

На правах рукописи



Боброва Валерия Игоревна

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА  
ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ**

05.23.17 – Строительная механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор

**Габбасов Радек Фатыхович**

Официальные  
оппоненты:

**Демьянушко Ирина Вадимовна**

доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», заведующая кафедрой «Строительная механика»

**Жаворонок Сергей Игоревич**

кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБУН Институт прикладной механики Российской Академии наук (ИПРИМ РАН), старший научный сотрудник

Ведущая организация: **Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»**

Защита состоится «18» декабря 2018 г. в 12:00 на заседании диссертационного совета Д 218.005.05, созданного на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет транспорта (МИИТ)» по адресу: 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, ауд. 7618.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Российский университет транспорта (МИИТ)» [www.mii.ru](http://www.mii.ru).

Автореферат разослан «16» ноября 2018 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Шавыкина Марина Витальевна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Опубликовано множество научных работ по расчету пологих оболочек различных очертаний на статические нагрузки. При этом наряду с аналитическими методами применялись и численные методы, включая МКЭ (метод конечных элементов) и МКР (метод конечных разностей). Публикаций по расчету пологих оболочек на динамические нагрузки существенно меньше, поэтому выполненное исследование по разработке численного метода для расчета пологих оболочек на динамические нагрузки является актуальным.

**Степень разработанности темы.** Выбранная для исследования тема разработана в достаточном для практического применения объеме: подробно в историческом контексте изложена поставленная задача, максимально полно описана используемая методика.

**Целями и задачами диссертационной работы** являются разработка численного метода расчета пологих оболочек на динамические воздействия с применением **обобщенных** уравнений метода конечных разностей (МКР), а также разработка программы для ЭВМ с приложением ее к решению задач строительной механики.

**Научная новизна работы** состоит в следующем:

1. Разработан алгоритм расчета пологих оболочек на динамические воздействия на основе обобщенных уравнений метода конечных разностей, предложенных Габбасовым Р.Ф.

2. По составленной методике разработана программа расчета на ЭВМ, проведена ее апробация на решении известных задач.

3. Получены результаты решения новых задач расчета пологих оболочек на динамические воздействия.

**Теоретическая и практическая ценность работы** заключается в том, что решены новые задачи по расчету пологих оболочек на динамические воздействия, а также в том, что разработанные методика и на ее основе программа позволяют быстро выполнять оценочный расчет, а также проверять результаты, полученные в процессе расчета другим методом (например, методом конечных элементов).

**Методология и методы исследования**, применяемые автором, заключаются в изучении научно-технической литературы по проблемам, связанным с поставленными в работе задачами, а также в освоении основ программирования на языке Visual Basic при совместной работе с программной средой Microsoft Excel.

**На защиту выносятся:**

- алгоритмы расчета пологих оболочек на динамические нагрузки на основе обобщенных уравнений МКР;
- результаты решения новых задач по расчету пологих оболочек на динамические воздействия.

**Степень достоверности и апробация результатов** определяется корректной постановкой задачи, использованием обобщенных уравнений МКР – апробированного численного метода, а также сравнением полученных результатов с результатами, найденными другими известными методами (МПА, аналитический метод и др.); численным исследованием сходимости решений.

**Апробация работы** была проведена на:

- международной научно-технической конференции молодых ученых БГТУ им. В.Г. Шухова, 21-25 мая 2018 г.;
- заседании кафедры «Строительная и теоретическая механика» ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 29 мая 2018 г.

**Структура и объем работы.** Диссертация содержит введение, четыре главы, заключение, список литературы, приложения. Общий объем диссертации составляет 111 страниц, в текст включены 41 рисунок и 11 таблиц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** диссертации дается обоснование актуальности выбранной темы, приводится ее общая характеристика, формулируются основные цели и задачи исследования, оцениваются достоверность и научная новизна предстоящей работы, ее практическая ценность.

**Первая глава.** Автором приводится обзор литературы по расчету пологих оболочек и наиболее актуальным численным методикам.

Основоположником теории пологих оболочек является выдающийся советский ученый Власов В.З. Немаловажный вклад в развитие этой темы внесли такие специалисты, как Гольденвейзер А.Л., Леонтьев Н.Н., Лукаш П.А., Назаров А.А., Новожилов В.В., Огибалов П.М., Колтунов М.А., Пухонто Л.М., Ржаницын А.Р., Рекшинский В.С., Слезингер И.Н., Тимошенко С.П. и др.

В современной теории пологих оболочек задача расчета пологой оболочки сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Указанная задача решалась или точными (аналитическими) методами, к таким, например, можно отнести метод одинарных гиперболотригонометрических рядов (метод М. Леви) или метод двойных тригонометрических рядов (метод Навье), или приближенными (численными) методами. Из них можно отметить МКЭ (метод конечных элементов), вариационный метод, МПА (метод последовательных аппроксимаций), МКР (метод конечных разностей) и др.

