МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ)

Рабочая программа дисциплины (модуля),
как компонент образовательной программы
базового высшего образования
по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика,
утвержденной первым проректором ФГАОУ ВО
РУТ (МИИТ) Тимониным В.С.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Теория случайных процессов

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Математическое моделирование и системный анализ

Форма обучения: Очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) в виде электронного документа выгружена из единой корпоративной информационной системы управления университетом и соответствует оригиналу

Простая электронная подпись, выданная ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
ID подписи: 1343395
Подписал: И.о. заведующего кафедрой Тищенко Сергей Александрович
Дата: 01.09.2026

1. Общие сведения о дисциплине (модуле).

Целями освоения учебной дисциплины (модуля) являются:

- систематизация и углубление фундаментальных знаний в области теории вероятностей, необходимых для изучения случайных процессов;

- освоение фундаментального математического аппарата для описания, анализа и моделирования динамических систем, функционирующих в условиях неопределённости;

- формирование у обучающегося компетенций в области теории случайных процессов, необходимых при решении различных задач, возникающих в экономике, финансах, промышленности.

Задачами дисциплины (модуля) являются:

- сформировать современного математического аппарата описания случайных процессов;

- сформировать представления о математических моделях основных классов случайных процессов;

- развить навыки строгого математического обоснования, выбора адекватной стохастической модели и интерпретации результатов анализа в контексте профессиональных задач.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю).

Перечень формируемых результатов освоения образовательной программы (компетенций) в результате обучения по дисциплине (модулю):

ОПК-1 - Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Обучение по дисциплине (модулю) предполагает, что по его результатам обучающийся будет:

Знать:

- фундаментальные понятия и классификацию основных классов случайных процессов, их ключевые свойства и методы описания;

- основы стохастического анализа: природу интегралов Ито и Стратоновича, формулу Ито и базовые теоремы существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений.

Уметь:

- вычислять числовые и спектральные характеристики случайных процессов и их преобразований, строить и исследовать марковские модели:

классифицировать состояния, составлять матрицы переходов и генераторы, решать уравнения Колмогорова и находить стационарные распределения;

- применять аппарат стохастического исчисления (формулу Ито, изометрию Ито) для преобразования случайных процессов и аналитического решения линейных стохастических дифференциальных уравнений.

Владеть:

- навыками математического моделирования: способностью формализовать реальные динамические системы, функционирующие в условиях неопределённости, с использованием аппарата случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений;

- методами корреляционного и спектрального анализа для исследования, обработки и фильтрации стационарных случайных сигналов и шумов и выбора адекватного математического аппарата в зависимости от физической или профессиональной специфики решаемой прикладной задачи.

3. Объем дисциплины (модуля).

3.1. Общая трудоемкость дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины (модуля) составляет 4 з.е. (144 академических часа(ов).

3.2. Объем дисциплины (модуля) в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Тип учебных занятий	Количество часов	
	Всего	Семестр №5
Контактная работа при проведении учебных занятий (всего):	64	64
В том числе:		
Занятия лекционного типа	32	32
Занятия семинарского типа	32	32

3.3. Объем дисциплины (модуля) в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации составляет 80 академических часа (ов).

3.4. При обучении по индивидуальному учебному плану, в том числе при ускоренном обучении, объем дисциплины (модуля) может быть реализован

полностью в форме самостоятельной работы обучающихся, а также в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении промежуточной аттестации.

4. Содержание дисциплины (модуля).

4.1. Занятия лекционного типа.

