

На правах рукописи



Ушаков Андрей Юрьевич

РАСЧЕТ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК И РЕШЕНИЕ
ЗАДАЧИ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Специальность 05.23.17 –Строительная механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва - 2017г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ).

Научный руководитель: **Ванюшенков Михаил Григорьевич**,
кандидат технических наук, профессор НИУ МГСУ.

Официальные оппоненты: **Коренева Елена Борисовна**,
доктор технических наук, доцент, Московское высшее общевойсковое командное училище, преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин.

Жаворонок Сергей Игоревич

кандидат физико математических наук, доцент, ФГБУН Институт прикладной механики Российской Академии наук (ИПРИМ РАН), старший научный сотрудник.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Защита состоится «20» декабря 2017г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 218.005.05 созданного на базе на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет путей сообщения» по адресу: 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте МГУПС (МИИТ), www.miit.ru.

Автореферат разослан «___» _____ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Шавыкина Марина Витальевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования.

Важное значение на стадии проектирования строительных конструкций занимает совершенствование методов расчета. Это связано с возрастающими требованиями к снижению материалоемкости сооружений и повышению надежности конструкций. Решению этих проблем способствует дальнейшее развитие методов расчета, позволяющих достаточно полно учитывать особенности реальной работы конструкции, обладающие высокой точностью и, позволяющие использовать вычислительную технику.

За последние десятилетия разработано большое количество эффективных методов расчета как численных, так и аналитических. Однако, существующие методы преимущественно применимы для узкого класса задач с рядом ограничений, накладываемых на постановку задачи и граничные условия. В связи с этим, особое внимание уделяется разработке и развитию новых способов построения математических моделей и расчетных методов для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкции с усложненной структурой при различных статических, динамических, температурных и других воздействиях. Особое значение придается аналитическим методам, обладающим высокой точностью, ориентированным на использование ЭВМ, и позволяющие исследовать все особенности НДС.

В этой связи метод начальных функций (МНФ), относящийся к группе аналитических методов теории упругости и строительной механики, является одним из наиболее эффективных и перспективных. Он сочетает общность подхода к решению разнообразных задач и ясное толкование получаемых математических моделей.

Развитие метода для решения статических и динамических задач позволяет, в зависимости от условий опирания пластинки, получать точные решения и дает возможность наиболее полно и корректно выявить особенности НДС. Решения, получаемые при помощи точных аналитических методов, рассматривают как

эталонные, позволяющие оценивать влияние допущений и гипотез, приближенных теорий и служащие тестовыми примерами для численных методов.

Вместе с тем, необходимо решить ряд задач, возникающих при реализации этого метода. Во-первых, собственные функции, входящие в однородное решение задачи метода начальных функций, зависят от комплексных корней трансцендентного уравнения, определяемых типом граничных условий, которым эти решения удовлетворяют точно. Они образуют семейство неортогональных функций, что осложняет задачу удовлетворения граничным условиям на поперечных краях. Во-вторых, вычисления корней трансцендентного уравнения, до недавнего времени, являлось самостоятельным и трудоемким этапом численной реализации метода. В-третьих, комплексная форма записи требует выделения ее действительной части, что затрудняет получение числовых результатов. В настоящее время, вопросы, связанные с работой в области комплексных чисел, не являются существенным препятствием к применению метода в связи с развитием средств вычислительной техники (математические программные комплексы MathCAD, MatLab и т. д.).

Цель и задачи исследования.

Цель исследования - методика расчета сжато - изогнутых упругих пластинок с различными условиями закрепления на краях при действии сжимающих равномерных нагрузок и решение задачи их устойчивости методом начальных функций.

Задачи исследования:

1. Анализ существующих принципов и положений по определению напряженно-деформированного состояния сжатых и сжато-изогнутых пластин, находящихся в условиях продольного изгиба методом начальных функций.
2. Анализ существующих методов и приемов удовлетворения граничных условий на продольных и поперечных сторонах сжатых и сжато-изогнутых упругих пластин.

3. Получение свойства обобщенной ортогональности для расчета сжатых и сжато- изогнутых пластинок со свободными от связей поперечными кромками при наличии в срединной плоскости сжимающих сил.
4. Разработка алгоритма определения критических усилий и расчета сжато-изогнутых пластин с различными граничными условиями, в том числе со смешанными вдоль края.

Направление работы соответствует требованию паспорта научной специальности ВАК РФ 05.23.17 - "Строительная механика" пункт 3 "Аналитические методы расчета сооружений и их элементов".

Методология и метод исследования.

Методологическую основу диссертационного исследования составляют: фундаментальные положения строительной механики, методы моделирования строительных конструкций.

Методы исследования:

- теоретические с использованием зависимостей строительной механики;
- численные с использованием современного программного комплекса, реализующего метод конечного элемента - «ANSYS Mechanical 14.5»;
- математического программирования с использованием современного программного комплекса -- «MathCAD ».

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

- построена новая матрица начальных функций для расчета сжато-изогнутых пластин, в которой в качестве безразмерной величины перерезывающей силы принята обобщенная сила, перпендикулярная первоначальной недеформированной срединной плоскости пластинки, что позволяет проще удовлетворять граничным условиям на свободных от опор краях при наличии сжимающей силы;
- получено новое свойство обобщенной ортогональности для случая изгиба пластинки с различными граничными условиями, в том числе со свободными от связей продольными кромками при наличии сжимающих сил в двух направлениях ее срединной плоскости;

- разработан алгоритм решения задачи устойчивости при действии равномерно-распределенных сжимающих сил в срединной плоскости;
- разработан алгоритм расчета сжато-изогнутых пластин с различными граничными условиями;
- получены аналитические решения, позволяющие исследовать напряженно деформированное состояние пластин, которые можно использовать в качестве эталонных при тестировании численных методов расчета (методы конечных разностей, граничных элементов, конечных элементов и т.д.);
- разработана методика построения аналитического решения сжато-изогнутой пластинки со смешанными граничными условиями на продольных сторонах, основанная на идее сопряжения областей. Кроме того, представлен алгоритм определения критической сжимающей силы для пластинки, часть продольной стороны которой закреплена, другая же шарнирно оперта;
- составлен текст макроса с пояснениями для сопоставления полученных результатов расчета в программном комплексе ANSYS Mechanical 14.5.