В первой главе также приведено описание современных, наиболее широко используемых численных методов: метод конечных элементов (МКЭ), метод последовательных аппроксимаций – в дифференциальной / интегральной и

разностной формах, метод конечных разностей (МКР), а также обобщенные уравнения метода конечных разностей.

Обобщенные уравнения МКР были предложены Габбасовым Р.Ф., профессором, доктором технических наук, профессором кафедры «Строительная и теоретическая механика» ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ». В диссертации для расчета пологих оболочек на динамические воздействия используются именно эти уравнения.

Отличие обобщенных уравнений МКР от классических заключается в возможности учета разрывов искомой функции, а также ее первых двух производных. Аналогичным образом можно учитывать и разрывы правых частей исходных дифференциальных уравнений, кроме разрывов их первых производных.

Несомненным преимуществом использования обобщенных уравнений МКР является отсутствие необходимости в законтурных точках, так как все расчетные точки располагаются в пределах области интегрирования дифференциальных уравнений, а также в отсутствии необходимости сгущать сетку или использовать усредненные значения вблизи разрывов, как в случае классических уравнений МКР.

**Вторая глава.** Строится алгоритм расчета пологих оболочек на произвольные статические воздействия с применением обобщенных уравнений МКР.

Представлена (согласно Назарову А.А.) система разрешающих дифференциальных уравнений прямоугольных в плане пологих оболочек, работающих под воздействием нагрузок, нормальных к поверхности оболочки:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - (r_0 + \mu t_0) \frac{\partial W}{\partial x} = 0; \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - (t_0 + \mu r_0) \frac{\partial W}{\partial y} = 0; \quad (\text{б}) \quad (1)$$

$$D\Delta^2 W + \bar{B}(r_0^2 + t_0^2 + 2\mu r_0 t_0)W - \\ - \bar{B} \left[ (r_0 + \mu t_0) \frac{\partial U}{\partial x} + (t_0 + \mu r_0) \frac{\partial V}{\partial y} \right] - p_z = 0, \quad (\text{в})$$

где  $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ;

$U, V$  – касательные перемещения по направлению соответственно  $x$  и  $y$ ;

$W$  – прогиб (вертикальное перемещение по оси  $z$ );

$\mu$  – коэффициент Пуассона;

$p_z$  – произвольная распределённая нагрузка по поверхности;

$D = \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)}$  – изгибная жесткость;

$\bar{B} = \frac{Ed}{1-\mu^2}$  – жесткость при растяжении-сжатии;

$d$  – высота поперечного сечения полой оболочки;

$\delta$  – стрела подъема оболочки;

$r_0 = -\frac{1}{R_x}$ ;  $t_0 = -\frac{1}{R_y}$ ;  $R_x, R_y$  – радиусы кривизны;

$E$  – модуль упругости материала.

Далее для удобства дальнейших преобразований производится переход к безразмерным величинам.

Запишем дифференциальное уравнение второго порядка в общем виде:

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma \frac{\partial w}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi^2} + \delta_i \frac{\partial w_i}{\partial \xi} + \beta_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma_i \frac{\partial w_i}{\partial \eta} + \gamma_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta^2} \right) = -p. \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения (1а), (1б), (1в) представляют собой частные случаи (2). Поэтому будем использовать (согласно Габбасову Р.Ф.) для аппроксимации дифференциальных уравнений (1а) – (1в) известные разностные аналоги обобщенных уравнений МКР (расчетная сетка представлена на Рисунке 1).

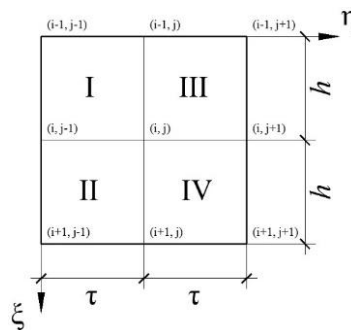


Рисунок 1. Часть расчетной сетки для регулярной точки

Получим в регулярной точке  $ij$  квадратной сетки ( $\tau=h$ ) систему уравнений в безразмерных величинах:

$$4u_{i-1,j} + 2(1-\mu)u_{i,j-1} + 4(\mu-3)u_{i,j} + 2(1-\mu)u_{i,j+1} + 4u_{i+1,j} + \frac{1+\mu}{2}v_{i-1,j-1} - \frac{1+\mu}{2}v_{i-1,j+1} - \frac{1+\mu}{2}v_{i+1,j-1} + \frac{1+\mu}{2}v_{i+1,j+1} + 2hC_1w_{i-1,j} - 2hC_1w_{i+1,j} = 0. \quad (3)$$

$$\frac{1+\mu}{2}u_{i-1,j-1} - \frac{1+\mu}{2}u_{i-1,j+1} - \frac{1+\mu}{2}u_{i+1,j-1} + \frac{1+\mu}{2}u_{i+1,j+1} + 2(1-\mu)v_{i-1,j} + 4v_{i,j-1} + 4(\mu-3)v_{i,j} + 4v_{i,j+1} + 2(1-\mu)v_{i+1,j} + 2hC_2w_{i,j-1} - 2hC_2w_{i,j+1} = 0; \quad (4)$$

