Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»
(РУДН)

На правах рукописи

Тупикова Евгения Михайловна

Анализ напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки в форме длинного косого геликоида

05.23.17 - Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, профессор
Кривошапко Сергей Николаевич

Москва – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные конструкции, обладающие сравнительно небольшой массой при высокой прочности, в настоящее время стремительно развиваются и находят все большее применение в практике.

В современном гражданском строительстве одно из самых распространенных применений винтообразных конструкций - это пандусы многоэтажных гаражей, рампы. Востребованными также остаются и винтовые лестницы, эстетичные и удобные. В дорожном строительстве применяются винтообразные участки железобетонных и металлических эстакад, путепроводов, многоярусных пересечений. Геликоидальные или винтовые оболочки широко применяются в конструкциях машин, механизмов и установок самого различного назначения, в соединениях машиностроительных деталей, в передачах и ходовых винтах, шнеках.

Данное исследование рассматривает тонкостенные оболочки, которые могут быть рассчитаны в рамках теории Кирхгофа-Лява. Такие оболочки обладают рядом выигрышных технико-экономических показателей, позволяют возводить сооружения и здания с минимальной массой; зачастую толщина таких конструкций ограничивается лишь технологическими особенностями возведения, как, например, применение бетононасоса. При внедрении же инновационных технологий, как, например, торкретирование, даже это ограничение может быть снято.

На современном этапе развития науки и техники подавляющее большинство инженерных расчетов выполняется по методу конечных элементов при помощи соответствующих компьютерных программ. задачу приходится сводить к более простой, к частному случаю и т.п. Однако аналитические и численно-аналитические методы также сохраняют свою актуальность, поскольку обладают важным преимуществом прозрачности физического смысла, дают более очевидную картину при интерпретации результатов и изучении корреляций при изменении каких-либо параметров. Оба подхода – численный и аналитический - могут взаимно дополнять друг друга, использоваться параллельно для оценки достоверности результатов и лучшего понимания сути исследуемой проблемы.

Актуальность темы.

Данная работа посвящена исследованию оболочек в форме косого геликоида, как менее изученных по сравнению с другими видами линейчатых геликоидальных оболочек, например, в форме прямых и развертывающихся геликоидов. Известны параметрические уравнения косого геликоида только в несопряженной неортогональной системе координат, квадратичные формы этой поверхности, а следовательно, геометрические и физические соотношения теории оболочек, а также уравнения равновесия имеют большой объем по сравнению с соотношениями для оболочек в форме тех поверхностей, уравнения которых могут быть получены в сопряженной и/или ортогональной системе.

На сегодняшний день известны работы, в которых исследуется напряженно-деформированное состояние оболочки в форме косого геликоида. Например, в статье А.Р. Ярошенко исследуется непологая оболочка в форме косого геликоида по моментной теории с использованием гипотезы Кирхгофа-Лява, задача решается численно-аналитическим методом. В этой работе осуществлен переход от неортогональной неоспряженной к ортогональной несопряженной системе координат при помощи замены переменной, что не совсем удобно для задания граничных условий и нагрузок. В работе В.К. Залесского рассмотрен расчет косогеликоидальной оболочки по безмоментной теории оболочек. В работах В.Г. Рекача, которые подробно проанализированы в настоящей диссертации, предложена методика расчета лишь пологих косогеликоидальных оболочек с небольшим шагом винта, причем методика не была реализована ни на одном примере. Таким образом, ни в одной из известных работ не построена и не реализована в расчетной методике моментная теория расчета тонких упругих оболочек в форме косого геликоида в несопряженной неортогональной системе координат, наиболее естественной для постановки граничных условий и задания нагрузок. Следовательно, тема диссертационной работы является актуальной.

При современном уровне развития компьютерной техники исследователю стали доступны не только более мощные ЭВМ с высокой производительностью, но и достаточно совершенные программные средства для символьных расчетов, использующие усовершенствованные алгоритмы. Это позволило проводить расчеты с громоздкими выражениями, которые ранее были технически сложны, а зачастую невозможны. Выполненные в настоящей работе расчеты по моментной теории непологих оболочек в несопряженной неортогональной системе координат стали возможны благодаря современным программным средствам и мощному аппаратному обеспечению.

Цель диссертационной работы – анализ напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки в форме длинного косого геликоида при действии статических нагрузок, разработка соответствующей методики расчета, а также ее программная реализация.

Исходя из поставленной цели работы, решались следующие **задачи**:

1. Анализ научной литературы по исследуемому вопросу, анализ методик, предложенных для аналитического и численно-аналитического расчета оболочек и возможностей приложения этих методов к расчету оболочки в виде косого геликоида.

2. Построение моментной теории тонких упругих оболочек с применением гипотезы Кирхгофа-Лява в форме длинного косого геликоида в несопряженной неортогональной системе координат.

2. Разработка соответствующего численно-аналитического метода расчета напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки в форме длинного косого геликоида.

3. Решение числовых примеров для тестирования методики.

4. Решение числовых примеров средствами метода конечных элементов для оценки достоверности, сравнения трудоемкости и практического удобства предложенной методики для случаев пологой и непологой оболочки, оценка выбора варианта системы координат с точки зрения удобства расчетов.

5. Анализ предпосылок и допущений расчетной модели аналитического ме-

тода, предложенного проф. В.Г. Рекачем, и причин, по которым эта методика так и не была практически реализована ни в одном расчете.

6. Оценка возможностей аналитических методов, оценка целесообразности разработки аналитических методов с узкими границами применения и значительными упрощениями расчетной математической модели.

7. Проведение численных экспериментов по определению напряженно-деформированного состояния оболочек в форме длинного косого геликоида с различными параметрами при помощи предложенной численно-аналитической методики, определение границ применимости модели.

Для реализации поставленных задач необходимо было также разработать соответствующие программные алгоритмы.

Научная новизна работы заключается в построении моментной теории расчета тонкой упругой оболочки в форме длинного косого геликоида, в частности:

- Получены геометрические соотношения теории тонких упругих оболочек для случая длинного косого геликоида в двух вариантах - для пологой и непологой модели;

- Получены физические соотношения теории тонких упругих оболочек для случая длинного косого геликоида в двух вариантах - для пологой и непологой модели;

- Получена система уравнений равновесия моментной теории оболочек для случая длинного косого геликоида в двух вариантах - для пологой и непологой модели, и из нее выведена система трех обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях;

- На основе метода Рунге-Кутты в математической системе Maple 16 получено численное решение результирующих систем разрешающих уравнений равновесия моментной теории оболочек для случая длинного косого геликоида модели. На основе функций перемещений построены алгоритмы нахождения внутренних силовых факторов;

- Проведены численные эксперименты по оценке влияния геометрических параметров исследуемых оболочек на напряженно-деформированное состояние тонкой упругой оболочки в форме длинного косого геликоида по предложенной численно-аналитической методике,

-При проведении численных экспериментов выявлена граница применения пологой и непологой модели.

Также научная новизна заключается в анализе аналитической методики В.Г. Рекача расчета пологих оболочек в форме длинного косого геликоида, в которой обнаружены некорректные предпосылки, как то: 1) использование произвольных функций согласно технической теории пологих тонких упругих оболочек В.З. Власова, пригодных только для сопряженных систем, является некорректным, так как система координат косого геликоида в поставленной задаче не является сопряженной; 2) Выполненные численные эксперименты доказывают, что пренебрежение компонентой деформации кручения $\varkappa_{uv}$ не является корректным, так сводит решение к тривиальному.

<u>Основные результаты работы, выносимые на защиту:</u>

1. Уравнения моментной теории расчета НДС тонкой упругой оболочки в форме косого геликоида в несопряженной неортогональной системе координат в двух вариантах: для пологой и непологой оболочки.

2. Разработанная программа в среде Maple17 для расчета длинного косого пологого геликоида.

3. Разработанная программа в среде Maple17 для расчета длинного косого непологого геликоида.

4. Исследование границ применимости пологой и непологой модели.

5. Обоснование некорректности расчетных предпосылок и допущений методики В.Г. Рекача для расчета длинного пологого косого геликоида.

6. Результаты численных экспериментов по оценке влияния геометрических параметров угла наклона прямых образующих и шага винта на напряженно-деформированное состояние оболочек в форме длинного косого геликоида из материалов с характеристиками стали и железобетона.

<u>Методы и средства исследований</u>.

Основным методом исследований являются общепринятые положения теории тонких упругих оболочек на основе гипотезы Кирхгофа-Лява, для решения уравнений применяются численные методы Рунге-Кутты, для проверочных расчетов используется метод конечных элементов. Программные средства, использованные в данной работе – программный комплекс для символьных расчетов Maple 17, программные комплексы для конечноэлементных расчетов ANSYS 15 и ЛИРА 9.6.

Практическая значимость результатов исследований заключается в построении методики расчета напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки в форме длинного косого геликоида, в том числе:

1. Разработанная на основе моментной теории методика расчета напряженно-деформированного состояния тонких упругих оболочек в форме длинного косого геликоида тонких упругих оболочек на действие статических нагрузок в двух вариантах – для пологих и непологих оболочек может быть использована в практических инженерных расчетах и научных исследованиях оболочек изучаемого типа.
2. Программные алгоритмы, составленные на основе предложенной теории для оценки напряженно-деформированного состояния пологих и непологих тонких упругих оболочек в форме длинного косого геликоида, могут быть использованы при разработке нового программного обеспечения для научных целей, учебных работ, а также, при некотором усовершенствовании и создании пользовательского интерфейса, для практических расчетов.
3. Разработанный программный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния тонких упругих оболочек в форме пологого длинного косого геликоида в несопряженной ортогональной системе координат может быть применен к приближенному анализу напряженно-деформированного состояния пологих тонких упругих оболочек в форме длинного косого геликоида с малым шагом винта.

Личный вклад соискателя.

Все исследования в данной работе выполнены соискателем в процессе научной работы единолично, по результатам опубликованы научные статьи.

Достоверность результатов.

Достоверность результатов основана на корректной математической постановке решаемых задач и адекватном применении расчетных математических моделей. Оценка достоверности производилась при помощи сравнения конкретных примеров, выполненных авторским методом и методом конечных элементов при помощи программ ANSYS 15 и ЛИРА 9.6, а также сравнением частных случаев с точными аналитическими решениями, полученными в других работах.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научно-технических конференциях:

1.V Международная научная конференция "Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений" ("Золотовские чтения")(РААСН, Москва, 2016).

2.Научная школа-семинар молодых ученых и студентов с международным участием «Современные проблемы механики, энергоэффективность сооружений и ресурсосберегающие технологии» (РУДН, Москва, 2015).

3.Международные научно-практические конференции «Инженерные системы – 2013», «Инженерные системы – 2014», «Инженерные системы – 2015» (РУДН, Москва, 2013, 2014, 2015).

4.Международная молодежная научная конференция «Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций», (РУДН, Москва, 2014).

Публикации. По теме диссертации опубликовано шесть научных работ, из них четыре – в рецензируемых изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Основной текст работы изложен на 138 страницах, содержит 66 рисунков, 3 таблицы. Список используемой литературы включает 138 наименований. Объем 2 приложений составляет 25 страниц.

ГЛАВА 1.

ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ЛИНЕЙЧАТЫМ ГЕЛИКОИДАЛЬНЫМ ОБОЛОЧКАМ

1.1. **Линейчатые винтовые поверхности и их место в общей классификации геликоидов по формообразованию**

Геликоид общего вида, или винтовая поверхность – это поверхность, образованная вращением некоторой плоской образующей линии относительно некоторой оси и одновременным поступательным движением вдоль этой оси, или, иначе, винтовым движением образующей. Обыкновенным винтовым движением называется такое винтовое движение, при котором отношение линейной и угловой скоростей есть постоянная величина, и образуемая поверхность будет называться обыкновенной винтовой поверхностью. Если же отношение скоростей меняется по некоторому закону и представляет собой переменную величину, то поверхность будет называться винтовой поверхностью переменного шага. Согласно сложившейся терминологии, вращающаяся линия называется профилем, а ось – винтовой осью.

Следует отличать винтовые поверхности от спиральных и винтообразных. У спиральных поверхностей образующая кривая, помимо движения по винтовой линии, подвергается преобразованию подобия с коэффициентом подобия, пропорциональным углу поворота, и с центром подобия, расположенным на оси вращения. Винтообразную поверхность можно получить, если совместить винтовое движение образующей относительно винтовой оси с каким-либо еще дополнительным движением. У такой поверхности траектории точек образующей при движении будут иметь форму, более сложную чем цилиндрические винтовые линии (которые имеют траектории точек образующей у винтовых поверхностей). Винтообразная поверхность при определенном подборе параметров будет вырождаться в винтовую.

Геликоид общего вида нагляднее всего описать векторным уравнением:

$$\bar{\boldsymbol{r}}(u,v) = u\,cos(v)\,\bar{\boldsymbol{\imath}} + u\,sin(v)\,\bar{\boldsymbol{\jmath}} + (f(u) + c\,v)\bar{\boldsymbol{k}},$$

где c – параметр, связанный с шагом винта; (если c=0, геликоидальная поверхность вырождается в поверхность вращения).

Примем ось Oz за ось вращения, $z = f(u)$ – уравнение плоской образующей прямой.

Винтовая поверхность общего вида может иметь своей образующей любую кривую, к примеру, кривую второго порядка или синусоиду. Можно выделить как одну из наиболее важных для практического применения круговую винтовую поверхность с образующей в виде окружности.

Если за образующую принята прямая линия, то такая винтовая поверхность будет называться линейчатой. Иначе говоря, линейчатой винтовой поверхностью называется поверхность, которая получается при обыкновенном винтовом движении произвольно расположенной прямой образующей.

Линейчатые винтовые поверхности могут быть как развертывающимися, так и неразвёртывающимися, иначе говоря, их можно разделить на поверхности нулевой и отрицательной Гауссовой кривизны (геликоидов положительной Гауссовой кривизны не существует).

В зависимости от положения прямолинейной образующей относительно оси винта винтовые линейчатые поверхности можно разделить на закрытые и открытые. Если прямая образующей пересекает винтовую ось, то линейчатая винтовая поверхность называется закрытой, если же нет (перекрещивается или параллельна), то в таком случае винтовая поверхность называется открытой. Закрытые поверхности всегда неразвертывающиеся. Открытые могут быть как развертывающимися, так и неразвертывающимися.

К закрытым линейчатым поверхностям относятся прямой и косой геликоиды. Конволютный и эвольветный геликоиды относятся к семейству открытых линейчатых винтовых поверхностей.

Остановимся на этом классе поверхностей подробнее.

Подвиды линейчатых винтовых поверхностей приведены согласно [1].

Прямой геликоид.

Если в качестве образующей винтовой поверхности взять некоторый отрезок прямой, перпендикулярный оси некоторого цилиндра и пересекающий ее, и этому отрезку сообщить одновременно вращательное движение вокруг оси цилиндра с постоянной угловой скоростью и равномерное поступательное движение вдоль оси цилиндра, то концы отрезка образуют две винтовые линии, а сам отрезок – винтовую поверхность, которая и будет являться прямым геликоидом.

Рис. 1.1 Прямой геликоид

Прямой геликоид можно также назвать прямым коноидом. Как известно, коноидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых является прямолинейной, а вторая криволинейной, причем во всех положениях образующая остается параллельной некоторой заданной плоскости. Прямым коноидом считается коноид, у которого направляющая перпендикулярна плоскости параллелизма. Если криволинейной направляющей служит винтовая линия, то прямой коноид является винтовым. В технической литературе часто встречается термин «пластинка с начальной закруткой». Это пластинка прямоугольного очертания, жестко защемленная на одном конце и со свободным предварительно закрученным на некоторый угол противоположным краем. Такие пластинки, являющиеся, по сути, отсеками поверхности прямого геликоида, широко упоминаются в литературе по расчету лопаток различных машин и установок.

Прямой геликоид можно задать параметрическими уравнениями:

$x = u\,cos(v)\,, y = u\,sin(v)\,, z = c\,v.$

Косой геликоид.

Косой (или наклонный) геликоид – это геликоид, прямолинейная образующая которого наклонена к оси под острым углом и перемещается, оставаясь параллельной образующим поверхности некоторого направляющего конуса.

Косой геликоид можно задать параметрическими уравнениями:

$x = u\,cos(v)\,, y = u\,sin(v)\,, z = c\,v + k\,u,$

Где k – угловой коэффициент образующей прямой. Направлению u соответствует горизонтальное проложение образующей, если k=0.

Также есть другой вариант задания в параметрическом виде:

$x = u\,cos(v)\,cos(\varphi)\,, y = u\,sin(v)\,cos(\varphi)\,, z = c\,v + u\,sin(\varphi),$

где φ –угол наклона образующей к горизонтали, направлению u соответствует сама линия образующей.

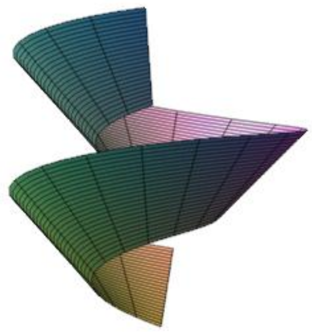


Рис. 1.2 Косой геликоид

Прямой геликоид является частным случаем косого, когда угол наклона образующей равен нулю.

Практически значимое геометрическое исследование косого геликоида произведено в работе [2]. Авторы этого исследования задались целью отыскать частный случай косого геликоида, при котором он может быть развернут на плоскость и, соответственно, деталь может быть изготовлена из кольцевой заготовки. Исследуемым объектом была лопасть ветроротора.

Косой геликоид рассматривается как частный случай воронкообразной винтовой поверхности, уравнение которой приводится в виде:

$x = r\,cos(\varphi)\,, y = r\,sin(\varphi)\,, z = \frac{S}{2\,\pi}\varphi + f(r),$

где ось z направлена вдоль оси геликоида;

r – кратчайшее расстояние от точки до винтовой оси;

φ - угол наклона образующей;

S - шаг винта;

f(r) - монотонная функция от переменной радиуса.

В частном случае при прямой образующей геликоид является косым, его можно описать формулами:

$f(r) = (r - r_1)ctg(Y)$, *где* $Y = arcsin(\frac{(r_2 - r_1)}{h})$,

r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы, h - высота детали. в случае, если высота винтовой лопасти вычисляется по формуле:

$h = r_2\sqrt{(1 + \frac{S^2}{4\,\pi^2 {r_2}^2})(1 + \frac{S^2}{4\,\pi^2 {r_1}^2})} - r_1(1 + \frac{S^2}{4\,\pi^2 {r_1}^2})$,

и лопасти могут быть изготовлены из плоской заготовки , имеющий внутренний радиус

$$r_{1c} = \frac{S^2 + 4\,\pi^2 {r_1}^2}{4\,\pi^2 r_1}$$

и наружный

$$r_{2c} = r_{1c} + h.$$

Цилиндрическая винтовая поверхность.

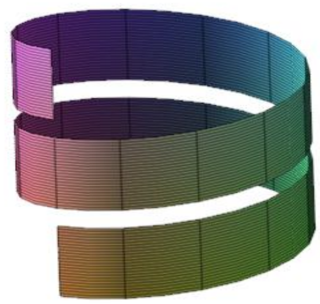


Рис. 1.3 Винтовая полоса

Цилиндрическая винтовая поверхность (полоса) обладает нулевой Гауссовой кривизной. Такая поверхность получается в результате движения прямолинейной образующей с постоянной или переменной длиной по винтовой направляющей, причем ее длина должна быть меньше шага винтовой направляющей, а прямолинейная образующая и ось винтовой направляющей везде параллельны друг другу.

Параметрические уравнения винтовой полосы:

$x = a\,cos(v)\,, y = a\,sin(v)\,, z = c\,v + \,u,$

где постоянная a соответствует радиусу цилиндра, на котором строится поверхность.

Конволютный геликоид.

Образующая конволютного геликоида есть прямая линия, которая движется, постоянно пересекаясь с некоторой заданной винтовой линией, и при этом оставаясь касательной к боковой поверхности некоторого цилиндра заданного радиуса. Винтовая линия и цилиндр имеют общую ось, а образующая прямая скрещивается с ней под непрямым углом.

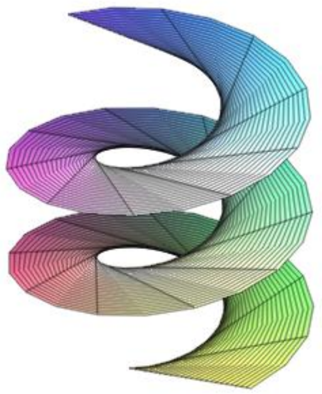


Рис.1.4 Конволютный геликоид

Параметрические уравнения конволютного геликоида (один из вариантов):

$x = a\cos(v) - t\sin(\gamma)\sin(v)$, $y = a\sin(v) + t\sin(\gamma)\cos(v)$, $z = c\,v + t\cos(\gamma)$, где

a – кратчайшее расстояние между прямой образующей и винтовой осью, параметр t определяет положение точки на прямолинейной образующей, при t>0 и t<0 можно получить соответственно две полости геликоида.

Псевдоразвертывающийся (псевдоторсовый геликоид).

Псевдоторсовый геликоид является по сути частным случаем конволютного геликоида, однако ввиду особенностей, важных для практического применения, его зачастую выделяют особо.

Рис. 1.5 Псевдоторсовый геликоид

Направляющей псевдоторсового геликоида является винтовая линия, лежащая на некотором цилиндре. Один конец прямолинейной образующей движется по винтовой направляющей, при этом образующая остается все время параллельной плоскости, перпендикулярной винтовой оси, а ее проекция на эту плоскость совпадает с проекцией на эту же плоскость соответствующей касательной к направляющей винтовой линии. Образующая при своем движении скрещивается с винтовой осью. Наименьшее расстояние между осью геликоида и образующей принято называть эксцентриситетом геликоида.

Параметрические уравнения псевдоторсового геликоида:

$x = a\cos(v) - u\sin(v)\,, y = a\sin(v) + u\cos(v)\cos(v)\,, z = b\,v$, где

a – эксцентриситет геликоида. b – параметр шага винта.

Координатные линии u направлены вдоль прямолинейных образующих, а координатные линии v отстоят на равные расстояния от винтовой направляющей $(u = o)$.

Развертывающийся (торсовый геликоид, эвольвентный геликоид).

Торсовыми поверхностями называются линейчатые поверхности, которые могут быть развернуты на плоскость без складок и разрывов. Все торсовые поверхности имеют нулевую гауссову кривизну. Торсовые поверхности образуются касательными к некоторой кривой, называемой ребром возврата. Для торса-геликоида ребром возврата является обыкновенная винтовая линия на круговом цилиндре заданного радиуса. Можно получить развертку эвольвентного геликоида в виде кольцевой области.

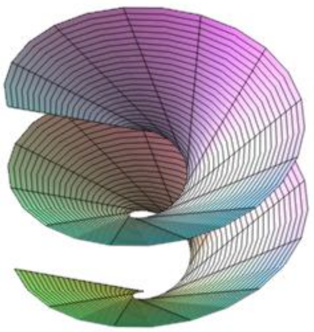


Рис. 1.6 Развертывающийся геликоид

Параметрические уравнения эвольвентного геликоида (вариант):

$$x = a\cos v - au\sin v/m\,, y = a\,sin(v) + a\,u\cos v/m\,, z = b\,v + bu/m,$$

где $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, a – радиус цилиндра, на котором

лежит ребро возврата, b –параметр, связанный с шагом ребра возврата.

Винтовая поверхность, образованная бинормалями цилиндрической винтовой линии.

Бинормали цилиндрической винтовой линии образуют конволютную винтовую поверхность.

Вариант параметрического задания:

$$x = a\cos v + u\frac{p\sin v}{\sqrt{a^2+p^2}},$$

$$y = a\sin v - u\frac{p\cos v}{\sqrt{a^2+p^2}},$$

$$z = b\,v + au/\sqrt{a^2+p^2},$$

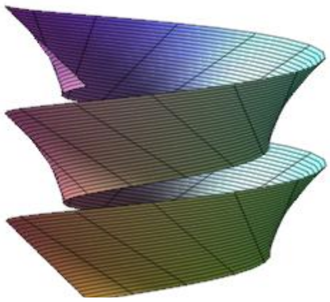


Рис. 1.7 Винтовая поверхность, построенная на бинормалях цилиндрической винтовой линии.

где p – параметр, связанный с шагом винтовой линии, на которой строится поверхность.

1.2. Обзор исследований по статическому расчету линейчатых геликоидальных оболочек

1.2.1. Аналитические методы расчета линейчатых геликоидальных оболочек.

Расчет прямых геликоидальных оболочек (30-60е гг. 20-го века)

Первые работы, посвященные расчету на прочность оболочек в форме геликоида, появились в 30-е годы 20-го века. Среди авторов необходимо отметить авиаконструктора Д.Ю. Панова [3], а также Д.Тейлора [4] и В.Розинга[5], которые занимались расчетом гребных винтов. Теоретические результаты В.Розинга были подтверждены экспериментальными исследованиями Г.Биезено [6]. Метод Тейлора был впоследствии развит в работах Дж.Ромсома [7].

Задача расчета оболочки в форме прямого геликоида с несколькими витками рассматривалась в работах Л.И. Соломона [8] и [9]. В этих работах анализируется НДС оболочки в одномерной постановке. Срединная поверхность геликоида задается в криволинейных ортогональных координатах, отнесенных к асимптотическим линиям. В статье Ю. Н. Работнова (МГУ) [10] показаны преимущества задания поверхности отрицательной гауссовой кривизны в асимптотических линиях, когда квадратичные формы в итоге зависят только от одной переменной, соответствующей координате вдоль направления образующей. В рамках таких допущений, Л.И. Соломон [8] установил, что система расчетных линейных дифференциальных уравнений теорий тонких оболочек в данном случае распадается на две группы с двумя группами неизвестных величин. НДС, реализующееся в бесконечно длинной геликоидальной оболочке при граничных условиях, не зависящих ни от закреплений по прямолинейным сторонам, ниот приложенной нагрузки, принято называть квазисимметричным НДС (по аналогии с симметричным НДС для оболочек вращения) [11]. В статье [8] доказывается, что для оболочки отрицательной гауссовой кривизны система уравнений безмоментной теории есть система гиперболического типа и для нее нельзя ставить задачу Дирихле. Поэтому результаты расчета по безмоментной теории не всегда будут корректными, особенно сомнительными они будут в том случае, если границами геликоидальной оболочки являются асимптотические линии, что само по себе противоречит условиям применимости безмоментной теории ввиду вероятного возникновения обобщенного краевого эффекта[12].

В 1955г. была опубликована работа Дж. Кохена [13], в которой была разработана методика расчета на прочность гребных винтов на действие статической нагрузки. Дж.Кохен рассмотрел упругую геликоидальную оболочку из однородного изотропного материала в форме прямого геликоида с большим числом витков. Срединная поверхность геликоида отнесена к ортогональным несопряженным асимптотическим координатам. Внутренний контур принят жестко защемленным, а внешний свободным. Нагрузка и толщина оболочки зависят только от одного параметра u, соответствующего координате вдоль образующей, поверхностная нагрузка вдоль направления радиуса u отсутствует. Эффект граничных условий на прямолинейных сторонах геликоида не учитывается. В работе С.Я. Колтунова [14] показано, что влияние граничных условий на прямолинейных сторонах сказывается только в пределах одного витка. Однако в некоторых случаях этот подход справедлив только для оболочек с числом витков больше десяти, которые достаточно редко применяются в строительстве [15]. Дж. Кохен [13]предложил 3 метода расчета: 1) одномерная задача с использованием уточненных физических уравнений теории оболочек, 2) та же задача, решенная приближенным квазистатическим методом с использованием только условий равновесия и 3) задача с применением упрощенных физических соотношений. Дж.Кохен показал, что для случая пологих геликоидальных оболочек изгибающие моменты по величине не сильно отличаются от моментов, возникающих в кольцевой пластинке с аналогичными размерами и закреплениями краев. Эти результаты также подтверждаются в работах С.С. Михлина [16]. Пологие оболочки в форме прямого геликоида рассматривали также Е.Райсснер [17] и В.Г. Рекач [18], дальнейшее развитие квазисимметричная задача получила в работах Д.О’Масуны, который показал, что система двух уравнений Райсснера может быть сведена к одному уравнению Лежандра [19,20], которое было решено в степенных рядах.

У Дж.Кохена при решении своей задачи [13] вводится допущение о равенстве касательных сил в уравнениях равновесия. Согласно Д.О’Масуна, при введении этого допущения значений радиальных изгибающих моментов увеличиваются приблизительно на 10 % в случае, если расстояние между внутренним жестко заделанным контуром и осью геликоида невелико. Он также отметил, что допущения, введенные Е. Райсснером в работе [17] равносильны введению гипотезы Лява в физические уравнения теории оболочек, а не в уравнения равновесия. В отличие от этого варианта, допущения Кохена из работы [13] используются только в уравнениях равновесия, но не в физических уравнениях, содержащих крутящие моменты и касательные силы.

Задача статического расчета квазисимметричной прямой геликоидальной оболочки рассматривалась позже в работе Ж. Кнабеля и Т. Левинского [21] в двух версиях теории тонких оболочек. Уравнения неразрывности деформаций подверглись некоторому упрощению аналогично работам О’Масуны.

Основные положения работ Л.И. Соломона [8,9] получили развитие в работе Е.И. Михайловского и С.Я. Колтунова [22]. В этой работе рассматривается квазисимметричная деформация оболочки в форме прямого геликоида с жестким защемлением одного винтового края и шарнирным опиранием второго на винтовую балку. Изучалось влияние подкрепления на величину изгибающего момента.

В монографии [23] при рассмотрении НДС оболочки в форме прямого геликоида при симметричном загружении показано, что система уравнений теории оболочек распадается на две подсистемы, из которых первая записывается в терминах внутренних силовых факторов, а вторая – в терминах компонент деформации срединной поверхности. Далее обе группы уравнений приводятся к одному дифференциальному уравнению второго порядка, в котором фигурирует один неизвестный параметр. Уравнение имеет решение в квадратурах. Наибольшая погрешность метода связана с величиной касательного усилия, которое вносит незначительный вклад в общее НДС.

Полоса с начальной закруткой с точки зрения геометрии представляет собой не что иное, как часть поверхности косого геликоида. Дж.К. Кноулес (J.K. Knowles) и Е. Райсснер [24] изучали деформации полосы с начальной закруткой при воздействии пары равных по модулю противоположно направленных осевых сил, и равных, но противоположно направленных осевых крутящих моментов. Дж.К. Кноулес и Е. Райсснер применили систему дифференциальных уравнений, полученную ими в статье [25] для упругих однородных изотропных оболочек в форме прямого геликоида. Задача исследования заключалась в том, установить зависимость между квазисимметричными деформациями и перемещениями, которые квазисимметричными в свою очередь не являются. Окончательные результаты, представленные в этой статье, являются обобщением результатов работы Чен Чу [26], который рассматривал растяжение полосы с начальной закруткой.

Дифференциальные уравнения, полученные Дж. Кноулсом и Е. Рейсснером [24], для случая квазисимметричных перемещений приводятся к одному дифференциальному уравнению, полученному Дж. Сандерсом (J.L. Sanders) [27]. Немного позднее, задача об осевом растяжении и кручении геликоидальных оболочек анализировалась Р.Г. Синклаиром (R.G. Sinclair) [28]. Задача кручения и растягивания геликоидальной оболочки также рассматривалась в работе [29].

Расчет прямой геликоидальной оболочки методом сил рассмотрен в работе Я. Пличка [30].

В статье [31] также рассматривается НДС прямого геликоида, дается аналитическое решение энергетическим методом и примеры расчетов оболочек, жестко закрепленных по внутреннему контуру со свободным внешним краем. В исследовании отмечено, что при равномерном нагружении возникают значительные касательные (цепные) напряжения.