Достоверность результатов подтверждается численным методом расчета на устойчивость и исследование НДС сжато-изогнутых пластин, полученных методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS Mechanical 14.5.

Практическая ценность работы заключается в:

- возможности использования разработанных методов расчета в практике работы проектно-конструкторских организаций, научно-производственных объединений и других предприятий при разработке конструкций, элементами которых являются прямоугольные пластины;
- разработке методики расчета пластин на устойчивость при действии сжимающих усилий для применения в расчете реальных элементов конструкций;
- использовании в учебном процессе при подготовке бакалавров, специалистов, магистров и аспирантов в МГСУ;
- разработке программы в среде MathCAD для решения задач, сводящихся к плоской задаче теории упругости, используемой при выполнении инженерных

расчетов.

Личный вклад автора диссертации заключается в анализе современного состояния теории метода для расчета тонкостенных систем, в разработке методики расчета и соответствующей программной реализации в среде MathCAD, а также методики тестирования разработанного метода, проведении тестовых расчетов и анализе результатов исследований, разработке и применении практических рекомендаций по внедрению и использованию разработанной методики в практике.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на Международной научной конференции «Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании», на научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава МГСУ, в 2010- 2014 г.г., на заседании кафедры строительной и теоретической механики НИУ МГСУ (Москва, 2017).

Основные результаты диссертационной работы внедрены: в конструкторско-расчетную практику НИИЖБ им. А.А.Гвоздева АО «НИЦ «Строительство».

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации результатов по кандидатским диссертациям.

На защиту выносятся:

- алгоритм аналитического решения задачи устойчивости прямоугольных пластин с различными условиями закрепления и комбинациями сжимающих нагрузок;

- определение критических сил и построение форм равновесия для прямоугольных пластинок с различными условиями закрепления;

- алгоритм определения внутренних усилий и перемещений сжато-изогнутых пластинок с различными условиями закрепления и анализ влияния величины продольной силы на НДС;

- методика расчета сжато-изогнутой прямоугольной пластинки с комбинированными граничными условиями вдоль продольных краев.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографического списка. Диссертация написана на 157 страницах, имеет 53 рисунка и 69 таблицы. Библиографический список состоит из 154 наименований трудов отечественных и зарубежных ученых.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность темы диссертации, определены объект и предмет исследования, сформулированы цель и задачи исследования, выделены научная новизна и практическая ценность работы. Приведены сведения о внедрении полученных результатов, структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе представлены основные этапы развития метода, анализируется современное состояние теории метода и его приложения для расчета тонкостенных систем. В главе рассмотрены различные возможные способы удовлетворения граничных условий для определения коэффициентов, входящих в полученное методом начальных функций однородное решение.

Проведенный обзор работ, посвященных развитию метода начальных функций, позволил поставить цель и сформулировать задачи исследования, выявить преимущества и актуальность метода.

Во второй главе изложена основная идея метода начальных функций (МНФ) и показан алгоритм расчета сжато - изогнутых пластинок и решение задачи устойчивости.

При расчете пластин МНФ использована идея выражения искомых перемещений и усилий в произвольном сечении пластинки в виде линейной комбинации значений некоторых линейных дифференциальных операторов над функциями, заданными в каком-либо определенном сечении, принимаемом за

начальное, - называемые начальными функциями. Поэтому логично называть этот метод – методом начальных функций.

Решение задачи может быть записано в виде (1), где W_0, φ_0, M_0, Q_0 - значения прогиба, угла поворота, момента и обобщенной перерезывающей силы в сечении, выбранном за начальное, при $\eta = 0$ и являются функциями одной переменной, например безразмерной $\xi = \frac{x}{h}$, $L_{ik}(\alpha, \eta)$ - трансцендентные дифференциальные функции-операторы, относящиеся к начальным функциям, зависящими от безразмерной переменной $\eta = \frac{y}{h}$ и содержащие частные производные по переменной ξ , $\alpha^n = \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}$.

$$\begin{aligned} W &= h[L_{WW}W_0 + L_{W\varphi}\varphi_0 + L_{WM}M_0 + L_{WQ}Q_0 + W^*]; \\ \varphi_y &= [L_{\varphi W}W_0 + L_{\varphi\varphi}\varphi_0 + L_{\varphi M}M_0 + L_{\varphi Q}Q_0 + \varphi_y^*]; \\ M_y &= \frac{D}{h}[L_{MW}W_0 + L_{M\varphi}\varphi_0 + L_{MM}M_0 + L_{MQ}Q_0 + M_y^*]; \\ Q_y &= \frac{D}{h^2}[L_{QW}W_0 + L_{Q\varphi}\varphi_0 + L_{QM}M_0 + L_{QQ}Q_0 + Q_y^*]. \end{aligned} \quad (1)$$

Первые четыре слагаемые в формулах (1) являются однородными решениями задачи, а последние члены со звездочкой учитывают внешние воздействия – частные решения.

Их совокупность образует матрицу прямого линейного преобразования начальных функций в искомые величины и называется матрицей начальных функций. Построение матрицы начальных функций выполнено на основании символического метода дифференцирования А.И.Лурье.

В задачах устойчивости при наличии сжимающей силы N_2 удобнее в качестве безразмерной величины перерезывающей силы в сечении $\eta=0$ рассматривать обобщенную перерезывающую силу, перпендикулярную первоначальной недеформированной срединной плоскости пластинки:

$$Q_y = \frac{D}{h^3}(V_y - T_2\varphi_y),$$

где $V_y = \frac{D}{h^3} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial \eta \partial \xi^2} \right)$ - Кирхгофская перерезывающая сила. Для такой перерезывающей силы в работе был получен новый вид матрицы дифференциальных операторов для расчета сжато-изгибаемых пластин.

