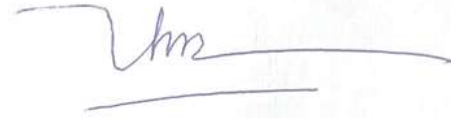


На правах рукописи

A handwritten signature in blue ink, consisting of a stylized 'U' followed by 'm', with a horizontal line underneath.

ВУХО НАМ

РАСЧЕТ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

05.23.17 – Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание
ученой степени кандидата технических наук

Москва – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор

Габбасов Радек Фатыхович

Официальные
оппоненты:

Иванов Вячеслав Николаевич

доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов», профессор-консультант

Петренко Филипп Игоревич

кандидат технических наук, Общество с ограниченной ответственностью «Филипп и партнёры. Проект», директор

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО «Поволжский государственный технологический университет»**

Защита состоится «18» декабря 2018 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 218.005.05, созданного на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет транспорта (МИИТ)» по адресу: 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, ауд. 7618.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Российский университет транспорта (МИИТ)» www.miit.ru.

Автореферат разослан «16» ноября 2018 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета



Шавыкина Марина Витальевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность выбранной темы исследования.

- В строительстве широкое применение находят конструкции, работа которых, может быть представлена моделью анизотропной, а в частности ортотропной, пластины. Это железобетонные перекрытия, ребристые плиты, сталежелезобетонные перекрытия и т.п. Часто, внешним воздействием на эти конструкции, является динамическая нагрузка. Не для всех задач возможно получить решение в аналитической форме.
- В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) используется как один из самых популярных методов для расчета строительных конструкций. Однако достоверность численных решений, может быть подтверждена надежно, лишь совпадением результатов, полученных двумя различными методами.
- Поэтому разработка эффективной численной методики расчета вышеуказанных конструкций на динамическое воздействие на базе разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА), является актуальной темой.

Целью диссертационной работы является разработка эффективного численного алгоритма расчета поперечных колебаний ортотропных пластин с различными условиями на краях.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать методику расчета ортотропных плит на статические и динамические нагрузки.
- формирование алгоритма и программы для ЭВМ для расчета ортотропных плит на динамические и статические нагрузки.
- применение общей программы для расчета ортотропных плит на статические, динамические нагрузки.
- сравнение результатов исследования с результатами известных работ.
- решение новых задач по расчету ортотропных плит в условиях динамического нагружения.

Научную новизну составляют результаты:

- ✓ Алгоритм расчета ортотропных плит по определению частот и форм собственных колебаний.
- ✓ Разработка методики расчета ортотропных плит на вынужденные колебания.
- ✓ Решение новых задач по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается использованием при постановке задач гипотез, принятых в механике деформируемого твердого тела, строительной механике. Кроме того, сравнение полученных решений с известными аналитическими результатами, анализ практической сходимости приближенных решений, выполнение интегральных условий равновесия – свидетельствуют о достоверности научных положений, выводов и рекомендаций.

Теоретическая и практическая значимость заключаются в проработке наиболее эффективных численных алгоритмов и программ по расчету ортотропных изгибаемых пластин. Программы дают возможность:

- расчета ортотропной пластины на статические и динамические нагрузки;
- краевых условия задачи;
- реальность перехода к расчету изотропных плит.

Вместе с тем, представлено и показано, что плиты возможно рассчитать вручную с довольно высокой точностью при незначительном числе разбиений. Этот факт дает возможность рекомендовать данную разработанную методику расчета для применения в учебном процессе, что играет довольно значительную роль для образовательной системы развивающихся стран, в том числе и для Вьетнама.

Методология и метод исследования:

Методология диссертационного исследования базируется на фундаментальных положениях строительной механики и методах моделирования работы строительных конструкций.

В качестве метода исследования используется хорошо себя зарекомендовавший при расчете пластин и оболочек на статические и динамические нагрузки – метод последовательных аппроксимаций (МПА).

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы были представлены на следующих конференциях :

- Международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы», посвященная 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РААСН, профессора, доктора технических наук Н.Н. Леонтьева, 110-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР, профессора, доктора технических наук В.З. Власова. НИУ МГСУ.

- XII Международной научно-практической конференция «Advances in Science and Technology». Научно-издательский центр ООО «Актуальность.РФ»

- Международной научно-практической конференции «Инновационные исследования: проблемы внедрения результатов и направления развития». МЦИИ «Омега Сайнс».

Публикации. По теме диссертации опубликовано 2 печатных работы в рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК для публикации результатов кандидатских диссертаций.

На защиту выносятся:

- алгоритмы расчета ортотропных пластин на различные статические и динамические нагрузки;
- результаты решения новых задач по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки.

Структура и объем работы. Диссертация содержит введение, четыре главы, заключение, список литературы. Общий объем диссертации составляет 116 страниц, в текст включены 19 рисунков и 21 таблица.

Структура и содержание работы.

Во введении описываются следующие аспекты: актуальность данной диссертации, степень ее разработанности, основные цели и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, положения выносимые на защиту, а также достоверность результатов и апробация работы.

В первой главе дается общий обзор источников для расчета анизотропных пластин аналитическими и численными методами. Пристальное внимание акцентируется на работах, где рассчитываются ортотропные пластины. Отдельными параграфами рассмотрено применение современных численных методов, таких как МКЭ, МПА и метод конечных разностей МКР.