В статье А.С.Дехтяря [32] также анализируется оболочка в форме прямого геликоида, производится оценка несущей способности с позиций кинематического метода теории предельного равновесия. Рассматриваются примеры расчета предельной нагрузки на оболочки с различными условиями закрепления краев.

Вариант задания линейчатой геликоидальной оболочки

Исследователи С.П. Гавеля и Д.И. Шарапова [33] предложили параметризацию, благодаря которой разделяются переменные в разрешающих уравнениях. Для апробации этого метода в их работе рассмотрены частные случаи оболочек в форме прямого геликоида и конуса. Задачи прочностного расчета геликоидальных оболочек приведены в диссертации [34]. Приняв некоторые упрощающие гипотезы, А.П. Котельникова [35] рассчитала пологую оболочку в форме прямого геликоида, загруженную изгибающим моментом. Закрепление краев по наружному краю жесткое, а внутренний край связан с жестким центром, который поворачивается под действием изгибающего момента на некоторый угол. За основу расчета взята система двух уравнений 8-го порядка в частных производных, относительно двух перемещений. Решение отыскивается в виде рядов по косинусам, что позволяет свести задачу к одному обыкновенному дифференциальному уравнению типа Эйлера 6-го порядка. Решение уравнения может быть получено в степенных рядах. Предложенная методика может быть использована при расчете винтовых сильфонов, с тем упрощением, что действительный профиль сильфона заменяется на прямоугольный.

Расчет ортотропных оболочек в форме прямого геликоида

Внимание исследователей привлекают также анизотропные оболочки и эффекты, связанные с варьированием структуры материала. В монографии К.Ф. Черных (ЛГУ) [11] выводятся уравнения классической теории тонких оболочек применительно к прямым геликоидальным оболочкам в ортогональной асимптотической системе координат. С помощью процедуры Бубнова-Галеркина система дифференциальных уравнений в частных производных была сведена П.В. Александровым и Ю. В. Немировским [36] к системе обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка.

В работе [36] была рассмотрена оболочка из ортотропного композитного материала под действием нормальной распределенной нагрузки. Аналогичная задача рассматривается в статье [15], но не по теории Кирхгофа тонких оболочек, а с учетом поперечных сдвигов. Согласно результатам экспериментальных исследований, именно разрушения от поперечного сдвига часто ограничивают несущую способность армированных конструкций. Поперечные сдвиги учитываются согласно обобщенным кинематическим гипотезам Тимошенко, краевые условия на лицевых поверхностях оболочки удовлетворяются. Установлено, что учет поперечного сдвига влияет на НДС конструкции значительно более, чем учет обжатия. Расчет показал, что учет поперечного сдвига необходим при расчете НДС оболочек, изготовленных из материала, армированного высокомодульными волокнами $E_a > E_c$ [15]. Расчет оболочек из железобетона может проводиться без учета поперечного сдвига в рамках классической теории Кирхгофа-Лява.

Расчет винтовых лестниц

Расчет винтовых лестниц также связан с определением НДС геликоидальных оболочек. В статье [37] рассчитана винтовая лестница с промежуточными опорами энергетическим методом, освещен вопрос подбора винтовой арматуры.

В публикации [38] исследователя В.Неделчева даются формулы, согласно которым можно определить все внутренние силовые факторы в любом сечении плитчатой лестницы при условии жесткого защемления на одной опоре и шарнирного опирания на второй.

Расчет лопаток с начальной закруткой

Расчетом лопаток с начальной закруткой занимались исследователи И.И. Биргер и Б.Ф. Шорр в работах [39-43]. И.И. Биргер разработал приближенное решение задачи о пространственном НДС лопаток турбомашины. В работе [39] изучалось влияние начальной закрутки на НДС лопаток большой по сравнению с толщиной криволинейного профиля ширины. Теория естественно закрученных стержней с учетом гипотезы ортогональных сечений была применена к расчету начально закрученных лопаток в работах [40, 41]. Б.Ф.Шорр учитывал также нормальные напряжения при кручении стержня согласно модели С.П.Тимошенко [44].

Расчеты геликоидов общего вида

Упруго-пластическая работа тонкой оболочки в форме геликоида общего вида из изотропного материала с учетом физической и геометрической нелинейности изучалась в работе Б.М. Меерсона[45].

Бесконечно длинные оболочки в форме геликоидов общего вида произвольного профиля изучались Дж.Г.Симмондсом. [46], [47]. В поставленной задаче оболочка находится под действием осевой силы, крутящего момента и распределенного внутреннего давления. Выводятся уравнения физических, геометрических соотношений и уравнений равновесия и неразрывности деформаций с учетом геометрической нелинейности. Приведен числовой пример расчета прямого геликоида на растяжение и кручение, трубы произвольного профиля на чистый изгиб.

Расчет тонких винтовых оболочек в форме торсов-геликоидов

Единственным апробированным аналитическим методом расчета оболочек в форме развертывающегося геликоида является асимптотический метод малого параметра. В работе [48] приведено решение этой задачи в одномерной постановке. В работах [49,50] та же задача для пологого случая, пренебрегая коэффициентом Пуассона, была решена А.А.Сальманом. С.Н. Кривошапко [51] занимался вопросом модификации метода малого параметра для торсов-геликоидов, анализируя возможности решений в рядах. Дальнейшее развитие этот вопрос получил в работе М.И. Рынковской [52].

Расчет цилиндрических винтовых оболочек

Е. Мансфилдом в статье [53] изучал поведение упругой оболочки в форме цилиндрической винтовой полосы под действием сосредоточенной нагрузки и крутящего момента. Выявлена практически важная зависимость между нагрузкой и деформациями.

Расчет криволинейных пролетных строений эстакад

Аналитические методы расчета дорожных сооружений используются в основном как ориентировочные и предварительные, так как содержат в себе значительные упрощения. Эти методы включают в себя метод внецентренного сжатия, метод балочного ростверка и метод плитно-балочных конструкций. Анализ плитного пролетного строения может производиться с применением разных расчетных моделей в зависимости от вида плиты: к примеру, методами теории упругости или при помощи метода коэффициента поперечной установки. Разработана также теория ортотропных плит для случая криволинейных сооружений [54].

Расчет винтовых зубьев

В публикации [55] реализован также подход к определению НДС винтового зуба шнекового пресса, представляющего собой часть геликоидальной оболочки, в рамках теории упругости, когда исследуемая конструкция представляется как консольная балка трапециевидного очертания. Расчет производился для случая равномерно распределенной нагрузки.

1.2.2. Численные и численно-аналитические методы анализа НДС геликоидальных оболочек.

В отличие от большинства аналитических расчетов, где преимущественно рассматривается одномерная задача, численные методы позволяют рассчитывать оболочки с различными видами закреплений на всех четырех краях.

Расчет прямой геликоидальной оболочки (С 60-х гг. 20 века по настоящее время)

Оболочки со срединной поверхностью в форме прямого геликоида исследовались в работе С.Я. Колтунова [56]. Геликоид имеет конечную длину, учитывается влияние закреплений на прямолинейных сторонах. Система физических, геометрических уравнений, уравнения равновесия и неразрывности деформаций приняты согласно [11]. К системе применен метод разделения переменных с разложением основных величин в ряды:

$$(\mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{M_u}, \mathrm{M_v}, \mathrm{S}) = \sum (\mathrm{v_k}, \mathrm{w_k}, \mathrm{M_{uk}}, \mathrm{M_{vk}}, \mathrm{S_k}) \frac{\sin\gamma_k}{\cos\gamma_k},$$

$$(u, N_u, N_v, H) = \sum (u_k, N_{uk}, N_{vk}, H_k) \frac{\sin\gamma_k}{\cos\gamma_k},$$

где $\gamma_k = b_k(v - v_1), b_k = \pi k/\Delta v, \Delta v = v_2 - v_1$, далее система сводится к системе восьми уравнений Коши в каноническом виде, которая интегрируется численно при помощи метода ортогональной прогонки. В работе изучается, как влияют на НДС оболочки граничные условия на прямолинейных краях. Решение задачи сравнивалось с решениями, полученными другими исследователями, в частности, Дж.Кохеном [13], который рассматривал одномерную задачу, а также с решениями в квадратурах, полученными в работах [22] и [14]. Выяснено, что оболочки длиной более одного полного витка испытывают значительные нормальные растягивающие и касательные усилия у шарнирно опертых прямолинейных краев под вертикальной нагрузкой (направление которой направлено вдоль оси геликоида). Короткие оболочки, длиной в четверть витка, испытывают сравнимые (одного порядка) усилия от касательного усилия и изгибающего момента, а нормальные усилия и крутящие моменты пренебрежимо малы.

Поскольку результаты, полученные в работе [56] совпадают с результатами работы [13], можно сделать вывод о том, что для расчета квазисимметричного НДС геликоидальных оболочек возможно использовать соотношения упругости в варианте В.В. Новожилова [23] и уравнений равновесия в симметричных величинах. Такая расчетная модель для оболочки, защемленной по внутреннему винтовому краю и свободной по внешнему, не содержит противоречия, отмеченного в работе [57]. В статье Т. Нисимура и К. Камизоно [58] для расчета спиральных геликоидов предлагается метод Ритца в тензорах.

В работе [59] была решена краевая задача методом конечных разностей для следующих случаев граничных условий: защемление по всему контуру, два свободных края и два защемленных противоположных края. Уравнения равновесия приняты согласно теории И.Е. Векуа [60].

Конечноэлементный расчет прямого и конического винтового геликоида

Н.М.Якупов и М.С.Корнишин в серии работ [61- 64] разработали сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек в виде прямых геликоидов а также оболочек со срединной поверхностью, образованной движением прямолинейной образующей по направляющей винтовой линии на конусе. Рассчитывались оболочки, которые жестко закреплены по внутреннему контуру и находятся под действием равномерно распределенной нагрузки. Было выяснено, что для винтовой оболочки, сопряженной с конусом, напряжения и деформации вдоль винтового контура принимают большие значения, чем у винтовой оболочки, сопряженной с цилиндром.

Вариационные методы расчета прямых геликоидальных оболочек

Одномерную задачу для длинной пологой оболочки с обоими жестко защемленными краями решали в работе [65] С.И. Трушин и А.Д. Сальман. В работе был применен вариационный метод, основанный на отыскании минимума функционала Лагранжа. Соответственно, для нахождения минимума функционала была нанесена разностная сетка на исследуемую область, искомые функции перемещений и их производные аппроксимируются при помощи конечно-разностных соотношений, а интегрирование заменено нахождением суммы.

М. Хирашима и М. Иура в работе [66] разработали геометрически нелинейную теорию оболочек в форме прямого геликоида на основе вариационного принципа без использования гипотезы Кирхгофа. В работе П. Броза [67] на основе вариационного принципа выведено уравнение для расчета пологой оболочки в форме геликоида с учетом геометрической нелинейности.

Численно-аналитический расчет косой геликоидальной оболочки

В работе [68] исследуется напряженно-деформированное состояние оболочки в виде косого геликоида. Напряженно-деформированное состояние оболочки принято осесимметричным (этот термин применен несколько условно, поскольку более корректен для оболочек вращения). Предполагается, что шаг винтовых линий вследствие деформации сохраняется постоянным, поэтому можно говорить и об осесимметричной картине деформаций.

Срединная поверхность может быть описана в Декартовых координатах при помощи следующих параметрических уравнений:

$x(r,\varphi) = r\cos\varphi,\ y(r,\varphi) = r\sin\varphi,\ z(r,\varphi) = r\operatorname{ctg}\alpha + b\,\varphi,$

где $b = l/2\pi$, l – шаг геликоида, α- угол, между образующей и горизонталью.

Для того чтобы перейти к ортогональной (но несопряженной) системе координат, и благодаря этому уменьшить объем выражений для всех величин и самих итоговых уравнений, автор вводит переход от параметраφ к параметруψ при помощи следующей замены:$\varphi = \psi - \operatorname{ctg}\alpha\ arctg\ (r/b)$.

В задаче рассматривается длинный косой геликоид, что позволяет свести ее к одномерной и не учитывать влияние граничных условий на прямолинейных кромках. В четыре уравнения равновесия (пятое и шестое соотношения выполняется тождественно) подставлены физические и геометрические уравнения классической теории тонких оболочек, и задача решена смешанным методом – неизвестными являются три перемещения и перерезывающая сила. Полученная система уравнений интегрируется численно при помощи ЭВМ. В работе рассчитан числовой пример для геликоида с наклоном образующей $\alpha = 57°$, с жестко заделанным внутренним и свободным внешним контурами, а также прямой геликоид с наклоном образующей $\alpha = 0°$. Результаты расчета прямого геликоида совпадают с результатами аналитического решения Д.О'Масуна [19]. Также при сравнении двух примеров сделан вывод о том, что при одинаковом шаге винта и соотношении размеров внутреннего и внешнего радиуса закручивание косого геликоида значительно меньше по сравнению с прямым.

В работе [69] рассматривается анализ косого геликоида в случае двумерной задачи по безмоментной теории.

Расчет оболочки в форме торса-геликоида

Г.Ч.Баджория в работе [70] произвел анализ НДС пологого торса-геликоида полуаналитическим методом для случая одномерной задачи. Рассматривался геликоид с двумя жесткими заделками по обоим винтовым краям. Для упрощения расчетной модели коэффициент Пуассона материала принят равным нулю. Система расчетных уравнений метода перемещений из работы [71] решалась численно, после получения перемещений были опосредованно от них определены внутренние силовые факторы согласно классической теории оболочек Кирхгофа-Лява.

Длинная оболочка в форме торса-геликоида и влияние коэффициента Пуассона на ее НДС анализировалась С.Н. Кривошапко и Кумудини Джаяварденой в работах [72], [73].

С.Б. Косицын впервые произвел конечноэлементное исследование торса-геликоида с постановкой произвольных граничных условий на всех четырех сторонах в работе [74]. Рассматривался жестко защемленный по всем краям торс-геликоид под действием равномерно распределенной вертикальной нагрузки. Отмечен нелинейный характер зависимости нормальных напряжений и нормальных перемещений от вертикальной нагрузки[75].

В серии работ [76-78] производится полуаналитическое решение задачи расчета оболочки в форме торса-геликоида из условного железобетона. Разрешающие уравнения в перемещениях интегрируются численным методом Рунге-Кутты.

Расчет геликоидов общего вида

НДС геликоида общего вида с открытым профилем рассматривается в статье [79] в рамках теории чистого изгиба. Разработана аналитическая методика расчета формы деформированной конструкции для случая больших деформаций, основанная на гипотезе нерастяжимости срединной поверхности. Силовые факторы в работе не рассчитываются. Интегрирование уравнений производится численно.

Расчет винтовых лестниц

Н.К. Шривастава (N.K. Shrivastava) [80] сформулировал соотношения МКЭ в применении к задаче расчета лестничного марша в форме прямого геликоида с центральным углом 360^o и высотой этажа 3,6 м. Ширина марша – 40см, высота ступени – 20см. Помимо случаев неподвижного закрепления верхней и нижней прямолинейных кромок рассмотрен также случай с промежуточным опиранием геликоида в точках, которым соответствует центральный угол 90^o, 180^o,270^o. Результаты численного расчета представлены в виде графиков. Р. Флегель (R. Flegel) [81] изучал деформации винтовой лестницы, обращаясь к формулам для вычисления работы на возможных перемещениях. Он рассмотрел два вида граничных условий, которые могут встретиться при реконструкции старых зданий. М.Н. Фардис (M.N. Fardis), А.-М.О. Скоутеропоулоу (A.-M.O. Skouteropoulou) и Ст.Н. Боусиас (St.N. Bousias) [82] составили полную, 12×12, матрицу жесткости свободно стоящей винтовой лестницы. Эта матрица включает в себя все геометрические характеристики лестницы. Зная матрицу жесткости и приняв ступень лестницы за единичный элемент в 3-х мерной модели железобетонной строительной конструкции, можно проводить расчет всей конструкции на горизонтальную (боковую) нагрузку. Установлено, что компоненты матрицы сильно зависят от размера проступи и от угла φ между начальной и конечной ступенью. При этом считалось, что высота этажа не изменяется. Боковую жесткость винтовой лестницы в любом горизонтальном направлении можно практически не учитывать, если угол φ изменяется в пределах $270^o<\varphi<360^o$, но она становится значительной, если угол φ меньше чем 180^o.

Исследованием НДС винтовых лестниц при помощи численных методов занимались также Р. Флегель (R. Flegel) [83-84], В. Неделчев [38], А.М. Холмс (A.M.C. Holmes) [85], А. Скорделис (A.C. Scordelis) [86], А. Поканши (A. Pocanschi) и И. Олариу (I. Olariu) [87]; К. Чаплинский (K. Czaplinski), З. Марцинковский (Z. Marcinkowski) и В. Свиесиский (W. Swiecicki) [37].

Влияние винтовой лопасти на изгибную жесткость шнека

А.Е. Белкин, Н.Л. Нарская, А.А. Пожалостин [88] рассматривали винтовую лопасть шнека как тонкую бесконечную прямую геликоидальную оболочку, жестко скрепленную с валом, и исследовали влияние лопасти на изгибную жесткость шнека. Были использованы уравнения общей теории оболочек [11], записанные в ортогональной системе криволинейных координат, не совпадающих с линиями главных кривизн. Внешний край геликоида - свободный. Внешняя распределенная нагрузка не учитывалась, так как рассматривалась задача о деформациях винтовой лопасти при заданных перемещениях на внутренней границе, обусловленных изгибом вала. Считалось, что ось вала имеет заданную кривизну. Все витки находятся в одинаковом напряженном состоянии, а перемещения свойством периодичности не обладают. Компоненты НДС были представлены в виде суммы $f = f^* + F$, где f^* – компоненты приближенного решения, удовлетворяющего кинематическим граничным условиям сопряжения оболочки с валом, а F – компоненты компенсирующего решения, которое устраняет невязки в дифференциальных уравнениях равновесия и в статических граничных условиях. Краевая задача для системы уравнений компенсирующего решения решалась численно методом ортогональной прогонки Годунова. Влияние лопасти на изгибную жесткость шнека было учтено по теореме Лагранжа, для чего вычислялась энергия деформации одного витка лопасти. Показана зависимость изгибной жесткости лопасти от шага геликоида.

Сравнение жесткости лопасти с жесткостью полого вала, проведенное А.Е. Белкиным и его коллегами [88], показало, что значение первой обычно невелико. При расчете шнека ее следует учитывать только, если толщина стенки вала (трубы) не превышает толщины лопасти.

1.3 Научно-практическое значение линейчатых геликоидальных оболочек

1.3.1 Строительство

Основное применение оболочечных конструкций в строительстве стало возможным благодаря развитию технологий железобетона. Именно железобетон, хорошо воспринимающий напряжения растяжения и сжатия, и при этом допускающий изготовление элементов любых конструктивных и архитектурных форм является на настоящий момент самым перспективным и популярным материалом для реализации проектов, связанных с оболочками вообще и винтообразными винтовыми оболочками в частности. Все существующие проекты значительных элементов зданий в виде геликоидальных оболочек реализованы именно в железобетоне. Самая большая технологическая трудность при возведении сооружений такого типа связана с изготовлением опалубок, которое само по себе является затратным и трудоемким процессом, требующим, помимо прочего, высокой квалификации рабочих. Проектировщикам подобных конструкций ввиду этого интересны современные технологии торкретирования бетона, которые заимствованы строителями у судостроителей и могут окончательно разрешить проблему изготовления железобетонных изделий любой формы.

Среди примеров зданий с использованием винтовых форм необходимо отметить знаменитый «Дворец воды и света» итальянского архитектора П.Л. Нерви (P.L. Nervi) [89]. В здании винтовой коробчатой формы расположены остекленные залы внутренних помещений, которые заканчиваются открытой террасой.

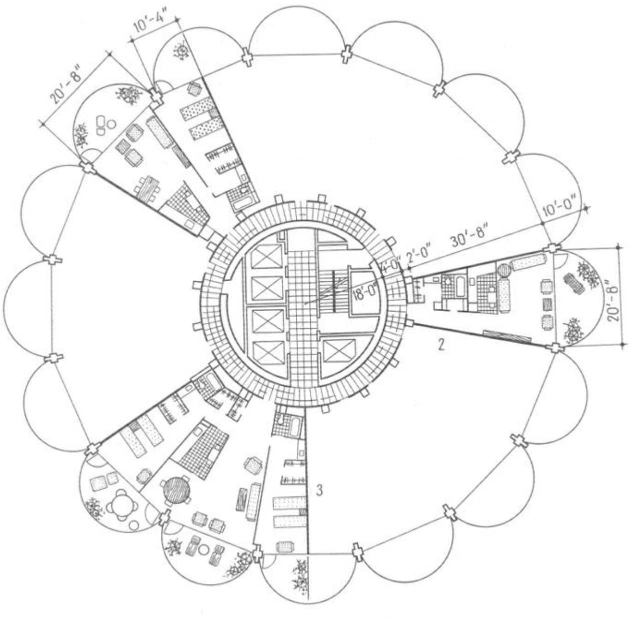
В Лондоне одним из самых нетривиальных и смелых архитектурных решений, получивших особое признание и популярность, долгое время оставался бассейн зоопарка. Бассейн для животных имеет овальное очертание в плане и оборудован несколькими пересекающимися спиральными пандусами.

Неотъемлемой частью любого современного мегаполиса нужно признать многоуровневые парковки, интегрированные в здания жилых, административных и общественных зданий, к примеру, торговых центров или гостиниц. Такие стоянки, совмещенные с каким-либо зданием, должны вписываться в его общую архитектурную концепцию. В г.Чикаго, США, еще в 1964 году построены многоквартирные жилые дома-башни Марина-сити,имеющие 63 этажа, из которых первые 18 представляют винтовой гараж в виде рампы.

В 1963 г. В штате Огайо, США, построена гостиница «Кристофер Инн» в виде круглой цилиндрической башни, под которой расположена рампа, ведущая в нижние этажи автомобильной стоянки (рис. 1.8).

Архитектурно выразительно конструктивное решение центральной башни речного порта г. Волгограда в России: плоские железобетонные плиты приближенно образуют поверхность прямого геликоида (рис.1.9).

а)



б)

Рис.1.8 Марина-сити. а)-Общий вид, б)-план этажа

Рис.1.9 Волгоград, здание речного порта, фрагмент

Винтообразные железобетонные пандусы и рампы

Винтовые и спиральные рампы можно классифицировать по форме – они в плане могут иметь форму круга или овала (рис. 1.10). Также они различаются по способу подъема на этаж – бывают полные (для подъема на этаж требуется проехать полный виток), и неполные (требуется проехать половину витка) рампы. По организации движения колесных средств их можно разделить на три группы:

1.) Одноходовая спиральная двухпутная рампа с параллельно идущими полосами движения - у такой рампы въезд является одновременно выездом и расположен с одной стороны, При относительном удобстве такая конструкция не очень экономична.

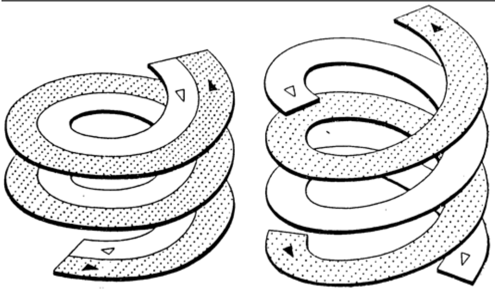


Рис.1.10. Винтовые рампы
а – въездная и выездная полосы рядом сдруг другом; *б* – двухходовая винтовая рампа (въезд и выезд друг над другом) (ALL-STORY.SU)

2) Одноходовая спиральная рампа с разделенными полосами движения при уклонах в противоположных направлениях – такая рампа менее удобна, поскольку водителю хуже видно путь движения.

Оба этих типа рамп размещаются по краям здания, у стены фасада либо в углах.

3) Двухходовая спиральная рампа с раздельными однопутными полосами движения – в таких

рампах для заезда на следующий этаж необходимо проехать половину витка. Они обычно располагаются в середине здания, как правило, большой этажности.

Архитектурные нормы проектирования стоянок основаны на следующих предпосылках: площадь стоянки одной машины 25 м^2, радиус поворота автомобиля – 8 м, расстояние в свету между чистым полом и нижней точкой перекрытия – не менее 2,2 м, высота этажа – 2,5-3 м.

Уклон пандусов, ведущих на этажи, обычно принимается 14-16%. Круговые внутренние рампы обычно устраиваются с уклоном 9% для внутренней части (на спуск), и 7% для наружной, работающей на подъем [59]. Круговые рампы обладают также поперечным уклоном, обычно не более 10-15%. Ширина полос движения – минимально 3,65 м для внутренней части и 3,2 м для наружной.

Нормативная нагрузка принимается согласно техническому заданию и нормам, обычно не менее 6 кН/м^2 без учета динамического коэффициента.

Сооружения данного типа сейчас активно применяются во всех современных мегаполисах мира, для примера можно указать на универмаг в немецком г. Кельн с пристроенным гаражом-парковкой высотой в 5 этажей. Цокольный этаж представляет собой закрытое помещение, а вышележащие этажи открытые, опираются на колонны, имеют лишь защитное ограждение. Тип рампы – двухходовая однопутная. По аналогичному проекту в Москве в 2003 году построен торговый центр «Калужский». Одной из самых опробованных и хорошо зарекомендовавших себя для больших площадей является типовая парковка системы «Шпиндель» (нем. Spindel) с применением боковых винтовых рамп с разделением потоков на въезд и выезд.

Рис. 1.11. Москва, торговый центр «Калужский»

Винтовые лестницы

В современной архитектуре лестницы выполняют не только утилитарную, но зачастую и эстетическую функцию. Многие зарубежные и отечественные архитекторы и конструкторы, например, авторы работы [82], отмечают неизменную популярность винтовых лестниц, обладающих выигрышным дизайном и эксплуатационными характеристиками, такими как невысокая стоимость и компактность. С точки зрения прочности необходимо отметить, что такие лестницы лучше работают на ветровые и сейсмические нагрузки, менее реагируют на изменения в расчетной схеме здания, горизонтальные смещения по сравнению с прямыми лестницами.

В книге [90] даются примеры использования винтовых лестниц из разных материалов в зданиях различных архитектурных концепций и стилей.

Рис. 1.12. Лестница в Union Leagues Club, Нью-Йорк, год постройки 1901 [138]

Рис. 1.13. Современная винтовая лестница торгового центра

Работа [91] содержит подробное описание всех видов лестниц из разных материалов, а также информацию по их расчету методом конечного элемента, а также аналитическими и приближенными методами, снабжена большим количеством иллюстраций и примеров расчета. Отметим особенности лестниц из разных материалов и приведем примеры их применения:

1. Винтовые лестницы из железобетона

Городской стадион г. Флоренция (год постройки 1932) имеет трибуны вместимостью 35000 мест. Для перемещения зрителей по внешнему контуру спортивного сооружения предусмотрено 5 лестниц винтового типа шириной по 3 м каждая, выполненных в железобетоне. Поскольку во время проектирования этого приближенными схемами с запасом. Лестницы запроектированы под нагрузку 5 кН/ $м^2$, на завершающем этапе строительства были проведены испытания, в ходе которых к лестницам прикладывалась нагрузка 6,5 кН/ $м^2$.Долгие годы эксплуатации подтвердили надежность данного сооружения [89].

В работе [37] приводятся результаты опытного испытания модели железобетонной спиральной лестницы и их сравнение с теоретическими расчетами а также натурными измерениями, сделанными уже после возведения объекта.

Железобетонным винтовым лестницам уделял внимание известный итальянский архитектор и инженер П.Л. Нерви. Известен его проект (1934г.) вращающейся виллы, в котором запроектированы железобетонные лестницы в монолитном исполнении для сообщения между подземной и наземной частью.

Другой исследователь конструкций лестниц - В. Неделчев [38] занимался задачами проектирования плитчатых винтовых лестниц.

В Волгограде в музее Сталинградской битвы лестница для подъема на смотровую площадку также имеет винтовую конструкцию, выполнена в монолите, причем нижняя стальная опалубка сохранена в качестве несъемной после заливки бетона.

2.Винтовые лестницы из дерева

Очевидно, из-за сравнительно невысокой прочности дерева и ряда его эксплуатационных особенностей такие лестницы применяются, в основном, во внутренних небольших помещениях. Как правило, лестницы выполняются из относительно более прочных пород дерева, таких как бук, вяз, дуб и т.п.

Деревянные лестницы бывают открытого типа – у таких лестниц стены лестничной площадки не закрывают наружные поверхности (щеки), и сквозного типа – у таких лестниц остается пространство между маршами.

Также известны в строительстве так называемые лестничные винты – в таких конструкциях ступени, расположенные по винтовой линии, жестко крепятся к стержню ее оси. Весь этот винт, как своего рода колонна, работает на соответствующие постоянные и временные нагрузки.

В настоящее время существует множество производителей деревянных лестниц, в журнале [90] представлены их разнообразные разработки.

3.Стальные винтовые лестницы

Винтовые лестницы из стали применяются, в основном, в технических помещениях и промышленных сооружениях (внутри специальных технологических сооружений, высоких монументов и др.- везде где необходимо осматривать состояние сооружения, производить какие-либо текущие эксплуатационные мероприятия, уборку и др.) К примеру, к наружной стороне стальных резервуаров по винтовой линии крепится стальная лестница. Некоторые производители элементов и изделий для гражданского строительства предлагают стальные лестницы для внутренних жилых и административных помещений (например, производитель CIVIK [90]).

Дорожные и транспортные сооружения

В сфере строительства автомобильных и железных дорог широкое применение находит поверхность развертывающегося геликоида, или поверхность одинакового ската. В частности, в форме такой поверхности зачастую проектируются откосы насыпи для подъемов и скруглений дороги. В работе А.И. Карташова [92] разобран пример проектирования откоса железнодорожной насыпи. Поверхность одинакового ската в форме развертывающегося геликоида строится в этой работе на направляющей в виде винтовой линии, лежащей на цилиндре (этой линией является бровка дорожного полотна).

Рис.1.14. Мост Кавадзу-Нанадару

Пример уникального дорожного сооружения - мост Кавадзу-Нанадару (рис. 1.14), расположенный в Японии на участке дороги, связывающей Токио с полуостровом Идзу. Ввиду горного рельефа местности построить мост с прямолинейным съездом не представлялось возможным. Мост введен в эксплуатацию в 1982 г. и успел выдержать несколько землетрясений. Высота моста составляет 45 м, внешний радиус рампы 90 м.

Форму геликоидальных и спиральных поверхностей можно встретить в многоуровневых эстакадах и путепроводах. Эти сооружения могут быть выполнены как в стальном варианте, так и в железобетонном.

Исследователь Нгуен Чам в работе [93] предложил винтообразную конструкцию для пролетного строения криволинейной формы для автомобильной дороги.

Винтовые анкера и сваи

Винтовые сваи и анкера, изобретенные еще в 1838 г. в Великобритании, на протяжении уже почти двух веков используются для быстрого возведения специальных военных и гражданских сооружений повышенной ответственности – маяков, опор ЛЭП, мачт и башен для сооружений связи, объектов в районах многолетней мерзлоты. Во второй половине 20-го века в СССР разработаны многие типовые решения по винтовым анкерным опорам для специальных сооружений.

а) б) в)

Рис. 1.15. а) -лопасть винтовой сваи, б)- наконечник, и в) - вся конструкция в сборе. рисунки с сайта (http://vinthim.ru/nav/articles/tips)

В России в последние 10-15 лет вполне заслуженно повысился интерес к винтовым сваям для применения в малоэтажном загородном строительстве. В современных журналах по строительству немало статей на тему применения винтовых свай, например, работы [94-95]. Применение фундаментов на винтовых сваях имеет ряд неоспоримых преимуществ при возведении малоэтажных зданий небольшой массы в сложных грунтовых условиях, в частности, на грунтах, подверженных морозному пучению. Винтовая свая (рис.1.15) состоит из трубы или стержня с наконечником, на котором размещена лопасть в виде винта Архимеда (может выполняться в литом и сварном варианте).

