесс; - распределение времени ожидания; - поток событий.
8	Цепи Маркова с дискретным временем: основные понятия и классификация состояний. Рассматриваемые вопросы: - матрица переходных вероятностей; - уравнение Чепмена-Колмогорова; - классификация состояний (возвратные, невозвратные, поглощающие, существенные и несущественные).
9	Предельные теоремы и эргодичность цепей Маркова. Рассматриваемые вопросы: - предельные вероятности; - эргодические цепи; - существование и единственность стационарного распределения; - теорема Маркова о предельных вероятностях.
10	Марковские процессы с непрерывным временем и уравнения Колмогорова. Рассматриваемые вопросы: - матрица интенсивностей переходов (генератор); - дифференциальные уравнения Колмогорова; - процесс рождения и гибели как частный случай.
11	Теория мартингалов и моменты остановки. Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- фильтрация и согласованные процессы; - мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с дискретным временем; - моменты остановки; - теорема Дуба об остановке (базовые формулировки).
12	Винеровский процесс и свойства его траекторий. Рассматриваемые вопросы: - винеровский процесс (броуновское движение): определение; - свойства траекторий (непрерывность, недифференцируемость, фрактальная размерность); - принцип отражения и распределение максимума.
13	Стохастический интеграл Ито: определение и свойства. Рассматриваемые вопросы: - интегрирование по винеровскому процессу; - простые процессы; - изометрия Ито; - определение интеграла Ито; - основные свойства интеграла.
14	Формула Ито и интеграл Стратоновича. Рассматриваемые вопросы: - вывод формулы Ито для функций одной и нескольких переменных; - интеграл Стратоновича: физическая мотивация (предел систем с коррелированным шумом), определение через симметричные суммы; - формула перехода между интегралами Ито и Стратоновича; - сохранение классического правила дифференцирования сложной функции в форме Стратоновича.
15	Стохастические дифференциальные уравнения: постановка задачи и теоремы существования. Рассматриваемые вопросы: - понятия сильного и слабого решения СДУ; - теорема о существовании и единственности решения (условия Липшица и линейного роста); - запись и анализ СДУ в формах Ито и Стратоновича, их эквивалентность и различия.
16	Приложения теории случайных процессов: связь с уравнениями в частных производных и задачи фильтрации. Рассматриваемые вопросы: - связь СДУ с дифференциальными уравнениями в частных производных (формула Фейнмана-Каца); - уравнение Фоккера-Планка; - фильтр Калмана-Бьюси; - основы модели Блэка-Шоулза.

4.2. Занятия семинарского типа.

Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Повторение основных понятий теории вероятностей. В результате практического занятия студент строит вероятностные пространства для типовых задач, вычисляет числовые характеристики, находит характеристические функции и применяет их для вычисления моментов и анализа сумм независимых случайных величин.
2	Условные математические ожидания, виды сходимости и предельные теоремы. В результате практического занятия студент вычисляет условные математические ожидания