Наибольший вклад в развитие общей теории изгиба пластин внесли известные российские и зарубежные ученые: И.Г. Бубнов., Б.Г. Галеркин, С.М. Тимошенко, С. Войновского-Кригер, С.Г. Лехницкий, С.А. Амбарцумян, Д.В. Пештмалджян, Л.А. Агаловян, Б.Я. Лащеников, В.В.Бадагадзе, Ш.Е. Микеладзе, Е.Ф. Бурмистров, Н.М. Маслова, А.А. Галаси, К.А. Китовер, Е.Б. Коренева, И.И.Трянин, Ф.Бадалов, Г.И. Пшеничнов, С.И. Трушин, Н.А. Лобкова, Л.А. Ильин и др.

Теория и расчет сжато-изогнутых ортотропных пластин представлены в работах И.М. Рабиновича, П.М. Варвака, Н.П. Абовского, О. Блейха, Д.В. Вайнберга, М.И. Длугача, М.С. Корнишина, Л.П. Варвака, К.К. Керопяна, А.С. Вольмира, Г.Н. Положего, А.П. Синицына, В.И. Соломина, А.В.Александрова, А.Ф.Смирнова, Б.Я.Лащеникова, М.Б.Вахитова, Р.Ф.Габбасова и др.

Среди современных численных методов можно упомянуть: МКЭ, МПА, обобщенные уравнения МКР. Последние два метода были предложены Р.Ф. Габбасовым на кафедре СиТМ в НИУ МГСУ. В диссертации используется МПА для расчета ортотропных пластин на динамические и статические воздействия.

Во второй главе разрабатывается алгоритм расчета ортотропных пластин на статические нагрузки с использованием МПА .

В отношении своих упругих свойств материала пластины обладают тремя плоскостями симметрии. Они принимаются в качестве координатных плоскостей. Эти пластинки называются ортотропными.

Разрешающее дифференциальное уравнение расчета ортотропных пластин на поперечный изгиб в безразмерном виде:

$$\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\gamma \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = p, \quad (1)$$

$$\text{где: } \alpha = \frac{D_x}{D_y}; \gamma = \frac{H}{D_y}; p = \frac{q}{q_0}; \xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{a}; w = \frac{WD_y}{q_0 a^4}; \quad (2)$$

q_0 – интенсивность нагрузки в фиксированной точке; a – длина одной из сторон плиты. W – Вертикальное перемещение точки плиты; q – интенсивность распределенной по поверхности пластины поперечной нагрузки; D_x, D_y – изгибные жесткости относительно осей y, x ; H – жесткость на кручение.

Дифференциальное уравнение четвертого порядка (1) представим как дифференциальное уравнение второго порядка, относительно вторых производных:

$$\alpha \frac{\partial^2 w^{\xi\xi}}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 w^{\xi\xi}}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial^2 w^{\eta\eta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w^{\eta\eta}}{\partial \eta^2} = p. \quad (3)$$

$$\text{где: } w^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; w^{\xi\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}; w^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}. \quad (4)$$

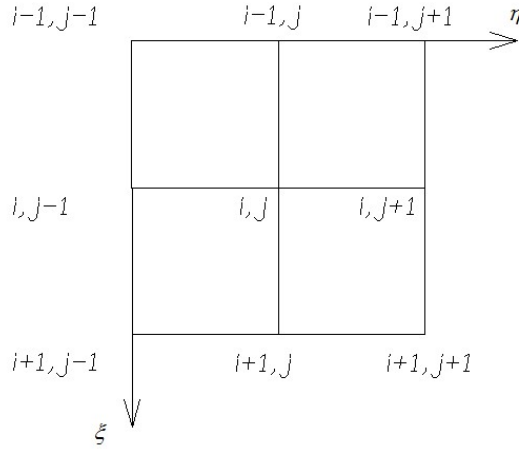


Рис.1.
Фрагмент сетки
 i, j - координаты точек

Задавая шаг сетки h и при этом принимая разрывы неизвестных равными нулю, разностную аппроксимацию (3) по методу последовательных аппроксимаций получим в регулярной точке ij :

$$\begin{aligned} & (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\ & - (2\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + \gamma)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\ & + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\ & + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\ & - 2(\gamma - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\ & + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} = \\ & = 3h^2(I p_{ij} + II p_{ij} + III p_{ij} + IV p_{ij}). \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения безразмерных прогибов w воспользуемся уравнением, полученным с использованием результатов Нумерова Б.В. на равномерной сетке с шагом h при непрерывных w , w^η и $w^{\eta\eta}$:

$$w_{i,j-1} - 2w_{ij} + w_{i,j+1} = \frac{h^2}{12}(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}). \quad (6)$$

Уравнение (6) можно записать в направлении оси ξ ; для этого достаточно в (6) η, i, j заменить соответственно на ξ, j, i :

$$w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j} = \frac{h^2}{12}(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 10w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}). \quad (7)$$

Уравнение (6) справедливо для всех линий сетки, паралельных оси η (в том числе для свободных от закреплений краев, на которых $w \neq 0$); уравнение (7) – для линий, паралельных оси ξ .