Винтовые якоря

Для причала плавстредств (судов, плотов и др.) и фиксации сооружений лесосплавной отрасли хорошо зарекомендовали себя винтовые металлические якоря [96]. Нагрузки, которые способен выдержать такой якорь, могут превышать его вес примерно в 300 раз. Препятствием для установки таких якорей могут оказаться только крупные, более 50 см в поперечнике, камни. При отсутствии таковых якоря могут использоваться в любом грунте. Сила, которую выдерживают якоря современных сооружений, доходит до 300 т и более.

В работе [97] описан якорь конструкции инженера Д.А. Ширинкина, предназначенный для закрепления лебедок, отводных блоков, а также оттяжек для мачт сооружений связи, опор ЛЭП. Металлический якорь состоит из стержня с винтовой лопастью и шарнирным опорным устройством. Нагрузка при работе такого якоря раскладывается по горизонтальному и вертикальному направлениям, на, соответственно, выдергивающую и срезающую составляющую, которая передается на стенки приямка. Благодаря такой схеме стержень не подвергается изгибу.

Винтовые опоры и якоря, имеющие разрыхляющий наконечник, с лопастями в форме прямого и развертывающегося геликоида, а также методы их монтажа, разработаны в ВНИИПИЭИлеспрома [97].

1.3.2. Машиностроение.

В целом изделия с винтовыми поверхностями, применяемые в машиностроении, можно классифицировать следующим образом, разделив по назначению на три группы:

Крепежные элементы соединений - болты, гайки, винты, шпильки и иные детали, имеющие резьбу;

Инструменты различного назначения и их детали: фрезы, сверла, метчики, шарошки, шнеки, в основном для металлообработки;

Детали механизмов и машин, преобразующие вращательное движение в поступательное и передающие вращение (ходовые винты, передачи и т.п.).

Строительные машины и механизмы

1. Винты

В строительных машинах и механизмах широко применяются различные винты – детали с лопастями или винтовой нарезкой. Существует два основных вида винтов – те, которые взаимодействуют с рабочей средой – газом, жидкостью, сыпучим материалом перемешивая или получая тяговое усилие от ее движения, и те, что взаимодействуют с другой деталью посредством резьбового соединения – ходовые, силовые винты, передачи, крепежные винты и т.п.

2. Шнеки, конвейеры и подъемники

Прообраз современного шнека был изобретен еще Архимедом в 3 веке до н.э. Винт Архимеда для подъема воды до сих пор используется в некоторых отраслях, например, рыбоводстве. Исторически винты Архимеда применялись для откачивания воды из грунта в странах, где занимались «отвоевыванием земли у моря». В автомобильной технике существует несколько проектов шнековых вездеходов.

Основной деталью винтового конвейера или шнека является вращающийся в неподвижных подшипниках вал с закрепленным на нем длинным винтом. Как правило, винтовые поверхности шнеков имеют форму прямого геликоида и изготавливаются из отдельных, соединенных между собой сваркой или клепкой, секций из тонколистовой стали, реже применяются цельные вальцованные лопасти из одной заготовки. [98]

Назначение оптимальных геометрических размеров деталей винтовых шнеков для транспортировки сыпучих материалов изучалось в работе [99]. Теоретические изыскания проверялись натурными элементами, и в итоге получены принципы определения диаметра и шага винта, диаметра вала.

Деформации лопасти шнека для приготовления смесей для литейного производства, изучалась в работе А.Е. Белкина и др. [88].

Важная отрасль применения шнековых конструкций – оборудование для буровых работ. Буровые работы широко используются в современном гидротехническом, транспортном, а также промышленном и гражданском строительстве. Буронабивные сваи применяются для строительства и реконструкции зданий, при строительстве спецсооружений на участках со сложными грунтовыми условиями. Винтовые шнеки используются для бурения шпуров в скальных породах и в условиях многолетней мерзлоты. Технологические решения различного бурового инструмента и оборудования приведены, например, в [100]. Работа Я.В. Василишина [101] посвящена рациональному проектированию режущих поверхностей бурового долота.

Проектирование шнековых подъемников и назначение оптимальных размеров их деталей рассматривается в работе З. Боттчера и Х. Шталя [102]. В доменных печах направляющая поверхность имеет форму развертывающегося геликоида. Для замедления падения сыпучих грузов используется устройство в виде винтового желоба [103].

В работах [104-107] помимо теоретических сведений также приводятся примеры использования геликоидальных оболочек в технике.

Машины и механизмы с винтовыми зубьями и нарезками

Зубчатая передача винтовыми колесами (винтовая передача), оси которых не лежат в одной плоскости, а перекрещиваются под различными углами, широко применяется в технике и известна любому инженеру-машиностроителю.

Винтовой компрессор, изобретенный еще в 30-е годы 20-го века [108], отличается экономичностью и небольшой массой. Винтовые компрессоры применялись также как газотурбинные установки для судов [109]. В сборниках [110, 111] приводятся примеры использования аналогичных установок.

Применение винтовых деталей для машин литейной отрасли и экспериментальное исследование их напряженного состояния при воздействии высоких температур рассмотрено в статье А.Тераока [112].

Ветрогенераторы и ветророторы

Перспективным в настоящее время направлением применения геликоидальных конструкций является проектирование лопастей ветророторов. Существует целая серия патентов на шнековые ветророторы [113-115]. Обзор возможностей ветрогенераторов со шнековым ветроприемником дается в работе [116]. Описаны варианты изготовления лопастей шнековых ветророторов спирально-винтовой формы, которая может быть получена из плоской круглой заготовки, которая разрезается по кривой, близкой к спирали Архимеда и растянута вдоль оси вала. В [114] описана лопасть конической спирально-винтовой формы.

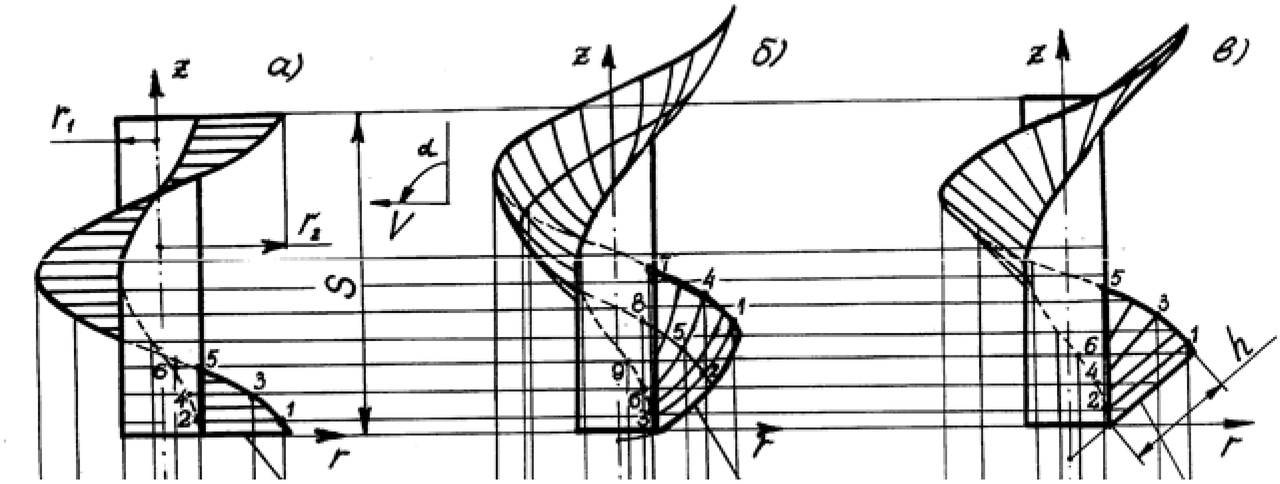


Рис. 1.16. Лопасти ветророторов геликоидальной формы: в виде прямого (а), воронкообразного(б) и косого (в) геликоида – рисунок из [115]

Также известны лопасти ветророторов в форме воронкообразных, косых и прямых геликоидов – в патенте [115] описано технологическое решение лопасти в форме частного случая косого геликоида, когда он может быть развернут в плоскость (а следовательно, изготовлен из плоской заготовки), и даются формулы для расчета размеров элементов и изготовления развертки (рис.1.16).

Автор нескольких изобретений в этой области И.И. Смульский в обзорной статье [116] отмечает экологическую безопасность, низкий уровень шума и невысокую стоимость шнековых ветродвигателей.

1.4. Выводы по главе 1

Проведенный обзор исследований позволяет убедиться в том, что:

- в широком смысле, тема расчета на прочность линейчатых геликоидальных оболочек является хорошо изученной, можно сказать, что хорошо разработаны методы статического линейного анализа оболочек в форме прямых геликоидов, достаточно много публикаций по оболочкам со срединной поверхностью в форме торсовых геликоидов;

- в узком смысле, тема расчета на прочность такого подвида линейчатых оболочек как косые (или наклонные) геликоиды, разработана недостаточно – во всей библиографии данного обзора напрямую ей посвящено лишь две статьи. По-видимому, это связано с тем, что геликоидальная симметрия не упрощает значительно вид квадратичных форм и полученных с применением их основных соотношений теории оболочек, а также в случае косого геликоида необходимо использовать криволинейные неортогональные несопряженные координаты поверхности, что значительно усложняет расчетную систему теории оболочек.

Также проведенный обзор подтверждает актуальность изучения оболочек в форме косых геликоидов ввиду широких перспектив их применения и важного практического значения.

.

ГЛАВА 2.
АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОГОЙ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ В ФОРМЕ ДЛИННОГО КОСОГО ГЕЛИКОИДА ПО МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ НЕСОПРЯЖЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Одной из наиболее простых и математически стройных моделей теории оболочек является теория тонких упругих оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа-Лява [117]. Тонкими считаются оболочки, у которых отношение стрелы подъема h к пролету в плане l менее 1/20. Перемещения тонких оболочек в линейной постановке малы по сравнению с толщиной (или хотя бы не превышают ее). Материал обладает свойствами однородности, изотропии и линейной упругости. Согласно гипотезе Кирхгофа-Лява, нормальный элемент остаётся нормальным срединной поверхности и после деформации, а слои, параллельные срединной поверхности, не действуют друг на друга, т.е. наблюдается плоское напряженное состояние.

Линейная теория тонких упругих оболочек была разработана в трудах отечественных ученых В.З. Власова, В.В. Новожилова и др., и была математически строго изложена в трудах А.Л. Гольденвейзера, которыми преимущественно пользовался автор при написании данной главы.

Полная система расчетных уравнений моментной теории тонких упругих оболочек включает в себя дифференциальные уравнения равновесия, геометрические уравнения и физические уравнения (уравнения состояния) и составляет 20 уравнений. Дополнительно к ним могут быть получены уравнения неразрывности деформаций в форме 5 или 3-х уравнений [118]. Существуют три основных метода получения из этих 20-ти итоговых разрешающих уравнений: решение в перемещениях, когда все величины выражаются через перемещения, и решается соответствующая система дифференциальных уравнений с тремя неизвестными перемещениями; решение в усилиях, когда в качестве неизвестных выступают некоторые силовые факторы, и в рассмотрение также вводятся уравнения неразрывности деформаций; смешанный метод, когда часть неизвестных переменных представляют собой перемещения, а часть – усилия, в комбинации, рациональной для каждого конкретного случая, также с учетом уравнений неразрывности деформаций.

Уравнения моментной теории оболочек практически всегда громоздки, особенно для случая неортогональной несопряженной системы координат. Однако, с развитием мощностей современной вычислительной техники, этот недостаток несколько нивелируется. Относительное преимущество несопряженных систем связано с тем, что они наиболее естественны для задания поверхности, в то время как не всегда просто отыскать сеть главных кривизн поверхности и не всегда удобно ею пользоваться для задания нагрузок, закреплений и постановки граничных условий.

2.1. Расчетные уравнения теории тонких упругих оболочек в «псевдоусилиях» (по А.Л. Гольденвейзеру)

А. Л. Гольденвейзер в своей монографии [118] приводит полную систему расчетных уравнений теории оболочек в неортогональной несопряженной системе координат.

Оси произвольной системы координат, направления внутренних силовых факторов и перемещений, подвижная тройка векторов показаны на рис. 2.1.1. Все эти величины фигурируют в уравнениях теории тонких упругих оболочек (2.1.1-2.1.10).

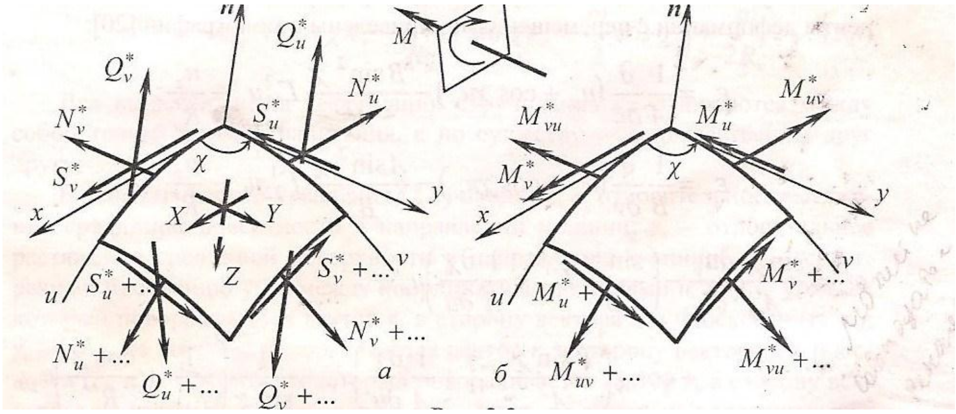


Рис. 2.1.1. Усилия в системе уравнений А.Л.Гольденвейзера

Уравнения равновесия в несопряженной неортогональной системе координат *u, v* имеют вид:

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(N_u + cos\chi S_u)) - \frac{B^2}{A}\Gamma_{11}^2 sin\chi S_u - \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(S_v - cos\chi N_v)) - B\Gamma_{12}^2 sin\chi N_v -$$
$$- \frac{AB}{sin\chi}\left(\frac{Q_u}{R_u} - \frac{Q_v}{R_{uv}}\right) + AB(X + cos\chi Y) = 0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(S_u + cos\chi N_u)) - A\Gamma_{12}^1 sin\chi N_u + \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(N_v - cos\chi S_v)) + \frac{A^2}{B}\Gamma_{22}^1 sin\chi S_v -$$
$$- \frac{AB}{sin\chi}\left(\frac{Q_v}{R_v} - \frac{Q_u}{R_{uv}}\right) + AB(Y + cos\chi X) = 0,$$

$$AB\left(\frac{N_u}{R_u} + \frac{N_v}{R_v} + \frac{S_v - S_u}{R_{uv}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}(BQ_u) + \frac{\partial}{\partial v}(AQ_v) + ABsin\chi Z = 0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(M_{uv} + cos\chi M_u)) - \frac{B^2}{A}\Gamma_{11}^2 sin\chi M_u - \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(M_v - cos\chi M_{uv})) -$$
$$- B\Gamma_{12}^2 sin\chi M_{vu} + ABQ_v = 0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(M_u + cos\chi M_{uv})) - A\Gamma_{12}^1 sin\chi M_{uv} + \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(M_{vu} - cos\chi M_v)) +$$
$$+ \frac{A^2}{B}\Gamma_{22}^1 sin\chi M_v - ABQ_u = 0,$$

$$sin\chi(S_u + S_v) + \frac{M_{uv}}{R_u} + \frac{M_{vu}}{R_v} + \frac{M_v - M_u}{Ru_v} = 0, \qquad (2.1.1)$$

где звездочки условно не показаны.

Разложение внешних сил и моментов на проекции по осям основного трехгранника:

$$P = X\frac{\overline{r_u}}{A} + Y\frac{\overline{r_v}}{B} - Z\overline{\boldsymbol{n}}, Q = E\frac{\overline{r_u}}{A} + F\frac{\overline{r_v}}{B}. \tag{2.1.2}$$

χ- угол между координатными линиями:

$$\cos\chi = \frac{F}{AB}, tg\chi = \frac{\sqrt{A^2B^2-F^2}}{F}, \tag{2.1.3}$$

В уравнениях равновесия (2.1.1) встречаются также обозначения:

$$\frac{1}{R'_u} = -\frac{L}{A^2}, \quad \frac{1}{R'_v} = -\frac{N}{B^2}, \quad \frac{1}{R_{uv}} = \frac{M}{AB}, \tag{2.1.4}$$

где $R_{u,}R_v$- радиусы кривизны нормальных сечений поверхности, проведенных вдоль координатных линий,

$\overline{\boldsymbol{u}} = u(u,v)$- вектор упругого смещения произвольной точки срединной поверхности. Разложив его по направлениям осей основного триэдра, запишем:

$$\overline{\boldsymbol{u}} = u_u\frac{\overline{r_u}}{A} + u_v\frac{\overline{r_v}}{B} + u_z\overline{\boldsymbol{n}}, \tag{2.1.5}$$

где $u_u, u_{v,}u_z$ –компоненты смещения, $A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{G}$ – коэффициенты Ламе теории поверхностей, $\overline{\boldsymbol{n}}$ –единичный вектор нормали.

Геометрические соотношения, согласно А.Л.Гольденвейзеру [118]:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(u_u + u_v cos\chi) - \frac{\mathrm{B}\, sin\chi^2}{A^2}\Gamma_{11}^2 u_v + \frac{u_z}{R_u},$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}(u_v + u_u cos\chi) - \frac{\mathrm{A}\, sin\chi^2}{B^2}\Gamma_{22}^1 u_u + \frac{u_z}{R_v},$$

$$\omega_u = \frac{sin\chi}{A}\frac{\partial}{\partial u}u_v - \left(\frac{sin\chi}{B}\Gamma_{12}^1 + \frac{1}{A}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_u + cos\chi\left(\frac{Bsin\chi}{A^2}\Gamma_{11}^2 + \frac{1}{A}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)u_{v-} - \frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{cos\chi}{R_u}\right)u_z,$$

$$\omega_v = \frac{sin\chi}{B}\frac{\partial}{\partial v}u_u - \left(\frac{sin\chi}{B}\Gamma_{12}^2 + \frac{1}{B}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_v + cos\chi\left(\frac{Asin\chi}{B^2}\Gamma_{22}^1 + \frac{1}{B}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_{u-} - \frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{cos\chi}{R_v}\right)u_z,$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega = \omega_u + \omega_v,$$

$$\gamma_u = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}u_z - \frac{u_u}{R_u} + \frac{u_v}{R_{uv}},$$

$$\gamma_v = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}u_z - \frac{u_v}{R_v} - \frac{u_u}{R_{uv}},$$

$$\delta = \frac{1}{2}(\omega_v - \omega_u),$$

$$\kappa_u = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\gamma_u - \gamma_v cos\chi}{sin\chi}) - \frac{sin\chi}{B}\Gamma_{12}^1\gamma_v + \frac{\delta}{R_{uv}},$$

$$\kappa_v = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma_v - \gamma_u cos\chi}{sin\chi}\right) - \frac{sin\chi}{A}\Gamma_{12}^2\gamma_u - \frac{\delta}{R_{uv}},$$

$$\tau^{(1)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\gamma_v - \gamma_u cos\chi}{sin\chi}) - \frac{Bsin\chi}{A^2}\Gamma_{11}^2\gamma_u + \frac{\delta}{R_u},$$

$$\tau^{(1)} = \kappa_{uv} - \kappa_u cos\chi + \frac{1}{R_{uv}}\ (\varepsilon_v sin\chi - \frac{\varepsilon_{uv}cos\chi}{2}) - \frac{\varepsilon_{uv}}{2R_u},$$

$$\tau^{(2)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\gamma_u - \gamma_v cos\chi}{sin\chi}) - \frac{Asin\chi}{B^2}\Gamma_{22}^1\gamma_u + \frac{\delta}{R_u},$$

$$\tau^{(1)} = -\kappa_{uv} + \kappa_v cos\chi - \frac{1}{R_{uv}}\ (\varepsilon_u sin\chi - \frac{\varepsilon_{uv}cos\chi}{2}) - \frac{\varepsilon_{uv}}{2R_v}, \qquad (2.1.6)$$

где:

ε_u- относительное растяжение срединной поверхности в направлении линии *u*;

ε_v- относительное растяжение срединной поверхности в направлениилинии *v*;

ε_{uv}- сдвиг, равный изменению угла между координатными линиями *u, v*;

γ_u- угол, на который поворачивается вектор r_uв сторону вектора *n* в плоскости (r_u,*n*);

γ_v- угол, на который поворачивается вектор r_vв сторону вектора *n* в плоскости (r_v, *n*);

ω_u- угол, на который поворачивается вектор r_uв сторону вектора r_vв касательной плоскости;

ω_v- угол, на который поворачивается вектор r_vв сторону вектора r_uв касательной плоскости;

Γ_{ij}^n- символы Кристоффеля(три индекса).

Два нижних индекса указывают, по каким переменным дифференцируется $\bar{\boldsymbol{r}}$= *u(u,v)* в левой части соответствующего равенства, а нижний индекс показывает, при какой производной от $\bar{\boldsymbol{r}}$= *u(u,v)* стоит данный коэффициент (цифра 1 соответствует параметру *u,* цифра 2 - параметру v). Символы Кристоффеля могут быть выражены через коэффициенты первой квадратичной формы *A, B и* χ:

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{AB^2\frac{\partial A}{\partial u} + BA^2\frac{\partial A}{\partial v} - ABcos\chi\frac{\partial}{\partial u}(ABcos\chi)}{A^2B^2sin\chi^2},$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{-A^2Bcos\chi\frac{\partial A}{\partial u} + A^2\frac{\partial}{\partial u}(ABcos\chi) - A^3\frac{\partial A}{\partial v}}{A^2B^2sin\chi^2},$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{AB^2\frac{\partial A}{\partial v} - AB^2cos\chi\frac{\partial B}{\partial u}}{A^2B^2sin\chi^2},$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{A^2B\frac{\partial B}{\partial u} - A^2Bcos\chi\frac{\partial B}{\partial u}}{A^2B^2sin\chi^2},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{-AB^2cos\chi\frac{\partial B}{\partial v} + B^2\frac{\partial}{\partial v}(ABcos\chi) - A^3\frac{\partial B}{\partial u}}{A^2B^2sin\chi^2},$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{A^2Bcos\chi\frac{\partial A}{\partial v} + AB^2cos\chi\frac{\partial A}{\partial v} - ABcos\chi\frac{\partial}{\partial v}(ABcos\chi)}{A^2B^2sin\chi^2}. \quad (2.1.6\ a)$$

Физические уравнения (выражения усилий и моментов через деформации в соответствии с законом Гука), согласно монографии [90]:

$$N_u = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\varepsilon_u - \varepsilon_{uv}ctg\chi + \nu\varepsilon_v}{sin\chi}\right),$$

$$N_v = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\varepsilon_v - \varepsilon_{uv}ctg\chi + \nu\varepsilon_u}{sin\chi}\right),$$

$$S_u = -S_v = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}(\left(\frac{1+cos^2\chi}{sin^2\chi}\varepsilon_{uv} - (\varepsilon_u - \varepsilon_v)ctg\chi\right) - \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\nu((\varepsilon_{uv} - (\varepsilon_u - \varepsilon_v)ctg\chi),$$

$$M_u = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\kappa_u + \nu\kappa_v}{sin\chi}\right),$$

$$M_v = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\kappa_v + \nu\kappa_u}{sin\chi}\right),$$

$$M_{uv} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(\frac{\kappa_{uv} - cos\chi\kappa_v}{sin\chi}\right),$$

$$M_{vu} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(\frac{\kappa_{uv} + cos\chi\kappa_u}{sin\chi}\right). \quad (2.1.7)$$

Таким образом, полученная А.Л. Гольденвейзером система расчетных уравнений (2.1.1-2.1.7) содержит 19 неизвестных: $\mathrm{N_u}$, N_v, S_u, S_v, M_u, M_v, M_{uv},

M_{vu}, ε_u, ε_v, ε_{uv}, γ_u, γ_v, ω_u, ω_v, κ_u, κ_v, κ_{uv} (звездочки условно не показаны).

2.2 Система расчетных уравнений для тонких оболочек в усилиях, принятых в инженерной практике (по С.Н. Кривошапко)

На практике инженеры-проектировщики пользуются несколько иным заданием силовых факторов, чем математики. Внутренние усилия, полученные в соответствии с системой уравнений А.Л. Гольденвейзера, не всегда будут тождественны усилиям и моментам, которые используются в инженерных расчетах для подбора сечений и армирования элементов.

С.Н. Кривошапко [119] разработал полную систему расчетных уравнений с заданием усилий, общепринятых в инженерной практике.

Рис. 2.2.1 иллюстрирует направления осей и силовых факторов в постановке С.Н. Кривошапко (рисунок из [120])

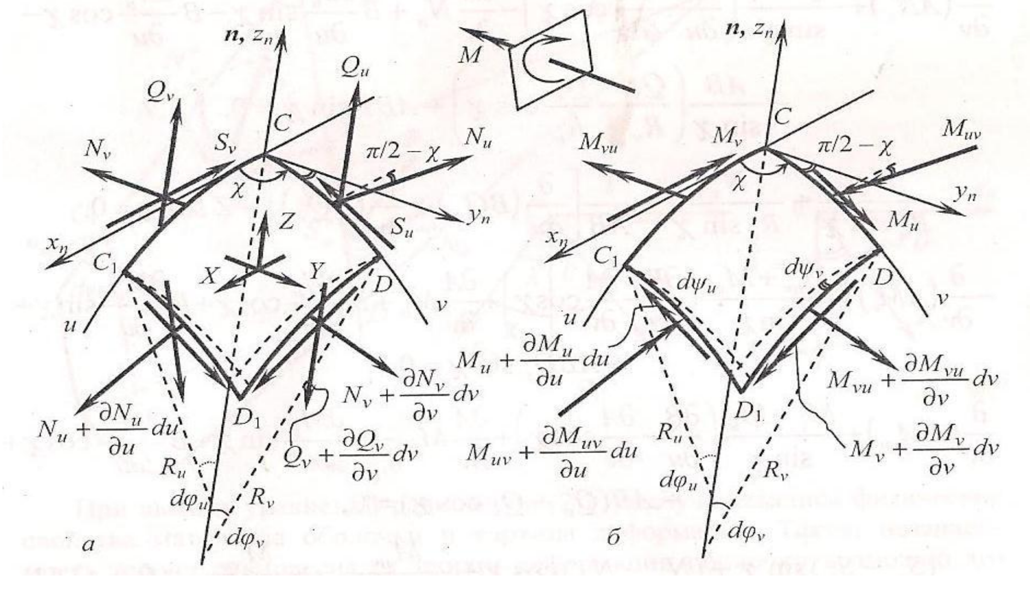


Рис. 2.2.1 Усилия в системе уравнений С.Н. Кривошапко

На рис. 2.2.1 обозначены все величины, входящие в уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения согласно работам С.Н. Кривошапко, и даны их направления:

$$\frac{\partial}{\partial v}(AS_v)+\frac{1}{sin\chi}(N_u-N_v)\left(\frac{\partial B}{\partial u}-\frac{\partial A}{\partial v}cos\chi\right)+$$

$$+S_u\frac{\partial A}{\partial v}+B\frac{\partial S_u}{\partial u}cos\chi+B\frac{\partial N_u}{\partial u}sin\chi-\frac{AB}{R_u}Q_u+ABXsin\chi=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(AN_v) + \frac{1}{sin\chi}(S_u + S_v)\left(-\frac{\partial A}{\partial v}cos\chi\right) - N_u\frac{\partial A}{\partial v} + B\frac{\partial S_u}{\partial u}cos\chi -$$

$$-B\frac{\partial N_u}{\partial u}cos\chi - \frac{AB}{sin\chi}\left(\frac{Q_v}{R_v} - \frac{Q_u}{R_u}cos\chi\right) + ABXsin\chi = 0,$$

$$\frac{k_u N_u}{sin\chi} + \frac{k_v N_v}{sin\chi} + \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial v}(BQ_u) + \frac{\partial}{\partial v}(AQ_v)\right) - Zsin\chi = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}(AM_v) + \frac{1}{sin\chi}(M_{uv} + M_{vu})\left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}cos\chi\right) +$$

$$+M_u\frac{\partial A}{\partial v} + B\frac{\partial S_u}{\partial u}cos\chi + B\frac{\partial M_{uv}}{\partial u}sin\chi + ABQ_v sin\chi = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}(AM_{vu}) + \frac{1}{sin\chi}(M_v + M_u)\left(-\frac{\partial A}{\partial v}cos\chi\right) +$$

$$+M_{uv}\frac{\partial A}{\partial v} - B\frac{\partial M_u}{\partial u}sin\chi + B\frac{\partial M_{uv}}{\partial u}cos\chi + AB(Q_u + Q_v sin\chi) = 0,$$

$$(S_u - S_v)sin\chi + (N_v - N_u)cos\chi + \frac{M_{uv}}{R_u sin\chi} - \frac{M_{vu}}{R_v sin\chi} = 0, \qquad (2.2.1)$$

где k_u, k_v - кривизны соответствующих координатных линий.

Величины, рассматриваемые в [118], согласно терминологии работ С.Н. Кривошапко, называются «псевдоусилиями», поскольку не соответствуют истинным значениям усилий, которые применяются в классической постановке для инженерных расчетов. Соотношения между этими величинами выведены в [119]:

$$N_v = N_v^* sin\chi,$$
$$N_u = N_u^* sin\chi,$$
$$S_u = S_u^* + N_u^* cos\chi,$$
$$S_v = S_v^* + N_v^* cos\chi,$$
$$M_{vu} = M_{vu}^* sin\chi,$$
$$M_{uv} = -M_{uv}^* sin\chi,$$
$$M_u = -M_u^* - M_{vu}^* cos\chi,$$
$$M_v = -M_v^* - M_{uv}^* cos\chi. \qquad (2.2.2)$$

В формулах (2.2.1) $S_u \neq S_v$, $M_{uv} \neq M_{vu}$ так как в общем случае система неортогональна.

Уравнения равновесия (2.2.1) выведены для физически линейной теории оболочек при малых перемещениях, когда равновесие не зависит от деформации.

Геометрические соотношения отличаются от геометрических соотношений в постановке А.Л. Гольденвейзера лишь тем, что знак перемещения u_z меняется на противоположный, поскольку вектор упругого смещения разворачивается по осям следующим образом:

$$U = u_u \frac{\overline{r_u}}{A} + u_v \frac{\overline{r_v}}{B} + u_z \bar{n}.$$

Физические уравнения (иначе, соотношения упругости), согласно С.Н. Кривошапко:

$$N_u = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_u - \varepsilon_{uv}\mathrm{ctg}\chi + \nu\varepsilon_v\right),$$

$$N_v = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_v - \varepsilon_{uv}\mathrm{ctg}\chi + \nu\varepsilon_u\right),$$

$$S_u = \frac{Eh}{2(1+\nu)}(\varepsilon_{uv} + (\varepsilon_u - \varepsilon_v)\mathrm{ctg}\chi),$$

$$S_v = \frac{Eh}{2(1+\nu)}(\varepsilon_{uv} + (\varepsilon_v - \varepsilon_u)\mathrm{ctg}\chi),$$

$$M_u = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\kappa_u + \kappa_v}{\sin\chi} - (1-\nu)(\kappa_v \sin\chi + \kappa_{uv}\mathrm{ctg}\chi)\right),$$

$$M_v = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\kappa_u + \kappa_v}{\sin\chi} - (1-\nu)(\kappa_u \sin\chi + \kappa_{uv}\mathrm{ctg}\chi)\right),$$

$$M_{uv} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}(\kappa_{uv} - \kappa_v \cos\chi),$$

$$M_{vu} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}(\kappa_{uv} - \kappa_u \cos\chi). \qquad (2.2.3)$$

Таким образом, имеем систему уравнений с неизвестными: N_u, N_v, S_u, S_v, M_u, M_v, M_{uv}, M_{vu}.