$$4m_{i-1,j} + 4m_{i,j-1} - 16m_{i,j} + 4m_{i,j+1} + 4m_{i+1,j} - 2hC_4u_{i-1,j} + 2hC_4u_{i+1,j} - 2hC_5v_{i,j-1} + 2hC_5v_{i,j+1} + 2h \left( {}^{I-II}\Delta m_{ij}^{\xi} + {}^{III-IV}\Delta m_{ij}^{\xi} \right) + 2h \left( {}^{I-III}\Delta m_{ij}^{\eta} + {}^{II-IV}\Delta m_{ij}^{\eta} \right) = -h^2 \left( {}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij} - 4C_3w_{i,j} \right), \quad (5)$$

$$w_{i-1,j} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j} + w_{i,j+1} + w_{i+1,j} = -h^2 m_{i,j}. \quad (6)$$

Здесь в (5):

${}^I p_{ij}; {}^{II} p_{ij}; {}^{III} p_{ij}; {}^{IV} p_{ij}$  – значения  $p_z$  соответственно в участках  $I, II, III, IV$ ;

${}^{I-II}\Delta m_{ij}^{\xi}, {}^{III-IV}\Delta m_{ij}^{\xi}$ , – скачок значений  $m_{ij}^{\xi}$  в точке  $ij$  между участками  $I - II$  и  $III - IV$  соответственно;

${}^{I-III}\Delta m_{ij}^{\eta}, {}^{II-IV}\Delta m_{ij}^{\eta}$  – скачок значений  $m_{ij}^{\eta}$  в точке  $ij$  между участками  $I - III$  и  $II - IV$  соответственно.

Однородные краевые условия, заданные на стороне оболочки, представим в виде:

- жесткое защемление:

$$U = V = W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0; M = -D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \quad (7)$$

- край шарнирно-неподвижный:

$$U = V = W = 0; M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (8)$$

- край шарнирно-подвижный:

$$U = W = 0; M = 0; \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (9)$$



- край свободен от опор:

$$\begin{aligned} N_y &= \bar{B} \left[ \frac{\partial V}{\partial y} + \mu \frac{\partial U}{\partial x} - W(t_0 + \mu r_0) \right] = 0; \\ S &= \bar{B} \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0; \\ M &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \\ Q_y &= \frac{\partial M}{\partial y} - D(1-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $Q_y$  – обобщенная поперечная сила.

Численное решение задачи учитывает все возможные комбинации заданных условий на краях оболочки. Далее краевые условия представляются в безразмерном виде.

**Третья глава.** Строится алгоритм расчета пологих оболочек на произвольные динамические воздействия с применением обобщенных уравнений МКР.

Рассматривались колебания упругой полой оболочкой с размерами  $a$  и  $b$  в плане и массой единицы площади  $\nu = const$ .

Поперечные колебания прямоугольных в плане пологих оболочек описывались системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - (r_0 + \mu t_0) \frac{\partial W}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - (t_0 + \mu r_0) \frac{\partial W}{\partial y} &= 0; \\ D\Delta^2 W + \bar{B}(r_0^2 + t_0^2 + 2\mu r_0 t_0)W - \bar{B} \left[ (r_0 + \mu t_0) \frac{\partial U}{\partial x} + (t_0 + \mu r_0) \frac{\partial V}{\partial y} \right] - q^* &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

$$\text{Под } q^* \text{ подразумевалось: } q^* = \left( q - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \tilde{k} \frac{\partial W}{\partial t} \right),$$

$q = q(x, y, t)$  – внешняя нагрузка, изменяющаяся во времени;

$\tilde{k}$  – параметр затухания.

Вводя безразмерные величины, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - C_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - C_2 \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} + C_4 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial v}{\partial \eta} = -(p - \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{t}^2} - c \frac{\partial w}{\partial \bar{t}}) + C_3 w; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -m, \quad (15)$$

где безразмерные величины:

$$u = \frac{Ed^2}{q_0(1-\mu^2)a^3} U; \quad v = \frac{Ed^2}{q_0(1-\mu^2)a^3} V; \quad w = \frac{Ed^3}{12q_0(1-\mu^2)a^4} W; \quad (16)$$

$$m = \frac{M}{q_0 a^2}; \quad p = \frac{p_z}{q_0}; \quad \xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a};$$

$$C_1 = 12 \frac{\delta}{a} \bar{\mu}_1; \quad C_2 = 12 \frac{\delta}{a} \bar{\mu}_2; \quad C_3 = 12 \frac{\delta^2}{a^2} \bar{\mu}_3; \quad C_4 = \frac{\delta}{a} \bar{\mu}_1; \quad C_5 = \frac{\delta}{a} \bar{\mu}_2,$$

$a$  - характерный размер оболочки в плане;  $q_0$  - значение  $q$  в фиксированной точке.