МНФ позволяет легко учитывать внешние воздействия. Однородное решение остается справедливым до тех пор, пока нет внешних воздействий. Если в сечении $\eta = t_i$ приложена сосредоточенная по η поперечная нагрузка $q(\xi, t_i) = \frac{D}{h^3} P_i(\xi)$, то, пользуясь принципом наложения для сечения с координатой $\eta \geq t_i$, следует прибавить влияние этого разрыва:

$$W^* = L_{WP} P_i(\xi) = -L_{WQ}(\eta - t_i) P_i(\xi);$$

$$\varphi_y^* = L_{\varphi P} P_i(\xi) = -L_{\varphi Q}(\eta - t_i) P_i(\xi) \text{ и т. д.}$$

В случае распределенной по η нагрузки $q(\xi, t)$, ее можно рассматривать как совокупность сосредоточенных по η сил:

$$W^* = L_{WP} P(\xi, t) = - \int_c^\eta L_{WQ}(\eta - t) P(\xi, t) dt;$$

$$\varphi_y^* = L_{\varphi P} P(\xi, t) = - \int_c^\eta L_{\varphi Q}(\eta - t) P(\xi, t) dt \text{ и т. д.}$$

После построения матрицы начальных функций задача может считаться решенной, если известны все начальные функции, необходимо лишь выполнить дифференциальные операции над ними.

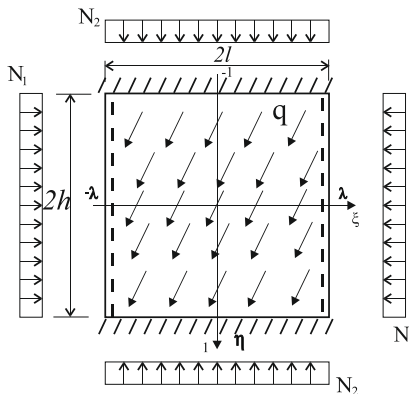


Рисунок 1 - Расчетная схема.

Далее, на примере пластинки (рисунок 1) с двумя заземленными противоположными продольными сторонами $W_0 = \varphi_0 = 0$ при $\eta = \pm 1$ и шарнирно опертыми поперечными кромками $W = M_x = 0$ при $\xi = \pm \lambda$ под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки q и сжимающих сил N_1 и N_2 , лежащих в ее срединной

плоскости, показан алгоритм нахождения начальных функций и получения частного (2) и общего (3) решений, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия сжато-изогнутой пластинки и граничным условиям на двух противоположных (продольных) сторонах пластинки, имеющие вид:

$$W_{(\eta)}^* = \frac{P}{24}(\eta^4 - 2\eta^2 + 1); \quad (2)$$

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta), \quad (3)$$

где A_n и B_n - комплексные произвольные постоянные, r_n - комплексные корни характеристического уравнения, получаемого при отыскании начальных функций $\frac{1}{a_n^2 - b_n^2} [b_n \sin b_n \cos a_n - a_n \sin a_n \cos b_n] = 0$, а функция $F_n(\eta)$ зависит от условий закрепления продольных краев пластинки и определяется по формуле:

$$F_n(\eta) = \frac{\cos b_n \cos a_n \eta - \cos a_n \cos b_n \eta}{a_n^2 - b_n^2}, \quad (4)$$

где $a_n = \sqrt{N_2 + r_n^2 + \Delta_n}$; $b_n = \sqrt{N_2 + r_n^2 - \Delta_n}$; $\Delta_n = \sqrt{N_2^2 - r_n^2(2N_1 - 2N_2)}$.

Полученное решение содержит $4n$ произвольных комплексных постоянных A_n и B_n и им сопряженных, которые определяются граничными условиями на поперечных сторонах пластинки при $\xi = 0$ и $\xi = \lambda$. Для их нахождения может быть использовано соотношение обобщенной ортогональности функции $F_n(\eta)$, которое получено в диссертационной работе:

$$\int_0^1 (F_n''(\eta) F_k''(\eta) - 2N_2 F_n'(\eta) F_k'(\eta) - r_n^2 r_k^2 F_n(\eta) F_k(\eta)) d\eta = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ J_n & (n = k) \end{cases}. \quad (5)$$

Соотношение (5) позволяет разложить две функции $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ (в том числе и ноль) в ряды по функциям $F_n(\eta)$:

$$f_1(\eta) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(\eta); \quad (6)$$

$$f_2(\eta) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_n^2 F_n(\eta), \quad (7)$$

с одним и тем же коэффициентом A_n отличным от нуля, определяемым по формуле:

$$2\text{Re}A_n = \frac{1}{J_n} \left\{ \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta - 2N_2 \int_0^1 f_1'(\eta) F_n'(\eta) d\eta - r_n^2 \int_0^1 f_2(\eta) F_n(\eta) d\eta \right\}, \quad (8)$$

где
$$J_n = \int_0^1 \left(F_n''^2(\eta) - 2N_2 F_n'^2(\eta) - r_n^4 F_n^2(\eta) \right) d\eta. \quad (9)$$

Далее показано, каким образом соотношения (6), (7) и (8) могут быть использованы для удовлетворения граничным условиям на поперечных сторонах пластинки, т.е. для нахождения коэффициентов в решении дифференциального уравнения сжато-изогнутой пластинки.