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	относительно γ -алгебр и случайных величин, проверяет свойства условного ожидания, исследует последовательности случайных величин на сходимость почти наверное, по вероятности, в среднеквадратичном и по распределению, применяет законы больших чисел и центральную предельную теорему для приближённых вычислений.
3	Конечномерные распределения и основные классы случайных процессов. В результате практического занятия студент строит конечномерные распределения для заданных процессов, проверяет условия согласованности, анализирует свойства (стационарность, наличие независимых приращений, марковость) для классических процессов — случайного блуждания, пуассоновского процесса, гауссовского процесса, белого шума и броуновского движения, схематически изображает их траектории и сопоставляет их между собой.
4	Среднеквадратическое дифференцирование и интегрирование случайных процессов. В результате практического занятия студент проверяет условия среднеквадратической непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости процесса по виду его корреляционной функции, вычисляет математическое ожидание и корреляционную функцию производной и интеграла случайного процесса, находит взаимную корреляционную функцию процесса и его производной.
5	Спектральный анализ стационарных случайных процессов. В результате практического занятия студент проверяет процессы на стационарность в широком смысле, применяет теорему Винера-Хинчина для взаимного перехода между корреляционной функцией и спектральной плотностью, вычисляет спектральные характеристики типовых стационарных процессов и анализирует спектр производной и интеграла стационарного процесса.
6	Свойства гауссовских процессов и их линейные преобразования. В результате практического занятия студент доказывает гауссовость линейных преобразований случайных процессов, вычисляет условные распределения и совместные распределения значений гауссовского процесса в различные моменты времени, находит вероятности попадания в заданные области для гауссовских векторов.
7	Процессы с независимыми приращениями и пуассоновский поток. В результате практического занятия студент вычисляет вероятности числа событий и распределения моментов наступления событий в пуассоновском потоке, решает задачи на время ожидания и промежутки между событиями, анализирует свойства однородных и неоднородных пуассоновских процессов, проверяет свойства независимости и стационарности приращений.
8	Цепи Маркова с дискретным временем: основные понятия и классификация состояний. В результате практического занятия студент строит матрицы переходных вероятностей за n шагов, классифицирует состояния цепи на возвратные, невозвратные, существенные, несущественные и поглощающие, вычисляет вероятности попадания в заданное состояние и время первого достижения, применяет уравнение Чепмена-Колмогорова.
9	Предельные теоремы и эргодичность цепей Маркова. В результате практического занятия студент исследует цепи Маркова на эргодичность, находит стационарные распределения из системы линейных уравнений, вычисляет предельные вероятности, анализирует поглощающие цепи с помощью фундаментальной матрицы и находит среднее время до поглощения.
10	Марковские процессы с непрерывным временем и процесс рождения-гибели. В результате практического занятия студент составляет матрицу интенсивностей переходов (генератор) по графу состояний, решает прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова, находит стационарные вероятности для процессов рождения и гибели, применяет полученные результаты к анализу простейших систем массового обслуживания.
11	Теория мартингалов с дискретным временем. В результате практического занятия студент проверяет свойство мартингала, субмартингала и

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	супермартингала для заданных стохастических последовательностей, определяет моменты остановки и применяет теорему Дуба об остановке для решения вероятностных задач, в том числе задач об оптимальной остановке.
12	Свойства траекторий винеровского процесса (броуновского движения). В результате практического занятия студент вычисляет ковариации и распределения линейных комбинаций значений винеровского процесса, применяет принцип отражения для нахождения распределения максимума процесса и времени первого достижения заданного уровня, исследует свойства траекторий (непрерывность, недифференцируемость).
13	Стохастический интеграл Ито: определение и свойства. В результате практического занятия студент вычисляет простые стохастические интегралы через определение (пределы интегральных сумм), применяет изометрию Ито для нахождения моментов интеграла, проверяет мартингальные свойства стохастических интегралов.
14	Формула Ито и интеграл Стратоновича. В результате практического занятия студент находит дифференциалы сложных функций от винеровского процесса по формуле Ито, выполняет взаимный переход между интегралами Ито и Стратоновича, решает простые стохастические дифференциальные уравнения в смысле Стратоновича с использованием правил классического дифференциального исчисления.
15	Решение линейных стохастических дифференциальных уравнений. В результате практического занятия студент аналитически решает линейные стохастические дифференциальные уравнения (процесс Орнштейна-Уленбека, геометрическое броуновское движение), находит их числовые характеристики и стационарные распределения, сравнивает решения одного и того же уравнения, записанного в формах Ито и Стратоновича.
16	Прикладные задачи теории случайных процессов. В результате практического занятия студент применяет изученный математический аппарат для решения комплексной прикладной задачи (фильтрация Калмана, ценообразование опциона или расчёт вероятности разорения), обобщает полученные знания.

4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Изучение дополнительной литературы.
2	Подготовка к практическим занятиям.
3	Подготовка к промежуточной аттестации.
4	Подготовка к текущему контролю.
5	Выполнение курсовой работы.
6	Подготовка к промежуточной аттестации.
7	Подготовка к текущему контролю.