Запишем уравнения (6) и (7) в следующем виде:

$$\bar{w}_{i,j-1} - 2\bar{w}_{ij} + \bar{w}_{i,j+1} = w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}; \quad (8)$$

$$\bar{w}_{i-1,j} - 2\bar{w}_{ij} + \bar{w}_{i+1,j} = w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 10w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}; \quad (9)$$

$$\text{где } \bar{w} = \frac{12}{h^2} w. \quad (10)$$

Вычитая (8) из (9), исключим \bar{w}_{ij} :

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j} - w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\ & + w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 10w_{ij}^{\xi\xi} + 10w_{ij}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} - w_{i+1,j}^{\xi\xi} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Далее запишем (11), умножая соответственно на $2(\gamma+1)$ и на $-2(\alpha+\gamma)$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -2(\gamma+1)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\ & + 2(\gamma+1)w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 20(\gamma+1)(w_{ij}^{\eta\eta} - w_{ij}^{\xi\xi}) + 2(\gamma+1)w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \\ & - 2(\gamma+1)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + \\ & - 2(\gamma+1)(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) = 0; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2(\alpha+\gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\ & - 2(\alpha+\gamma)w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 20(\alpha+\gamma)(w_{ij}^{\xi\xi} - w_{ij}^{\eta\eta}) - 2(\alpha+\gamma)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\ & + 2(\alpha+\gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} - \\ & - 2(\alpha+\gamma)(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

Преобразуя (10), (12) и (13):

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - 2\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + 2\gamma + 1)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - 2\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 12w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 12w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(\gamma + 1)(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) = 3h^2({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij});
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 12\alpha w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 12\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(2\gamma + \alpha - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 20(2\gamma + \alpha + 1)w_{ij}^{\eta\eta} - 2(2\gamma + \alpha - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(\alpha + \gamma)(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) = 3h^2({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij});
\end{aligned} \tag{15}$$

При $\alpha = 1; \xi = \eta; \eta = \xi; i = j; j = i$ коэффициенты при $w_{ij}^{\xi\xi}, w^{\eta\eta}$ в (14) и (15) совпадают.

Далее суммируем уравнения (6), (7):

$$\begin{aligned}
& \bar{w}_{i-1,j} + \\
& + \bar{w}_{i,j-1} - 4\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{i,j+1} + \\
& + \bar{w}_{i+1,j} = \\
& = w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\
& + w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10(w_{ij}^{\xi\xi} + w_{ij}^{\eta\eta}) + w_{i,j+1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Решая (14), (15) формально относительно $w_{ij}^{\xi\xi}, w_{ij}^{\eta\eta}$ и преобразуя (16), получим выражения для интерационного решения этих уравнений с непревышающими единицы коэффициентами при неизвестных в правой части.

Краевые условия при $\eta = 0$ запишутся так:

Шарнирно опертый край:

$$w = 0; w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = 0. \tag{17}$$

Жестко заделанный край:

$$w = 0; w^{\xi\xi} = 0; w^{\eta\eta} = 0. \tag{18}$$

где $w^\eta = \frac{\partial w}{\partial \eta}$.

Свободный от закреплений край:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\eta)} = {}^0 m^{(\eta)} &= \frac{M_y^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0 v^{(\eta)} &= \frac{v_y^0}{q_0 a} = -\frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \eta} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

При $\xi = 0$ для свободного края имеем:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\xi)} = {}^0 m^{(\xi)} &= \frac{M_x^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0 v^{(\xi)} &= \frac{v_x^0}{q_0 a} = -\frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \xi} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$v_y^0, v_x^0, {}^0 m^{(\eta)}, {}^0 m^{(\xi)}$ - заданные значения перечисленных параметров на краях плиты.

Если пересекающиеся под прямым углом стороны пластинки шарнирно оперты или жестко заделаны, то справедливо выражение (17).

Если обе стороны плиты в угловой точке свободны от закреплений, то в угловой точке:

$$w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = r = 0; \quad (21)$$

Если в угловой точке одна сторона плиты свободна, другая – жестко закреплена, то:

$$w = 0; w^{\eta\eta} = 0; w^\xi = 0; \quad (22)$$

где $w^\xi = \frac{\partial w}{\partial \xi}$.

В частности, в случае квадратной сетки для точки ij левого жестко заделанного края прямоугольной плиты имеем:

$$\begin{aligned} w_{ij}^{\eta\eta} &= \left\{ 7w_{i-1,j}^{\eta\eta} + 6w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - w_{i-1,j+2}^{\eta\eta} + 2w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - w_{i-1,j+2}^{\xi\xi} - \right. \\ &- 14w_{i,j}^{\eta\eta} - 12w_{i,j+1}^{\eta\eta} + 2w_{i,j+2}^{\eta\eta} - 28w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+2}^{\xi\xi} + \\ &7w_{i+1,j}^{\eta\eta} + 6w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - w_{i+1,j+2}^{\eta\eta} + 2w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} - w_{i+1,j+2}^{\xi\xi} + \\ &\left. + 2 \frac{h}{\alpha} \left[\text{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} - \text{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] \right\} / 28. \end{aligned} \quad (23)$$

Для точки ij верхнего заделанного края плиты (23) записывается с заменой η, ξ, i, j соответственно на ξ, η, j, i . Для правого и нижнего жестко заделанных краев прямоугольной плиты эти уравнения записывается в «зеркальном отображении».

Для точки ij левого ($\eta = 0$) свободного от закреплений края ортотропной пластины справедливо следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
w_{ij}^{\xi\xi} = & \left\{ (\alpha - \mu^2) (w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + 2h^0 v_{ij}^{(\eta)} - \right. \\
& - \mu \left[{}^0 m_{i-1,j}^{(\eta)} + {}^0 m_{i+1,j}^{(\eta)} \right] + 2(1 + \mu) {}^0 m_{i,j}^{(\eta)} + \\
& \left. + 2(2\gamma - \mu) w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+1}^{\eta\eta} - h^2 p_{ij} \right\} / 2 \left[\alpha + 2\gamma - \mu(2 + \mu) \right].
\end{aligned} \tag{24}$$

Это уравнение для точки ij левого свободного от закреплений края ортотропной плиты. Для правого края оно записывается в «зеркальном отображении».