Рассмотрены случаи, когда коэффициенты могут быть вычислены точно. Это возможно, если на краю $\xi=0$ пластинки задан прогиб $W_{(\xi=0)} = hZ_{(\eta)}$ и изгибающий момент $M_{x(\xi=0)} = \frac{D}{h} X_{(\eta)}$ или угол поворота $\varphi_x = Z_{1(\eta)}$ и перерезывающая сила $Q_x = \frac{D}{h^2} X_{1(\eta)}$. Раскрывая граничные условия на краях $\xi=0$ и $\xi=\lambda$, получим выражение для искомым постоянных коэффициентов A_n и B_n :

$$\begin{aligned} A_n = \frac{1}{J_n} \left\{ \int_0^1 \left(Z_{(\eta)}'' - W_{(\eta)}^{*''} \right) F_n''(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - 2N_2 \int_0^1 \left(Z_{(\eta)}' - W_{(\eta)}^{*'} \right) F_n'(\eta) d\eta + r_n^2 \int_0^1 \left(X_{(\eta)} + \nu Z_{(\eta)}'' \right) F_n(\eta) d\eta \right\}; \\ B_n = \frac{(1 - ch r_n \lambda)}{J_n sh r_n \lambda} \left\{ \int_0^1 \left(Z_{(\eta)}'' - W_{(\eta)}^{*''} \right) F_n''(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - 2N_2 \int_0^1 \left(Z_{(\eta)}' - W_{(\eta)}^{*'} \right) F_n'(\eta) d\eta + r_n^2 \int_0^1 \left(X_{(\eta)} + \nu Z_{(\eta)}'' \right) F_n(\eta) d\eta \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Частным случаем может служить пластинка шарнирно опертая по краям $\xi=0$ и $\xi=\lambda$, у которой $X_{(\eta)} = Z_{(\eta)} = 0$. В этом случае выражения (10) для определения коэффициентов A_n и B_n , будут иметь более компактный вид:

$$A_n = \frac{1}{J_n} \left\{ - \int_0^1 W_{(\eta)}^{*''} F_n''(\eta) d\eta + 2N_2 \int_0^1 W_{(\eta)}^{*'} F_n'(\eta) d\eta \right\}; \quad (11)$$

$$B_n = \frac{(1 - ch r_n \lambda)}{J_n sh r_n \lambda} \left\{ - \int_0^1 W_{(\eta)}^{*''} F_n''(\eta) d\eta + 2N_2 \int_0^1 W_{(\eta)}^{*'} F_n'(\eta) d\eta \right\}.$$

Рассмотрен случай, когда коэффициенты не могут быть определены точно. К этому случаю относятся пластинки, у которых поперечные края защемлены или свободны. Один из возможных путей решения таких задач основан на методе сил. Так, если на краю имеется жесткая заделка, то врежем шарнир и приложим неизвестный момент $M_{x(\xi=0)} = \frac{D}{h} X_{(\eta)}$, который представим в виде разложения в ряд тригонометрической функции с неизвестными коэффициентами C_k :

$$X_{(\eta)} = \sum_{k=1,2..}^{\infty} C_k \sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta. \quad (12)$$

Если край свободен от опор, то используем метод перемещений – закрепим этот край шарнирной опорой и зададим неизвестное перемещение $W_{(\xi=0)} = hZ_{(\eta)}$, где $Z_{(\eta)}$ также можно представить в виде ряда, например:

$$Z_{(\eta)} = \sum_{k=1,2..}^{\infty} D_k \sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta. \quad (13)$$

Неизвестные коэффициенты C_k и D_k , могут быть найдены с использованием метода ортогонализации. Так коэффициенты C_k могут быть определены из удовлетворения граничного условия на поперечных краях пластинки - равенства нулю угла поворота на краю $\xi=0$ в исходной системе, а коэффициенты D_k - из условия равенства нулю обобщенной поперечной перерезывающей силы.

В заключении показан порядок нахождения критических нагрузок и форм потери устойчивости на примере пластинки находящейся под действием равномерно - распределенных сжимающих нагрузок N_1 и N_2 .

Решение однородного уравнения сжатой пластинки имеет вид (3). Это решение описывает изогнутую форму равновесия пластинки после потери устойчивости под действием сжимающих сил N_1 и N_2 .

Для определения произвольных постоянных A_n и B_n , входящих в решение (3), используются однородные граничные условия на поперечных сторонах пластинки и полученное в диссертационной работе свойство обобщенной ортогональности. При этом, задача решается точно, если эти края шарнирно оперты или на них задан ползун.

Если поперечные края пластинки $\xi=0$ и $\xi=\lambda$ заземлены или свободны от связей, то граничные условия на этих краях могут быть удовлетворены приближенно с использованием соотношения обобщенной ортогональности, как это было показано при решении задачи для сжато-изогнутой пластинки.

В третьей главе приведена методика расчета и решение тестовых задач с результатами вычислений критических нагрузок для пяти прямоугольных пластинок (рисунок 2) с различными условиями опирания по контуру и комбинацией приложения продольных усилий, для которых решение получается точно.

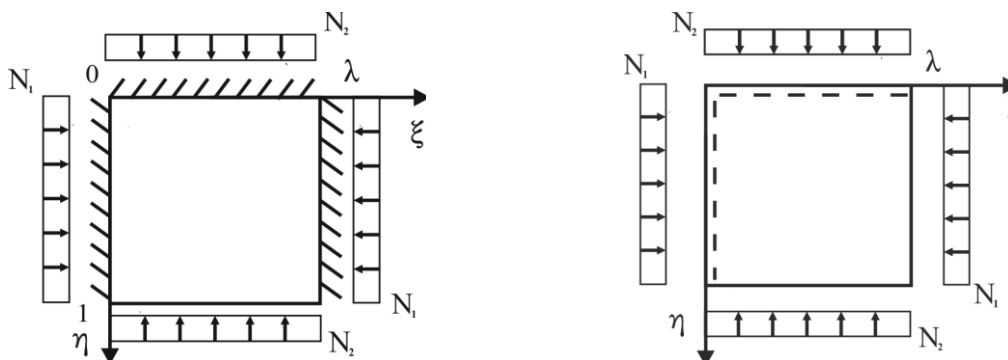


Рисунок 2 - Расчетные схемы сжатых пластинок.

Для представленных примеров получены значения критических сил и построены формы потери устойчивости при различном соотношении сторон $\lambda=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$.