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
1	Фундамент теории вероятностей Рассматриваемые вопросы: - вероятностное пространство; - случайные величины и законы распределения; - числовые характеристики.
2	Многомерные распределения и условные характеристики Рассматриваемые вопросы: - системы случайных величин; - условные вероятности, условные распределения и условное математическое ожидание; - сходимость случайных величин.
3	Определение случайного процесса и базовые примеры Рассматриваемые вопросы: - конечномерные распределения; - теорема Колмогорова о согласованности; - простое и обобщённое случайное блуждание как дискретный прообраз диффузии; - понятие белого шума как обобщённого случайного процесса.
4	Среднеквадратическое дифференцирование и интегрирование случайных процессов Рассматриваемые вопросы: - условия среднеквадратической непрерывности и дифференцируемости через свойства корреляционной функции; - вычисление характеристик производной процесса; - вычисление характеристик интеграла процесса.
5	Стационарные процессы, спектральное разложение и белый шум Рассматриваемые вопросы: - стационарность в широком смысле; - свойства корреляционной функции; - спектральная плотность, теорема Винера-Хинчина; - белый шум как стационарный процесс с постоянной спектральной плотностью и его роль в теории линейных систем.
6	Гауссовские случайные процессы Рассматриваемые вопросы: - определение через конечномерные распределения; - свойства: независимость некоррелированных гауссовских величин, линейные преобразования; - стационарные гауссовские процессы.
7	Процессы с независимыми приращениями: пуассоновский процесс Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- определение и свойства; - однородный и неоднородный пуассоновский процесс; - распределение времени ожидания; - поток событий.
8	Цепи Маркова с дискретным временем: основные понятия и классификация состояний Рассматриваемые вопросы: - матрица переходных вероятностей; - уравнение Чепмена-Колмогорова; - классификация состояний (возвратные, невозвратные, поглощающие, существенные и несущественные).
9	Предельные теоремы и эргодичность цепей Маркова Рассматриваемые вопросы: - предельные вероятности; - эргодические цепи; - существование и единственность стационарного распределения; - теорема Маркова о предельных вероятностях.
10	Марковские процессы с непрерывным временем и уравнения Колмогорова Рассматриваемые вопросы: - матрица интенсивностей переходов (генератор); - дифференциальные уравнения Колмогорова; - процесс рождения и гибели как частный случай.
11	Теория мартингалов и моменты остановки Рассматриваемые вопросы: - фильтрация и согласованные процессы; - мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с дискретным временем; - моменты остановки; - теорема Дуба об остановке (базовые формулировки).
12	Винеровский процесс и свойства его траекторий Рассматриваемые вопросы: - винеровский процесс (броуновское движение): определение; - свойства траекторий (непрерывность, недифференцируемость, фрактальная размерность); - принцип отражения и распределение максимума.
13	Стохастический интеграл Ито: определение и свойства Рассматриваемые вопросы: - интегрирование по винеровскому процессу; - простые процессы; - изометрия Ито; - определение интеграла Ито; - основные свойства интеграла.
14	Формула Ито и интеграл Стратоновича Рассматриваемые вопросы: - вывод формулы Ито для функций одной и нескольких переменных; - интеграл Стратоновича: физическая мотивация (предел систем с коррелированным шумом), определение через симметричные суммы; - формула перехода между интегралами Ито и Стратоновича; - сохранение классического правила дифференцирования сложной функции в форме Стратоновича.
15	Стохастические дифференциальные уравнения: постановка задачи и теоремы существования Рассматриваемые вопросы:

№ п/п	Тематика лекционных занятий / краткое содержание
	- понятия сильного и слабого решения СДУ; - теорема о существовании и единственности решения (условия Липшица и линейного роста); - запись и анализ СДУ в формах Ито и Стратоновича, их эквивалентность и различия.
16	Приложения теории случайных процессов: связь с уравнениями в частных производных и задачи фильтрации Рассматриваемые вопросы: - связь СДУ с дифференциальными уравнениями в частных производных (формула Фейнмана-Каца); - уравнение Фоккера-Планка; - фильтр Калмана-Бьюси; - основы модели Блэка-Шоулза.

4.2. Занятия семинарского типа.

Практические занятия

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
1	Повторение основных понятий теории вероятностей В результате практического занятия студент строит вероятностные пространства для типовых задач, вычисляет числовые характеристики, находит характеристические функции и применяет их для вычисления моментов и анализа сумм независимых случайных величин.
2	Условные математические ожидания, виды сходимости и предельные теоремы В результате практического занятия студент вычисляет условные математические ожидания относительно ?-алгебр и случайных величин, проверяет свойства условного ожидания, исследует последовательности случайных величин на сходимость почти наверное, по вероятности, в среднеквадратичном и по распределению, применяет законы больших чисел и центральную предельную теорему для приближённых вычислений.
3	Конечномерные распределения и основные классы случайных процессов В результате практического занятия студент строит конечномерные распределения для заданных процессов, проверяет условия согласованности, анализирует свойства (стационарность, наличие независимых приращений, марковость) для классических процессов — случайного блуждания, пуассоновского процесса, гауссовского процесса, белого шума и броуновского движения, схематически изображает их траектории и сопоставляет их между собой
4	Среднеквадратическое дифференцирование и интегрирование случайных процессов В результате практического занятия студент проверяет условия среднеквадратической непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости процесса по виду его корреляционной функции, вычисляет математическое ожидание и корреляционную функцию производной и интеграла случайного процесса, находит взаимную корреляционную функцию процесса и его производной.
5	Спектральный анализ стационарных случайных процессов В результате практического занятия студент проверяет процессы на стационарность в широком смысле, применяет теорему Винера-Хинчина для взаимного перехода между корреляционной функцией и спектральной плотностью, вычисляет спектральные характеристики типовых стационарных процессов и анализирует спектр производной и интеграла стационарного процесса.
6	Свойства гауссовских процессов и их линейные преобразования В результате практического занятия студент доказывает гауссовость линейных преобразований случайных процессов, вычисляет условные распределения и совместные распределения значений