Для точки ij верхнего свободного края плиты:

$$\begin{aligned}
w_{ij}^{\eta\eta} = & \left\{ \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha} \right) w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 2(2\gamma - \mu) w_{i+1,j}^{\eta\eta} + \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha} \right) w_{i,j+1}^{\eta\eta} + 2h^0 v_{ij}^{(\xi)} - \right. \\
& - \frac{\mu}{\alpha} \left({}^0 m_{i,j-1}^{(\xi)} + {}^0 m_{i,j+1}^{(\xi)} \right) + 2 \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) {}^0 m_{i,j}^{(\xi)} + \\
& \left. + 2\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} - h^2 p_{ij} \right\} / 2 \left[1 + 2\gamma - \mu \left(2 + \frac{\mu}{\alpha} \right) \right].
\end{aligned} \tag{25}$$

Для точки ij нижнего свободного края уравнения (25) записывается в «зеркальном отображении».

Как отмечено выше, в этих формулах: ${}^0 v^{(\eta)}$, ${}^0 v^{(\xi)}$, ${}^0 m^{(\eta)}$, ${}^0 m^{(\xi)}$ - заданные на свободных краях плиты значения обобщенных поперечных сил и изгибающих моментов, в частности, равные нулю.

Прогиб в точке ij верхнего и нижнего свободных краев плиты:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{ij} = & 0,25 \left(\tilde{w}_{i,j-1} + \tilde{w}_{i,j+1} \right) + 0,5 w_{ij}^{\xi\xi} - \\
& - 0,1 \left(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} \right) - w_{ij}^{\eta\eta}.
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\text{где: } \tilde{w} = \frac{\bar{w}}{2,5} = \frac{24}{5} \frac{w}{h^2}. \tag{27}$$

Уравнение для определения \tilde{w}_{ij} на левом и правом свободных от закреплений края плиты следует из (26) с заменной η, i, j соответственно на ξ, j, i .

В третьей главе. рассматриваются задачи поперечных колебаний ортотропных пластин. В первом параграфе рассмотрены свободные колебания пластин без учета диссипативных сил, приведены примеры расчета. Во втором параграфе на основе метода прямого интегрирования вдоль временной оси разработана численная методика расчета ортотропных пластин на динамические нагрузки с учетом сил сопротивления по модели Фойгта.

Для определения частот и форм колебаний ортотропных пластин постоянной толщины без учета поглощения энергии используется дифференциальное уравнение:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \omega^2 \bar{\mu} W = 0. \tag{28}$$

где ω - круговая частота собственных колебаний ; $\bar{\mu}$ масса пластины на единицу площади; W - прогиб; D_x, D_y, H - жесткости ортотропных пластин в трех взаимно перпендикулярных направлениях, значения которых определяются экспериментальным путем.

При $D_x = H = D_y = D$ из (28) можно получить уравнение изотропных плит.

Для перехода к безразмерным величинам положим:

$$a = \frac{D_x}{D_y}; y = \frac{H}{D_y}; \gamma = \frac{H}{D_y}, \xi = xa^{-1}, \eta = ya^{-1}; w = W \frac{D_y}{\mu a^4}. \quad (29)$$

где a – длина одной из сторон; x, y - оси координат.

Запишем уравнение (28) с учетом безразмерных величин:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\gamma \frac{d^4 w}{d\xi^2 d\eta^2} + \frac{d^4 w}{d\eta^4} - \Psi w = 0. \quad (30)$$

$$\text{где } \Psi - \text{ безразмерная величина: } \Psi = \omega^2 \frac{\bar{\mu} a^4}{D_y}. \quad (31)$$

Дифференциальное уравнение четвертого порядка (30) представим как дифференциальное уравнение второго порядка, относительно вторых производных w :

$$\frac{d^2 w^{\xi\xi}}{d\xi^2} + \gamma \frac{d^2 w^{\xi\xi}}{d\eta^2} + \gamma \frac{d^2 w^{\eta\eta}}{d\xi^2} + \frac{d^2 w^{\eta\eta}}{d\eta^2} = \Psi w. \quad (32)$$

$$\text{где } w^{\xi\xi} = \frac{d^2 w}{d\xi^2}; w^{\eta\eta} = \frac{d^2 w}{d\eta^2}. \quad (33)$$

Задаваясь шагом сетки h и при этом принимая разрывы равными нулю, разностную аппроксимацию (32) по методу последовательных аппроксимаций получим в виде:

$$\begin{aligned} & (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\ & - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + 2\gamma)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\ & + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - 2\gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\ & + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\ & - 2(\gamma - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(2\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\ & + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} = \\ & = \frac{h^2}{6} \Psi (w_{i-1,j-1} + 4w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} + 52w_{i,j} + \\ & + 4w_{i,j+1} + w_{i+1,j-1} + 4w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1}). \end{aligned} \quad (34)$$

На рисунке показан фрагмент сетки, на которой строится решение. Каждое из выражений (33) формально можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. При решении задач удобнее пользоваться линейными комбинациями (6), (7), а именно их разностью и суммой:

$$w_{i-1,j} + w_{i+1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} + \frac{h^2}{12}(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} - w_{i-1,j}^{\xi\xi} - 10w_{i,j}^{\xi\xi} - w_{i+1,j}^{\xi\xi}) = 0 \quad (35)$$

$$w_{i-1,j} - 4w_{i,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} - \frac{h^2}{12}(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} + w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 10w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) = 0 \quad (36)$$

В качестве первого примера расчета по составленной программе рассмотрим квадратную шарнирно оператую по контуру ортотропную пластину, для которой в была получена при минимальном числе разбиений величина ω . Ниже будем определять

$$\omega = \bar{\omega} \cdot \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{\partial y}{\mu}}, \quad (37) \text{ где } \bar{\omega} = \sqrt{\Psi}; \quad (38). \text{ Тогда для рассматриваемого примера получим:}$$

$$\bar{\omega} = 9,41\sqrt{1+2\alpha+\gamma}. \quad (39)$$

В приведенных далее примерах будем полагать, $\alpha = 0,4823; \gamma = 0,6944; \mu = 0,2083$. При этих значениях коэффициентов следует $\bar{\omega} = 15,9400$. Точный результат в работе Лехницкого С.Г. $\bar{\omega} = 16,7234$.