Поскольку поперечные стороны пластинок шарнирно оперты, следовательно, $W = M_x = 0$, и решение получается точно. В этом случае результаты вычислений аналогичны известным, которые получены при решении задач в одинарных тригонометрических рядах.

Далее рассмотрены две задачи устойчивости сжатых пластинок с различными условиями опирания краев (рисунок 3), для которых граничные условия на поперечных сторонах удовлетворяются приближенно с использованием полученного в диссертационной работе соотношения обобщенной ортогональности.



Пластинка жестко защемлена по трем сторонам и одна сторона свободна.

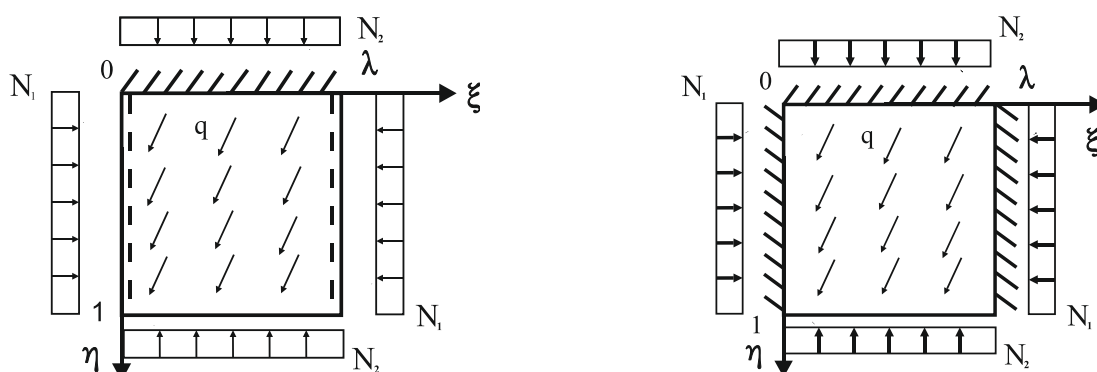
Пластинка, шарнирно опертая по двум смежным сторонам, две стороны свободны.

Рисунок 3 - Расчетные схемы сжатых пластинок.

Выполненные расчеты показали, что для получения практически точных значений критической нагрузки необходимо удерживать по три члена ряда в каждом разложении (последующее приближение отличается от предыдущего менее одного процента).

Далее рассмотрены примеры расчета сжато-изогнутых прямоугольных пластинок с различными граничными условиями при совместном действии продольных и поперечных сил (рисунок 4). Величина сжимающего усилия принималась в долях от критической нагрузки (от $0.05N_{кр}$ до $0.2N_{кр}$). При этом вначале была рассчитана пластинка при действии только поперечной нагрузки, а

затем при совместном действии продольных и поперечных сил. По результатам расчета проведена оценка влияния величины продольной силы на напряженно-деформированное состояние.



Сжато-изогнутая пластинка, жестко защемленная по одной продольной стороне, вторая сторона свободна, и две поперечные шарнирно оперты.

Сжато-изогнутая пластинка, жестко защемлена по трем сторонам и одна сторона свободна.

Рисунок 4 - Расчетные схемы сжато-изогнутых пластинок.

Аналогично задачам устойчивости, решения при расчете изгибаемых и сжато изгибаемых пластин получается точно, когда поперечные стороны пластинки шарнирно оперты или имеется ползун и решение получается приближенно, когда поперечные стороны пластинки жестко защемлены. Величины перемещений и внутренних усилий в рассмотренных примерах показали, что результаты обладают устойчивой монотонной сходимостью и быстро сходятся с увеличением числа членов ряда разложения собственных функций. Наличие продольных сжимающих сил существенно увеличивают внутренние усилия и прогиб, так увеличение продольной силы в два раза при малых значениях (с $0.05T_{кр}$ до $0.1T_{кр}$) приводит к изменению прогиба и изгибающего момента в пределах 4-6% при большей величине продольной силы (с $0.1N_{кр}$ до $0.2N_{кр}$) на 8-11%, при этом изменение параметров носит нелинейный характер.

В четвертой главе на примере пластинки, приведенной на рисунке 5, рассматривается методика расчета сжато-изогнутой прямоугольной пластинки с комбинированными граничными условиями вдоль продольных краев.

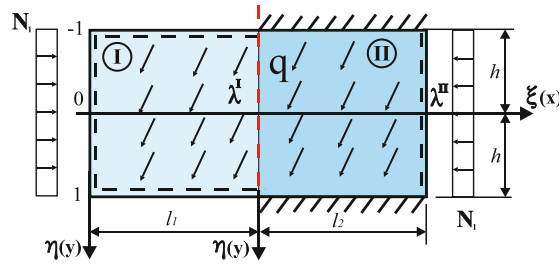


Рисунок 5 - Расчетная схема сжато-изогнутой пластинки с комбинированными граничными условиями.

Пластинка состоит из двух частей (областей) размером $l_1 \times 2h$ и $l_2 \times 2h$ загружена поперечной равномерной нагрузкой q и сжимающими силами N . В каждой области граничные условия вдоль краев не изменяются.

Задача решается смешанным методом: врезаем шарнирно неподвижную опору на линии контакта областей и приложим безразмерный неизвестный изгибающий момент $M_x = \frac{D}{h} X_{(\eta)}$ и неизвестный безразмерный прогиб $W = hZ_{(\eta)}$ (рисунок 6), где $Z_{(\eta)}$ и $X_{(\eta)}$ представим в виде бесконечных тригонометрических рядов (12) и (13) с неизвестными коэффициентами C_m и D_m , для определения которых используем условия в сечении стыковки двух пластинок: равенство углов поворота $\varphi_x^I(\eta, \lambda^I) = \varphi_x^{II}(\eta, 0)$ и обобщенной перерезывающей силы $Q_x^I(\eta, \lambda^I) = Q_x^{II}(\eta, 0)$.