2.3. Внешние нагрузки

Оболочка может деформироваться под влиянием внешних сил, которые прикладываются к внутренним точкам оболочки (массовые силы), к внутренней или наружной поверхности, или к нормальным сечениям краев (краевые нагрузки). Согласно теории тонких оболочек все эти силы заменяются статически эквивалентными силами, приложенными к срединной поверхности.

Вектор внешних поверхностных сил (у А.Л. Гольденвейзера) развертывается по осям основного триэдра следующим образом:

$$P = X\frac{\overline{r_u}}{A} + Y\frac{\overline{r_v}}{B} - Z\overline{\boldsymbol{n}}. \qquad (2.3.1)$$

Вектор внешних моментов в данной работе не рассматривается.

2.4. Расчетные уравнения моментной теории пологих упругих оболочек в форме длинного косого геликоида

При необходимости определения компонентов напряженно-деформированного состояния тонких упругих оболочек в форме рассматриваемой винтовой поверхности необходимо использовать систему двадцати расчетных уравнений (уравнения равновесия, геометрические и физические уравнения), приведенную в монографии А.Л. Гольденвейзера [118] для произвольной косоугольной системы криволинейных координат.

Рассмотрим оболочки в форме косого геликоида (2.4.1). Параметрические уравнения срединной поверхности приняты в виде:

$$x = u\cos\varphi\cos v,$$

$$y = u\cos\varphi\sin v,$$

$$z = u\sin\varphi + cv. \qquad (2.4.1)$$

φ – угол наклона прямых образующих,φ=const,

c– параметр, связанный с шагом винта ($L = 2\pi c$).

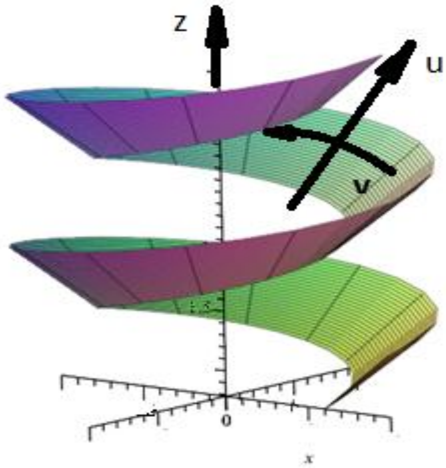


Рис. 2.4.1. Косой геликоид. Несопряженная неортогональная система криволинейных координат

Коэффициенты квадратичных форм поверхности получены в следующем виде:

$$A = 1, B = \sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2},$$

$$F = csin\varphi,$$

$$L = 0, M = -\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{u^2 + c^2}},$$

$$N = \frac{u^2\sin 2\varphi}{\sqrt{u^2+c^2}}. \quad (2.4.2)$$

Угол между координатными линиями:

$\chi = arccos\left(\frac{c\sin\varphi}{\sqrt{u^2cos^2\varphi+c^2}}\right)$.(2.4.3)

Согласно формулам (2.1.3- 2.1.4):

$$\frac{1}{R_{u'}} = 0,$$

$$\frac{1}{R_{v'}} = -\frac{\sqrt{c^2+u^2}(u^2cos^2\varphi+c^2)}{u^2\sin 2\varphi},$$

$$\frac{1}{R_{uv'}} = -\frac{\sqrt{c^2+u^2}\sqrt{u^2cos^2\varphi+c^2}}{ccos\varphi}. \quad (2.4.4)$$

Символы Кристоффеля принимают следующий вид:

$$\Gamma_{11}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{c\sin\varphi}{c^2 + u^2},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{u}{c^2 + u^2},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{u(u^2cos^2\varphi + c^2)}{c^2 + u^2},$$

$$\Gamma_{22}^{2} = -\frac{c\,sin\,\varphi u}{c^2+u^2}\ . \qquad (2.4.5)$$

Рассмотрим случай пологой оболочки.

Пологая тонкая оболочка определяется следующими соотношениями:

$$\frac{l_{min}}{f} \geq 5\ ,\frac{R_{min}}{h} \geq 20,$$

гдеl_{min} – наименьший размер оболочки на плоскости ее проекции,

f- стрела подъема оболочки,

h - толщина оболочки.

Уравнения равновесия А.Л. Гольденвейзера в произвольной косоугольной системе координат (2.1.1) принимаем для случая пологой оболочки:

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(N_u + \ cos\chi S_u)) - \frac{B^2}{A}\Gamma_{11}^{2}sin\chi S_u - \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(S_v - cos\chi N_v)) -$$

$$-B\Gamma_{12}^{2}sin\chi N_v + AB(X + cos\chi Y) = 0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(S_u + \ cos\chi N_u)) - A\Gamma_{12}^{1}sin\chi N_u + \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(N_v - cos\chi S_v)) +$$

$$+\frac{A^2}{B}\Gamma_{22}^{1}sin\chi S_v + AB(Y + cos\chi X) = 0,$$

$$AB\left(\frac{N_u}{R_u} + \frac{N_v}{R_v} + \frac{S_v - S_u}{R_{uv}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}(BQ_u) + \frac{\partial}{\partial v}(AQ_v) + ABsin\chi Z = 0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(M_{uv} + \ cos\chi M_u)) - \frac{B^2}{A}\Gamma_{11}^{2}sin\chi M_u - \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(M_v - cos\chi M_{uv})) -$$

$$-B\Gamma_{12}^{2}sin\chi M_{vu} + ABQ_v = 0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(M_u + \ cos\chi M_{uv})) - A\Gamma_{12}^{1}sin\chi M_{uv} + \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(M_{vu} - cos\chi M_v)) +$$

$$+\frac{A^2}{B}\Gamma_{22}^{1}sin\chi M_v - ABQ_u = 0. \qquad (2.4.6)$$

В первых двух уравнениях пренебрегаем влиянием поперечных сил, шестое уравнение не рассматриваем, т.к. оно удовлетворяется тождественно.

Примем верным предположение $S_u = S_v$. Из 4-го и 5-го уравнений можно выразить Q_v и Q_u соответственно. Подставив Q_v и Q_u в первые три уравнения, можно перейти к системе трех уравнений.

Для длинного геликоида с большим количеством витков пренебрежем производными по v, в предположении, что закрепления прямолинейных краев не оказывают влияния на НДС. Таким образом, можно перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Подставим выражения (2.4.4, 2.4.5) и получим уравнения для косого геликоида в неортогональной несопряженной системе координат:

$$\frac{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}}{\cos\varphi\sqrt{u^2+c^2}}\frac{d}{du}\left(N_u\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2} + csin\varphi S_u\right) - \frac{u\cos\varphi}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}\sqrt{u^2+c^2}}N_v \ + $$
$$+\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}X + \ csin\varphi Y = 0,$$

$$\frac{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}}{\cos\varphi\sqrt{u^2+c^2}}\frac{d}{du}\left(csin\varphi N_u + \sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}S_u\right) + \frac{cu\,sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}\sqrt{u^2+c^2}}N_u - \frac{u\cos\varphi}{\sqrt{u^2+c^2}}S_v$$
$$+csin\varphi X + \sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}Y = 0,$$

$$\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}\left(\frac{N_u}{R_u} + \frac{N_v}{R_v}\right) + \frac{d}{du}\left(\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}Q_u\right) + \frac{cos^2\varphi(u^2+c^2)}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}}Z = 0,$$

$$Q_u = \frac{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}}{cos^2\varphi(u^2+c^2)}\frac{d}{du}\left(\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}M_u + c\,sin\varphi\,M_{uv}\,)\right) -$$
$$-\frac{cu\,sin\varphi\,cos^2\varphi}{(u^2cos^2\varphi+c^2)^{\frac{3}{2}}}M_{uv} \ + \frac{u\,cos^2\varphi}{u^2cos^2\varphi+c^2}M_v,$$

$$Q_v = -\frac{1}{cos\,\varphi\sqrt{u^2+c^2}}\frac{d}{du}\left(\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}\left(M_{uv} + \frac{c\,sin\varphi}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}}M_u\right)\right) +$$
$$+\frac{u}{u^2+c^2}\frac{cos\,\varphi\sqrt{u^2+c^2}}{\sqrt{u^2cos^2\varphi+c^2}}M_{vu}. \qquad (2.4.7)$$

В системе (2.4.7) Q_u и Q_v выражены из соответственно четвертого и пятого уравнений равновесия.

Геометрические соотношения – выражения для компонентов деформации для случая пологих оболочек принимаем, приравнивая нулю части деформаций крученияκ_u,κ_v, κ_{uv}, зависящие от u_u, u_v, исходя из предпосылок расчетной модели пологих оболочек:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(u_u + u_v cos\chi) - \frac{\mathrm{B}\, sin\chi^2}{A^2}\Gamma_{11}^2 u_v + \frac{u_z}{R_u},$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}(u_v + u_u cos\chi) - \frac{\mathrm{A}\, sin\chi^2}{B^2}\Gamma_{22}^1 u_u + \frac{u_z}{R_v},$$

$$\omega_u = -\frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{cos\chi}{R_u}\right)u_z,$$

$$\omega_v = -\frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{cos\chi}{R_v}\right)u_z,$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega = \omega_u + \omega_v,$$

$$\gamma_u = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}u_z,$$

$$\gamma_v = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}u_z,$$

$$\delta = \frac{1}{2}(\omega_v - \omega_u),$$

$$\kappa_u = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\gamma_u - \gamma_v cos\chi}{sin\chi}) - \frac{sin\chi}{B}\Gamma_{12}^1\gamma_v + \frac{\delta}{R_{uv}},$$

$$\kappa_v = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma_v - \gamma_u cos\chi}{sin\chi}\right) - \frac{sin\chi}{A}\Gamma_{12}^2\gamma_u - \frac{\delta}{R_{uv}},$$

$$\tau^{(1)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\gamma_v - \gamma_u cos\chi}{sin\chi}) - \frac{Bsin\chi}{A^2}\Gamma_{11}^2\gamma_u + \frac{\delta}{R_u},$$

$$\tau^{(1)} = \kappa_{uv} - \kappa_u cos\chi + \frac{1}{R_{uv}}\ (\varepsilon_v sin\chi - \frac{\varepsilon_{uv}cos\chi}{2}) - \frac{\varepsilon_{uv}}{2R_u},$$

$$\tau^{(2)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\gamma_u - \gamma_v cos\chi}{sin\chi}) - \frac{Asin\chi}{B^2}\Gamma_{22}^1\gamma_u + \frac{\delta}{R_u},$$

$$\tau^{(1)} = -\kappa_{uv} + \kappa_v cos\chi - \frac{1}{R_{uv}}\ (\varepsilon_u sin\chi - \frac{\varepsilon_{uv}cos\chi}{2}) - \frac{\varepsilon_{uv}}{2R_v}. \qquad (2.4.8)$$

Подставив в эти формулы выражения (2.4.4- 2.4.5), пренебрегая производными по ∂v для длинного геликоида, получим выражения с обыкновенными производными:

$$\varepsilon_u = \frac{d}{du}u_u - \frac{c\sin\varphi u_v u cos^2\varphi}{(u^2cos^2\varphi + c^2)^{3/2}} + \frac{c\sin\varphi\frac{d}{du}u_v}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}},$$

$$\varepsilon_v = \frac{u_u u cos^2\varphi}{u^2 cos^2\varphi + c^2} + \frac{u^2 \sin 2\,\varphi\, u_z}{(u^2 cos^2\varphi + c^2)\sqrt{u^2+c^2}},$$

$$\omega_u = \frac{c^2\, sin^2\,\varphi u_v u cos\varphi}{(u^2cos^2\varphi + c^2)^{3/2}\sqrt{u^2+c^2}} + \frac{\cos\varphi\sqrt{u^2+c^2}\,\frac{d}{du}u_v}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}} - \frac{cu_z}{u^2+c^2},$$

$$\omega_v = -\frac{u_z u cos\varphi}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}\sqrt{u^2+c^2}} - \frac{u_u\, u\, c\, \cos\varphi \sin\varphi}{(u^2cos^2\varphi + c^2)\sqrt{u^2+c^2}} + \frac{u_z\, c(u^2+c^2+u^2 sin^2\varphi)}{(u^2cos^2\varphi + c^2)(u^2+c^2)},$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega = \frac{2\ u_z\, c\, u^2\, sin^2\varphi}{(u^2cos^2\varphi + c^2)(u^2+c^2)} - \frac{u\, cos^3\varphi\,\sqrt{u^2+c^2}\, u_v}{(u^2cos^2\varphi + c^2)^{\frac{3}{2}}} -$$

$$-\frac{u\, c\sin\varphi\, \cos\varphi\ \ u_u}{(u^2cos^2\varphi + c^2)\sqrt{u^2+c^2}} + \frac{\sqrt{u^2+c^2}\,\cos\varphi\,\frac{d}{du}u_v}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}},$$

$$\gamma_u = -\frac{d}{du}u_z + \frac{c\cos\varphi\, u_v}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}\sqrt{u^2+c^2}},$$

$$\gamma_v = \frac{u^2\sin 2\,\varphi\, u_v}{(u^2cos^2\varphi + c^2)\sqrt{u^2+c^2}} - \frac{c\cos\varphi\, u_u}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}\sqrt{u^2+c^2}},$$

$$\kappa_u = \frac{\sqrt{u^2cos^2\varphi} + c^2\,\frac{d^2}{du^2}u_z}{\cos\varphi\,\sqrt{u^2+c^2}} - \frac{c^2\, sin^2\,\varphi u\frac{d}{du}u_z}{\cos\varphi\,\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}(u^2+c^2)^{3/2}} - \frac{c^2\cos\varphi u_z}{\sqrt{u^2+c^2}(u^2cos^2\varphi + c^2)^{3/2}},$$

$$\kappa_v = \frac{\cos\varphi\, u\frac{d}{du}u_z}{\sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2}\sqrt{u^2+c^2}} + \frac{c^2\cos\varphi\, u_z}{(u^2cos^2\varphi + c^2)^{3/2}\sqrt{u^2+c^2}},$$

$$\kappa_{uv} = \frac{\sin 2\,\varphi\left(u^2cos^2\varphi\left(u^2+c^2\right) - \frac{1}{2}c^2(u^2+c^2+u^2sin^2\varphi)\right)cu_z}{(u^2+c^2)^{3/2}(u^2cos^2\varphi+c^2)^2} + \frac{1}{2}\frac{c\sin 2\,\varphi\, u\frac{d}{du}u_z}{(u^2cos^2\varphi+c^2)\sqrt{u^2+c^2}}. \quad (2.4.9)$$

Подставим геометрические уравнения в физические и получим выражения для внутренних силовых факторов, зависящие только от перемещений:

$$N_u = \frac{D_1}{b^5 t cos^2\varphi}(u(cos^2\varphi\sigma b^2 + f^2)b^2 cos\varphi u_u +$$

$$+2\,(cos^2\varphi\sigma b^2 - f^2 sin\varphi)u^2 b u_z + b^4t^2cos\varphi\,\frac{du_u}{du}),$$

$$N_v = \frac{D_1}{b^5t^3cos^2\varphi}(ut^4b^2cos\varphi u_u - \frac{1}{2}ct^3(1-\sigma)b^4 sin2\varphi u_z\frac{\partial}{\partial u}u_v + b^4t^4\nu cos\varphi\,\frac{du_u}{du}+,$$

$$+cos^3\varphi u(1-\sigma)b^2 ftu_v + 2\,uf(b^2cos^2\varphi - f^2)bt^2u_z),$$

$$S_u = -S_v = \frac{1}{2}\frac{1}{(t^3b^4cos^2\varphi)}(D_2(cos^3\varphi u(b^3(1+\sigma)ft + (cos^2\varphi\sigma b^2 - f^2 - u^2cos^2\varphi - c^2)b^6)u_v$$

$$+(2f^2(cos^2\varphi\sigma b^2 - f^2 - u^2cos^2\varphi - c^2)ct + sin2\varphi u^2t^2(1+\sigma)b^2cos\varphi)u_z +$$

$$+(cos\varphi u(cos^2\varphi\sigma b^2 + f^2 + u^2cos^2\varphi + c^2)ftb + cos^3\varphi ut^2(1+\sigma)b^3)u_u -$$

$$-(cos\varphi b^3t^3(1+\sigma)f + (cos^2\varphi\sigma b^2 - f^2 - u^2cos^2\varphi - c^2)b^3t^2cos\varphi)\,\frac{du_v}{du},$$

$$M_u = -\frac{D_3}{b^2 t^4 cos^2\varphi}\left(t^4 b^2 \frac{d^2 u_z}{du^2} + t^2 u\left(\left((1+\sigma)c^2 + u^2\sigma\right)cos^2\varphi - c^2\right)\frac{du_z}{du} - c^2 cos^2\varphi b^2(1-\sigma\,))u_z\right),$$

$$M_v = -\frac{D_3}{b^2 t^4 cos^2\varphi}\left(t^4 b^2 \frac{d^2 u_z}{du^2}\sigma + t^2 u\left(\left((1+\sigma)c^2 + u^2\right)cos^2\varphi - c^2\sigma\right)\frac{du_z}{du} +,\right.$$

$$\left.+c^2 cos^2\varphi b^2(1-\sigma\,))u_z\right),$$

$$M_{uv} = -\frac{D_4}{b^4 t^3 cos\varphi}\left(c((\left(-\frac{3}{2}c^2u^2 - u^4\right)cos^2\varphi + c^2u^2 + \frac{1}{2}c^4)\sin(2\varphi) + ccos\varphi f b^4\,)\,u_z)\right),$$

$$M_{vu} = \frac{D_4}{b^4 t^3 cos\varphi}(c\left(\sin\varphi\, b^2 t^4 \frac{d^2u_z}{du^2} + u\left(-\frac{1}{2}b^2 cos\varphi sin2\varphi - f^2 sin\varphi\right)t^2\frac{du_z}{du} - (\left(\left(\frac{3}{2}c^2u^2 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+u^4\right)cos^2\varphi - \frac{1}{2}c^4 - c^2u^2\right)sin2\varphi + c\,cos\varphi f b^2\right)cos\varphi\,u_z\,)),$$

где $f = c\,sin\varphi = const, b = \sqrt{c^2+u^2}$,t =$\sqrt{c^2+u^2cos^2\varphi},$

$$D_1 = \frac{Eh}{1-\sigma^2} = C,$$

$$D_2 = \frac{Eh}{2(1-\sigma^2)},$$

$$D_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} = D,$$

$$\mathrm{D}_4 = \frac{\mathrm{Eh}^3}{12(1+\sigma)}, \qquad (2.4.10)$$

где C – жесткость оболочки на растяжение/сжатие,

D – жесткость оболочки на изгиб.

Далее подставляем эти выражения в уравнения равновесия (2.1.1) , и получаем систему трех уравнений в перемещениях.

Далее необходимо провести преобразования этой системы, для того чтобы получить систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка в каноническом виде. Исключим $\frac{d^2u_v}{du^2}$ из первого уравнения – умножим первое уравнение на коэффициент перед второй производной по du и вычтем из него второе уравнение, умноженное на коэффициент перед второй производной по du в первом уравнении. Полученное уравнение запишем в виде:

$$\frac{d^2u_u}{du^2} = K_{10}u_u + K_{11}\frac{du_u}{du} + K_{12}u_v + K_{13}\frac{du_v}{du} + K_{14}u_z +$$

$$+K_{15}\frac{du_z}{du} + K_{16}\frac{du_z}{du} + K_{17}\frac{d^2u_u}{du^2} + K_{17}\frac{d^3u_u}{du^3} + K_{1X}X, \qquad (2.4.11)$$

или, иначе:

$$f_1(u) = K_{10}y_0 + K_{11}y_1 + K_{12}y_2 + K_{13}y_3 + K_{14}y_4 + K_{15}y_4 + K_{16}y_6 + K_{17}y_7 + K_{1X}X.$$

Коэффициенты уравнения приводятся в Приложении А, поскольку имеют громоздкий вид и могут автоматически обрабатываться компьютером.

Аналогичным образом выразим

$$\frac{d^2u_v}{du^2} = K_{10}u_u + K_{11}\frac{du_u}{du} + K_{12}u_v + K_{13}\frac{du_v}{du} + K_{14}u_z + K_{15}\frac{du_z}{du} +$$

$$+K_{16}\frac{du_z}{du} + K_{17}\frac{d^2u_u}{du^2} + K_{17}\frac{d^3u_u}{du^3} + K_{1X}Y, \quad (2.4.12)$$

или, используя обозначения, аналогичные (2.4.14),

$$f_3(u) = K_{30}y_0 + K_{31}y_1 + K_{32}y_2 + K_{33}y_3 + K_{34}y_4 + K_{35}y_4 + K_{36}y_6 + K_{37}y_7 + K_{3Y}Y,$$

Из третьего уравнения получим

$$\frac{d^4u_z}{du^4} = K_{70}u_u + K_{71}\frac{du_u}{du} + K_{72}u_v + K_{73}\frac{du_v}{du} + K_{74}u_z + K_{75}\frac{du_z}{du} +$$

$$+K_{76}\frac{du_z}{du} + K_{77}\frac{d^2u_u}{du^2} + K_{77}\frac{d^3u_u}{du^3} + K_{1Z}Z, \quad (2.4.13)$$

или, используя обозначения, аналогичные (2.3.14),

$$f_7(u) = K_{70}y_0 + K_{71}y_1 + K_{72}y_2 + K_{73}y_3 + K_{74}y_4 + K_{75}y_4 + K_{76}y_6 + K_{77}y_7 + K_{7Z}Z,$$

Таким образом, имеем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка (2+2+4 =8).

Система может быть преобразована к 8 уравнениям первого порядка с помощью следующей замены:

$$u_u = y_0,$$

$$\frac{d}{du}u_u = y_1,$$

$$u_v = y_2,$$

$$\frac{d}{du}u_v = y_3,$$

$$u_z = y_4,$$

$$\frac{d}{du}u_z = y_5,$$

$$\frac{d^2}{du^2}u_z = y_6,$$

$$\frac{d^3}{du^3}u_z = y_7.$$

Воспользовавшись векторными обозначениями, запишем вышеприведенную систему дифференциальных уравнений в форме:

$$y' = f(u, y),$$

где

$$y=\begin{bmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\\y_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_u\\(u_u)'\\u_v\\(u_v)'\\u_z\\(u_z)'\\(u_z)''\\(u_z)'''\end{bmatrix}, f(u,y_i)=\begin{bmatrix}f_0\\f_1\\f_2\\f_3\\f_4\\f_5\\f_6\\f_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\f_1\\y_3\\f_3\\y_5\\y_6\\y_7\\f_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(u_u)'\\(u_u)''\\(u_v)'\\(u_v)''\\(u_z)'\\(u_z)''\\(u_z)'''\\(u_z)''''\end{bmatrix},$$

$$f_1=k_{10}y_0+k_{11}y_1+k_{12}y_2+k_{13}y_3+k_{14}y_4+k_{15}y_5+k_{16}y_6+k_{17}y_7,$$
$$f_3=k_{30}y_0+k_{31}y_1+k_{32}y_2+k_{33}y_3+k_{34}y_4+k_{35}y_5+k_{36}y_6+k_{37}y_7,$$
$$f_7=k_{70}y_0+k_{71}y_1+k_{72}y_2+k_{73}y_3+k_{74}y_4+k_{75}y_5+k_{76}y_6+k_{77}y_7. \qquad (2.4.14)$$

Таким образом, получим канонический вид системы дифференциальных уравнений из восьми уравнений первого порядка. Для решения системы требуется 8 граничных условий, которые можно получить, задав по 4 граничных условия на каждом винтовой крае длинной оболочки $u=u_{1,}u=u_2$.

Система уравнений в каноническом виде интегрируется численно, современные программные комплексы обладают значительными возможностями для численного решения дифференциальных уравнений. В частности, в математической системе Maple 17 имеется на выбор порядка 10 численных алгоритмов, по умолчанию применяется алгоритм Рунге-Кутты Фельберга [121].

Для решения данной краевой задачи воспользуемся также методом начальных параметров в виде метода прогонки, хорошо зарекомендовавшим себя в численных расчетах при решении задач строительной механики [122]. Полностью алгоритм решения задачи и коэффициенты итоговой системы уравнений приведены в приложении А.

После вычисления неизвестных функций этой системы – перемещений u_u, u_v, u_z и их производных – можно написать алгоритм для нахождения на ЭВМ внутренних силовых факторов.

Поскольку функции перемещений хранятся в памяти компьютера в виде массивов значений, то опосредованно из них получаемые функции усилий и моментов вычисляются при помощи задания процедур (см. приложение А).

2.5. Числовые примеры расчета напряженно-деформированного состояния косых геликоидов в несопряженной неортогональной системе координат

Пример расчета по данному методу приведен для железобетонной оболочки, жестко закрепленной по обоим краям, загруженной вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Угол наклона образующих φ=5°, контурные радиусы — R_1=2м, R_2=4м; толщина 12 см, шаг винта направляющей — $0.01 \cdot 2\pi$;характеристики материала: E=32500 МПа, ν=0.17, величина нагрузки -10 кПа.

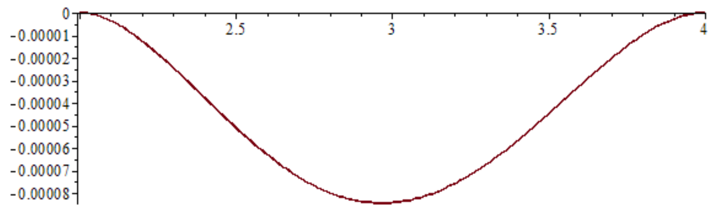


Рис. 2.5.1. Прогиб конструкции, м

В программном комплексе Maple 17 был произведен вывод уравнений равновесия в перемещениях, и последующее их интегрирование. В той же среде Maple17 были написаны процедуры для вычисления силовых факторов –сил N_u, N_v, S_1=-S_2, Q_uи Q_v , моментов M_u , M_v, M_{uv}, M_{vu} (Приложение А).

На рисунке 2.5.2 представлены эпюры внутренних силовых факторов и перемещений.

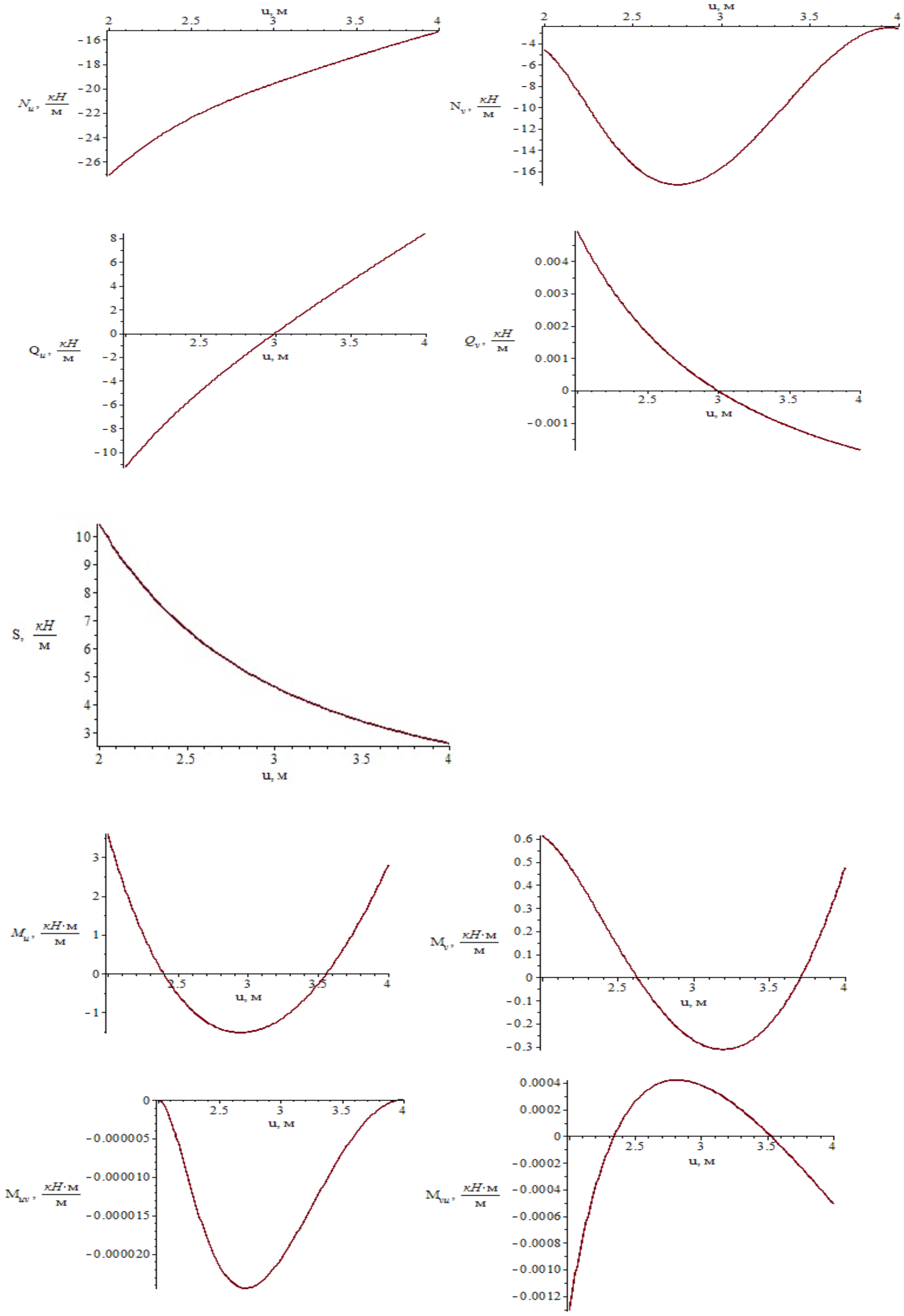


Рис. 2.5.2. Усилия и моменты в оболочке

По данному методу можно также рассчитывать частные и вырожденные случаи геликоидов: при φ=0 геликоид становится прямым и расчетные уравнения значительно упрощаются, если при этом еще и с=0, то он вырождается в плоскую пластину, если с = 0, $\varphi \neq 0$, - в конус.

Метод демонстрирует хорошее совпадение результатов с МКЭ, с аналитическими методами расчета пластин, прямых геликоидов в пределах пологости. Сравнительная таблица результатов при разных углах наклона образующих:

Таблица 2.5.1

Сравнение результатов, полученных разными методами

φ	0	3	5	10	15
максимальное перемещение по оси *z* метод 1*, м	$8{,}69\cdot10^{-5}$	$8{,}45\cdot10^{-5}$	$8{,}43\cdot10^{-5}$	$7{,}99\cdot10^{-5}$	$4{,}67\cdot10^{-5}$
то же, метод 2*, м	$8{,}7\cdot10^{-5}$	$8{,}6\cdot10^{-5}$	$8{,}0\cdot10^{-5}$	$7{,}4\cdot10^{-5}$	$6{,}6\cdot10^{-5}$
максимальный изгибающий момент M_u, метод 1*, КН·м/м	3914/ -1663	3805/ -1614	3593/ -1524	2853/ -1191	2076/ -852
то же, метод 2*, КН·м/м	3711/ -1667	3689/ -1656	3639/ -1636	3428/ -1532	3108/ -1374

*Метод 1-численно-аналитический, метод 2 – метод конечных элементов.

Следует учитывать, что сравнение результатов может быть лишь приближенным, для ориентировочной проверки достоверности результатов, поскольку система координат полуаналитического метода и МКЭ в реализации ЛИРА 9.6 не идентичны. Таким образом, граница пологости для оболочек с малым шагом винта составляет, как и можно было предположить теоретически, примерно 10^0 угла наклона образующей, тангенс этого угла (≈ 0.176) примерно соответствует отношению стрелы подъема пологой оболочки к размеру в плане 1:5 (0.2).