В табл.1 приводятся значения ω_{\min} , полученные на различных сетках: в нижней строке- погрешность численных результатов по сравнению с результатами работы Лехницкого С.Г. ; n-число разбиений стороны плиты.

табл.1

n	2	4	8	12	16
$\bar{\omega}$	15,9400	16,6743	16,7204	16,7232	16,7227
Погрешность в %	-4,7	-0,3	-0,02	-0,001	-0,004

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, т.е уравнение движения под действием переменной нагрузки $q(x,y,t)$, запишем для ортотропной пластинки, переходя к обозначениям жесткостей в случае учета затухания по Фойгту:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \bar{\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \bar{c} \frac{\partial W}{\partial t} = q(x,y,t), \quad (40)$$

где \bar{c} - параметр затухания; t-время.

Приведем (39) к безразмерному виду:

$$\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\gamma \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{t}^2} + \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \bar{t}} = p, \quad (41)$$

где $\bar{t} = \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{D_y}{\mu}}$, (42)- безразмерное время; $\bar{c} = \frac{\bar{c} \cdot a^2}{\sqrt{D_y \cdot \mu}}$; $p = \frac{q(x,y,t)}{q_0}$, (43).

$$\alpha \frac{\partial^4 W^{\xi\xi}}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^4 W^{\xi\xi}}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial^2 W^{\eta\eta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W^{\eta\eta}}{\partial \eta^2} = p - \omega^{\bar{t}\bar{t}} - \bar{c} \cdot \omega^{\bar{t}}, \quad (44)$$

$$\text{где } \omega^{\bar{t}\bar{t}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{t}^2}; \quad \omega^{\bar{t}} = \frac{\partial W}{\partial \bar{t}}. \quad (45)$$

Аппроксимация по МПА на квадратной сетке при постоянных коэффициентах в пределах элементов, но разрывных в точке ij (рис. 2.2.) величинах p , может быть выполнена так (32) записываем с заменой $\psi \cdot w$ на $-(\omega^{\bar{t}\bar{t}} + \bar{c}\omega^{\bar{t}})$. При записи этого уравнения будем полагать:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{I-II} q_{i,j-1/2}^{(\xi)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta^{I-II} q_{i,j-1/2}^{(\xi)} + \Delta^{I-II} q_{i,j}^{(\xi)} \right] \\ \Delta^{III-IV} q_{i,j+1/2}^{(\xi)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta^{III-IV} q_{i,j}^{(\xi)} + \Delta^{III-IV} q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] \\ \Delta^{I-III} q_{i-1/2,j}^{(\eta)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta^{I-III} q_{i-1,j}^{(\eta)} + \Delta^{I-III} q_{i,j}^{(\eta)} \right] \\ \Delta^{II-IV} q_{i+1/2,j}^{(\eta)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta^{II-IV} q_{i,j}^{(\eta)} + \Delta^{II-IV} q_{i+1,j}^{(\eta)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} &(\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + \gamma)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\ &+ (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\ &- 2(\alpha - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\ &+ h \left\{ \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right) \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - \left(4 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left[\Delta q_{ij}^{(\xi)} + \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right) \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\ &+ h \left\{ (\gamma - 2) \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - (4 + \gamma) \left[\Delta q_{ij}^{(\eta)} + \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] + (\gamma - 2) \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \quad (47) \\ &= 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij}) - \frac{h^2}{6} \left[w_{i-1,j-1}^{\bar{t}\bar{t}} + 4w_{i-1,j}^{\bar{t}\bar{t}} + w_{i-1,j+1}^{\bar{t}\bar{t}} + 4w_{i,j-1}^{\bar{t}\bar{t}} + 52w_{i,j}^{\bar{t}\bar{t}} + 4w_{i,j+1}^{\bar{t}\bar{t}} + \right. \\ &+ w_{i+1,j-1}^{\bar{t}\bar{t}} + 4w_{i+1,j}^{\bar{t}\bar{t}} + w_{i+1,j+1}^{\bar{t}\bar{t}} + \bar{C} \left(w_{i-1,j-1}^{\bar{t}} + 4w_{i-1,j}^{\bar{t}} + w_{i-1,j+1}^{\bar{t}} + 4w_{i,j-1}^{\bar{t}} + 52w_{i,j}^{\bar{t}} + \right. \\ &\left. \left. + 4w_{i,j+1}^{\bar{t}} + w_{i+1,j-1}^{\bar{t}} + 4w_{i+1,j}^{\bar{t}} + w_{i+1,j+1}^{\bar{t}} \right) \right]. \end{aligned}$$

В точке ij пространственной сетке запишем:

$$\omega_{i,j}^{\bar{t}\bar{t}}(k) = \frac{2}{\tau} \bar{v}_{ij}^{(k-1)} - \frac{5h^2}{12\tau^2} \left[\bar{w}_{i,j}^{(k-1)} - \bar{w}_{i,j}^{(k)} \right]; \quad (48)$$

$$\bar{v}_{i,j}^{(k)} = -\bar{v}_{i,j}^{(k-1)} - \frac{5h^2}{12\tau} \left[\bar{w}_{i,j}^{(k-1)} - \bar{w}_{i,j}^{(k)} \right]. \quad (49)$$

где $\bar{v} = \omega^{\bar{t}}$; k - номер временного слоя, на котором определяются неизвестные уравнения (46); $\bar{w} = \frac{24}{5} \frac{\omega}{h^2}$; $\tau = \bar{t}$ – шаг вдоль безразмерной временной оси.