$$\bar{\mu}_1 = (\chi_\xi + \mu \chi_\eta) \frac{a}{\delta}; \quad \bar{\mu}_2 = (\chi_\eta + \mu \chi_\xi) \frac{a}{\delta};$$

$$\bar{\mu}_3 = (\chi_\xi^2 + \chi_\eta^2 + 2\mu \chi_\xi \chi_\eta) \left(\frac{a}{\delta}\right)^2, \quad (17)$$

$$\chi_\xi = r_0 a; \quad \chi_\eta = t_0 a.$$

Также будем иметь в виду:

$$p = p(\xi; \eta; \bar{t}) = \frac{q(x,y,t)}{q_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\tilde{v}}}; \quad c = \frac{\tilde{k} a^2}{\sqrt{D \tilde{v}}}, \quad (18)$$

где:  $\tilde{v}$  – масса единицы площади;

$\tilde{k}$  – коэффициент поглощения энергии.

Система уравнений (12) – (15) решается с учетом краевых условий, а также с учетом начальных условий, а именно:

$$\bar{t} = 0; \quad w = w_0(\xi, \eta); \quad w^{\bar{t}} = w_0^{\bar{t}}(\xi, \eta).$$

Запишем аппроксимацию уравнения (14) обобщённым уравнением МКР в регулярной точке  $ij$  на квадратной сетке:

$$4m_{i-1,j}^{(k)} + 4m_{i,j-1}^{(k)} - 16m_{i,j}^{(k)} + 4m_{i,j+1}^{(k)} + 4m_{i+1,j}^{(k)} - 2hC_4u_{i-1,j}^{(k)} + 2hC_4u_{i+1,j}^{(k)} - 2hC_5v_{i,j-1}^{(k)} + 2hC_5v_{i,j+1}^{(k)} + 2h \left( {}^{I-II}\Delta m_{ij}^{\xi(k)} + m^{III-IV}\Delta m_{ij}^{\xi(k)} \right) + 2h \left( {}^{I-III}\Delta m_{ij}^{\eta(k)} + {}^{II-IV}\Delta m_{ij}^{\eta(k)} \right) = -h^2 \left( {}^I p_{ij}^{(k)} + {}^{II} p_{ij}^{(k)} + {}^{III} p_{ij}^{(k)} + {}^{IV} p_{ij}^{(k)} - 4 \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial \bar{t}_{ij}^2} - 4c \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \bar{t}_{ij}} - 4C_3 w_{ij}^{(k)} \right);$$

где  $h$  – шаг квадратной сетки;

$k=2, 3, 4 \dots$  – номер слоя по времени;

$i=2, 3, 4 \dots (m-1)$  – номер шага вдоль оси  $\xi$ ;

$j=2, 3, 4 \dots (n-1)$  – номер шага вдоль оси  $\eta$ .

Для вычисления  $\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial \bar{t}_{ij}^2}$  и  $\frac{\partial w^{(k)}}{\partial \bar{t}_{ij}}$  воспользуемся формулами (16) и (17) (см.

Главу 4). Окончательно будем иметь:

$$4m_{i-1,j}^{(k)} + 4m_{i,j-1}^{(k)} - 16m_{i,j}^{(k)} + 4m_{i,j+1}^{(k)} + 4m_{i+1,j}^{(k)} - 2hC_4u_{i-1,j}^{(k)} + 2hC_4u_{i+1,j}^{(k)} - 2hC_5v_{i,j-1}^{(k)} + 2hC_5v_{i,j+1}^{(k)} + 2h \left( {}^{I-II}\Delta m_{ij}^{\xi(k)} + m^{III-IV}\Delta m_{ij}^{\xi(k)} \right) + 2h \left( {}^{I-III}\Delta m_{ij}^{\eta(k)} + {}^{II-IV}\Delta m_{ij}^{\eta(k)} \right) = -h^2 \left( {}^I p_{ij}^{(k)} + {}^{II} p_{ij}^{(k)} + {}^{III} p_{ij}^{(k)} + {}^{IV} p_{ij}^{(k)} + \frac{8}{\tau} w_{ij}^{\bar{t}^{(k-1)}} + \frac{8}{\tau^2} \left( w_{ij}^{(k-1)} - w_{ij}^{(k)} \right) + 4cw_{ij}^{\bar{t}^{(k-1)}} + c \frac{8}{\tau} \left( w_{ij}^{(k-1)} - w_{ij}^{(k)} \right) - 4C_3 w_{ij}^{(k)} \right). \quad (19)$$

Остальные уравнения системы (12) – (15) аппроксимируются аналогично.

**Четвертая глава.** Описано построение алгоритма расчета пологих оболочек на статические нагрузки. Для решения системы линейных алгебраических уравнений используется итерационный метод Зейделя. Уравнения преобразуются к виду, соответствующему необходимому условию конвергенции итерационного процесса так, чтобы все коэффициенты в правой части уравнений были не больше единицы.

Для анализа уравнений динамического равновесия, как правило, используют методы прямого интегрирования. В рамках проведенного исследования для аппроксимации по времени искомым функциям были рассмотрены квадратный сплайн и кубический.