2.6. Расчет непологих оболочек в форме косого геликоида по моментной теории

Для расчета непологих оболочек необходимо в уравнениях (2.1.1) учесть также поперечные силы, а компоненты деформаций вычислить с учетом слагаемых, включающих перемещения u_uи u_v.

В системе координат (2.4.1), в которой производился расчет пологих оболочек, коэффициенты уравнений в перемещениях достаточно громоздкие, а для случая непологих оболочек они получились еще объемнее. В системе координат (2.6.1)

$$x = u\cos v,$$
$$y = u\sin v,$$
$$z = k\,u + c\,v \qquad (2.6.1)$$

выражения получаются более компактными, квадратичные формы принимают вид:

$$A = \sqrt{1+k^2},\ B = \sqrt{u^2+c^2},\ F = kc,$$
$$L = 0, M = -\frac{c}{\sqrt{A^2u^2+c^2}}, N = \frac{ku^2}{\sqrt{A^2u^2+c^2}}. \qquad (2.6.2)$$

Компоненты деформаций:

$$\varepsilon_u = \frac{\frac{d}{du}u_u - \frac{k\,c\,u}{A\,(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k\ c\frac{d}{du}u_v}{A\,(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}}{A},$$

$$\varepsilon_v = \frac{u\,u_u}{A\,(c^2+u^2)} + \frac{ku\sqrt{1+k^2}u_z}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,(c^2+u^2)},$$

$$\omega_u = \frac{\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}\frac{d}{du}u_v}{A} - \frac{cu_z}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}}$$
$$+ \frac{k^2c^2\,u\,u_v}{A^3(c^2+u^2)^2\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}},$$

$$\omega_v = -\frac{u\,u_v}{\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}} - \frac{cu_z}{(u^2+c^2)} - \frac{c\,k\,u\,u_u}{A\,(u^2+c^2)\sqrt{A^2u^2+c^2}},$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega = \omega_u + \omega_v,$$

$$\gamma_u = -\frac{\frac{d}{du}u_z}{A} - \frac{c\,u_v}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}},$$

$$\gamma_v = -\frac{cu_u}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}} + \frac{ku^2u_v}{(u^2+c^2)\sqrt{A^2u^2+c^2}},$$

$$\kappa_u = -\frac{u\,c\,\left(k^2+\frac{3}{2}\right)(A^6u^6+3A^4u^{4\cdot}c^2+3A^2u^{2\cdot}c^4+c^{10})}{(A^2u^2+c^2)^3(c^2+u^2)^2}u_v$$

$$+\frac{2ku^2c^2\left(\left(A^4+\frac{1}{4}\right)c^4+\frac{5}{4}A^2u^2\right)}{A^2(A^2u^2+c^2)^2(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}u_u$$

$$--\frac{c^2k^2u}{A(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_z}+\frac{c\left(A^2+\frac{1}{2}\right)}{A^3(c^2+u^2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_v}$$

$$-\frac{c^2k}{A^2(A^2u^2+c^2)(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_u}++\frac{(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}{A(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d^2}}{\mathrm{du^2}}\mathrm{u_u}$$

$$+\frac{k^2u^2c^2}{2(A^2u^2+c^2)^{3/2}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}u_z,$$

$$\kappa_v = \frac{u\,\frac{d}{du}u_z}{A(A^2u^2+c^2)^{1/2}(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{c\,u\,u_v}{2A^3(c^2+u^2)^2}-\frac{u\,c^2k\;\,u_u}{2A^2(A^2u^2+c^2)(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{c\,\frac{d}{du}u_v}{2\,A^3(c^2+u^2)}--\frac{c^2u^2k^2u_z}{A(A^2u^2+c^2)^{3/2}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\kappa_{uv} = \frac{ck(A^2u^2+c^2)^{1/2}u_z}{(u^2+c^2)A^2}-\frac{c\,u\,u_u}{A(u^2+c^2)(A^2u^2+c^2)}-$$

$$-\frac{ku\left(-A^8u^8-3A^6u^{6\cdot}c^2-3A^2u^{2\cdot}c^4-A^2u^{2\cdot}c^6+\left(A^2+\frac{1}{2}\right)c^{12}-\left(A^2+\frac{1}{2}\right)c^8\right)u_v}{A^4(u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(A^2u^2+c^2)^3}+\frac{cuk(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du}u_z}{(u^2+c^2)A^2}+$$

$$+\frac{c\frac{d}{du}u_u}{(u^2+c^2)A^3}-\frac{u^2k\frac{d}{du}u_v}{(u^2+c^2)^{3/2}A^2}. \qquad (2.6.3)$$

Выражения для усилий:

$$N_u = \frac{1}{(A^2u^2+c^2)^2(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}A\,(1-\sigma^2)}\left(E\left((A^2u^2+c^2)A^2ku^2\sigma+\left(2c^2+u^2(A^2+1)\right)c^2A^2k\right)h\right)u_z+$$

$$+\frac{E(u\,\sigma\;+uc^2k^2)h}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}(1-\sigma^2)}u_u+\frac{E\sqrt{c^2+u^2}h}{\sqrt{A^2u^2+c^2}(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u\,,$$

$$N_v = -\frac{E\,h\,k\,c\,u}{\sqrt{A^2u^2+c^2}(c^2+u^2)A(1+\sigma)}u_v+\frac{E\,h\,u\left(A^2\sqrt{c^2+u^2}\right)}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(1-\sigma^2)}u_u+$$

$$+\frac{E\,h\,k\,c}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_v+\frac{h\sqrt{c^2+u^2}EO\sigma}{\sqrt{A^2u^2+c^2}(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u+\frac{E\,h\,A\,k\sqrt{c^2+u^2}}{(A^2u^2+2c^2)(1-\sigma^2)}u_z\,,$$

$$M_v=\frac{Eh^3 1}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{7}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}A^2\,(1-\sigma^2)}\left(((k^2\sigma+\frac{3}{2}\sigma-\frac{1}{2}\right)(u^6(1+k^2)^3+$$

$$+3u^4(1+k^2)^2c^2+3u^2(1+k^2)c^4)+\sigma\,c^{10}k^2+\frac{3}{2}\sigma\,c^{10}-\frac{1}{2}\;c^6)u\,c\,u_v)+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{u\left(\left(A^2\sigma+\frac{1}{4}\sigma-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}(\sigma-\frac{1}{5})u^2A^2\right)c^2k\,u_u}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(c^2+u^2)A^2\,(1-\sigma^2)}-\frac{1}{12}\frac{\left((1-k^2\sigma)c^2+u^2A^2\right)u}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(c^2+u^2)A^2\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_z-$$

$$-\frac{1}{12}\frac{\left(-\frac{1}{2}+A^2+\frac{1}{2}\sigma\right)c}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A^2\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_v+\frac{1}{12}\frac{\sigma\,c^2k}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}A\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u-$$

$$-\frac{1}{12}\frac{\sigma\,(c^2+u^2)}{(A^2u^2+c^2)(1-\sigma^2)}\frac{d^2}{du^2}u_z+\frac{1}{24}\frac{c^2k^2u^2}{(A^2u^2+c^2)(u^2+c^2)(1+\sigma)}u_z,$$

$$M_u=\frac{E\,h^3}{12\,(A^2u^2+c^2)^{\frac{7}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}A^2\,(1-\sigma^2)}((k(A^6u^6+3u^4+3c^4A^2u^2)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\sigma(A^6u^6+3c^2A^4u^4+3c^4A^2u^2)+\frac{3}{2}+c^{10}k^2+\frac{3}{2}c^{10}-\frac{1}{2}c^2\sigma)u\,c\;\;u_v)-$$

$$-\frac{1E\,h^3}{6}\frac{ku\left(\left(A^2-\frac{1}{4}\sigma+\frac{1}{4}\right)c^2-\frac{1}{4}(\sigma-5)u^2A^2\right)c^2\,u_u}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(c^2+u^2)A^2\,(1-\sigma^2)}-\frac{1}{24}E\,h^3\frac{c^2k^2u^2}{(A^2u^2+c^2)(u^2+c^2)(1+\sigma)}u_z$$

$$-$$

$$-\frac{1}{12}\frac{Eh^3\left((\sigma-k^2)c^2+u^2A^2\sigma\right)u}{(A^2u^2+c^2)^2\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_z-\frac{1}{12}E\,h^3\frac{\left(-\frac{1}{2}+A^2-\frac{1}{2}\sigma\right)c}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A^2\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_v+$$

$$+\frac{1}{12}E\,h^3\frac{\sigma\,c^2k}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}A\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u-\frac{1}{12}E\,h^3\frac{\sigma\,(c^2+u^2)}{(A^2u^2+c^2)(1-\sigma^2)}\frac{d^2}{du^2}u_z,$$

$$M_{uv}=\frac{E\,h^3}{12\,(A^2u^2+c^2)^{\frac{7}{2}}(c^2+u^2)^2A^3\,(1+\sigma)}(A^8u^8+\frac{5}{2}A^6u^6c^2+\frac{3}{2}A^4u^4c^4+$$

$$+\left(-c^{12}+c^8-\frac{1}{2}c^6u^2\right)A^2-\frac{1}{2}c^{12})u\,k\,h^3u_v)-\frac{Eh^3\;\left((c^2+u^2)A^2-\frac{1}{2}c^2k^2\right)u\,c}{12\,(A^2u^2+c^2)^{\frac{7}{2}}(c^2+u^2)^2A^3\,(1+\sigma)}u_u+$$

$$+\frac{E\,c\,k\;\;(A^2u^2+c^2-1)}{12\,A\,(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}(A^2u^2+c^2)A\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_z-\frac{E\,h^3\,k\;\;\left(A^2u^2-\frac{1}{2}c^2\right)}{12\;\;(c^2+A^2u^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)A^3\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_v+$$

$$+\frac{E\,h^3c}{12\,A^2\,(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}(c^2+A^2u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_u+$$

$$+\frac{E\,h^3 c\,k}{12\,A\,(c^2+u^2)^2(c^2+A^2u^2)^{\frac{3}{2}}\,(1+\sigma)}((c^2u^4+u^6)A^4+$$

$$+(2c^4u^2+2c^2u^4)A^2+c^2(c^4+c^2u^2+\frac{1}{2}k^2u^2))u_z,$$

$$M_{vu}=-\frac{E\,h^3}{12\,(A^2u^2+c^2)^{\frac{7}{2}}(c^2+u^2)^2A^3\,(1+\sigma)}(((1+A^2)c^8+3(k^2+\frac{11}{6})A^2u^2c^6+$$
$$+3\left(k^2+\frac{5}{2}\right)A^4u^4c^4+\left(k^2+\frac{9}{2}\right)A^6u^6c^2+A^8u^8)u\,k\,u_v-$$
$$+\frac{E\,h^3}{12\,(A^2u^2+c^2)^2(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}A\,(1+\sigma)}(c\,k(c^6+(2A^2u^2+u^2)c^4+$$
$$+\left(A^4u^2+2A^2u^2-\frac{1}{2}k^2\right)c^2u^2+A^4u^6)-$$
$$-\frac{E\,h^3}{12\,(A^2u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}A^2\,(1+\sigma)}(c((1+2k^2)A^2+\frac{1}{2}k^2)c^4+A^2(A^2+\frac{5}{2}k^2+1)u^2c^2+$$
$$+u^4A^4)u\,u_u)-\frac{E\,h^3k(\,c^4+(2A^2u^2+k^2)c^2+A^4u^4)u\,c}{12\,A\,(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}(A^2u^2+c^2)^2A\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_z+$$

$$+\frac{E\,h^3\,k\,\left(A^2u^2+\frac{1}{2}c^2+A^2c^2\right)}{12\,\,(c^2+A^2u^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)A^3\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_v-\frac{E\,h^3\,c\,\,(A^2u^2+A^2c^2)}{12\,\,(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}\,(c^2+A^2u^2)^{\frac{1}{2}}A^2\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_u+$$

$$+\frac{c\,k\,(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}{12\,A\,(c^2+A^2u^2)\,(1+\sigma)}\frac{d^2}{du^2}u_z,$$

$$S_u=S_v=\frac{1}{2}\frac{E\,h}{(A^2u^2+c^2)^2A^2(c^2+u^2)(1-\sigma^2)}((2c^2+u^2\left(A^2+1\right))cA^2(-u^2A^2(1-\sigma)-$$

$$-2(k^2-\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2})c^2)-(A^2u^2+c^2)k^2(1+\sigma)\,c\,A^2u^2)\,u_z)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{E\,h}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A^2(1-\sigma^2)}(u(\left(-A^2(1-\sigma)-k^2(1+\sigma)\right)c^2-$$
$$-u^2A^2(1-\sigma))+k^2(1+\sigma)c^2u)\,u_v+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{E\,h}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(u^2+c^2)A^2(1-\sigma^2)}(u\,c\,k\,A\,((-A^2(1-\sigma)-k^2(1+\sigma))c^2+$$

$$-u^2A^2(1-\sigma))-(A^2u^2+c^2)k(1+\sigma)c\,A\,u)u_u)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{E\,h}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A^2}(A^2(1-\sigma)+k^2(1+\sigma))c^2-A^2u^2(1-\sigma))-$$
$$-k^2c^2(1+\sigma))\frac{d}{du}u_v-\frac{1}{2}\frac{E\,h\,k\,(1+\sigma)c}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u. \qquad (2.6.4)$$

Из четвертого и пятого уравнений равновесия выразим Q_u и Q_v (приводятся в приложении Б).

Подставив эти выражения в первые три уравнения равновесия, получим 3 уравнения вида:

$$k1_{u_u}u_u + k1_{u_v}u_v + k1_{u_z}u_z + k1_{du_u}\frac{d}{du}u_u + k1_{du_v}\frac{d}{du}u_v + k1_{du_z}\frac{d}{du}u_z +$$
$$+k1_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u + k1_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v + k1_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z + k1_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z = 0,$$

$$k2_{u_u}u_u + k2_{u_v}u_v + k2_{u_z}u_z + k2_{du_u}\frac{d}{du}u_u + k2_{du_v}\frac{d}{du}u_v + k2_{du_z}\frac{d}{du}u_z +$$
$$+k2_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u + k2_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v + k2_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z + k2_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z = 0,$$

$$k3_{u_u}u_u + k3_{u_v}u_v + k3_{u_z}u_z + k3_{du_u}\frac{d}{du}u_u + k3_{du_v}\frac{d}{du}u_v + k3_{du_z}\frac{d}{du}u_z +$$
$$+k3_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u + k3_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v + k3_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z + k3_{d3u_u}\frac{d^3}{du^3}u_u +$$
$$+k3_{d3u_v}\frac{d^3}{du^3}u_v + k3_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z + k3_{d4u_z}\frac{d^4}{du^4}u_z = 0. \qquad (2.6.5)$$

Коэффициенты полностью не приводятся, поскольку имеют большой объем. Алгоритм вывода уравнений приведен в Приложении Б.

Необходимо проинтегрировать два первых уравнения, для того чтобы выразить из них $\frac{d^3}{du^3}u_v$ и $\frac{d^3}{du^3}u_u$, $\frac{d^2}{du^2}u_u$, $\frac{d^2}{du^2}u_v$ и подставить их в третье уравнение.

Далее элементарные преобразования над уравнениями действия над уравнениями и их коэффициентами выполняются в авторской программе (см. Приложение 2). В итоге получается система трех уравнений восьмого порядка в каноническом виде, аналогичная (2.3.17).

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_u \\ (u_u)' \\ u_v \\ (u_v)' \\ u_z \\ (u_z)' \\ (u_z)'' \\ (u_z)''' \end{bmatrix}, f(u, y_i) = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ f_1 \\ y_3 \\ f_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_u)' \\ (u_u)'' \\ (u_v)' \\ (u_v)'' \\ (u_z)' \\ (u_z)'' \\ (u_z)''' \\ (u_z)'''' \end{bmatrix},$$

$$f_1 = k_{10}y_0 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + k_{13}y_3 + k_{14}y_4 + k_{15}y_5 + k_{16}y_6 + k_{17}y_7,$$

$$f_3 = k_{30}y_0 + k_{31}y_1 + k_{32}y_2 + k_{33}y_3 + k_{34}y_4 + k_{35}y_5 + k_{36}y_6 + k_{37}y_7,$$

$$f_7 = k_{70}y_0 + k_{71}y_1 + k_{72}y_2 + k_{73}y_3 + k_{74}y_4 + k_{75}y_5 + k_{76}y_6 + k_{77}y_7.$$

В данной работе все операции с громоздкими символьными выражениями максимально автоматизированы с целью исключить ошибку при обработке человеком.

Примеры расчета по данной методике приведены в главе 4 в разделе «Численные эксперименты по полуаналитической методике». Программа пригодна для расчета симметрично загруженных косых геликоидов, практически с любым параметром шага винта и углом наклона образующих. Неустойчивое решение наблюдается при угле наклона образующих менее 3 градусов, ввиду малых значений u_u и u_v, поэтому для пологих оболочек лучше пользоваться программой, учитывающей допущения пологости. При углах более 70 градусов также наблюдается некорректное поведение.

2.7. Выводы по главе 2

В главе изложены теоретические основы и реализация численно-аналитического метода анализа НДС длинных оболочек в форме косого геликоида на основе теории тонких упругих оболочек А.Л. Гольденвейзера.

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ МЕТОДА В.Г. РЕКАЧА ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДЛИННОГО ПОЛОГОГО КОСОГО ГЕЛИКОИДА

3.1. Основа метода - техническая теория пологих оболочек В.З.Власова

В работах [123,120] описывается метод профессора В.Г. Рекача для расчета НДС косых геликоидальных оболочек. Им предложено аналитическое решение, в котором применены допущения и упрощения согласно теории пологих оболочек В.З. Власова. Суть теории В.З. Власова (подробно приводится в [124]), в том, что на отсеке оболочки, отвечающем требованиям пологости, Гауссова кривизна срединной поверхности принимается равной нулю, перемещения возникают преимущественно нормальные и зависят только от нагрузки вдоль нормали к поверхности оболочки.

Система уравнений равновесия и уравнения неразрывности деформаций сводятся к двум дифференциальным уравнениям четвертого порядка, имеющим в качестве неизвестных параметров перемещение по нормали к поверхности (u_z) и функцию напряжений (φ), такую, что:

$$N_u = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

$$N_v = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

$$S = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right). \qquad (3.1.1)$$

Два уравнения смешанного метода расчета пологих оболочек имеют вид:

$$D\nabla^2\nabla^2 u_z \pm \nabla_k^2\varphi = Z,$$

$$\nabla^2\nabla^2\varphi \mp Eh\nabla_k^2 u_z = 0, \qquad (3.1.2)$$

где $\nabla^2 \ldots = \frac{1}{AB}[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial\ldots}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial\ldots}{\partial\beta}\right)]$ - эллиптический оператор Лапласа,

$\nabla_k^2 \ldots = \frac{1}{AB}[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}k_2\frac{\partial\ldots}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B}{A}k_1\frac{\partial\ldots}{\partial\beta}\right)]$ – оператор смешанного типа. Нижние знаки в формулах соответствуют положительному направлению перемещения u_z и внешней распределенной нагрузки Z по внутренней нормали к поверхности оболочки.

Первое уравнение системы есть уравнение равновесия $\sum Z = 0$, а второе – уравнение неразрывности деформаций.

По своей структуре выражения для N_u, N_v и S у В.З. Власова приняты похожими на выражения для $\varkappa_u$, $\varkappa_v$, $\varkappa_{uv}$

$$\varkappa_u = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_z}{\partial u}\right) - \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial v}\left(\frac{\partial u_z}{\partial v}\right),$$

$$\varkappa_v = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_z}{\partial v}\right) - \frac{1}{A^2 B}\frac{\partial B}{\partial u}\left(\frac{\partial u_z}{\partial u}\right), \qquad (3.1.3)$$

$$\varkappa_{uv} = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial u_z}{\partial v} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial u_z}{\partial u}\right).$$

Принятый вид функций напряжений φ обеспечивает тождественное равенство нулю первых двух уравнений равновесия при $X = Y = 0$.

Применение теории пологих оболочек для косого геликоида в методе В.Г. Рекача в том варианте, в котором ее применял В.З. Власов, вызывает некоторое сомнение для несопряженных систем координат, поскольку в первоисточнике [124] уравнения выведены только для систем координат в линиях кривизны, и функции напряжений φ приняты удовлетворяющими уравнениям равновесия именно в линиях кривизны.

Выражение для деформации кручения $\varkappa_{\mathrm{uv}}$ для пологих оболочек в работе В.З. Власова [124] принято в виде:

$$\varkappa_{uv} = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial u_z}{\partial v} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial u_z}{\partial u}\right),$$

как уже было показано выше.

Другие варианты выражения $\varkappa_{\mathrm{uv}}$ приведены, к примеру, в монографии Гольденвейзера [90] в самом общем случае, для несопряженной неортогональной системы координат:

$$\varkappa_{uv} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_z}{\partial v} + \frac{u_v}{R'_v} - \frac{u_u}{R_{uv}}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R'_u} - \frac{u_v}{R_{uv}}\right) +$$

$$+\frac{1}{R'_u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_u}{\partial v} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}v + \frac{u_z}{R_{uv}}\right) - \frac{1}{R_{uv}}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}u_v - \frac{u_z}{R'_v}\right),$$

$$\varkappa_{uv}=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_z}{\partial u}+\frac{u_u}{R'_u}-\frac{u_v}{R_{uv}}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_z}{\partial v}+\frac{u_v}{R'_v}-\frac{u_u}{R_{uv}}\right)+$$
$$+\frac{1}{R'_v}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_v}{\partial u}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}u+\frac{u_z}{R_{uv}}\right)-\frac{1}{R_{uv}}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_u}{\partial u}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}u_u-\frac{u_z}{R'_v}\right).$$

Для случая пологой оболочки в несопряженных, но ортогональных координатах они принимают вид:

$$\varkappa_{uv}=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_z}{\partial v}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_z}{\partial u}\right)+\frac{u_z}{R_{uv}}\left(\frac{1}{R'_v}+\frac{1}{R'_u}\right),$$
$$\varkappa_{uv}=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_z}{\partial u}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_z}{\partial v}\right)+\frac{u_z}{R_{uv}}\left(\frac{1}{R'_v}+\frac{1}{R'_u}\right). \quad (3.1.4)$$

Вызывает сомнение, насколько корректно пользоваться выражением (3.1.3) для $\varkappa_{\mathrm{uv}}$, которое для случая длинной оболочки редуцируется до 0. т.к. $\frac{\partial \dots}{\partial v}=0$. Численные эксперименты при расчете по полуаналитическому методу гл.2 показали, что форма записи $\varkappa_{\mathrm{uv}}$ в виде (3.1.3) или (3.1.4) оказывает решающее влияние на результаты расчета, и пренебрегать этим компонентом деформации недопустимо. При подстановке $\varkappa_{\mathrm{uv}}$ в расчетные уравнения численно-аналитического метода также получено тривиальное решение. Три уравнения неразрывности деформаций, из которых опосредованно выводится второе уравнение метода, имеют в ортогональной системе координат следующий вид:

$$\frac{\partial A\varkappa_u}{\partial v}-\varkappa_v\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial B\varkappa_{uv}}{\partial u}-\varkappa_{uv}\frac{\partial B}{\partial u}+\frac{\varepsilon_{uv}}{R_u}\frac{\partial B}{\partial u}-\frac{1}{R_v}\left(\frac{\partial A\varepsilon_u}{\partial v}-\frac{\partial B\varepsilon_{uv}}{\partial u}-\varepsilon_v\frac{\partial A}{\partial v}\right)=0,$$

$$\frac{\partial B\varkappa_v}{\partial u}-\varkappa_u\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial A\varkappa_{uv}}{\partial v}-\varkappa_{uv}\frac{\partial A}{\partial v}+\frac{\varepsilon_{uv}}{R_v}\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{1}{R_u}\left(\frac{\partial B\varepsilon_v}{\partial u}-\frac{\partial A\varepsilon_{uv}}{\partial v}-\varepsilon_u\frac{\partial B}{\partial u}\right)=0,$$

$$\frac{\varkappa_u}{R_v}+\frac{\varkappa_v}{R_u}+\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{A}\left[A\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}(\varepsilon_v-\varepsilon_u)-\frac{A}{2}\frac{\partial\varepsilon_{uv}}{\partial v}-\frac{\partial A}{\partial v}\varepsilon_{uv}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{B}\left[A\frac{\partial\varepsilon_u}{\partial v}+\frac{\partial A}{\partial v}(\varepsilon_u-\varepsilon_v)-\frac{B}{2}\frac{\partial\varepsilon_{uv}}{\partial u}-\frac{\partial B}{\partial u}\varepsilon_{uv}\right]\right\}=0. \quad (3.1.5)$$

Для случая сопряженных координат первые два уравнения после подстановки в них выражений (3.1.3) приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial A\varkappa_u}{\partial v} - \varkappa_v \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B\varkappa_{uv}}{\partial u} - \varkappa_{uv} \frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial B\varkappa_v}{\partial u} - \varkappa_u \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial A\varkappa_{uv}}{\partial v} - \varkappa_{uv} \frac{\partial A}{\partial v} = 0,$$

и удовлетворяются тождественно, а третье уравнение (3.1.5) с помощью преобразований приводится ко второму уравнению системы смешанного метода (3.1.2).

3.2. Непосредственное изложение сущности методики

Параметрические уравнения косого геликоида, как они приняты в работе [71], имеют следующий вид:

$$x = u\cos v,$$
$$y = u\sin v,$$
$$z = ku + cv,$$

(3.2.1)

где k – угловой коэффициент образующей, $L=2\pi c$ – шаг винтовой линии, направление u соответствует горизонтальному проложению образующей, v – угол, на который поворачиваются образующие.

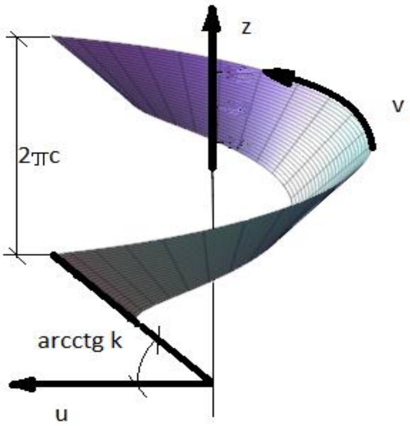


Рис. 3.2.1. Косой геликоид. Вариант задания направлений осей

Поскольку рассматривается пологая оболочка, можно применить предположение В.З. Власова о том, что Гауссова кривизна пологой оболочки близка к нулю, и криволинейная система координат становится приближенно ортогональной, т.е. $F = 0$ и $\chi = \pi/2$.

Также примем допущение о незначительности параметра c по сравнению с его контурными радиусами:

$$u^2 + c^2 \approx u^2.$$

Основные квадратичные формы поверхности косого геликоида и компоненты деформации для случая пологой длинной оболочки принимают вид:

$$A = \sqrt{1+k^2},\ B = u,\ F = 0,$$

$$L = 0, M = -\frac{c}{u\sqrt{1+k^2}}, \quad N = \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\varepsilon_u = \frac{\frac{d}{du}u_u}{\sqrt{1+k^2}}, \varepsilon_v = \frac{u_u}{u\sqrt{1+k^2}} + \frac{u\sqrt{1+k^2}u_z}{k},$$

$$\omega_u = \frac{\frac{d}{du}u_v}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{cu_z}{u^2(1+k^2)}, \omega_v = -\frac{u_v}{u\sqrt{1+k^2}} - \frac{cu_z}{u^2(1+k^2)},$$

$$\gamma_u = -\frac{\frac{d}{du}u_z}{\sqrt{1+k^2}}, \gamma_v = -\frac{c\,u_u}{u^2(1+k^2)},$$

$$\kappa_u = 0, \kappa_v = \frac{\frac{d}{du}u_z}{u\,(1+k^2)},$$

$$\kappa_{uv} = \frac{c\,u_z}{u\,k\sqrt{1+k^2}}, \tag{3.2.2}$$

где ε_u, ε_v – относительное растяжение в направлении линии u и линии v, соответственно,

γ_u,γ_v – угол, на который поворачивается вектор r_u / r_vв сторону вектора n в плоскости (r_u, n)/ (r_v, n) соответственно,

ω_u,ω_v – угол, на который поворачивается вектор r_u / r_vв сторону вектора r_v/r_u соответственно в касательной плоскости,

κ_u, κ_v, κ_{uv} – компоненты изгибной деформации.

Поскольку рассматривается оболочка с большим числом витков, напряженное состояние зависит только от координаты u, данная гипотеза подтверждается численными экспериментами [96] и значительно упрощает вид формул. Поскольку принимается предположение, что напряженное состояние не зависит от краевых условий вдоль при $v = v_1, v = v_2$, то можно принять равными нулю все члены, содержащие производные по v. Таким образом, формулы для дифференциальных операторов смешанного метода (3.1.2), имеющие, согласно работе [124], для геликоидальных оболочек вид:

$$\nabla^2 \ldots = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2+c^2}{\Delta}\frac{\partial \ldots}{\partial \mathrm{u}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{c}f_u}{\Delta}\frac{\partial \ldots}{\partial \mathrm{v}}\right) - \frac{\mathrm{c}f_u}{\Delta}\frac{\partial^2 \ldots}{\partial \mathrm{u}\,\partial \mathrm{v}} + \frac{1+{f_u}^2}{\Delta}\frac{\partial^2 \ldots}{\partial \mathrm{v}^2}\right],$$

$$\nabla_{\mathrm{k}}^2 \ldots = -\frac{1}{\Delta}[\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}\left(\frac{u^2 f_u}{\Delta^2}\frac{\partial \ldots}{\partial \alpha}\right) + \frac{\mathrm{u}f_{uu}}{\Delta^2}\frac{\partial^2 \ldots}{\partial \mathrm{v}^2} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}\left(\frac{\mathrm{c}}{\Delta^2}\frac{\partial \ldots}{\partial \mathrm{v}}\right) + \frac{\mathrm{c}}{\Delta^2}\frac{\partial^2 \ldots}{\partial \mathrm{u}\,\partial \mathrm{v}}],$$

где

$$\Delta = \sqrt{\left(1+{f_u}^2\right)u^2 + c^2},$$

принимают вид:

$$\nabla^2 \ldots = \frac{1}{\mathrm{u}\,(1+\mathrm{k}^2)}[\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}\mathrm{u}\frac{\partial \ldots}{\partial \mathrm{u}}],$$

$${\nabla_{\mathrm{k}}}^2 \ldots = -\frac{1}{\mathrm{u}\,(1+\mathrm{k}^2)^{3/2}}[\mathrm{k}\frac{\partial^2 \ldots}{\partial \mathrm{u}^2}].$$

Уравнения смешанного метода теории пологих оболочек в таком случае записываются в следующем виде:

$$\frac{D}{(1+k^2)^2}\frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(u\frac{d}{du}\right)\left(\frac{d^2 \ldots}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d \ldots}{du}\right)u_z - \frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{u}\frac{d^2\varphi}{du^2} = Z,$$

$$\frac{1}{Eh\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(u\frac{d}{du}\right)\left(\frac{d^2 \ldots}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d \ldots}{du}\right)\varphi + k\frac{1}{u}\frac{d^2 u_z}{du^2} = 0.$$

(3.2.3)

Поделив на u второе уравнение и затем, проинтегрировав его, получим:

$$\frac{D}{(1+k^2)^2}\frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(u\frac{d}{du}\right)\left(\frac{d^2 \ldots}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d \ldots}{du}\right)u_z - \frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{u}\frac{d^2\varphi}{du^2} = Z,$$

$$\frac{u}{Eh\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2 \ldots}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d \ldots}{du}\right)\varphi + k\frac{d}{du}u_z = C, \qquad (3.2.3а)$$

где C – произвольная константа интегрирования, в работе [71] она принята равной нулю.