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + \gamma)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(\alpha - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + \frac{5}{72} \left(1 + \tau\bar{C}\right) \frac{h^4}{\tau^2} \left[\tilde{w}_{i-1,j-1}^k + 4\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i-1,j+1}^k + 4\tilde{w}_{i,j-1}^k + 52\tilde{w}_{i,j}^k + 4\tilde{w}_{i,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j-1}^k + 4\tilde{w}_{i+1,j}^k + \tilde{w}_{i+1,j+1}^k \right] + \\
& + h \left\{ \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - \left(4 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\
& + h \left\{ (\gamma - 2)^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - (4 + \gamma) \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] + (\gamma - 2)^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \\
& = \Omega^{(k-1)} + 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij}),
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\Omega^{(k-1)} = \frac{5}{72} \left(1 + \tau\bar{C}\right) \frac{h^4}{\tau^2} \left[\tilde{w}_{i-1,j-1}^{(k-1)} + 4\tilde{w}_{i-1,j}^{(k-1)} + \tilde{w}_{i-1,j+1}^{(k-1)} + 4\tilde{w}_{i,j-1}^{(k-1)} + 52\tilde{w}_{i,j}^{(k-1)} + 4\tilde{w}_{i,j+1}^{(k-1)} + \tilde{w}_{i+1,j-1}^{(k-1)} + 4\tilde{w}_{i+1,j}^{(k-1)} + \tilde{w}_{i+1,j+1}^{(k-1)} \right] +$$

где:

$$\frac{h^2}{3\tau} \left(1 + \frac{\tau\bar{C}}{2}\right) \left[\bar{v}_{i-1,j-1}^{(k-1)} + 4\bar{v}_{i-1,j}^{(k-1)} + \bar{v}_{i-1,j+1}^{(k-1)} + 4\bar{v}_{i,j-1}^{(k-1)} + 52\bar{v}_{i,j}^{(k-1)} + 4\bar{v}_{i,j+1}^{(k-1)} + \bar{v}_{i+1,j-1}^{(k-1)} + 4\bar{v}_{i+1,j}^{(k-1)} + \bar{v}_{i+1,j+1}^{(k-1)} \right].$$

(51)

Далее из уравнений (45), (46) и (50):

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - 2\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + 2\gamma + 1)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - 2\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + 12w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 12w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + \frac{5}{72} \left(1 + \tau\bar{C}\right) \frac{h^4}{\tau^2} \left[\tilde{w}_{i-1,j-1}^k + \tilde{w}_{i-1,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j-1}^k + \tilde{w}_{i+1,j+1}^k + 52\tilde{w}_{i,j}^k \right] + \\
& + 5 \left(1 + \gamma + \frac{1 + \tau\bar{C} h^4}{18 \tau^2} \right) \left[\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k \right] - 5 \left(1 + \gamma - \frac{1 + \tau\bar{C} h^4}{18 \tau^2} \right) \left[\tilde{w}_{i,j-1}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k \right] + \\
& + h \left\{ \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - \left(5 + \alpha + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\
& + h \left\{ (\gamma - 2)^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - 3 \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] + (\gamma - 2)^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \Omega^{(k-1)} + 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij});
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 12\alpha w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 12\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(\alpha + 2\gamma - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\alpha + 2\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} + 2(\alpha + 2\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + \frac{5}{72} \left(1 + \tau \bar{C}\right) \frac{h^4}{\tau^2} \left[\tilde{w}_{i-1,j-1}^k + \tilde{w}_{i-1,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j-1}^k + \tilde{w}_{i+1,j+1}^k + 52\tilde{w}_{i,j}^k \right] + \\
& - 5 \left(\alpha + \gamma - \frac{1 + \tau \bar{C}}{18} \frac{h^4}{\tau^2} \right) \left[\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k \right] + 5 \left(\alpha + \gamma + \frac{1 + \tau \bar{C}}{18} \frac{h^4}{\tau^2} \right) \left[\tilde{w}_{i,j-1}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k \right] + \\
& + h \left\{ \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - \left(\alpha + \gamma - 4 - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\
& + h \left\{ (\gamma - 2)^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - (4 + \alpha + 2\gamma) \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] + (\gamma - 2)^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \Omega^{(k-1)} + 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij}).
\end{aligned} \tag{53}$$

Уравнение (16) перепишем с учетом (27) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i,j-1}^k - 4\tilde{w}_{i,j}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k + \\
& + \tilde{w}_{i+1,j}^k - 0,4w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 4(w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i,j}^{\eta\eta}) - 0,4w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 0,4w_{i+1,j}^{\xi\xi} - \frac{h}{5} \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} - {}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} - {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] = 0
\end{aligned} \tag{54}$$

В четвертой главе. приводятся примеры расчета изотропных и ортотропных пластин соответственно, на динамические нагрузки, с использованием составленной для ЭВМ программы.