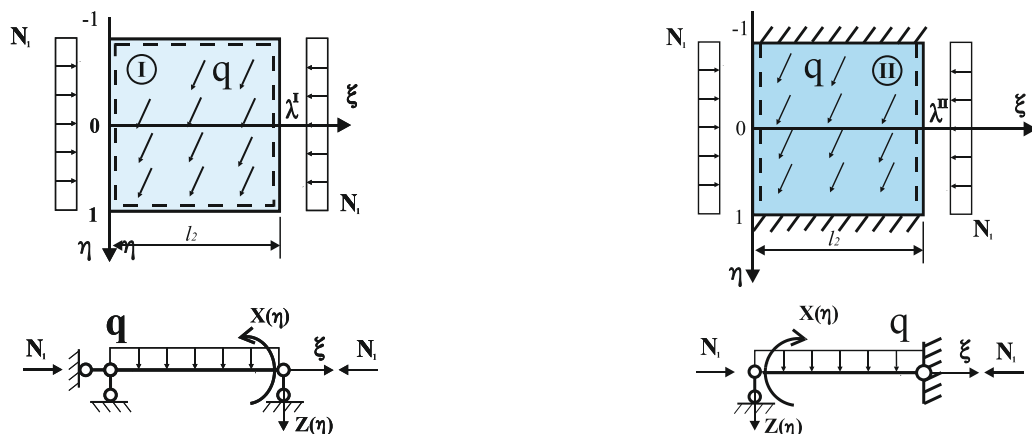


Рисунок 6 – Основная система для двух областей сжато-изогнутой пластинки.

Точность удовлетворения условий, равенство угла поворота и поперечной перерезывающей силы на линии сопряжения двух областей, зависит от

количества членов ряда, удерживаемых в решении дифференциального уравнения сжато-изогнутой пластинки.

Как показали вычисления, для выполнения условий на линии сопряжения необходимо учитывать не больше трех членов ряда для условия равенства угла поворота и шести для условия равенства обобщенной перерезывающей силы, при этом погрешность не превышает 0.5%.

На рисунке 8 приведены результаты вычислений и построены эпюры перемещений и внутренних усилий в характерных сечениях пластинки (рисунок 7).

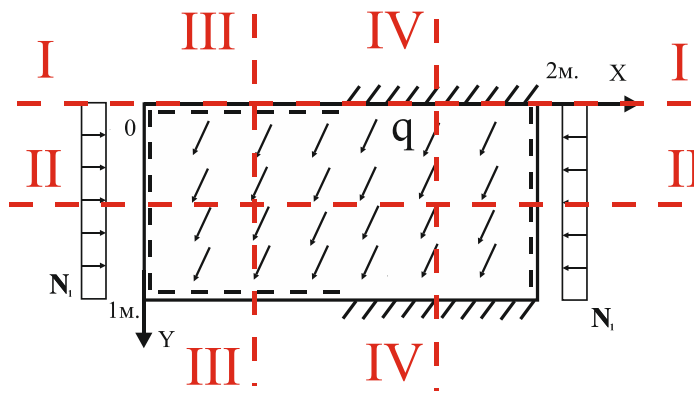
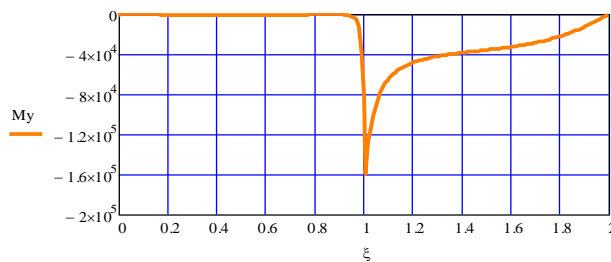


Рисунок 7 – Схема расположения характерных сечений.

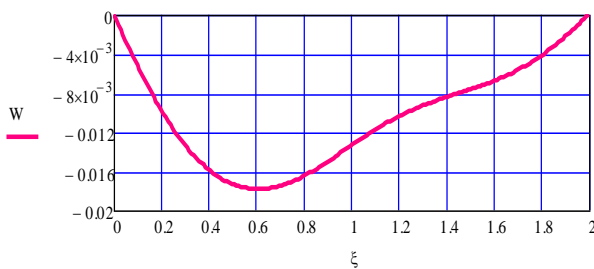
Сечение I-I.

Изгибающий момент M_y

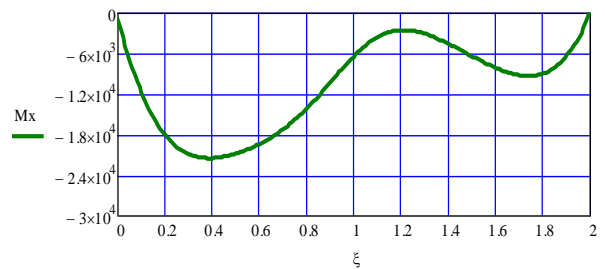


Сечение II-II.

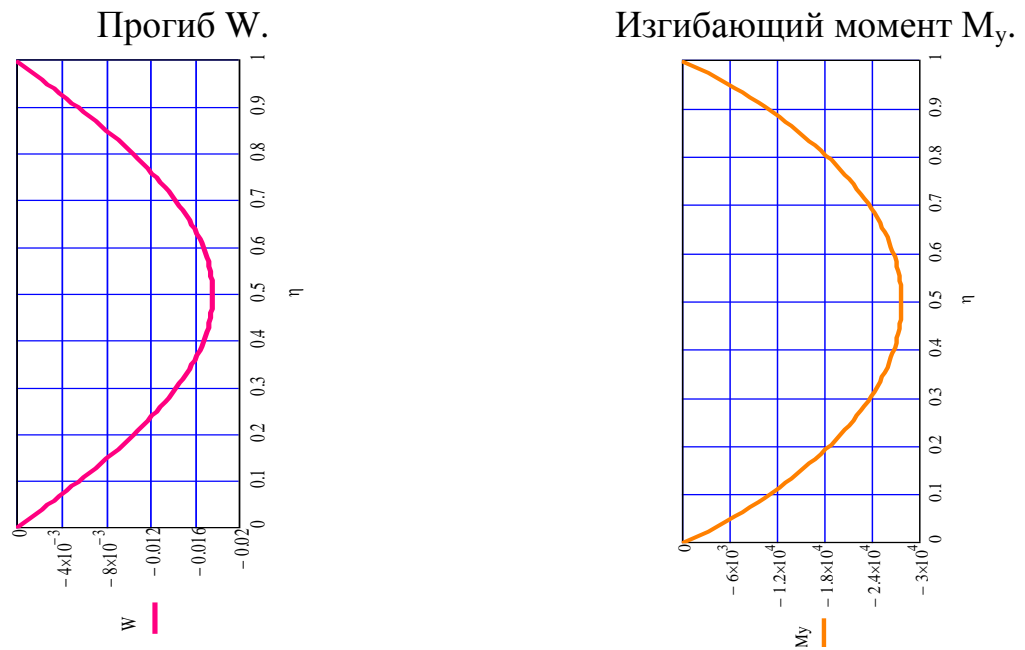
Прогиб W .