4.4. Примерный перечень тем курсовых работ

Исследование марковских цепей с дискретным временем в задачах моделирования систем массового обслуживания.

Применение процессов гибели и размножения для анализа устойчивости биологических популяций.

Моделирование финансового рынка с помощью геометрического броуновского движения.

Анализ систем телефонной связи на основе пуассоновских процессов и формул Эрланга.

Статистическое оценивание характеристик стационарных случайных процессов по экспериментальным данным.

Применение фильтра Калмана для фильтрации и прогнозирования траекторий движущихся объектов.

Исследование случайных блужданий на графах и их применение в алгоритмах ранжирования веб-страниц.

Моделирование процессов разорения страховой компании с использованием классической модели Крамера-Лундберга.

Анализ спектральной плотности стационарных в широком смысле случайных процессов.

Применение ветвящихся случайных процессов для моделирования ядерных реакций и распространения эпидемий.

Прогнозирование временных рядов с помощью моделей авторегрессии и скользящего среднего.

Моделирование диффузионных процессов с помощью стохастических дифференциальных уравнений.

Исследование эргодических свойств марковских процессов с непрерывным временем.

Применение марковских процессов принятия решений для оптимизации управления запасами на складе.

Анализ надежности технических систем с использованием полумарковских процессов.

Моделирование шумов и флуктуаций в радиофизических и электронных системах.

Оценка времени первого достижения границы для траекторий случайных процессов.

Применение марковских цепей для генерации текстов и моделирования последовательностей символов.

Исследование процессов восстановления и их применение в задачах планирования ремонта оборудования.

Моделирование очередей в компьютерных сетях с помощью систем массового обслуживания с приоритетами.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории: учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 276 с.	https://urait.ru/bcode/536889
2	Бутов, А. А. Теория случайных процессов и ее дополнительные главы: учебное пособие / А. А. Бутов. — Ульяновск: УлГУ, 2021 — Часть 2: Случайное блуждание, винеровский процесс, стохастический интеграл, диффузионные процессы — 2021. — 39 с.	https://e.lanbook.com/book/314615 (дата обращения: 10.04.2026)
3	Белопольская, Я. И. Стохастические дифференциальные уравнения. Приложения к задачам математической физики и финансовой математики / Я. И. Белопольская. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 308 с. — ISBN 978-5-507-47129-4.	https://e.lanbook.com/book/330497 (дата обращения: 10.04.2026)
4	Сигал, А. В. Теория вероятностей с элементами математической статистики, теории случайных процессов и эконометрики: учебное пособие / А.В. Сигал. — Москва: ИНФРА-М, 2023. — 385 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/1842523.	https://znanium.ru/catalog/product/1842523
5	Чжун, К. Л. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика: учебник / К. Л. Чжун, Ф. АитСахлиа ; перевод с английского М. Б. Лагутина. — 4-е эл. изд. — Москва: Лаборатория знаний, 2025. — 458 с.	https://e.lanbook.com/book/495428

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

- Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (<http://library.miit.ru>);
- Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (www.elibrary.ru);
- Образовательная платформа «Юрайт» (<https://urait.ru>);

- Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com/>);
- Электронно-библиотечная система ibooks.ru (<http://ibooks.ru/>).
- Интернет-университет информационных технологий (<http://www.intuit.ru/>).

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

- Операционная система Windows;
- Microsoft Office;
- MS Teams;
- Поисковые системы.

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Зачет в 5 семестре.

Курсовая работа в 5 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, доцент, к.н. кафедры
«Математическое моделирование
сложных систем» Института
железнодорожного транспорта

А.С. Милевский

Согласовано:

и.о. заведующего кафедрой ПМ

С.А. Тищенко

и.о. заведующего кафедрой ММСС

С.А. Тищенко

Председатель учебно-методической
комиссии

Н.А. Андриянова