Для однородной задачи при Z = 0 уравнения преобразуются к виду:

$$\frac{D}{\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2\dots}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{d\dots}{du}\right)u_z - k\frac{d}{du}\varphi = 0,$$

$$\frac{u}{Eh\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2\dots}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{d\dots}{du}\right)\varphi + k\frac{d}{du}u_z = 0. \qquad (3.2.4)$$

В первом уравнении постоянная интегрирования в работе [71] также принята равной нулю.

Из второго уравнения определяем:

$$\frac{d}{du}u_z = -\frac{u}{Eh\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2\dots}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{d\dots}{du}\right)\varphi. \qquad (3.2.5)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, и выполнив преобразования, получим:

$$\frac{Du}{Ehk^2(1+k^2)}\left(u\frac{d^5\dots}{du^5}+4\frac{d^4\dots}{du^4}\right)\varphi + \frac{d}{du}\varphi = 0. \qquad (3.2.6)$$

Обозначая в уравнении $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\varphi = \Phi$, получим:

$$\frac{Du}{Ehk^2(1+k^2)}\left(u\frac{d^4\dots}{du^4}+4\frac{d^3\dots}{du^3}\right)\Phi + \Phi = 0, \qquad (3.2.7)$$

или, перейдя к безразмерным координатам при помощи подстановки

$$u = u_0 x, \quad u_0 = \sqrt{\frac{D}{Ehk^2(1+k^2)}}:$$

$$x^2\frac{d^4\Phi}{dx^4} + 4x\frac{d^3\Phi}{dx^3} + \Phi = 0. \qquad (3.2.8)$$

Далее в работе [71] решение отыскивается в форме степенного ряда вида

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n},$$

и после некоторых промежуточных выкладок получается 4 решения:

$$\Phi(x) = C1\sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}(x)^{2n+2}}{5^{n-1}4!\,5!\,7!\dots(2n+1)!\,(2n+2)!} +$$

$$+C2\sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^{2n+1}}{5^{n-1}4!\,6!\,8!\dots(2n)!\,(2n)!} +$$

$$+C3\sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^{2n+2}}{(2n)!\,(2n+2)!\,(2n+2)}+$$

$$+C4\sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^{2n+2}}{(2n+1)!(2n+3)!(2n+3)}\,. \qquad (3.2.9)$$

или

$$\varphi(\mathrm{x})=u_0\int\Phi(x)dx=\mathrm{C}1\sum_{\mathrm{n}=0,1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}(x)^{2n+2}}{5^{n-1}4!5!7!\ldots(2n+1)!(2n+2)!}$$

$$+C3\sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^{2n+2}}{(2n)!(2n+2)!(2n+2)}+C4\sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^{2n+2}}{(2n+1)!(2n+3)!(2n+3)}+C7. \qquad (3.2.10)$$

Произвольная постоянная С7 в работе [71] отбрасывается как не имеющая значения для напряженного состояния.

На данном этапе развития науки и техники решение дифференциальных уравнений высоких порядков может быть произведено в программных комплексах для символьных расчетов, например, Maple 17. В настоящей работе было произведено символьное интегрирование основного уравнения метода в среде Maple и получены также 4 решения в виде функций Бесселя:

$$\Phi(\,x)=C1\cdot J_2\left((1-i)\sqrt{2}\sqrt{x}\right)+C2\cdot J_2\big(2,(1+i)\sqrt{2}\sqrt{x}\big)+C3\cdot K_2\left((-1-i)\sqrt{2}\sqrt{x}\right)+$$

$$+C4\cdot K_2(2,(1-i)\sqrt{2}\sqrt{x}) \qquad (3.2.11)$$

где J_k– функции Бесселя первого рода порядка k,K_k – модифицированные функции Бесселя порядка k. Иначе их можно выразить в виде рядов:

$$\Phi(\mathrm{x})=C1\frac{\pi}{2sin(2\pi)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((1-i)\sqrt{2x}/2)^{2k-2}}{k!\,\Gamma(k-2+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((1-i)\sqrt{2x}/2)^{2k+2}}{k!\,\Gamma(k+2+1)}\right)+$$

$$+C2\frac{\pi}{2sin(2\pi)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((-1-i)\sqrt{2x}/2)^{2k-2}}{k!\,\Gamma(k-2+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((-1-i)\sqrt{2x}/2)^{2k+2}}{k!\,\Gamma(k+2+1)}\right)+$$

$$+\,C3\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m((1-i)\sqrt{2x}/2)^{2m+2}}{m!\Gamma(m+2+1)}+C4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m((1+i)\sqrt{2x}/2)^{2m+2}}{m!\Gamma(m+2+1)},(3.2.11a)$$

где Г – гамма-функция, обобщение факториала на нецелые значения. Первые два решения представляют собой функции Бесселя первого рода, вторые два решения – модифицированные функции Бесселя второго рода.

Реальные части двух из этих рядов совпадают с двумя рядами решения В.Г. Рекача, остальные два ряда и их реальные части не совпадают, очевидно, указывая на то, что в решении содержится ошибка.

Полученные ряды сходящиеся, интегрируются и дифференцируются.

Далее при расчете по методу В.Г. Рекача будем пользоваться исправленным вариантом решения основного дифференциального уравнения метода.

Для получения решения расчетной системы уравнений требуется поставить граничные условия. Перемещение по u_z может быть выражено из первого уравнения системы (3.2.5): .

$$\frac{d}{du}u_z = -\frac{u}{Eh\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2 \ldots}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{d \ldots}{du}\right)\varphi =$$

$$= -\frac{x}{Ehk\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi}{du}+\frac{1}{u}\Phi\right), \quad (3.2.12)$$

тогда

$$u_z = -\frac{x}{Ehk\sqrt{1+k^2}}\left(x\frac{d\Phi}{du}-\int\frac{1}{x}\Phi dx + C5\right). (3.2.13)$$

Выражение для перемещения u_u в работе [71] получено из равенства выражений:

$$N_u + N_v = \frac{1}{u_0^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{1}{u_0^2}\nabla^2\varphi$$

$$N_u + N_v = Eh\frac{(\varepsilon_u+\varepsilon_v)}{1-\nu},$$

первое из которых определяет нормальные силы посредством введенной в расчет функции напряжений, а второе –из физического соотношения закона Гука.

Определим, в свою очередь, компоненты деформации $\varepsilon_u, \varepsilon_v$

$$\varepsilon_u = \frac{\frac{\partial}{\partial u}u_u}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\varepsilon_v = \frac{u_u}{u\sqrt{1+k^2}} + \frac{u\sqrt{1+k^2}u_z}{k}.$$

Таким образом, для перемещения u_u получаем уравнение:

$$\frac{du_u}{dx}+\frac{u_u}{x} = \frac{(1-\nu)\sqrt{1+k^2}}{Ehu_0}\nabla^2\varphi - k\frac{u_z}{x},$$

из которого

$$u_u = \frac{1}{x}\left(C6 + \int\left(x\,\frac{(1-\nu)\sqrt{1+k^2}}{Ehu_0}\nabla^2\varphi - k\frac{u_z}{x}\right)dx. \quad (3.2.14)$$

В выражение для u_u входит постоянная интегрирования C6.

Выражение для перемещения u_v получается, если приравнять нулю выражение для ε_{uv}:

$$\varepsilon_{uv} = \frac{\frac{\partial}{\partial u} u_v}{\sqrt{1+k^2}} - 2\frac{c u_z}{u^2(1+k^2)} - \frac{u_v}{u\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{u_0\sqrt{1+k^2}}\left[\frac{du_v}{dx} - \frac{u_v}{x} - 2\frac{c}{u_0\sqrt{1+k^2}}\frac{u_z}{x^2}\right].$$

Данное допущение выглядит несколько сомнительным, поскольку, опять же, численные эксперименты показывают, что пренебрежение этим компонентом деформации необосновано. Однако примем его и применим к численному расчету конкретных примеров, для того чтобы определить возможности метода.

$$u_v = x\int\left(2\frac{c}{u_0\sqrt{1+k^2}}\frac{u_z}{x^2}\right)dx \quad (3.2.15)$$

(по всей видимости, постоянная интегрирования в выражении для u_v принята равной нулю).

Итак, имеем 6 граничных условий (для случая заделки: $u_u = 0, u_v = 0,\ u_z = 0$) и 6 неизвестных констант. Как правило, при расчете оболочек используются 8 граничных условий и 8 констант, но в нашем случае из-за множественных упрощений расчетной модели их количество уменьшилось.

Для нахождения частных решений надо рассмотреть результирующее уравнение с нагрузочной правой частью:

$$x^2\frac{d^4\bar{\Phi}}{dx^4} + 4x\frac{d^3\bar{\Phi}}{dx^3} + \bar{\Phi} = {u_0}^2(1+k^2)^{3/2}\int Z(x)x\,dx. \quad (3.2.16)$$

При попытке решить линейную систему такого вида с произвольными исходными данными было получено лишь тривиальное решение.

3.3. Анализ расчетных предпосылок

После получения тривиального решения было решено провести исследование расчетных предпосылок и допущений методики, с целью проверить, какие именно из них привели к такому неудовлетворительному результату.

Проанализируем вывод уравнений смешанного метода теории оболочек В.З. Власова в применении к ортогональной сопряженной и несопряженной системе координат. В оригинальной работе В.З. Власова все выкладки были сделаны только для систем координат в линиях кривизны, а в работе В.Г. Рекача данный метод расширяется на класс задач по исследованию НДС оболочек в несопряженных системах координат.

Первое уравнение смешанного метода (3.1.2) представляет собой третье уравнение равновесия ($\sum Z = 0$) В ортогональной системе для пологой оболочки оно принимает вид (3.2.3).Физический смысл этого уравнения прозрачен, и никаких препятствий или сомнений к использованию его в данной системе смешанного метода не возникает.

Второе уравнение смешанного метода представляет собойтретье уравнение неразрывности деформаций (3.1.5). Уравнение составлено с применением произвольных функций напряжений (3.1.1). В сопряженной системе, как было упомянуто ранее, первые два уравнения неразрывности деформаций в функциях напряжений удовлетворяются тождественно. Проверим, будет ли иметь место данное тождество в несопряженной системе координат.

Уравнения неразрывности деформаций (3.1.5) принимаем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial u}(B\varkappa_v)+\frac{\partial A}{\partial v}\tau_2-\frac{\partial}{\partial v}(A\tau_1)-\frac{\partial B}{\partial u}\varkappa_u-\frac{1}{R'_u}\left(\frac{\partial}{\partial u}(B\varepsilon_v)+\frac{\partial A}{\partial v}\omega_2-\frac{\partial}{\partial v}(A\omega_1)-\frac{\partial B}{\partial u}\varepsilon_u\right)-$$
$$-\frac{1}{R'_{uv}}\left(-\frac{\partial}{\partial u}(B\omega_2)+\frac{\partial A}{\partial v}\varepsilon_v-\frac{\partial}{\partial v}(A\varepsilon_u)+\frac{\partial B}{\partial u}\omega_1\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(B\tau_2)-\frac{\partial A}{\partial v}\varkappa_v+\frac{\partial}{\partial v}(A\varkappa_u)-\frac{\partial B}{\partial u}\tau_1+\frac{1}{R'_v}\left(-\frac{\partial}{\partial u}(B\omega_2)+\frac{\partial A}{\partial v}\varepsilon_v-\frac{\partial}{\partial v}(A\varepsilon_u)+\frac{\partial B}{\partial u}\omega_1\right)+$$
$$+\frac{1}{R_{uv}}\left(\frac{\partial}{\partial u}(B\varepsilon_v)+\frac{\partial A}{\partial v}\omega_2-\frac{\partial}{\partial v}(A\omega_1)-\frac{\partial B}{\partial u}\varepsilon_u\right)=0,$$

$$AB\left(\frac{\varkappa_v}{R'_u}+\frac{\varkappa_u}{R'_v}+\frac{\tau_1-\tau_2}{R_{uv}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\left(-\frac{\partial}{\partial u}(B\omega_2)+\frac{\partial A}{\partial v}\varepsilon_v-\frac{\partial}{\partial v}(A\varepsilon_u)+\frac{\partial B}{\partial u}\omega_1\right)\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial u}(B\varepsilon_v)+\frac{\partial A}{\partial v}\omega_2-\frac{\partial}{\partial v}(A\omega_1)-\frac{\partial B}{\partial u}\varepsilon_u\right)\right)=0,\quad(3.3.1)$$

где $\tau_1=\varkappa_{uv}+\frac{\varepsilon_v}{R_{uv}}-\frac{\omega}{2R'_u}$, $\tau_2=-\varkappa_{uv}-\frac{\varepsilon_u}{R'_{uv}}+\frac{\omega}{2R'_v}$,$\omega_1=\frac{\omega}{2}$,$\omega_2=-\frac{\omega}{2}$.

Подставим в эти уравнения, ранее полученные выражения (3.2.2) для компонентов деформации, и, проведя необходимые преобразования, получим уравнения неразрывности деформаций в перемещениях:

$$-\frac{c^2}{(1+k^2)^2u^3}\frac{du_z}{du}+\frac{1}{2}\frac{c}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^2}\frac{du_v}{du}+\frac{1}{(1+k^2)}\frac{d^2u_z}{du^2}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{c}{u(1+k^2)^{3/2}}\frac{d^2u_v}{du^2}-\frac{1}{2}\frac{c\,u_v}{(1+k^2)^{3/2}u^3}=0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{u_v}{k}-\frac{2\,c\,u_z}{u(1+k^2)^{\frac{1}{2}}k}+\frac{c}{u(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2u_u}{du^2}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{k}\frac{d^2u_v}{du^2}-\frac{c}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^2}\frac{du_u}{du}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{u}{k}\frac{du_v}{du}-\frac{3c}{k(1+k^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{du_z}{du}+\frac{c\,u_u}{(1+k^2)^{3/2}u^3}=0,$$

$$\frac{c^2u_u}{(1+k^2)^2u^4}-\frac{\left((2k^2+2)u^2+c^2\right)u_z}{k(1+k^2)u^2}-\frac{4\,u}{k}\frac{du_z}{du}+\frac{c^2}{(1+k^2)^2u^3}\frac{du_u}{du}-\frac{u^2}{k}\frac{d^2u_z}{du^2}=0. \quad (3.3.2)$$

Ни одно из этих уравнений не удовлетворяется тождественно при подстановке в них выражений (3.2.2) для компонентов деформации.

Из этого можно сделать вывод, что уравнения неразрывности деформаций не будут выполняться в несопряженной системе координат в той постановке, в которой третье уравнение неразрывности деформаций используется в теории В.З. Власова для сопряженных систем. Точнее, если ввести в систему одно только третье уравнение неразрывности деформаций, игнорируя первые два, результат, очевидно, будет некорректным. Третье уравнение неразрывности деформаций также не будет обладать тем стройным видом, который оно имеет в сопряженной системе, будучи выражено через произвольные функции.

Анализ выражений для получения граничных условий также дает основания сомневаться в их правильности. Допущения о том, что компоненты деформации ε_{uv} и $\varkappa_{uv}$ равны нулю и обнуление постоянной интегрирования в выражении для u_v (4.2.12) не выглядят вполне обоснованными. Применение 6 граничных условий вместо 8 сомнительно, т.к. неясно, как в таком случае, к примеру, отличить шарнирно закрепленный край от жесткой заделки.

Далее были проанализированы еще более базовые предпосылки метода, во-первых, возможность считать систему приближенно ортогональной (F≈0) при выполнении условий пологости и пренебрежение шагом винта с относительно горизонтальных проложений его контурных радиусов u1, u2 ($u^2 + c^2 \approx u^2$).

Для проверки этого предположения было проведено 2 расчета: численно-аналитический расчет системы в перемещениях с учетом допущения$u^2 + c^2 \approx u^2$, а также без него.

3.4. Полуаналитический расчет длинного пологого косого геликоида в ортогональной несопряженной системе

Для проверки предположения о том, что система координат может быть принята ортогональной, был произведен полуаналитический расчет по одной из наиболее отработанных методик, а именно решение трех уравнений равновесия в перемещениях численным методом.

Вид квадратичных форм и компонентов деформации:

$$A = \sqrt{1+k^2},\ B = u,\ F = 0,$$

$$L = 0, M = -\frac{c}{u\sqrt{1+k^2}}, N = \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\varepsilon_u = \frac{\frac{d}{du}u_u}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\varepsilon_v = \frac{u_u}{u\sqrt{1+k^2}} + \frac{u\sqrt{1+k^2}u_z}{k},$$

$$\omega_u = \frac{\frac{d}{du}u_v}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{cu_z}{u^2(1+k^2)},$$

$$\omega_v = -\frac{u_v}{u\sqrt{1+k^2}} - \frac{cu_z}{u^2(1+k^2)},$$

$$\gamma_u = -\frac{\frac{d}{du}u_z}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\gamma_v = -\frac{c\,u_u}{u^2(1+k^2)},$$

$$\kappa_u = 0,$$

$$\kappa_v = \frac{\frac{d}{du}u_z}{u\,(1+k^2)},$$

$$\kappa_{uv} = \frac{c\,u_z}{u\,k\sqrt{1+k^2}}. \tag{3.4.1}$$

Вид уравнений равновесия:

$$\frac{E\,h\,u}{(1-\sigma^2)\sqrt{1+k^2}}\frac{d^2}{du^2}u_u + \frac{E\,h}{(1-\sigma^2)\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}u_u + \frac{E\,h\,k\,\sigma}{(1-\sigma^2)\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}u_z -$$
$$-\frac{E\,h\,k}{u(1-\sigma^2)\sqrt{1+k^2}}u_z - \frac{E\,h}{u(1-\sigma^2)\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}u_u - u\sqrt{1+k^2}\,X = 0,$$

$$-\frac{E\,h\,c}{u(1+\sigma)(1+k^2)}\frac{d}{du}u_z + \frac{E\,h\,u}{2(1+\sigma)\sqrt{1+k^2}}\frac{d^2}{du^2}u_v + \frac{E\,h}{2(1+\sigma)\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}u_v +$$
$$+\frac{E\,h}{2\,u\,(1+\sigma)\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}u_v - \frac{u\;Y}{\sqrt{1+k^2}} = 0,$$

$$-\frac{E\,h^3\,u}{12\,(1-\sigma^2)(1+k^2)^{3/2}}\frac{d^4}{du^4}u_z - \frac{E\,h^3}{12\,u^2\,(1-\sigma^2)(1+k^2)^2}\frac{d}{du}u_z -$$
$$-\frac{E\,h^3}{6\,(1-\sigma^2)(1+k^2)^2}\frac{d^3}{du^3}u_z + \frac{E\,h^3}{12\,u\,(1-\sigma^2)(1+k^2)^2}\frac{d^2}{du^2}u_z - \frac{E\,h\,k\;\sigma}{(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u +$$
$$+\frac{c\,h\,E}{u\,(1+\sigma)(1+k^2)^2}\frac{d}{du}u_v + \frac{2\,E\,h\left(-\frac{1}{2}k(1+k^2) - c^2(1-\sigma)\right)}{u^3\,(1-\sigma^2)(1+k^2)^{3/2}}\mathrm{u_z} -$$
$$-\frac{c\,h\,E}{u^2\,(1+\sigma)(1+k^2)}u_v - \frac{E\,h\,k\;\sigma}{u\,(1-\sigma^2)}u_u + u\sqrt{1+k^2}Z = 0,$$

$$Q_u = \frac{1}{12}\frac{E\,h^3}{u^2(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\,(1-\sigma^2)}\left(-u^2\frac{d^3}{du^3}u_z - u\frac{d^2}{du^2}u_z + \frac{d}{du}u_z\right). \tag{3.4.2}$$

Выразим из первых двух уравнений $\frac{d^2}{du^2}u_u, \frac{d^2}{du^2}u_v$ и $\frac{d^4}{du^4}u_z$- из третьего уравнения и преобразуем три уравнения равновесия (3.4.2) к каноническому виду системы дифференциальных уравнений:

$$y' = f(u, y),$$

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_u \\ (u_u)' \\ u_v \\ (u_v)' \\ u_z \\ (u_z)' \\ (u_z)'' \\ (u_z)''' \end{bmatrix}, f(u, y_i) = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ f_1 \\ y_3 \\ f_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_u)' \\ (u_u)'' \\ (u_v)' \\ (u_v)'' \\ (u_z)' \\ (u_z)'' \\ (u_z)''' \\ (u_z)'''' \end{bmatrix},$$

$$f_1 = k_{10}y_0 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + k_{13}y_3 + k_{14}y_4 + k_{15}y_5 + k_{16}y_6 + k_{17}y_7,$$

$$f_3 = k_{30}y_0 + k_{31}y_1 + k_{32}y_2 + k_{33}y_3 + k_{34}y_4 + k_{35}y_5 + k_{36}y_6 + k_{37}y_7,$$

$$f_7 = k_{70}y_0 + k_{71}y_1 + k_{72}y_2 + k_{73}y_3 + k_{74}y_4 + k_{75}y_5 + k_{76}y_6 + k_{77}y_7.$$

$$k_{10} = \frac{1}{u^2},$$

$$k_{11} = -\frac{1}{u},$$

$$k_{12} = 0,$$

$$k_{13} = 0,$$

$$k_{14} = \frac{k}{u^2},$$

$$k_{15} = -\frac{\sigma k}{u^2},$$

$$k_{1X} = -\frac{(1-\sigma^2)(1+k^2)}{E\,h},$$

$$k_{30} = 0,$$

$$k_{31} = 0,$$

$$k_{32} = \frac{1}{u^2},$$

$$k_{33} = -\frac{1}{u^2},$$

$$k_{34} = 0,$$

$$k_{35} = \frac{2c}{\sqrt{1+k^2}u^2},$$

$$k_{3y} = -\frac{2(1+k^2)(1+\sigma)}{E\,h},$$

$$k_{70} = -\frac{12\,k\,(1+k^2)}{u^2h^2},$$

$$k_{71} = -\frac{12\,k\,\sigma\,(1+k^2)}{u\,h^2},$$

$$k_{72} = -\frac{12\,c(1-\sigma)\sqrt{1+k^2}}{u^3h^2},$$

$$k_{73} = \frac{12\,c(1-\sigma)\sqrt{1+k^2}}{u^2h^2},$$

$$k_{74} = \frac{24(-\frac{1}{2}(1+k^2)-c^2(1-\sigma))}{u^4h^2},$$

$$k_{75} = -\frac{1}{u^3},$$

$$k_{76} = \frac{1}{u^2},$$

$$k_{77} = -\frac{2}{u},$$

$$k_{7Z} = \frac{12(1-\sigma^2)(1+k^2)^2}{E\,h^3}. \tag{3.4.3}$$

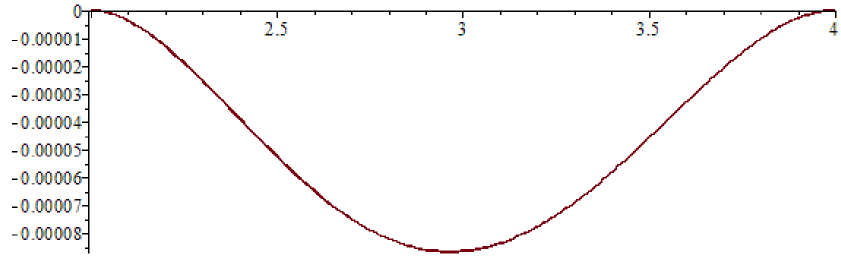
Вертикальная равномерно распределенная нагрузка (типа собственного веса) p = const раскладывается на составляющие вдоль осей:

$$X = p\ sin(arctg\ k),\ Y = 0,\ Z = p\ cos(arctg\ k).$$

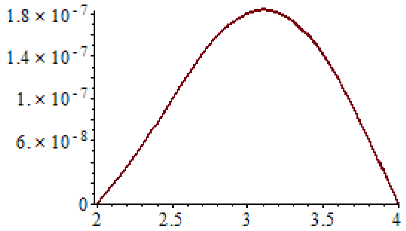
Полученные результаты показали хорошее совпадение с МКЭ в эпюрах нормальных перемещений $\mathrm{u_z}$, и, соответственно, опосредованно получаемых из них эпюрах моментов и поперечных сил. Значения же перемещений $\mathrm{u_u}$ и $\mathrm{u_v}$ значительно меньше полученных по МКЭ, и соответственно, значения нормальных сил также отличаются на 1-2 порядка. Такая картина соответствует модели пологой оболочки, которая воспринимает только нормальные к ее поверхности нагрузки, и, следовательно, имеет только нормальные перемещения. Для решения краевой задачи в строительной механике широко применяются методы начальных параметров. Уравнения равновесия в перемещениях могут быть решены численно методом Рунге-Кутты, с применением метода прогонки, что и было реализовано на данном этапе исследования.

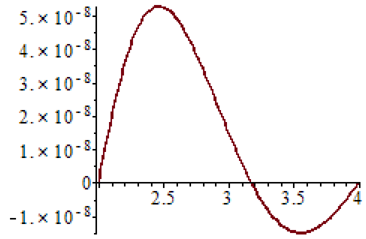
Числовой пример:

Рассмотрим железобетонную оболочку, жестко закрепленную по обоим краям, загруженную вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Угол наклона образующих φ=3°,контурныерадиусы— R1=2 м, R2=4 м; толщина 12 см, шаг винта направляющей — 0.01·2π; характеристики материала: E=32500 МПа, ν=0.17, величина нагрузки -10 кПа.



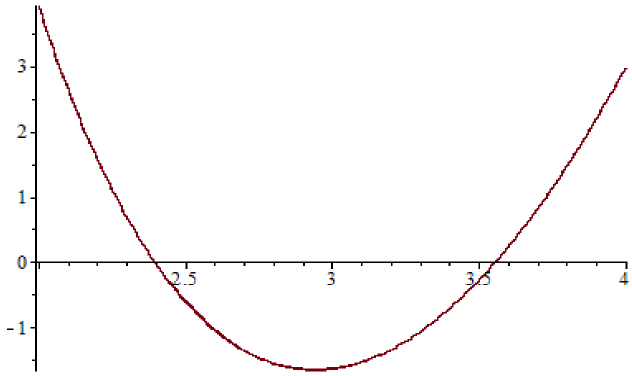
а) Перемещение u_z, м



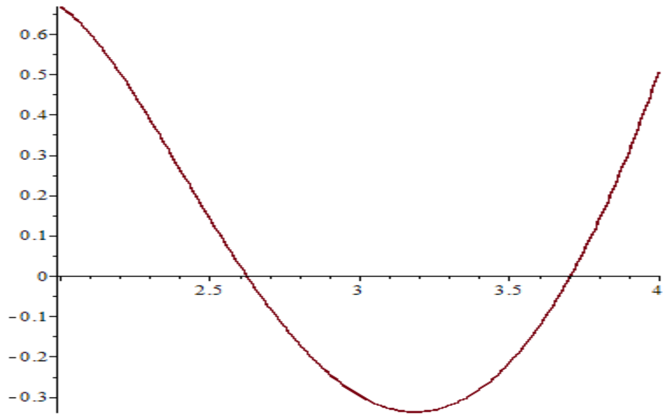


б) Перемещение u_u, м в) Перемещение u_v, м

Рис. 3.4.1. Эпюры перемещений, а)- u_z, б)- u_u, в)- u_v,

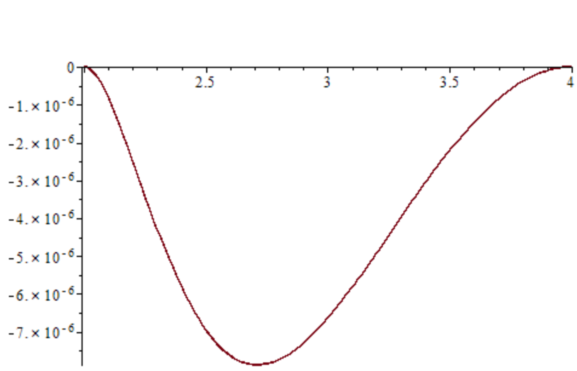


а)M_u, кНхм/м

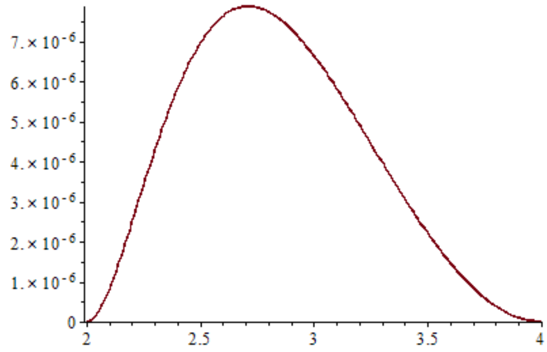


б)M_v, кНхм/м

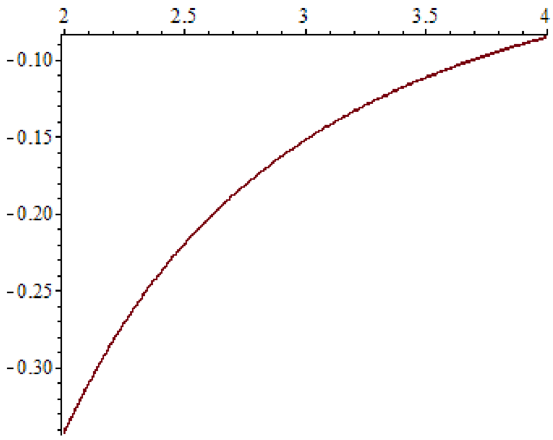
Рис. 3.4.2. Эпюры изгибающих моментов, а) M_u, б)M_v



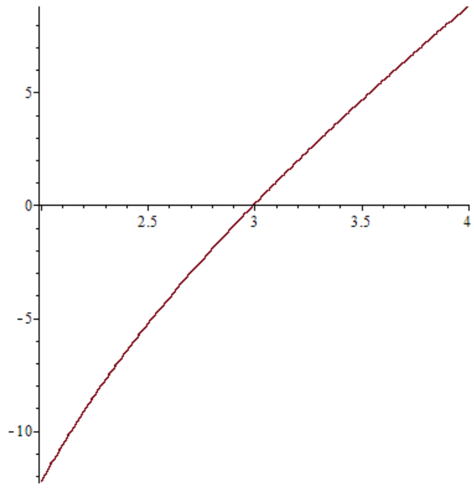
а) M_{uv} , кНхм/м



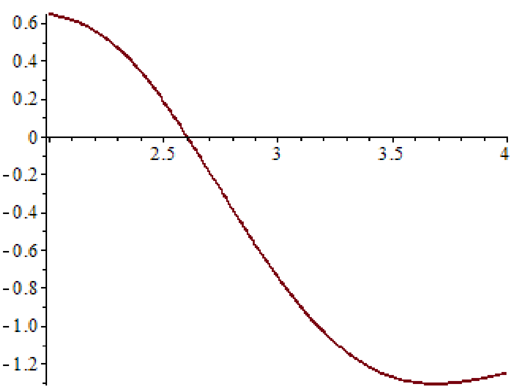
б) M_{vu}, кНхм/м



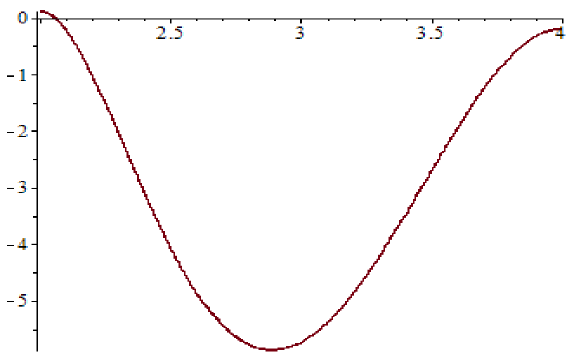
в) S_u, кН



г) Q_u, кН



д) N_u, кН



е) N_v, кН

Рис. 3.4.3. Эпюры внутренних силовых факторов,

а) M_{uv}, б)M_{vu}, в) S_u, , г) Q_u, д) N_u, е) N_v,

Далее в программе для этого метода приняли $c^2 + u^2 = u^2$, чтобы проверить это предположение. Для небольшого шага винта с (в примере с=0.01) на результаты это существенно не повлияло.