Изгибающий момент M_x .



Сечение III-III.



Сечение IV-IV.

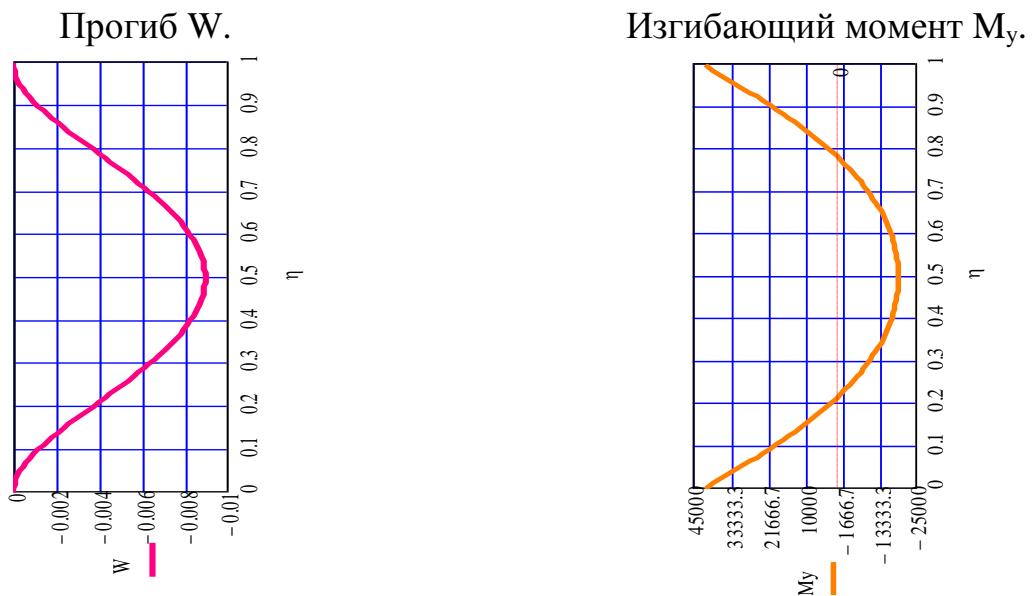


Рисунок 8 - Эпюры перемещений и внутренних усилий.

Расчеты показали, что в полученных решениях учет первых 2-3 членов ряда позволяет получить практически точные значения внутренних усилий и перемещений. При удержании четырех и более членов ряда погрешность вычисления составляет не более одного процента. Аналогично могут быть решены задачи, когда имеется деление на большее число областей изменения граничных условий по продольной стороне пластинки.

Кроме того, в четвертой главе приведен алгоритм расчета на устойчивость пластинки сжатой в одном направлении, имеющей те же граничные условия по краям, что и у пластинки, рассмотренной в предыдущем примере.

В таблице №1 приведены значения критической силы N_I для исследуемой пластинки в зависимости от числа членов ряда.

Таблица №1- Результаты расчета.

Количество членов ряда.	2	3	4
Величина критической силы N_I .	$4.66091 \cdot 10^6 \text{Н/м.}$	$5.99732 \cdot 10^6 \text{Н/м.}$	$6.10031 \cdot 10^6 \text{Н/м.}$
Отличие в % от предыдущего.	-	22%	1.8%

На рисунке 9 для полученного значения критического усилия N_I приведена форма потери устойчивости.

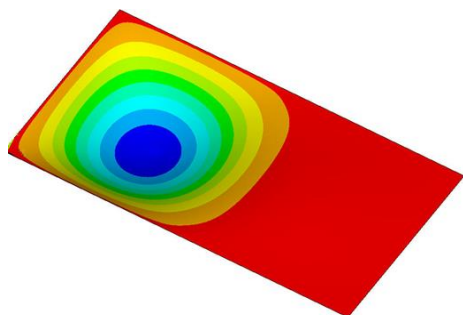


Рисунок 9 - Форма потери устойчивости сжатой пластинки с комбинированными граничными условиями.

Как показали вычисления, удержание трех-четырех членов ряда дает вполне приемлемое для практических целей приближенное аналитическое решение с погрешностью 0,5%.

Таким образом, рассмотрен ряд задач, актуальных с практической точки зрения.

Решив их, можно точно, или практически точно, исследовать особенности напряженно -деформируемого состояния тонких прямоугольных пластин с различными граничными условиями, как при потере устойчивости, так и при работе на сжатие с изгибом.

В пятой главе приведен результат сравнительного анализа полученных результатов с данными, полученными с помощью программного комплекса ANSYS Mechanical 14.5, что позволило оценить эффективность предлагаемой методики и наглядно показало высокую точность при решении задач данного

класса. Был проведен анализ выбора типа конечных элементов, на которые будем разбивать пластину Shell181 или Shell281.

На рисунках 10 и 11 показан график сходимости результатов определения критической силы в шарнирно опертой пластинке в зависимости от типа конечного элемента и шага разбиения.