В качестве первой тестовой задачи рассмотрим расчет квадратной шарнирно опертой по всему контуру изотропной плиты на действие прямоугольного (вдоль оси времени) мгновенного импульса S , равномерно распределенного по всей площади плиты. Согласно результаты Рабиновича И. М. в начальный момент времени:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{S}{\bar{\mu}}. \tag{55}$$

Учтем, что $W = w \frac{a^4 q_0}{D}$; по §3.2: $t = \bar{t} \cdot a^2 \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}}$. Тогда из (55) получим:

$$\frac{DW}{Dt} = w^{\bar{t}} = \bar{v}^{(0)} = \frac{S}{a^2 q_0} \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}}. \tag{56}$$

Расчет можно вести на $\bar{v}^{(0)} = 1$; по найденным при этом w размерные величины
 Wполучим так: $W = w \cdot \frac{S}{a^2 q_0} \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}} \cdot \frac{a^2 q_0}{D} = w \frac{S \cdot a^2}{\sqrt{D \cdot \bar{\mu}}}$.

В диссертации Габбасова Р. Ф. по алгоритму решения задачи относительно неизвестных m и w для центра плиты получено $w_{\max} = 0,775$ при $h = \frac{1}{12}$; $\tau = \frac{1}{\pi \cdot 150}$; $\bar{C} = 0$ в момент времени $t=0,16 \cdot T$, где T - период основного тона колебаний рассматриваемой плиты. Поскольку $T = \frac{2\pi}{w}$, учитывая $w_{\min} = \frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}}$, найдем

$$T = \frac{a^2}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{D}}. \quad (57)$$

Подставляя в (57) $t = \bar{t} \cdot a^2 \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{D}}$, получим:

$$\bar{t} \cdot a^2 \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{D}} = 0,16 \frac{a^2}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{D}}. \quad (58)$$

Тогда безразмерное время, при котором достигается w_{\max} , будет $\bar{t} = \frac{0,16}{\pi}$.

В табл. 2 показаны значения w_{\max} и $m_{\max}^{(\xi)}$, полученные по составленной нами программе при различных значениях h и τ . Расчет проводился до момента времени $t=0,25T$.

Табл.2

h	1/8	1/10	1/12
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_{\max}	0,0756	0,0772	0,0785
$m_{\max}^{(\xi)}$	1,003	1,165	1,233

Величины $m^{(\xi)}$ вычислялись при $\nu = 0,17$. При так же значениях ν , $t=0,16T$; $h = \frac{1}{12}$; $\tau = \frac{1}{\pi \cdot 150}$; $\bar{C} = 0$ в диссертации Габбасова Р. Ф. получено $m_{\max}^{(\xi)} = 1,244$, в центре плиты. Результаты табл. 3.1 практически совпадают с полученными в диссертации Габбасова Р. Ф.

Решение новых задач по расчету ортотропной пластины на динамические воздействия.

При расчете ортотропной пластины принимаем значения α, γ, μ по (3.4.4). Поскольку расчет ведется по одной и той же составленной нами программе, в этом все отличие от расчета изотропной пластины.

В табл.2 помимо w_{\max} и $m_{\max}^{(\xi)}$, приводим и значения $m_{\max}^{(\eta)}$: хотя плита квадратная и нагружение симметричное, в середине пластины $m^{(\xi)} \neq m^{(\eta)}$. Кроме того, табл.3 иллюстрирует: как и при статическом нагружении изгибающие моменты $m_{\max}^{(\eta)} > m_{\max}^{(\xi)}$, поскольку в направленной оси η жесткость ортотропной пластины выше. Заметим также, что свои максимальные значения искомые величины принимают в другие моменты времени, чем в изотропной плите. $\delta = \frac{\Psi}{2} \mu; \bar{C} = \pi\Psi$.

Для безбалочных железобетонных перекрытий. $\bar{C} = 1,5$.

Значения w_{\max} и $m_{\max}^{(\xi)}$, $\nu = 0,17$, вычисленные при этом значении прочих одних и тех же параметрах второй тестовой задачи приводятся в табл.3.

Табл.3

n	1/12 (84k)	1/16 (127k)	1/18 (191k)
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
$m_{\max}^{(\xi)}$	0,05288	0,05282	0,05279
w_{\max}	0,004876	0,004869	0,004868

Табл.4.

n	1/8	1/10	1/12
ξ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_{\max}	0,0905	0,0916	0,0923
$m_{\max}^{(\xi)}$	0,665	0,684	0,707
$m_{\max}^{(\eta)}$	0,891	0,873	0,869

Квадратная жестко заделанная по всему контуру ортотропная плита под той же нагрузкой, что и изотропная плита в третьей задаче (§4.1). Результаты расчета для

характерных точек, показанных на рис.2, полученные при $\bar{C} = 0$, даны

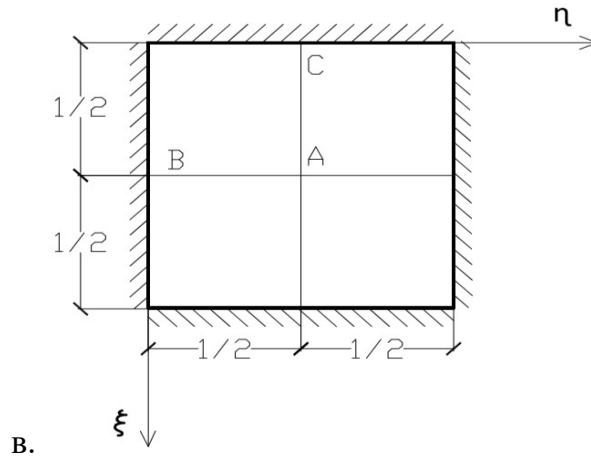


Рис.2

Табл.5

n	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_A	0,003022	0,003051	0,003059
$m_A^{(\xi)}$	0,03058	0,03088	0,03106
$m_A^{(\eta)}$	0,05573	0,05617	0,05641
$m_B^{(\eta)}$	-0,10444	-0,10536	-0,10583
$m_C^{(\xi)}$	-0,05910	-0,05937	-0,06011

Прямоугольная ортотропная плита, у которой три стороны шарнирно оперты, одна сторона свободна от закрепленной. Вдоль оси симметрии плита загружена равномерно распределенной полосовой вибрационной нагрузкой (рис.3) :

$$\Delta q_{ij}^{(\xi)} = \sin(1,6 \cdot \pi^2 \cdot k\tau). \quad (59)$$

где k - номер рассматриваемого временного слоя; τ - постоянный шаг по безразмерной оси времени \bar{t} .