3.5. Применение методики В.Г. Рекача с сохранением его основного уравнения, но с отличным способом задания граничных условий.

Была также предпринята попытка рассчитать числовой пример, изменив методику В.Г.Рекача следующим образом: сохранив основные уравнения метода, изменить задание граничных условий.

Запишем основное уравнение метода (3.2.8) в неоднородном виде для случая равномерно распределенной нагрузки $q = const$:

$$x^2 \frac{d^4\Phi}{dx^4} + 4x \frac{d^3\Phi}{dx^3} + \Phi = \frac{1}{2} {u_0}^2 (1+k^2)^{3/2} q x^2 \tag{3.5.1}$$

Получим решение этого неоднородного уравнения в виде:

$$\Phi(x) = C1 \cdot J_2\left((1-i)\sqrt{2x}\right) + C2 \cdot J_2\left((1+i)\sqrt{2x}\right) + C3 \cdot K_2\left((-1-i)\sqrt{2x}\right) +$$

$$+C4 \cdot K_2\left((1-i)\sqrt{2x}\right) + \frac{1}{2} {u_0}^2 (1+k^2)^{\frac{3}{2}} q\, x^2,$$

где можно выразить функции Бесселя в виде рядов:

$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+k}}{2^{2n+k} n!(n+k)!}$, - функция Бесселя 1-го рода порядка k,

$K_k(x) = \frac{\pi}{2\, sin(k\pi)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+k}}{n!(n+k+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x/2)^{2n+k}}{n!(n+k+1)!}\right)$ – модифицированная функция Бесселя 2-го рода порядка k.

Рассмотрим только действительные части этих решений.

Поскольку функции Бесселя дифференцируются и интегрируются, можно получить также выражения для $\frac{d\Phi}{du}, \frac{d^2\Phi}{du^2}, \int \Phi$ и используя их, выразить $u_z, \frac{d u_z}{du}(u), u_u, u_v$.

$$\frac{du_z(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{A\, x^{\frac{3}{2}}\, E\, h\, k} \left(\left(2iK_0\left((1-i)\sqrt{2x}\right)\sqrt{x} + (-1+i)\sqrt{2}K_1\left((1-i)\sqrt{2x}\right)\right)C4\right) +$$

$$+\frac{1}{2} \frac{1}{A\, x^{\frac{3}{2}}\, E\, h\, k} \left(\left((1+i)\sqrt{2}K_1\left((-1-i)\sqrt{2x}\right)\sqrt{x} - 2i\, K_0\left((-1-i)\sqrt{2x}\right)\sqrt{x}\right)C3\right) +$$

$$+\frac{1}{2} \frac{1}{A\, x^{\frac{3}{2}}\, E\, h\, k} \left(\left(-2i\, J_0\left((1+i)\sqrt{2x}\right)\sqrt{x} + (1+i)\sqrt{2}\, J_1\left((1+i)\sqrt{2x}\right)\right)C2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{A\,x^{\frac{3}{2}}\,E\,h\,k}\left(\left(2i\,J_0\left((1-i)\sqrt{2x}\right)\sqrt{x}+(1-i)\,J_1\left((1-i)\sqrt{2x}\right)\sqrt{2}\right)\mathrm{C1}\right)-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{(1+k^2)}{E\,h\,k}\,{u_0}^2 q, \tag{3.5.3}$$

$$u_z(x)=-\frac{1}{E\,h\,k}((\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\sqrt{x}\left(J_1\left((1-i)\sqrt{2x}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}J_2\left((1-i)\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{2}+$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}J_1\left((1-i)\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}})\,\mathrm{C1})\;-\frac{1}{E\,h\,k}((\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}J_1\left((1+i)\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\sqrt{x}\left(J_1\left((1+i)\sqrt{2x}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}J_2\left((1+i)\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{2})C2)-$$

$$-\frac{1}{E\,h\,k}((\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\sqrt{x}\left(-K_1\left((-1-i)\sqrt{2x}\right)+\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}\,K_2\left((-1-i)\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{2}+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}\,K_1\left((-1-i)\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}}\sqrt{2})C3)-$$

$$-\frac{1}{E\,h\,k}((\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\sqrt{x}\left(-K_1\left((1-i)\sqrt{2x}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}\,K_2\left((1-i)\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{2}+$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}\,K_1\left((1-i)\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}})C4)+\frac{C5}{E\,h\,k}-\frac{3}{4}\frac{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}{E\,h\,k}\,{u_0}^2 q\,x^2. \tag{3.5.4}$$

Чтобы получить выражение для u_u, приравняем выражения для осевых сил (см. п.3.2)

$$N_u+N_v=\left(\frac{d^2\varphi}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{d\varphi}{du}\right)=\nabla^2\varphi,$$

$$N_u+N_v=Eh\frac{(\varepsilon_u+\varepsilon_v)}{1-\nu},$$

компоненты деформации $\varepsilon_u, \varepsilon_v$:

$$\varepsilon_u=\frac{\frac{d}{du}u_u}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\varepsilon_v=\frac{u_u}{u\sqrt{1+k^2}}+\frac{k\,u_z}{u\sqrt{1+k^2}}.$$

Тогда:

$$\frac{du_u}{du}+\frac{u_u}{u}=\frac{(1-\nu)\sqrt{1+k^2}}{Eh}\nabla^2\varphi-k\frac{u_z}{u},$$

$$u_u = \frac{1}{u}(C6 + \int \left(u\ \frac{(1-\nu)\sqrt{1+k^2}}{Eh} \nabla^2 \varphi - k\frac{u_z}{u} \right) du,$$

$$u_u(u) = -\frac{k}{u}\int (-\, u_z)\, du + \frac{1}{E\, h\, \sqrt{1+k^2}}\frac{d\varphi}{du} + \frac{C5}{u}. \tag{3.5.5}$$

$$u_u(x) = \frac{1}{x}((\frac{1}{2}\frac{1}{A\, u_0{}^2\, E\, h}(\sqrt{2}\big((3+i)u_0{}^2\mathrm{A}\ + (1+\mathrm{i})(1-\sigma)\big)\sqrt{x}K_1((1-i)\sqrt{2x}))-$$

$$-\frac{1}{A\, u_0{}^2\, E\, h}(((-i + (-1+i)x)u_0{}^2\mathrm{A} - \mathrm{x}(1-\sigma))K_0((1-i)\sqrt{2x})))\mathrm{C4})+$$

$$+\frac{1}{x}((\frac{1}{2}\frac{1}{A\, u_0{}^2\, E\, h}(\sqrt{2}\big((-3+i)u_0{}^2\mathrm{A}\ + (1-\mathrm{i})(1-\sigma)\big)\sqrt{x}K_1((-1-i)\sqrt{2x}))+$$

$$+\frac{1}{A\, u_0{}^2\, E\, h}\left(\left((-i + (1+i)x)u_0{}^2\mathrm{A} - \mathrm{x}(-1+\sigma))K_0\left((-1-i)\sqrt{2x}\right)\right)\right)C3) +$$

$$+\frac{1}{x}((-\frac{3}{2}\frac{1}{A\, u_0{}^2\, E\, h}(\sqrt{2}\left(\left(-\frac{1}{3}+i\right)u_0{}^2\mathrm{A} - \frac{1}{3}(1-\mathrm{i})(1-\sigma)\right)\sqrt{x}\,J_1((1+i)\sqrt{2x}))+$$

$$+\frac{1}{A\, u_0{}^2\, E\, h}\left(\left((-i + (-1+i)x)u_0{}^2\mathrm{A} - \mathrm{x}(1-\sigma))\, J_0\left((1+i)\sqrt{2x}\right)\right)\right)C2) +$$

$$+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{E\, h}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)\sqrt{2x}J_1\left((1-i)\sqrt{2x}\right) - (-i + (1+i)x)\, J_0\left((1-i)\sqrt{2x}\right)\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{A\, u_0{}^2\, E\, h}(\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right)(-1+\sigma)\sqrt{2x}\, I_1\left((1+i)\sqrt{2x}\right) -$$

$$-(1-\sigma)x\, I_0\left((1+i)\sqrt{2x}\right))\mathrm{C1}) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{x}{E\, h}C5 + \frac{1}{x}C6 - \frac{1}{2E\, h}q\left(-A^2(1-\sigma)x + \frac{1}{8}\left(x - \frac{16}{3}\right)A^{\frac{3}{2}}u_0{}^2x\right)x. \tag{3.5.6}$$

Зная выражения для u_u,u_z, можно задать 6 граничных условий: по u_u,$\frac{du_z}{du}$, u_z на двух краях.

Рассчитаем числовой пример, аналогичный примеру из 3.5 (пример 3.2): Определим перемещения железобетонной оболочки, жестко закрепленной по обоим краям, загруженную вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Угол наклона образующих φ=3° (угловой коэффициент образующей k=0.05),контурные радиусы— R1=2м, R2=4м;толщина 12 см, шаг винта направляющей — 0.01· 2π;характеристики материала: E= 32500МПа, ν=0.17, величина нагрузки -1000кг/м².

Составим систему 6 уравнений с 6-ю неизвестными: для случая двух заделок

$$u_u(u_1)=0,$$

$$u_u(u_2)=0,$$

$$(u_1)=0,$$

$$u_z(u_2)=0,$$

$$\frac{du_z}{du}(u_1)=0,$$

$$\frac{du_z}{du}(u_2)=0.$$

Коэффициенты линейной системы уравнений после подстановки полученных функций для u_u, u_z ,$\frac{du_z}{du}$(3.5.12- 3.5.15) и упрощений будут иметь комплексный вид:

$$(-0.01379754040 - 0.006318093771\,i)\,C1 + (-0.01379754040 + 0.006318093771\,i)\,C2 + (-0.02041436571 + 0.04271125420\,i)C3 + \quad + (-0.0005654887382 + 0.0006349973561\,i)\,C4 + 0.005128205128\,C5 - 0.0001544234376 = 0\,,$$

$$(-0.0003331094011 - 0.00002862923928\,i)\,C4 + (-0.1396780178 + 0.06371240916\,i)\,C3 + (-0.02027117675 + 0.04435486197\,i)\,C2 + \quad + (-0.02027117675 - 0.04435486197\,i)\,C1 - 0.0006176937507 + 0.005128205128\,C5 = 0,$$

$$(-0.00007343165063 + 0.00001649973292\,i)\,C4 + (-0.000355776538 - 0.003161054300\,i)C3 + (0.001000942806 + 0.000089873168\,i)\,C2 + (0.001000942805 - 0.000089873167\,i)\,C1 + 0.00001025331675 + 0.3510883797\,C6 - 0.0003651648292\,C5 = 0,$$

$$(-0.00001630705530 - 0.00001215536598\,i)\,C4 + (0.005197067975 - 0.006874556825\,i)\,C3 + (0.002192108572 - 0.001659468813\,i)\,C2 + + (0.002192108572 + 0.001659468812\,i)\,C1 + 0.00003368256595 + 0.1755441898\,C6 - 0.0007303296585\,C5 = 0,$$

$$(-0.00000734128533 - 0.0001656455137\,i)\,C4 + (-0.007134361644 + 0.005552390025\,i)\,C3 + (-0.001714654032 + 0.002268601038\,i)\,C2 + (-0.001714654032 - 0.002268601038\,i)\,C1 - 0.00003802191015 = 0,$$

$$(0.00001768851062 - 0.00001505743274\,i)\,C4 + (-0.01128586146 - 0.001856112373\,i)\,C3 + (0.0005956118476 + 0.003598031702\,i)C2 + (0.0005956118476 - 0.003598031702\,i)C1 - 0.00003802191015 = 0.$$

Также в комплексном виде получим значения неизвестных постоянных интегрирования:

$C1 = 0.05582134521 - 0.07401081119\,i,$

$C2 = -0.001766881823 - 0.005624101010\,i,$

$C3 = -0.02534857970 - 0.01833090200\,i,$

$C4 = -0.02534857477 + 0.01833090475\,i,$

$C5 = 0.005696043342 - 1.478303402\,10^{-9}\,i,$

$C6 = -0.00002496523536 - 6.021916584\,10^{-13}\,i.$

Подставим их в выражение для u_z и построим график действительной части (см. рис. 3.5.1):

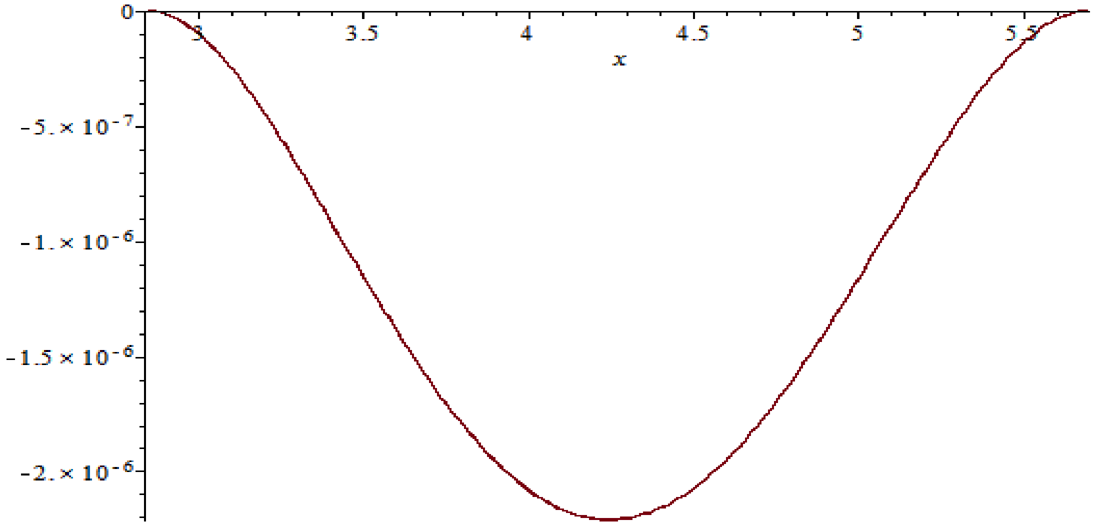


Рис. 3.5.1. Эпюра прогиба u_z, м

То же сделаем для u_u:

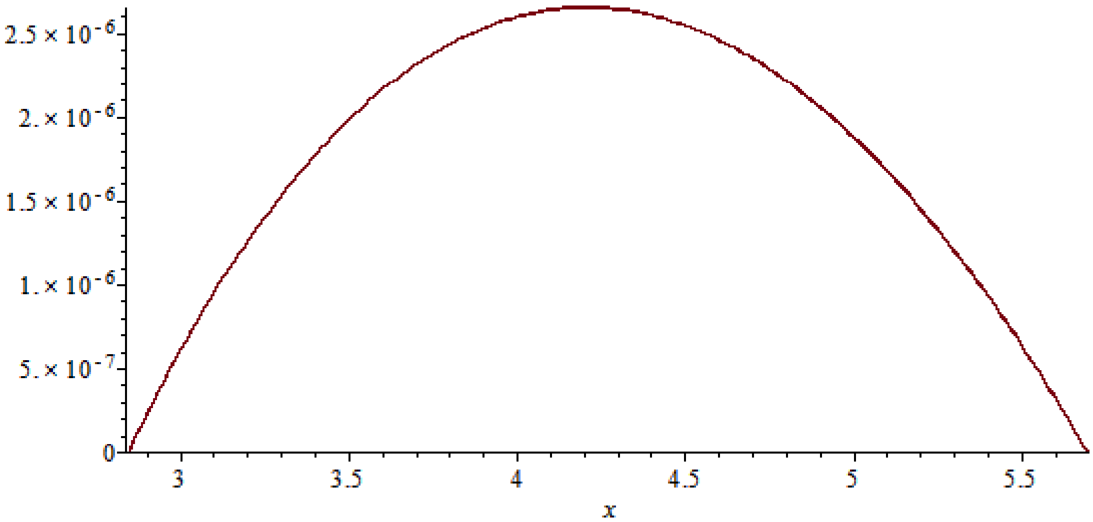


Рис. 3.5.2. Эпюра перемещения u_u, м

Как видно, результаты на порядок отличаются от результатов по МКЭ и полуаналитического метода из гл.2, и их нельзя считать корректными.

Анализируя неудовлетворительный результат, можно предположить, что, скорее всего, он обусловлен несколькими причинами:

- использование допущений теории В.З. Власова, пригодных лишь для ортогональных сопряженных систем, вне границ их применимости;
- необоснованное уменьшение количества постоянных интегрирования, часть из которых произвольно принята равными нулю;

- основное уравнение данной методики (3.2.8) дает решение (3.2.11), похожее по структуре на известное решение Ф.Дюбуа [125] для неразрезного конуса, которое приводится во многих учебниках [126], [127], в котором также фигурируют функции Бесселя первого и второго рода второго порядка, а постоянные интегрирования имеют комплексный вид. В расчетных формулах метода В.Г. Рекача отсутствует параметр шага винта «с», т.е. геликоиды с различным шагом относительно этой методики ничем не различаются. Таким образом, можно сказать, что фактически рассчитывается не геликоид, а его вырожденный случай – конус, причем граничные условия поставлены таким образом, как будто этот конус неразрезный, т.е. является односвязной областью.

3.6. Вывод уравнений без использования произвольных функций напряжений смешанного метода.

Смешанный метод теории упругих оболочек, описанный в п. 4.5-4.6 выводится из двух групп уравнений: уравнений равновесия и уравнений неразрывности деформаций.

Выпишем общий вид этих уравнений согласно [118]

Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(N_u+\ cos\chi\ S_u))-\frac{B^2}{A}\Gamma_{11}^2\ sin\chi S_u-\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(S_v-\ cos\chi\ N_v))-B\Gamma_{12}^2\ sin\chi N_v-$$
$$-\frac{AB}{sin\chi}\left(\frac{Q_u}{R_u}-\frac{Q_v}{R_{uv}}\right)+AB(X+cos\chi\ Y)=0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(S_u+\ cos\chi\ N_u))-A\,\Gamma_{12}^1\ sin\chi N_u+\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(N_v-\ cos\chi\ S_v))+\frac{A^2}{B}\Gamma_{22}^1\ sin\chi S_v-$$
$$-\frac{AB}{sin\chi}\left(\frac{Q_v}{R_v}-\frac{Q_u}{R_{uv}}\right)+AB(Y+cos\chi\ X)=0,$$

$$AB\left(\frac{N_u}{R_u}+\frac{N_v}{R_v}+\frac{S_v-S_u}{R_{uv}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}(BQ_u)+\frac{\partial}{\partial v}(AQ_v)+ABsin\chi\ Z=0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(M_{uv}+\ cos\chi\ M_u))-\frac{B^2}{A}\Gamma_{11}^2\ sin\chi M_u-\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(M_v-\ cos\chi\ M_{uv}))-$$

$$-B\Gamma_{12}^{2}\, sin\chi M_{vu} + ABQ_v = 0,$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(M_u + \ cos\chi\ M_{uv})) - A\ \Gamma_{12}^{1}\ sin\chi M_{uv} + \frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(M_{vu} - \ cos\chi\ M_v)) +$$
$$+\frac{A^2}{B}\Gamma_{22}^{1}\ sin\chi M_v - ABQ_u = 0,$$

$$sin\chi(S_u + \ S_v) + \frac{M_{uv}}{R_u} + \frac{M_{vu}}{R_v} + \frac{M_v - M_u}{Ru_v} = 0. \qquad (3.6.1)$$

Уравнения неразрывности деформаций в перемещениях:

$$\frac{1}{\sin(\chi)}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(B\cdot\kappa_{uv}) - \frac{B^2}{A\cdot\sin(\chi)}\cdot\Gamma_{11}^{2}\cdot(\tau_2 - \cos(\chi)\cdot\kappa_v) - \frac{B}{\sin(\chi)}\cdot\Gamma_{12}^{2}\cdot(\kappa_u + \cos(\chi)$$
$$\cdot\tau_1) + \frac{A\cdot B}{\sin(\chi)}\cdot\left(\frac{\zeta_v}{R'_v} + \frac{\zeta_u}{R_{uv}}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{\sin(\chi)}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(B\cdot\tau_2) - \frac{A}{\sin(\chi)}\cdot\Gamma_{12}^{1}\cdot(\kappa_v - \cos(\chi)\cdot\tau_2) + \frac{A^2}{B\cdot\sin(\chi)}\cdot\Gamma_{22}^{1}\cdot(\tau_1 + \cos(\chi)\cdot\kappa_u)$$
$$-\frac{A\cdot B}{\sin(\chi)}\cdot\left(\frac{\zeta_v}{R'_v} + \frac{\zeta_u}{R_{uv}}\right) = 0,$$

$$(\tau_2 - \cos(\chi)\cdot\kappa_v) + (\tau_1 + \cos(\chi)\cdot\kappa_u) - \frac{\omega_2 - \cos(\chi)\cdot\varepsilon_v}{R'_u\cdot\sin(\chi)} - \frac{\omega 1 - \cos(\chi)\cdot\varepsilon_u}{R'_v\cdot\sin(\chi)}$$
$$+\frac{(\varepsilon_u - \cos(\chi)\cdot\omega_1) - (\varepsilon_v + \cos(\chi)\cdot\omega_2)}{R_{uv}} = 0, \qquad (3.6.2)$$

где $\tau = \kappa_{uv}$,

$$\tau_1 = \tau - \cos(\chi)\cdot\kappa_u + \frac{1}{R_{uv}}\cdot\left(\sin(\chi)\cdot\varepsilon_v - \frac{\cos(\chi)\cdot\omega}{2}\right) - \frac{1}{R'_u}\cdot\frac{\omega}{2},$$

$$\tau_2 = \tau + \cos(\chi)\cdot\kappa_v - \frac{1}{R_{uv}}\cdot\left(\sin(\chi)\cdot\varepsilon_u - \frac{\cos(\chi)\cdot\omega}{2}\right) + \frac{1}{R'_v}\cdot\frac{\omega}{2},$$

$$\omega_1 = \frac{\sin(\chi)\cdot\omega}{2} + \cos(\chi)\cdot\varepsilon_u,$$

$$\omega_2 = -\frac{\sin(\chi)\cdot\omega}{2} - \cos(\chi)\cdot\varepsilon_v, \qquad (3.6.3)$$

Подставим в общий вид уравнений квадратичные формы и коэффициенты Кристоффеля, полученные для несопряженной ортогональной системы (4.2.1). Примем также действительным предположение о малом шаге геликоида: $c^2 + u^2 \approx u^2$.

Уравнения равновесия (нагрузка только по оси Z, X = 0, Y = 0):

$$\frac{d}{du}(B\,N_u) - \frac{B^2}{A}\Gamma^2_{11}S_u - B\Gamma^2_{12}N_v = 0,$$

$$\frac{d}{du}(B\,S_u) - A\,\Gamma^1_{12}N_u + \frac{A^2}{B}\Gamma^1_{22}S_v = 0,$$

$$A\,B\left(\frac{N_u}{R'_u} + \frac{N_v}{R'_v} + \frac{S_v - S_u}{R_{uv}}\right) + \frac{d}{du}(B\,Q_u) + A\,B\,Z = 0. \qquad (3.6.4)$$

Примем верным утверждение $\mathrm{S_v} = -S_u$

$$\frac{d}{du}(u\,S_u) - S_u = 0,$$

$$u\,\sqrt{1+k^2}\left(-\frac{u\sqrt{1+k^2}}{k}\frac{d}{du}(u\,N_u) + \frac{2\,c\,S_u}{u^2(1+k^2)}\right) + \frac{d}{du}(u\,Q_u) + u\sqrt{1+k^2}\,Z = 0,$$

где

$$Q_u = \frac{1}{12}Eh^3\,\frac{-u^2\frac{d^3u_z}{du^3} - u\frac{d^2u_z}{du^2} - \frac{du_z}{du}}{u^2(1+k^2)^{\frac{3}{2}}(1-\sigma^2)} = \frac{1}{12}\frac{Eh^3}{(1-\sigma^2)(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2u_z}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{du_z}{du}\right).$$

Первые два уравнения принимают чрезвычайно простой вид, из которого можно выразить

$$N_v = \frac{d}{du}(u\,N_u),$$

$$S_u = \frac{\mathrm{C1}}{u^2},,$$

uде C1 –некоторая произвольная постоянная интегрирования.

Эти выражения можно подставить в третье уравнение равновесия:

$$u\,\sqrt{1+k^2}\left(-\frac{u\sqrt{1+k^2}}{k}\frac{d}{du}(u\,N_u) + \frac{2\,c\,\frac{\mathrm{C1}}{u^2}}{u^2(1+k^2)}\right) + \frac{d}{du}\left(u\,\frac{1}{12}\frac{Eh^3}{(1-\sigma^2)(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2u_z}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{du_z}{du}\right)\right) +$$

$$+u\sqrt{1+k^2}Z = 0.$$

Таким образом, получается, что в этом уравнении две функции от u - N_v и u_z, одна неизвестная константа C1.

Далее рассмотрим уравнения неразрывности деформаций в перемещениях:

$$\frac{-\mathrm{c}^2\frac{du_z}{du}}{(1+k^2)u^3} + \frac{1}{2}\frac{c\frac{du_v}{du}}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^2} + \frac{\frac{d^2u_z}{du^2}}{(1+k^2)} + \frac{1}{2}\frac{c\frac{d^2u_v}{du^2}}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u} - \frac{1}{2}\frac{c\,u_v}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^3} = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{k\,u_v}{(1+k^2)u^2} + \frac{c\,u_u}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\,u^3} - \frac{3ck\frac{du_z}{du}}{u^2(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{k\frac{du_v}{du}}{u(1+k^2)} - \frac{c\frac{du_u}{du}}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{k\frac{d^2u_v}{du^2}}{(1+k^2)} + \frac{c\frac{d^2u_u}{du^2}}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u} + \frac{2\,c\,k\,u_z}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^3} = 0,$$

$$\frac{c^2 u_u}{(1+k^2)^2 u^4}+\frac{c^2\,\frac{du_u}{du}}{(1+k^2)^2 u^3}-\frac{k\,\frac{d^2u_z}{du^2}}{(1+k^2)}-\frac{c^2\;k\;u_z}{(1+k^2)^2u^4}=0.$$

(3.6.5)

Третье уравнение неразрывности можно видоизменить таким образом, чтобы в нем присутствовали только u_z и ее производные, а также сумма$(\varepsilon_u+\varepsilon_v)$:

$$\varepsilon_u+\varepsilon_v=\frac{du_u}{du}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{u_u}{\sqrt{1+k^2}u}+\frac{u_z k}{u\sqrt{1+k^2}}\,,$$

Выделим в третьем уравнении группу слагаемых с общим множителем:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\frac{du_u}{du}+\frac{u_u}{\sqrt{1+k^2}u}+\frac{ku_z}{u\sqrt{1+k^2}}\right)\frac{c^2}{(1+k^2)^{3/2}u^3}-\frac{2\,c^2k}{(1+k^2)^2u^4}u_z-\frac{k\frac{d^2u_z}{du^2}}{(1+k^2)}=0,$$

или

$$(\varepsilon_u+\varepsilon_v)\frac{c^2}{(1+k^2)^{3/2}u^3}-\frac{2\,c^2k}{(1+k^2)^2u^4}u_z-\frac{k\frac{d^2u_z}{du^2}}{(1+k^2)}=0.$$

Как известно из соотношений упругости, через сумму деформаций $\varepsilon_u+\varepsilon_v$ можно выразить сумму усилий N_u+N_v:

$$N_u+N_v=\frac{E\,h}{1-\sigma}(\varepsilon_u+\varepsilon_v).$$

Поскольку в нашем случае$N_u+N_v=N_u+\frac{d}{du}(u\,N_u)$, то

$$(\varepsilon_u+\varepsilon_v)=\frac{(1-\sigma)}{E\,h}\left(N_u+\frac{d}{du}(u\,N_u)\right),$$

третье уравнение неразрывности в таком случае:

$$\frac{(1-\sigma)}{E\,h}\left(N_u+\frac{d}{du}(u\,N_u)\right)\frac{c^2}{(1+k^2)^{3/2}u^3}-\frac{2\,c^2k}{(1+k^2)^2u^4}u_z-\frac{k\frac{d^2u_z}{du^2}}{(1+k^2)}=0. \qquad (3.6.6)$$

Получили уравнение, в котором фигурируют две функции от u - u_z и N_u.

Первое уравнение неразрывности деформаций можно упростить следующим образом:

$$\frac{c}{2\,u\,(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}u_v+\frac{du_v}{du}\right)-\frac{c^2\frac{du_z}{du}}{(1+k^2)u^3}+\frac{\frac{d^2u_z}{du^2}}{(1+k^2)}=0,$$

или

$$\frac{c}{2\,u\,(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u_v\,u)-\frac{c^2\frac{du_z}{du}}{(1+k^2)u^3}+\frac{\frac{d^2u_z}{du^2}}{(1+k^2)}=0. \qquad .(3.6.7)$$

Два раза проинтегрировав это уравнение, можно получить выражение для u_v через u_z с двумя постоянными интегрирования. (C5,C6)

Второе уравнение неразрывности:

$$\frac{k}{2u(1+k^2)}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}u_v+\frac{du_v}{du}\right)+\frac{c}{u\,(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(-\frac{1}{u}u_u+\frac{du_u}{du}\right)-\frac{3\,c\,k\frac{du_z}{du}}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^2}+\frac{2\,c\,ku_z}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^3}=0,$$

или

$$\frac{k}{2u(1+k^2)}\frac{d}{du}\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u_v\,u)+\frac{c}{u\,(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(-\frac{1}{u}u_u+\frac{du_u}{du}\right)-\frac{3\,c\,k\frac{du_z}{du}}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^2}+\frac{2\,c\,ku_z}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^3}=0.$$

Это уравнение второго порядка можно упростить следующим образом:

$$\frac{k}{2u(1+k^2)}\frac{d}{du}\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u_v\,u)+\frac{c}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(\frac{u_u}{u}\right)-\frac{3\,c\,k\frac{du_z}{du}}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^2}+\frac{2\,c\,ku_z}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}u^3}=0.$$

Из него можно получить еще две постоянные интегрирования (C7, C8).

Если из третьего уравнения равновесия выразить N_u следующим образом:

$$u\sqrt{1+k^2}\left(-\frac{k}{u\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}(u\,N_u)+\frac{2\,c\,\frac{\mathrm{C1}}{u^2}}{u^2(1+k^2)}\right)+$$

$$+\frac{d}{du}\left(u\frac{1}{12}\frac{Eh^3}{(1-\sigma^2)(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2u_z}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{du_z}{du}\right)\right)+u\sqrt{1+k^2}Z=0,$$

$$\frac{d}{du}(u\,N_u)=\frac{-u\sqrt{1+k^2}}{k}\Bigg(-\frac{1}{u\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(u\frac{1}{12}\frac{Eh^3}{(1-\sigma^2)(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2u_z}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{du_z}{du}\right)\right)-$$

$$-Z-\frac{2\,c\frac{\mathrm{C1}}{u^2}}{u^2(1+k^2)}\Bigg),$$

$$N_u=\int\left(\frac{-u\sqrt{1+k^2}}{k}\Bigg(-\frac{1}{u\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(u\frac{1}{12}\frac{Eh^3}{(1-\sigma^2)(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\left(\frac{d^2u_z}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{du_z}{du}\right)\right)-Z-\right.$$

$$\left.\frac{2\,c\frac{\mathrm{C1}}{u^2}}{u^2(1+k^2)}\Bigg)\right)\frac{1}{u}+C2,$$

и подставить в третье уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{(1-\sigma)}{E\,h}\left(N_u+\frac{d}{du}(u\,N_u)\right)\frac{\mathrm{c}^2}{(1+k^2)^{3/2}u^3}-\frac{2\,\mathrm{c}^2k}{(1+k^2)^2u^4}u_z-\frac{k\frac{d^2u_z}{du^2}}{(1+k^2)}=0.$$

После необходимых элементарных преобразований получится уравнение:

$$\frac{C_3c^2}{C_1A^6\,k\,u^2}\frac{d^3u_z}{du^3}+\left(\frac{3C_3c^2}{C_1A^6\,k\,u^3}-\frac{k}{A}\right)\frac{d^2u_z}{du^2}+\frac{C_3c^2}{C_1A^6\,k\,u^4}\frac{du_z}{du}-\frac{2\,c^2k}{A^4u^4}u_z+$$

$$+\frac{c^2}{C_1 A^6\, k\, u^4}\left(-\frac{12}{5}\frac{c\, u^4\, C_1}{A^2}+\frac{3}{2}\frac{A\, u}{k}\, Z(u)+2C_2\right)=0. \qquad (3.6.8)$$

Это уравнение не сводится ни к одному известному классу уравнений, имеющих аналитическое решение.