На основании проведенного анализа, можно сформулировать следующие выводы:

- при аппроксимации искомым функциям во времени по квадратной параболе с увеличением числа разбиений получается сходящееся решение;
- для аппроксимации по кубической параболе необходимо большее, по сравнению с предыдущим вариантом, число разбиений.

В связи с этим в текущем исследовании был применен параболический сплайн.

Будем рассматривать искомую функцию как функцию трех переменных  $F(x, y, t)$ . Таким образом, численное решение динамической задачи можно получить, представив ее как двумерную задачу, так и как трехмерную.

Представим ось времени  $t$ , как одну из координатных осей. Тогда будем иметь трехмерную задачу, где:  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ ;  $0 \leq t \leq t_1$ .

Если же рассматривать область  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$  в каждый момент времени (т.е. на каждом временном слое), перейдем к двумерной задаче. Зададим:  $0 \leq t \leq \infty$ .

Поскольку двумерная постановка задачи не ограничивает время изучения динамического процесса, а также, в отличие от трехмерной, использует двумерные матрицы, остановимся на этом варианте.

Таким образом, используя аппроксимацию по квадратной параболе, запишем рекуррентные формулы для вычисления на каждом временном слое скорости и ускорения:

$$w^{\bar{t}(k)} = -w^{\bar{t}(k-1)} - \frac{2}{\bar{t}}(w^{(k-1)} - w^{(k)}); \quad (20)$$

$$w^{\bar{t}\bar{t}(k)} = -\frac{2}{\bar{t}}w^{\bar{t}(k-1)} - \frac{2}{\bar{t}^2}(w^{(k-1)} - w^{(k)}), \quad (21)$$

где  $k=2, 3, 4\dots$  – номер временного слоя, за начало отсчета шагов по времени принята точка 1.

Алгоритм расчета на динамические воздействия строим аналогично расчету на статические воздействия с использованием итерационного метода Зейделя.

Также в четвертой главе приводятся результаты решения тестовых и новых задач по расчету пологих оболочек на статические и динамические нагрузки.

При расчете пологих оболочек на статические нагрузки рассматривались воздействия: локальная нагрузка (шарнирное опирание).

По описанному алгоритму рассчитывается полая оболочка с шарнирно-подвижным опиранием по всем сторонам при  $a=b=1m$ ,  $\mu=0.3$ ,  $\delta/d=5$  под действием локальной нагрузки  $P=1кН$  (Рисунок 2).

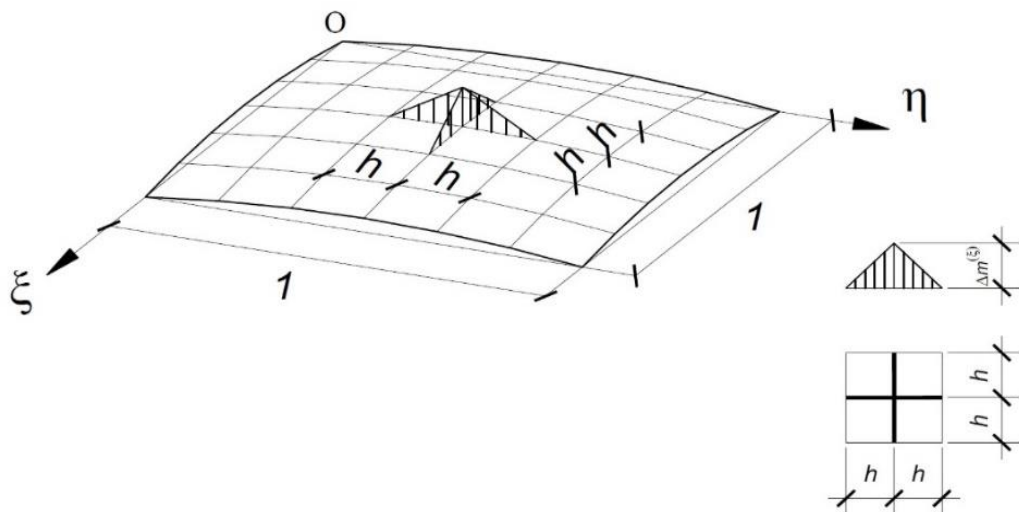


Рисунок 2. Действие локальной нагрузки на пологую оболочку

Сосредоточенная сила  $p$  может быть представлена как:  $p = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot h =$   
 $= 2 \cdot x \cdot h = 1$ , откуда интенсивность нагрузки  $x$  в расчетной точке:  $x = \frac{1}{2h}$ .

В Таблице 1 приведены значения  $w$  и  $m$  на различных сетках. Полученные решения сравнивались с решением, посчитанным с помощью двойных тригонометрических рядов при количестве членов 50. Для сравнения решений значения прогиба и изгибающего момента приведены к безразмерным величинам.

Таблица 1.