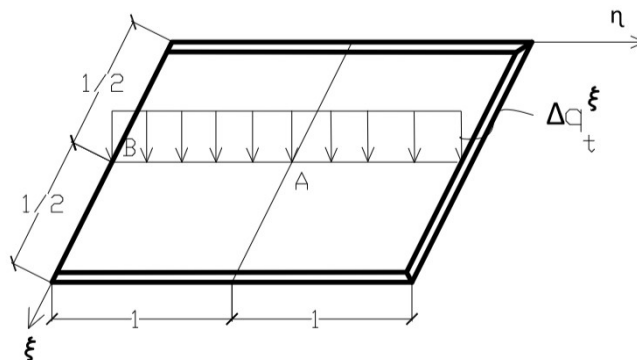


Рис. 3

В табл. 6 даются результаты для наибольших по времени значений безразмерных прогибов и изгибающих моментов в точке А, полученные при $\bar{C} = 0$ (верхние значения) и при $\bar{C} = 1,5$ (нижние). На рис. 4 показано изменение во времени значений $w_B^{(\xi)}$ - (1-ая кривая), полученные при $\bar{C} = 0$.

Табл.6

n	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_A	$\frac{0,017333}{0,015896}$	$\frac{0,009255}{0,008641}$	$\frac{0,009255}{0,008641}$
$m_A^{(\xi)}$	$\frac{0,07300}{0,07133}$	$\frac{0,07220}{0,07089}$	$\frac{0,07178}{0,07065}$
$m_A^{(\eta)}$	$\frac{0,05978}{0,06318}$	$\frac{0,05836}{0,06227}$	$\frac{0,05750}{0,06155}$

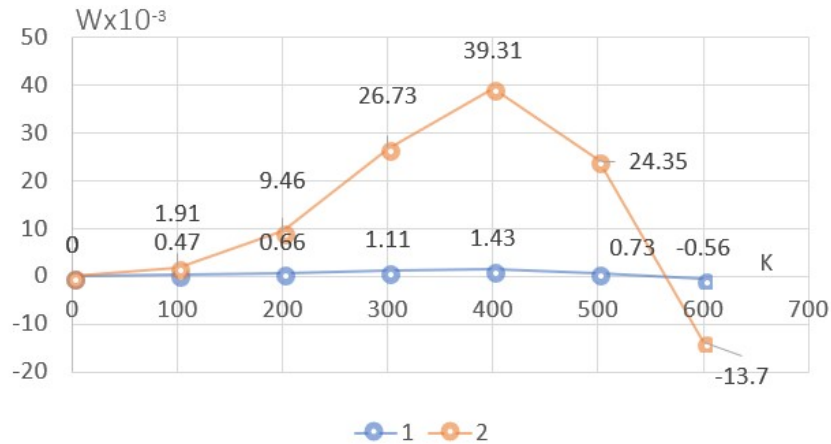


Рис.4

Выводы по главе 4.

Для апробации полученного в третьей главе алгоритма и написанной на его основе программы в первом параграфе четвертой главы были решены тестовые примеры по расчету изотропных пластин на динамические нагрузки. На трех вложенных одна в другую сетках исследовалась сходимость решения. Кроме того, сравнение полученных результатов с ранее известными показало их практическое совпадение и выявило высокую точность разработанной методики.

Во втором параграфе четвертой главы опубликованы результаты расчета новых задач, а именно задач по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки.

Составленная нами программа позволяет рассчитать ортотропные плиты с любой комбинацией краевых условий на произвольные динамические нагрузки.

Заключение

1. Разработана численная методика расчета ортотропных пластин на свободные и вынужденные колебания с привлечением разностной формы метода последовательных аппроксимаций.

2. Предложены алгоритмы расчета и составлены программы для ЭВМ по расчету ортотропных пластин на свободные и вынужденные колебания.

3. В качестве тестовых рассмотрены задачи поперечных колебаний изотропных пластин, как частного случая ортотропных. Вычисления выполнены с использованием указанных выше программ по расчету ортотропных пластин. Численное исследование сходимости решений, а также сравнение полученных нами результатов с известными, опубликованными ранее, продемонстрировало высокую точность и надежность вычислительных алгоритмов и составленных по ним программ.

4. С использованием предложенных программ получены решения новых задач по расчету ортотропных пластин с различными условиями опирания на динамические нагрузки. В качестве внешнего воздействия рассмотрены импульсные и гармонические нагрузки, полосовые и распределенные по площади.

5. Перспективным направлением развития настоящей работы является разработка численной методики расчета ортотропных пластин на динамическое воздействие с учетом действия продольных сил в срединной плоскости.

Основные положения диссертации и результаты исследований опубликованы в следующих публикациях:

Публикации в изданиях, включенных в перечень рецензируемых научных изданий:

1. Габбасов Р.Ф., Ву Хо Нам. Определение частот и форма собственных колебаний ортотропных пластин численным методом последовательных аппроксимаций (МПА) // Иновации и инвестиции. 2018. №1. С. 148-150.

2. Ву Хо Нам. Об одном алгоритме расчета ортотропных пластин на статические нагрузки // Иновации и инвестиции. 2018. №2. С.191-194.