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	гауссовского процесса в различные моменты времени, находит вероятности попадания в заданные области для гауссовских векторов.
7	Процессы с независимыми приращениями и пуассоновский поток В результате практического занятия студент вычисляет вероятности числа событий и распределения моментов наступления событий в пуассоновском потоке, решает задачи на время ожидания и промежутки между событиями, анализирует свойства однородных и неоднородных пуассоновских процессов, проверяет свойства независимости и стационарности приращений.
8	Цепи Маркова с дискретным временем: основные понятия и классификация состояний В результате практического занятия студент строит матрицы переходных вероятностей за n шагов, классифицирует состояния цепи на возвратные, невозвратные, существенные, несущественные и поглощающие, вычисляет вероятности попадания в заданное состояние и время первого достижения, применяет уравнение Чепмена-Колмогорова.
9	Предельные теоремы и эргодичность цепей Маркова В результате практического занятия студент исследует цепи Маркова на эргодичность, находит стационарные распределения из системы линейных уравнений, вычисляет предельные вероятности, анализирует поглощающие цепи с помощью фундаментальной матрицы и находит среднее время до поглощения.
10	Марковские процессы с непрерывным временем и процесс рождения-гибели В результате практического занятия студент составляет матрицу интенсивностей переходов (генератор) по графу состояний, решает прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова, находит стационарные вероятности для процессов рождения и гибели, применяет полученные результаты к анализу простейших систем массового обслуживания.
11	Теория мартингалов с дискретным временем В результате практического занятия студент проверяет свойство мартингала, субмартингала и супермартингала для заданных стохастических последовательностей, определяет моменты остановки и применяет теорему Дуба об остановке для решения вероятностных задач, в том числе задач об оптимальной остановке.
12	Свойства траекторий винеровского процесса (броуновского движения) В результате практического занятия студент вычисляет ковариации и распределения линейных комбинаций значений винеровского процесса, применяет принцип отражения для нахождения распределения максимума процесса и времени первого достижения заданного уровня, исследует свойства траекторий (непрерывность, недифференцируемость).
13	Стохастический интеграл Ито: определение и свойства В результате практического занятия студент вычисляет простые стохастические интегралы через определение (пределы интегральных сумм), применяет изометрию Ито для нахождения моментов интеграла, проверяет мартингальные свойства стохастических интегралов.
14	Формула Ито и интеграл Стратоновича В результате практического занятия студент находит дифференциалы сложных функций от винеровского процесса по формуле Ито, выполняет взаимный переход между интегралами Ито и Стратоновича, решает простые стохастические дифференциальные уравнения в смысле Стратоновича с использованием правил классического дифференциального исчисления.
15	Решение линейных стохастических дифференциальных уравнений В результате практического занятия студент аналитически решает линейные стохастические дифференциальные уравнения (процесс Орнштейна-Уленбека, геометрическое броуновское движение), находит их числовые характеристики и стационарные распределения, сравнивает решения одного и того же уравнения, записанного в формах Ито и Стратоновича.
16	Прикладные задачи теории случайных процессов В результате практического занятия студент применяет изученный математический аппарат для

№ п/п	Тематика практических занятий/краткое содержание
	решения комплексной прикладной задачи (фильтрация Калмана, ценообразование опциона или расчёт вероятности разорения), обобщает полученные знания.

4.3. Самостоятельная работа обучающихся.

№ п/п	Вид самостоятельной работы
1	Изучение дополнительной литературы.
2	Подготовка к практическим занятиям.
3	Подготовка к промежуточной аттестации.
4	Подготовка к текущему контролю.
5	Выполнение курсовой работы.
6	Подготовка к промежуточной аттестации.
7	Подготовка к текущему контролю.