	<i>Обобщенные уравнения МКР</i>							<i>Тригонометрический ряд</i>
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
<i>h</i>	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/32
<i>w</i>	0.000314	0.001154	0.001709	0.00166	0.001593	0.001565	0.001557	0.00189
<i>m</i>	0.005024	0.06424	0.226706	0.367012	0.484629	0.596622	0.707492	0.3171

Далее решена задача построения поверхности влияния нагрузки указанного выше вида. Поверхность влияния строилась для центральной точки оболочки на сетке 1/32.

В Таблице 2 представлены результаты расчетов, где под 1, 2, 3 ... 16 подразумеваются  $i$  (вертикально) и  $j$  (горизонтально) по осям  $\xi$  и  $\eta$  соответственно.

Таблица 2.

<i>Поверхность влияния прогиба для центральной точки полой оболочки, <math>w \cdot 10^3</math></i>																
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>
<i>1</i>	-0.006	-0.012	-0.016	-0.020	-0.023	-0.025	-0.025	-0.026	-0.025	-0.023	-0.021	-0.019	-0.018	-0.016	-0.015	-0.015
<i>2</i>	-0.012	-0.022	-0.031	-0.039	-0.044	-0.047	-0.048	-0.048	-0.046	-0.043	-0.039	-0.034	-0.031	-0.027	-0.025	-0.025
<i>3</i>	-0.016	-0.031	-0.044	-0.054	-0.062	-0.065	-0.066	-0.065	-0.061	-0.055	-0.049	-0.042	-0.035	-0.029	-0.026	-0.025
<i>4</i>	-0.020	-0.039	-0.054	-0.067	-0.074	-0.079	-0.079	-0.076	-0.068	-0.060	-0.049	-0.038	-0.028	-0.020	-0.014	-0.013
<i>5</i>	-0.023	-0.044	-0.062	-0.074	-0.083	-0.086	-0.084	-0.077	-0.067	-0.053	-0.037	-0.020	-0.006	0.006	0.014	0.017
<i>6</i>	-0.025	-0.047	-0.065	-0.079	-0.086	-0.087	-0.082	-0.070	-0.054	-0.034	-0.011	0.012	0.033	0.050	0.061	0.065
<i>7</i>	-0.025	-0.048	-0.066	-0.079	-0.084	-0.082	-0.071	-0.054	-0.031	-0.002	0.030	0.061	0.091	0.115	0.130	0.136
<i>8</i>	-0.026	-0.048	-0.065	-0.076	-0.077	-0.070	-0.054	-0.029	0.003	0.043	0.086	0.129	0.169	0.202	0.223	0.231
<i>9</i>	-0.025	-0.046	-0.061	-0.068	-0.067	-0.054	-0.031	0.003	0.048	0.100	0.157	0.215	0.269	0.313	0.341	0.351
<i>10</i>	-0.023	-0.043	-0.055	-0.060	-0.053	-0.034	-0.002	0.043	0.100	0.167	0.240	0.316	0.387	0.446	0.486	0.500
<i>11</i>	-0.021	-0.039	-0.049	-0.049	-0.037	-0.011	0.030	0.086	0.157	0.240	0.334	0.430	0.523	0.602	0.655	0.672
<i>12</i>	-0.019	-0.034	-0.042	-0.038	-0.020	0.012	0.061	0.129	0.215	0.316	0.430	0.551	0.670	0.772	0.844	0.868
<i>13</i>	-0.018	-0.031	-0.035	-0.028	-0.006	0.033	0.091	0.169	0.269	0.387	0.523	0.670	0.815	0.948	1.044	1.080
<i>14</i>	-0.016	-0.027	-0.029	-0.020	0.006	0.050	0.115	0.202	0.313	0.446	0.602	0.772	0.948	1.112	1.241	1.291
<i>15</i>	-0.015	-0.025	-0.026	-0.014	0.014	0.061	0.130	0.223	0.341	0.486	0.655	0.844	1.044	1.241	1.403	1.482
<i>16</i>	-0.015	-0.025	-0.025	-0.013	0.017	0.065	0.136	0.231	0.351	0.500	0.672	0.868	1.080	1.291	1.482	1.593

На Рисунке 3 построена полученная в результате решения задачи поверхность влияния.