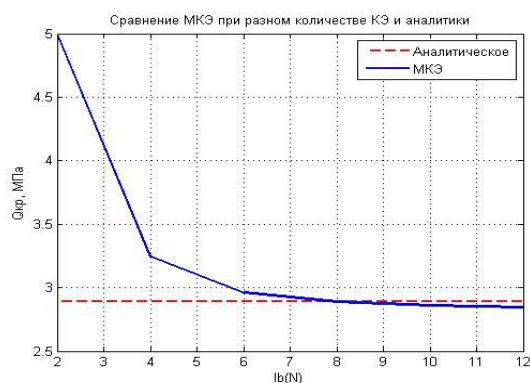


Рисунок 10. При использовании 4-узлового элемента Shell181.

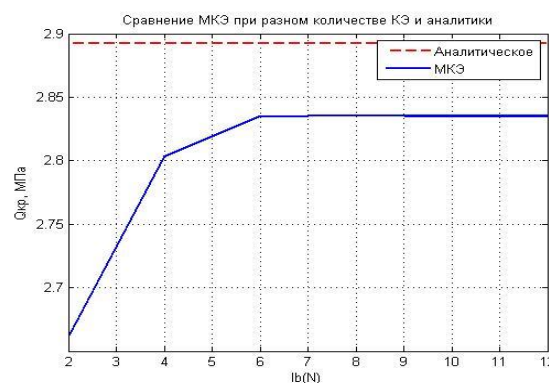


Рисунок 11. При использовании 8-узлового элемента Shell281.

В итоге для сравнения результатов расчета МНФ и расчета в программном комплексе ANSYS Mechanical 14.5 был выбран оптимальный тип конечного элемента Shell181 и шаг разбиения 1/1024.

Проведя сравнительный анализ, можно сделать следующие выводы:

1. Результаты расчетов в рассматриваемых примерах, выполненных предложенным аналитическим методом и результаты, полученные в программном комплексе ANSYS Mechanical 14.5, в целом хорошо согласуются друг с другом. Величины погрешностей составили менее 3%.

2. Формы потери устойчивости полностью совпадают.

3. Определен оптимальный тип и размер конечного элемента для решения поставленных задач.

4. Разработанная методика по результатам верификации с проведенным расчетом численным методом на программном комплексе ANSYS Mechanical 14.5 является адекватной, что говорит о возможности дальнейшего применения результатов этой методики при проведении исследований.

В заключении приводятся основные выводы и результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ.

В диссертации построена матрица начальных функций, получен новый вид обобщенной ортогональности однородных решений, позволяющей решать задачи с различными граничными условиями не только на продольных, но и поперечных сторонах прямоугольной сжатой и сжато-изогнутой пластинки. Разработан алгоритм решения плоской задачи теории упругости при совместном действии поперечной нагрузки и равномерно сжимающих продольных сил. Разработанный алгоритм реализован в системе автоматизированного проектирования - MathCAD.

Результаты вычислений обладают высокой точностью, но немного больше, чем результаты, полученные с использованием универсальной программной системы конечно-элементного анализа ANSYS Mechanical 14.5.

По материалам, изложенной в диссертационной работе, могут быть сделаны следующие выводы:

1. Предложенная методика решения задачи устойчивости и расчета сжато-изогнутых пластинок методом начальных функций, весьма проста и однотипна при различных условиях нагружения и закрепления пластинок и позволяет производить расчет на разрывные кинематические воздействия.

2. Полученная новая форма соотношения обобщенной ортогональности однородных решений позволяет с высокой степенью точности получать параметры Н.Д.С. сжато-изогнутой пластинки и значения критических сил и форм потери устойчивости.

3. Полученные решения обладают устойчивой монотонной сходимостью и быстро сходятся с увеличением числа членов ряда разложения собственных функций. Как правило, трех-четырёх членов ряда достаточно для получения практически точного результата.

4. Рассмотренная методика позволяет достаточно просто получать решения для пластинок с комбинированными граничными условиями вдоль продольных краев.

5. Развитие метода начальных функций существенно дополняет существую-

щие аналитические методы, позволяя оценить точность численных методов расчета. Результаты, полученные аналитическим методом начальных функций, подтверждены численным методом в программном комплексе ANSYS Mechanical 14.5. Величина погрешности не превышает 3%.

6. Материалы диссертационной работы в виде таблиц, графиков с изолиниями, текста макросов могут быть использованы при проектировании строительных конструкций.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ в
журналах из списка ВАК:

1. Ушаков, А.Ю. Определение критических сжимающих нагрузок упругих тонких пластинок методом начальных функций / М.Г. Ванюшенков, А.Ю. Ушаков // Промышленное и гражданское строительство. – 2010. – №11. – С.71-73.
2. Ушаков, А.Ю. Исследование влияния действия продольных сжимающих усилий на напряженно – деформированное состояние изогнутой прямоугольной пластинки / А.Ю. Ушаков, М.Г. Ванюшенков // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – №6. – С.409-412.
3. Ушаков, А.Ю. Изгиб прямоугольной пластинки при действии продольных сжимающих сил / А.Ю. Ушаков, М.Г. Ванюшенков // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – №10. – С.72-73.
4. Ушаков, А.Ю. Расчет тонких упругих пластинок при действии продольных сжимающих сил на устойчивость методом начальных функций / А.Ю. Ушаков // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – №10. – С.55-58.
5. Ушаков, А.Ю. Исследование устойчивости прямоугольных пластин с использованием программного комплекса ANSYS Mechanical 14.5 пластинки / О.А. Горячевский, А.Ю. Ушаков // Научное обозрение. – 2015. – №8. – С.51-55.
6. Ушаков, А.Ю. Расчет сжато-изогнутых пластинок со смешанными вдоль края граничными условиями методом начальных функций / А.Ю. Ушаков, М.Г. Ванюшенков // Промышленное и гражданское строительство. – 2016. – №11. – С.14-18.