4.4. Примерный перечень тем курсовых работ

1. Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений.

2. Интерпретации стохастических интегралов: Ито против Стратоновича.

3. Процесс Орнштейна-Уленбека и уравнение Ланжевена.

4. Математическое моделирование систем массового обслуживания (СМО) на основе непрерывных марковских процессов.

5. Стохастические модели эпидемий (SIR/SIS): от дискретных цепей к СДУ.

6. Оценка надёжности резервированных технических систем с помощью полумарковских процессов.

7. Применение гауссовских случайных процессов для регрессионного анализа.

8. Спектральный анализ и фильтрация стационарных случайных процессов.

9. Сравнительный анализ моделей ценообразования опционов: от Блэка-Шоулза к процессам с прыжками.

10. Задачи об оптимальной остановке марковских процессов.

11. Алгоритм Калмана-Бьюси для линейных систем: теория и применение.

5. Перечень изданий, которые рекомендуется использовать при освоении дисциплины (модуля).

№ п/п	Библиографическое описание	Место доступа
1	Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории: учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 276 с.	https://urait.ru/bcode/536889
2	Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа: учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02086-1	https://urait.ru/bcode/537767 (дата обращения: 09.06.2026)
3	Каштанов, В. А. Случайные процессы: учебник и практикум для вузов / В. А. Каштанов, Н. Ю. Энатская. — Москва: Издательство Юрайт, 2026. — 99 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04482-9	https://urait.ru/bcode/584979 (дата обращения: 09.06.2026)
4	Сигал, А. В. Теория вероятностей с элементами математической статистики, теории случайных процессов и эконометрики: учебное пособие / А.В. Сигал. — Москва: ИНФРА-М, 2023. — 385 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/1842523	https://znanium.ru/catalog/product/1842523 (дата обращения: 09.06.2026)
5	Чжун, К. Л. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика: учебник / К. Л. Чжун, Ф. АитСахлиа ; перевод с английского М. Б. Лагутина. — 4-е эл. изд. — Москва: Лаборатория знаний, 2025. — 458 с. – ISBN 978-5-93208-572-1	https://e.lanbook.com/book/495428 (дата обращения: 09.06.2026)

6. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, которые могут использоваться при освоении дисциплины (модуля).

- Научно-техническая библиотека РУТ (МИИТ) (http://library.miit.ru);
- Информационный портал Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (www.elibrary.ru);
- Образовательная платформа «Юрайт» (https://urait.ru/);

- Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (http://e.lanbook.com/);

- Электронно-библиотечная система ibooks.ru (http://ibooks.ru/).

- Интернет-университет информационных технологий (http://www.intuit.ru/).

7. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины (модуля).

- Операционная система Microsoft Windows;

- Веб-браузеры для доступа к образовательным ресурсам и документации: Mozilla Firefox, Яндекс Браузер;

- Пакет офисных приложений Microsoft Office;

- Язык программирования Python (свободно распространяемое ПО) с открытыми библиотеками для научных вычислений и эконометрики: NumPy, SciPy, Pandas, Statsmodels, Matplotlib,

Scikit-learn.

- Интегрированная среда разработки Anaconda (включая Jupyter Notebook / JupyterLab) или PyCharm Community Edition (свободно распространяемое ПО) или VS Code.

- Среда численного моделирования GNU Octave (свободно распространяемый аналог MATLAB).

- Язык программирования и среда статистического анализа R со специализированными пакетами для анализа временных рядов и стохастики (свободно распространяемое ПО).

- Средства видеоконференц-связи (при необходимости дистанционного взаимодействия): Яндекс Телемост, VK

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные компьютерной техникой и наборами демонстрационного оборудования.

9. Форма промежуточной аттестации:

Зачет в 5 семестре.
Курсовая работа в 5 семестре.

10. Оценочные материалы.

Оценочные материалы, применяемые при проведении промежуточной аттестации, разрабатываются в соответствии с локальным нормативным актом РУТ (МИИТ).

Авторы:

доцент, доцент, к.н. кафедры
«Математическое моделирование
сложных систем» Института
железнодорожного транспорта А.С. Милевский

Согласовано:

и.о. заведующего кафедрой ПМ С.А. Тищенко

и.о. заведующего кафедрой ММСС С.А. Тищенко

Председатель учебно-методической
комиссии Н.А. Андриянова