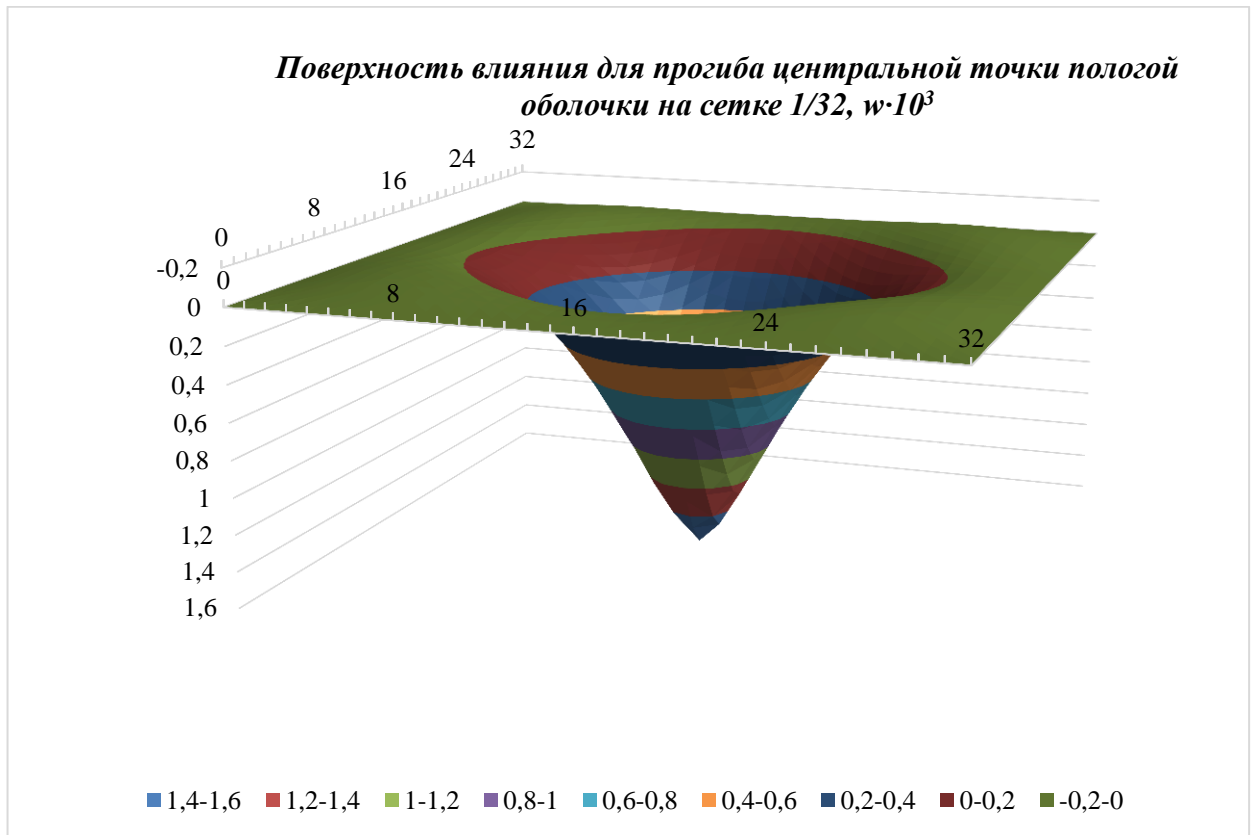


Рисунок 3. Поверхность влияния для прогиба центральной точки полой оболочки

При расчете пологих оболочек на динамические нагрузки рассматривались воздействия: гармонической нагрузки, равномерно распределенной по всей площади оболочки, действующей локально на некотором участке оболочки, а также воздействие полосовой гармонической нагрузки с различными сочетаниями краевых условий (шарнирное опирание, заделка, смешанные условия).

Рассмотрим расчет полой оболочки, квадратной в плане, с шарнирно-подвижным опиранием:  $a=b=1\text{м}$ ,  $\mu=0.3$ ,  $\delta/d=5$  и  $\delta/d=10$  под действием гармонической нагрузки, равномерно распределенной по всей площади оболочки, без учета затухания ( $c=0$ ).

Представим эту нагрузку для регулярной точки  $i,j$  на  $k^{\text{ом}}$  шаге по времени относительно безразмерных величин  $p_{ij}^k = \sin(2 * 0.8 * \pi * \bar{t}_k)$ .

В Таблице 3 приведены максимальные значения безразмерного прогиба  $w$  для центральной точки полой оболочки при различных отношениях  $\frac{\delta}{d}$ .

Таблица 3.

<i>Обобщенные уравнения МКР</i>								
$\delta/d$	5				10			
$\tau$	1/100		1/150		1/100		1/150	
$h$	1/12	1/16	1/12	1/16	1/12	1/16	1/12	1/16
$w \cdot 10^3$	0.028073	0.028380	0.028092	0.028365	0.006280	0.006194	0.006281	0.006193

Рассмотрим расчет полой оболочки, квадратной в плане, с шарнирно-подвижным опиранием:  $a=b=1m$ ,  $\mu=0.3$ ,  $\delta/d=5$  и  $\delta/d=10$  под действием локальной гармонической нагрузки, равномерно распределенной в центре оболочки на участке  $a_1=b_1=0,5m$ , без учета затухания ( $c=0$ ). Запишем эту нагрузку для точки  $i,j$  в  $k^{om}$  шаге по времени относительно безразмерных величин  $p_{ij}^k = \sin(2 * 0.8 * \pi * \bar{t}_k)$ .

В Таблице 4 приведены максимальные значения безразмерного прогиба  $w$  для центральной точки полой оболочки при различных отношениях  $\frac{\delta}{d}$ .

Таблица 4.

<i>Обобщенные уравнения МКР</i>								
$\delta/d$	5				10			
$\tau$	1/100		1/150		1/100		1/150	
$h$	1/12	1/16	1/12	1/16	1/12	1/16	1/12	1/16
$w \cdot 10^3$	0.040989	0.042665	0.041012	0.042669	0.010904	0.011315	0.010890	0.011343

Рассмотрим расчет полой оболочки, квадратной в плане, с шарнирно-подвижным опиранием  $a=b=1m$ ,  $\mu=0.3$ ,  $\delta/d=5$  и  $\delta/d=10$  под действием полосовой гармонической нагрузки, действующей в середине полой оболочки, параллельно одной из координатных осей, без учета затухания ( $c=0$ ). Запишем эту



нагрузку для точки  $i,j$  в  $k^{om}$  временном слое относительно безразмерных величин  $p_{ij}^k = \sin(2 * 0.8 * \pi * \bar{t}_k)$ .

В Таблице 5 приведены максимальные значения безразмерного прогиба  $w$  и соответствующего ему изгибающего момента  $m$  для центральной точки полой оболочки при различных отношениях  $\frac{\delta}{d}$ .

Таблица 5.

<i>Обобщенные уравнения МКР</i>								
$\delta/d$	5				10			
$\tau$	1/100		1/150		1/100		1/150	
$h$	1/12	1/16	1/12	1/16	1/12	1/16	1/12	1/16
$w \cdot 10^3$	0.184351	0.185584	0.183836	0.185001	0.065865	0.069584	0.065873	0.069780
$m \cdot 10$	0.230353	0.264896	0.232579	0.265085	0.117774	0.158084	0.117740	0.158319

Решения других задач даны в диссертации.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Проведенное исследование выполнено в соответствии с поставленными целями. Таким образом, в диссертации решены следующие задачи.

1. Разработаны методика и алгоритм расчета пологих оболочек (прямоугольных в плане, двойкой кривизны) на действие различных видов динамических нагрузок с различными краевыми условиями (а также с различными сочетаниями этих условий). В основу выполненной работы легли предложенные Габбасовым Р.Ф. обобщенные уравнения метода конечных разностей (МКР). Автор предлагает рассматривать, в известной мере, описанную в диссертации методику как дальнейшее развитие МКР.

2. На основании изложенного метода автором составлена программа для ЭВМ на языке программирования Visual Basic в связке с Microsoft Excel. Программа выполняет решение задачи по расчету прямоугольных в плане

пологих оболочек двойкой кривизны на статические и динамические воздействия при различных комбинациях краевых условий.

3. Проверены предложенные в работе методики путем решения известных (тестовых) задач, а также выполнены численные исследования решений указанных задач на их сходимость.

4. В составленной программе решены новые задачи по расчету пологих оболочек на статические и динамические воздействия.

Анализируя выполненное диссертационное исследование, можно сделать следующие выводы.

1. В результате сопоставления полученных решений тестовых задач с известными решениями, полученными ранее, а также на основании проведенного численного исследования сходимости этих решений, можно утверждать, что составленная по разработанному алгоритму программа работает устойчиво и надежно.

2. На основании п.1 программа для ЭВМ может быть рекомендована к практическому применению для расчета оболочечных конструкций, а именно пологих оболочек. В результате пользователь сможет получить значения перемещений и усилий во всех расчетных точках наложенной сетки.

3. Поскольку в исследовании на многочисленных примерах выявлено, что использование предложенного алгоритма на основании обобщенных уравнений МКР позволяет получать в достаточной мере точные результаты на грубых сетках, можно рекомендовать эту методику для получения (при минимальном числе разбиений) удовлетворительной оценки напряженно-деформированного состояния изгибаемых пологих оболочек. Отметим, что такая оценка, проводимая на грубых сетках, не требует существенных временных затрат, а также может быть выполнена с применением простейших вычислительных средств.

4. Материалы диссертации в виде алгоритмов, составленной программы для ЭВМ, а также графиков и таблиц могут быть использованы в последующих инженерных расчетах и научно-исследовательских работах.

В качестве перспективы разработки рассматриваемой темы предполагается расчет пологих оболочек на основании обобщенных уравнений МКР на динамические нагрузки, а именно: разрывные нагрузки, температурные воздействия, а также локальные несимметричные нагрузки, действующие на произвольном участке полой оболочкой.

**Основные положения диссертации и результаты исследований опубликованы в следующих публикациях:**

**В периодических изданиях, включенных в перечень рекомендованных ВАК РФ:**

1. Боброва В.И. Построение поверхности влияния прогиба для центральной точки полой оболочкой // Строительная механика и расчет сооружений, 2018, №3.2-7 с.
2. Габбасов Р.Ф, Филатов В.В., Боброва В.И. К расчету оболочек вращения в упругой среде // Научное обозрение, 2017, №18. 26-28 с.
3. Габбасов Р.Ф, Филатов В.В., Боброва В.И. К расчету ортотропных пластин на устойчивость // Научное обозрение, 2017, №19. 6-9 с.

**Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:**

4. Боброва В.И. Расчет пологих оболочек на некоторые виды динамических воздействий // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2018616521 от 01.06.2018.