Поскольку такая система уравнений по трудоемкости решения превосходит систему, на которой основан численно-аналитический метод, приведенный в главе 2, а границы применения ее гораздо уже (только в диапазоне пологости при малом шаге), в рамках данной работы она более не рассматривалась.

3.7. Выводы по главе 3

Из данной главы можно сделать вывод о том, что аналитическая методика, предложенная В.Г. Рекачем в работе [123], имеет ошибку в корнях основного уравнения, задании граничных условий, и ряд сомнительных допущений. Небольшие границы применения данной методики ставят под сомнение ее преимущества по сравнению с численными и численно-аналитическими методиками, основанными на математической модели с меньшим количеством упрощений. В главе предложен свой вариант уравнений для пологих косых геликоидов, который не имеет простого в техническом аспекте решения. По итогам исследования, автором сделан выбор в пользу численно-аналитического метода решения задачи с контролем достоверности при помощи сравнения с результатами, полученными по МКЭ.

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО РАЗЛИЧНЫМ МЕТОДИКАМ РАСЧЕТА

4.1. Конечноэлементный анализ оболочки в форме косого геликоида

4.1.1. Метод конечных элементов как наиболее универсальный метод строительной механики

Метод конечных элементов получил широкое распространение в современной механике и используется в подавляющем большинстве программных комплексов для расчетов строительных конструкций. Данный метод является численным и может быть применен к расчету конструкций самой разнообразной геометрии, структуры и материала.

По сравнению с классическими точными аналитическими и приближенными методами, а также по сравнению с другими видами численных методов (граничных элементов, вариационно-разностными, энергетическими и др.) метод конечных элементов значительно выигрывает по многим параметрам: допускает разбиение сетки на элементы практически любых форм и размеров, допускает сочетание в одной модели элементов, отличающихся по размеру в десятки раз, практически ничем не ограничивает задание нагрузок и граничных условий. Сложность же расчета в современном виде связана, в основном, с тем, что проектировщику требуется глубокое понимание принципов работы конкретного используемого программного продукта, и одновременно с этим физической модели работы самой конструкции для адекватного выбора расчетной модели, назначения типа и размера конечного элемента, генерации сетки, правильной интерпретации результатов и т.п. Разработчики программных комплексов сделали значительный шаг вперед по сравнению с теми расчетными программами, которые использовались еще 20-30 лет назад.

4.1.2. Расчетная модель исследуемого объекта

В данной работе использовалась одна из наиболее многофункциональных и широко распространенных расчетных программ – ANSYS Structural APDL 15, которая отличается многообразием возможностей моделирования поведения различных конструкций и элементов с учетом их особенностей, выраженное в большом количестве математических моделей для каждого конкретного случая. Предусмотрены в данном программном комплексе и специальные возможности для расчета оболочек - в ANSYS Structural APDL 15 запрограммировано несколько видов оболочечных элементов для статического расчета, которые отличаются количеством узлов, степеней свободы, математическими допущениями и моделями (тонкие или толстые оболочки) и еще рядом опций.

При расчете косого геликоида по МКЭ использовались конечные элементы типа SHELL181, самые новые элементы, разработанные для анализа тонких оболочек, рекомендуемые разработчиками, а также SHELL63, которые разработчиками признаются устаревшими, зато хорошо опробованы на практике.

В литературе по теории и применению МКЭ описаны конечные элементы в виде прямолинейных пластин, реализующие гипотезу Кирхгофа для пологих оболочек [128]. Для непологих оболочек используются, как правило, изопараметрические элементы. [129,130,131]. Поскольку производился расчет как пологих, так и непологих оболочек, то и были применены две модели, каждая из которых лучше подходит для своей задачи, а именно – SHELL181 для непологих, а и SHELL63– для пологих случаев.

В данной работе использовалась модель элемента в линейной постановке, когда перемещения не более толщины оболочки. Система координат была задана глобальная декартова для ввода данных, вывод осуществлялся в цилиндрической и декартовой системах.

В программе ANSYS построение конечноэлементной сетки осуществляется посредством препроцессора, в котором при помощи встроенного параметрического языка программирования APDL задаются координаты точек. Отсек косого геликоида моделируется в данной работе следующим образом: создаются при помощи цикла пары точек на внутреннем и внешнем радиусе, потом с помощью другого цикла – отрезки прямых между этими точками. Далее на основе этих образующих создается поверхность при помощи инструмента ASKIN («натягивание поверхности на каркас из образующих») [132]. Такой способ построения геометрической модели представляется достаточным в смысле технической точности аппроксимации косогеликоидальной поверхности и последующей генерации конечноэлементной сетки.

Далее плоская поверхность разбивается на четырехугольные оболочечные (shell181) или пластинчатые (shell63) конечные элементы заданного пользователем размера.

Далее элементам назначается толщина и физико-механические свойства материала, задаются закрепления и нагрузки, запускается непосредственно решатель и далее с помощью постпроцессора получаются результаты[133,134,135].

Основной целью данного исследования было сравнить результаты расчета с результатами, полученными полуаналитическим методом. Однако провести полностью корректное сравнение полученных деформаций и усилий представляет сложность в связи с тем, что в программе ANSYS предусмотрены только декартова, цилиндрическая, сферическая и локальные системы координат вывода, а задание пользовательской системы связано с написанием и отладкой подпрограммы, что в объеме данной работы не представилось возможным осуществить. В свете вышеизложенного, сравнение было проведено по суммарному вектору перемещений.

4.1.3. Примеры расчетов и сравнение результатов с численно-аналитическим методом

Числовой пример (пологая оболочка):

Рассмотрим железобетонную оболочку, жестко закрепленную по обоим краям, загруженную вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Угол наклона образующих φ=3°,контурные радиусы— R1=2м, R2=4м; толщина 10 см, шаг винта направляющей — 0.01·2π;характеристики материала: E=32500 МПа, ν=0.17, нагрузка – давление, величина нагрузки -10 кПа. Расчет производился для сегмента с углом 45°, т.к. в работе [75] доказывается, что заделки на краях сказываются лишь на небольших участках.

Расчетная модель представлена на рис. 4.1.1.

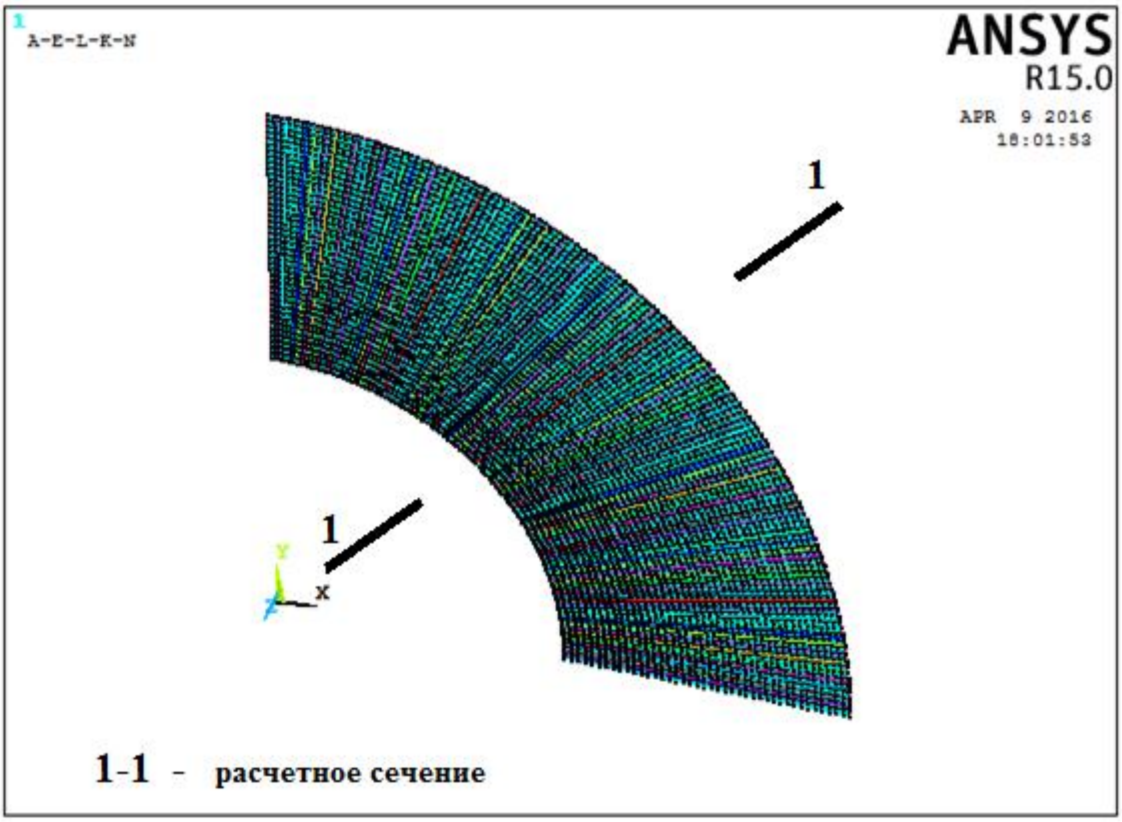


Рис. 4.1.1. Отсек геликоида – расчетная модель

На данном примере проводилась разбивка на конечные элементы с длиной стороны от 20 до 1 см.

В пределах приблизительно от 5 до 2 см решение демонстрирует устойчивые результаты, не зависящие от размера конечного элемента, при размере КЭ менее 1 см не хватает мощности компьютера. Разбивка производилась элементами Shell63.

В таблице 4.1.1 приведены значения максимальных прогибов, полученных при расчете с разбивкой на конечные элементы разного размера.

Таблица 4.1.1

Величины прогиба при различных сетках

Максимальное перемещение по оси z, мм $\cdot 10^{-4}$, при стороне КЭ, см	50	20	15	10	5	2	1
	1,410	1,478	1,482	1,493	1,494	1,494	1,494

Система координат элемента и направления выводимых перемещений и силовых факторов (рисунок из встроенного руководства ANSYS):

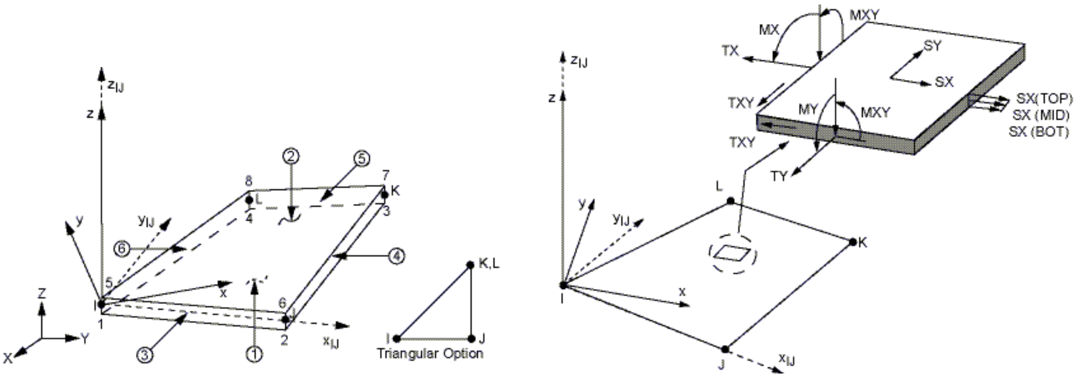


Рис. 4.1.2. Система координат элемента shell63 и направления усилий

Эпюра перемещений u_z в среднем сечении в цилиндрической системе координат:

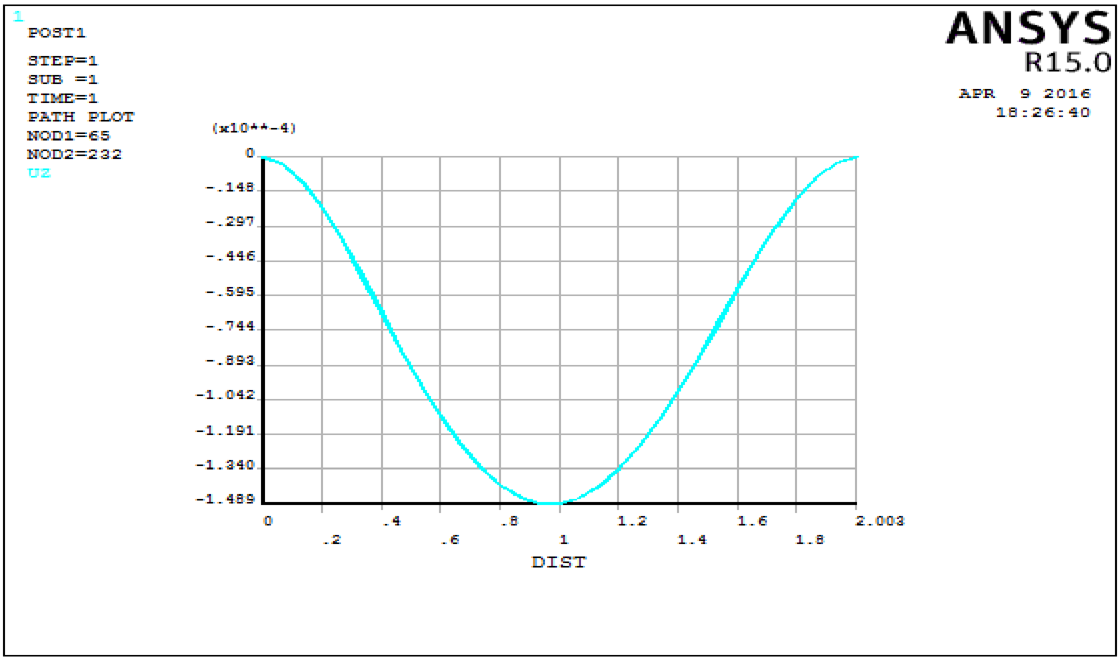


Рис. 4.1.3. Эпюра перемещений в расчетном сечении (при использовании shell63)

Параллельно рассчитаем тот же пример с применением элемента shell181.

Система координат и направления выводимых данных (рисунок из встроенного руководства ANSYS):

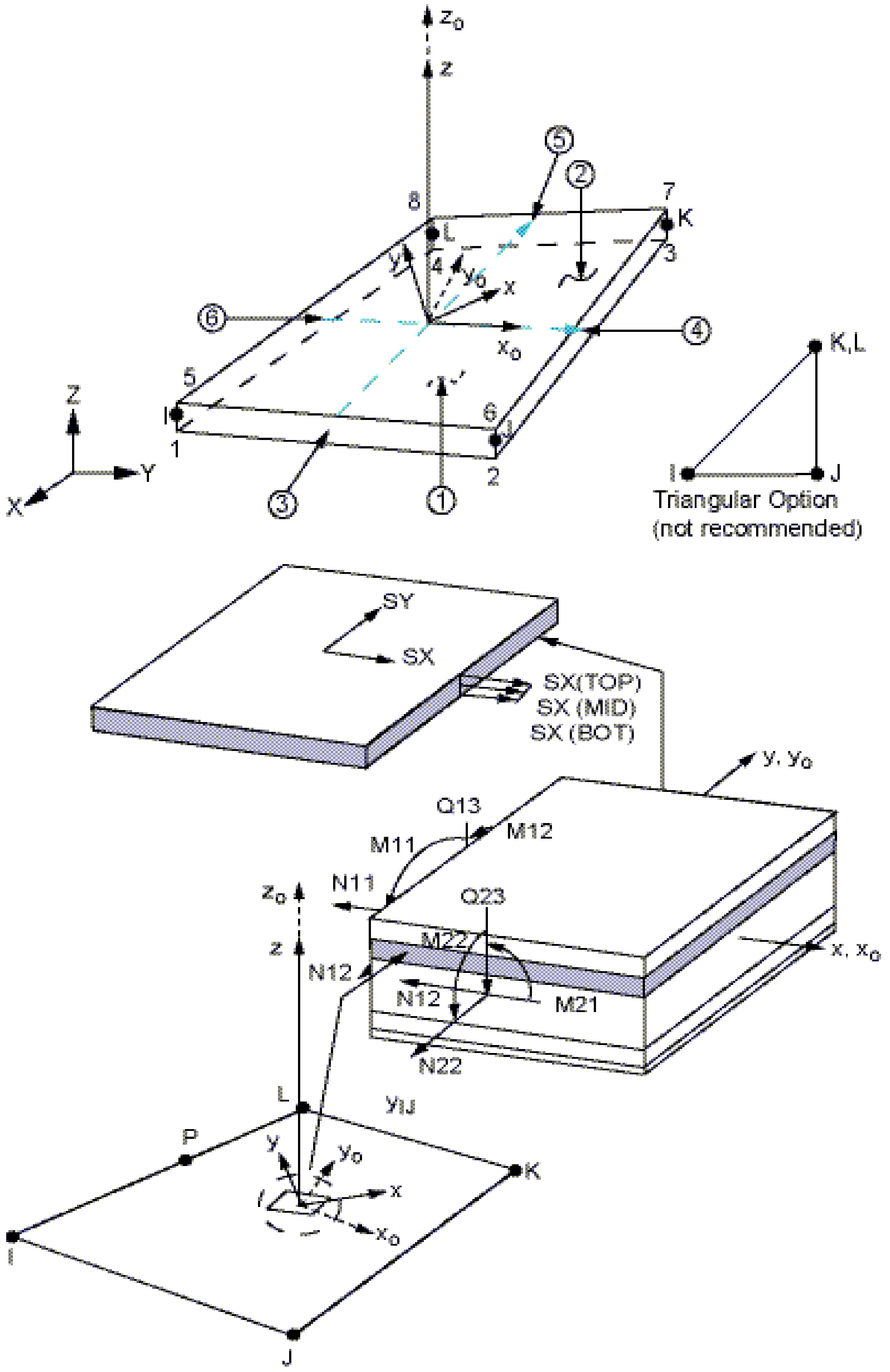


Рис. 4.1.4. Система координат элемента shell181 и направления силовых факторов

Эпюра перемещений u_z:

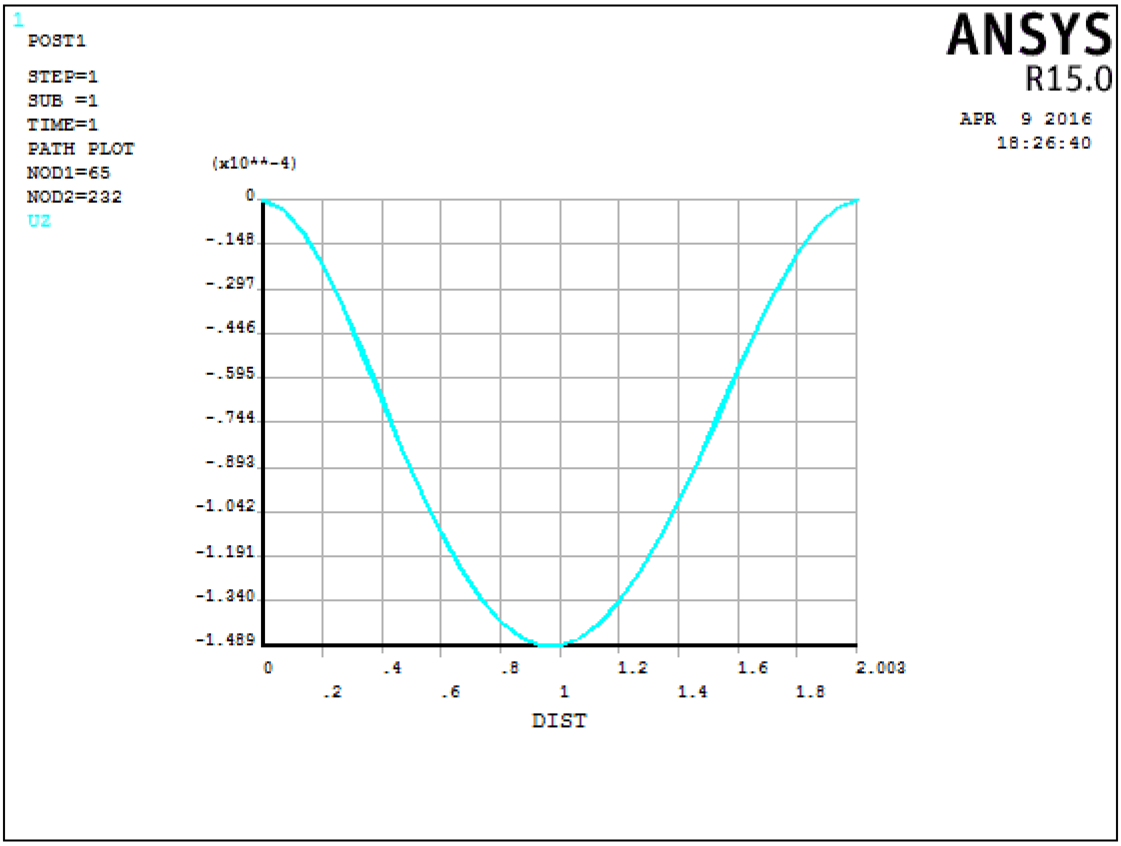


Рис. 4.1.5. Эпюра перемещений u_z в расчетном сечении при разбивке элементами shell181

Функционал программы позволяет для элемента shell181 также определить условные моменты, нормальные и поперечные силы, и даже компоненты деформации (точные формулы в [132]) в цилиндрической системе. Для случая пологой оболочки, когда косоугольную систему координат можно приближенно заменить цилиндрической, нахождение таких усилий имеет смысл. Внутренние усилия, определенные в программе Ansys, и полученные по полуаналитическому методу, не идентичны, но некоторые из них имеют аналогичный физический смысл и могут сравниваться для ориентировочной оценки достоверности предложенного в гл. 2 метода. Величины, значение которых слишком мало, демонстрируют неустойчивое поведение. Эпюры, полученные по полуаналитической методике, демонстрируют довольно близкое совпадение в аналогичных величинах с поправкой на направление осей. Далее приведены совмещенные на одном чертеже эпюры перемещений и аналогичных усилий по методу конечных элементов и численно-аналитическому методу:

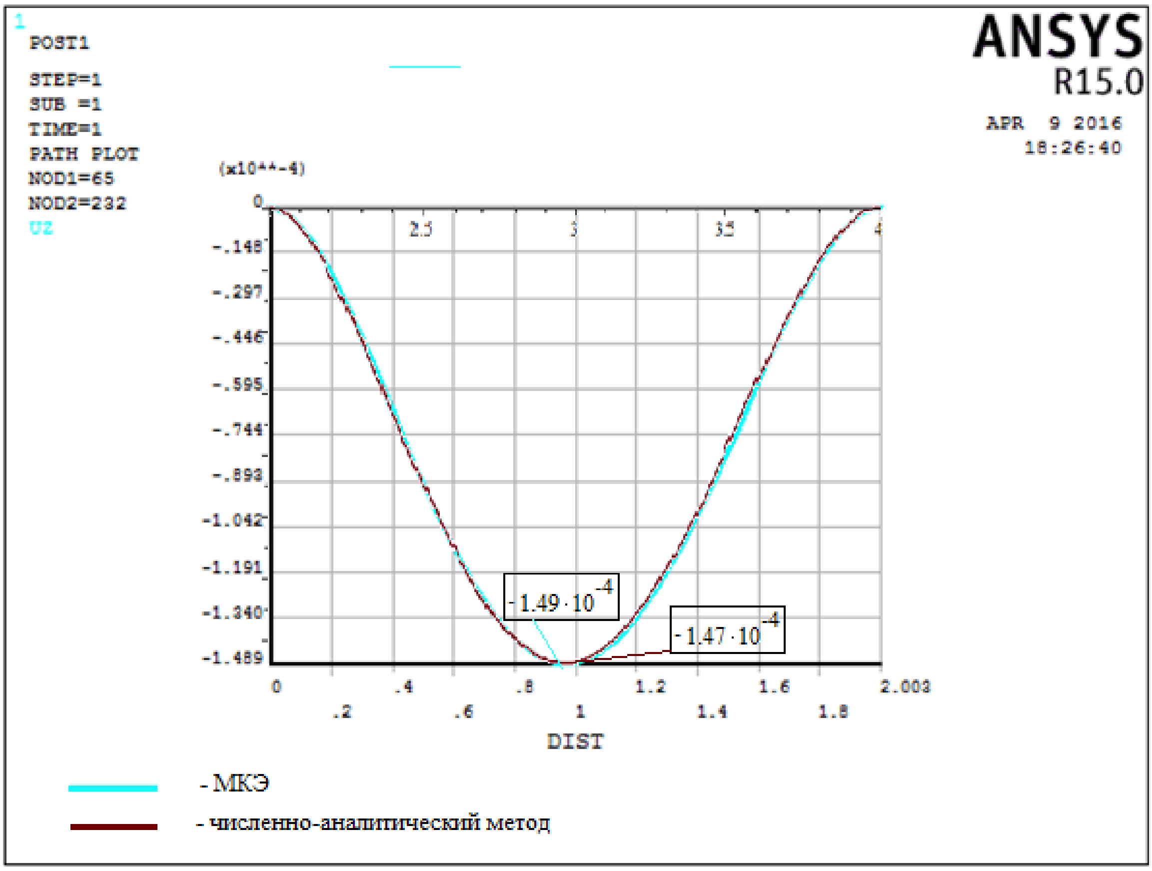


Рис.4.1.6. Прогиб u_z, м

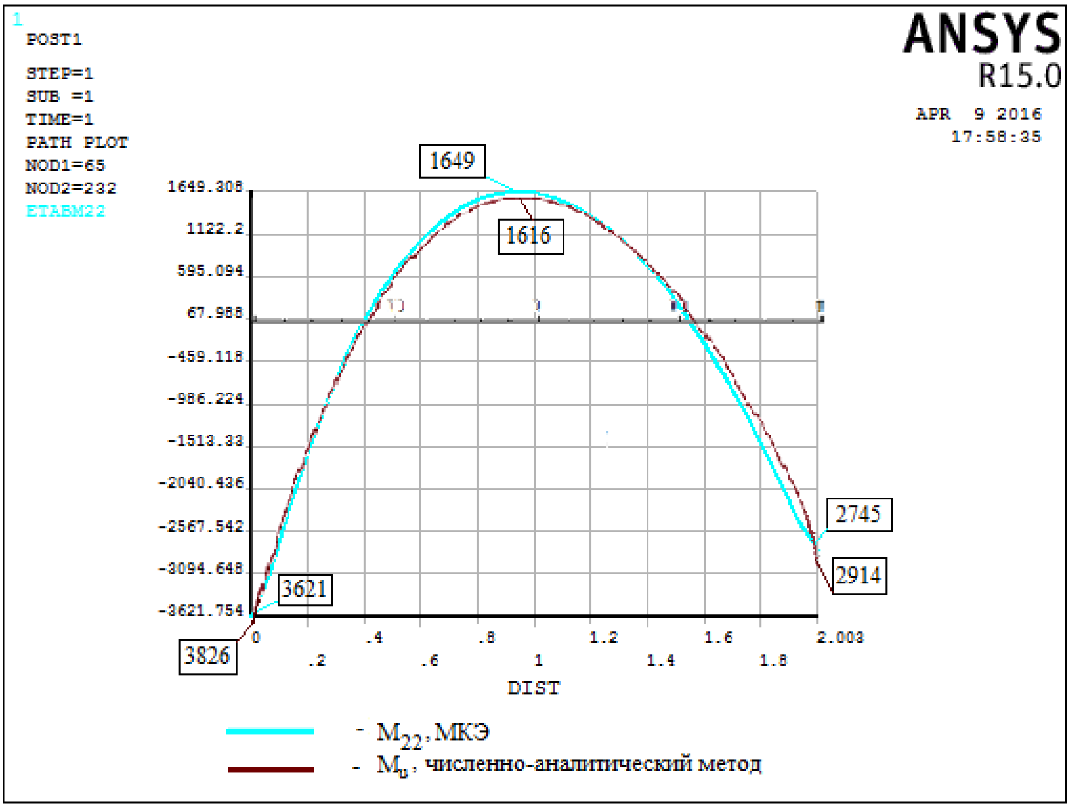


Рис.4.1.7. Моменты M_u и M_{22}, Нхм/м

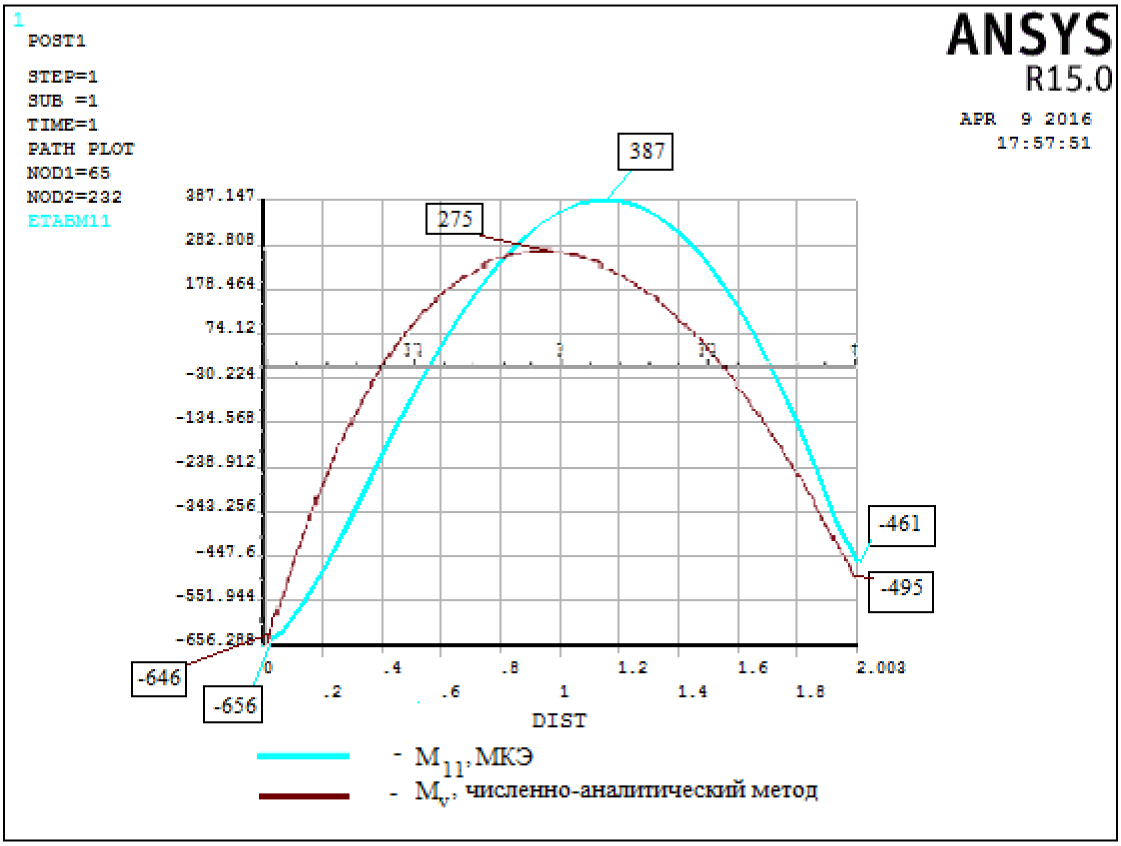


Рис.4.1.8. Моменты M_v и M_{11}, Нхм/м

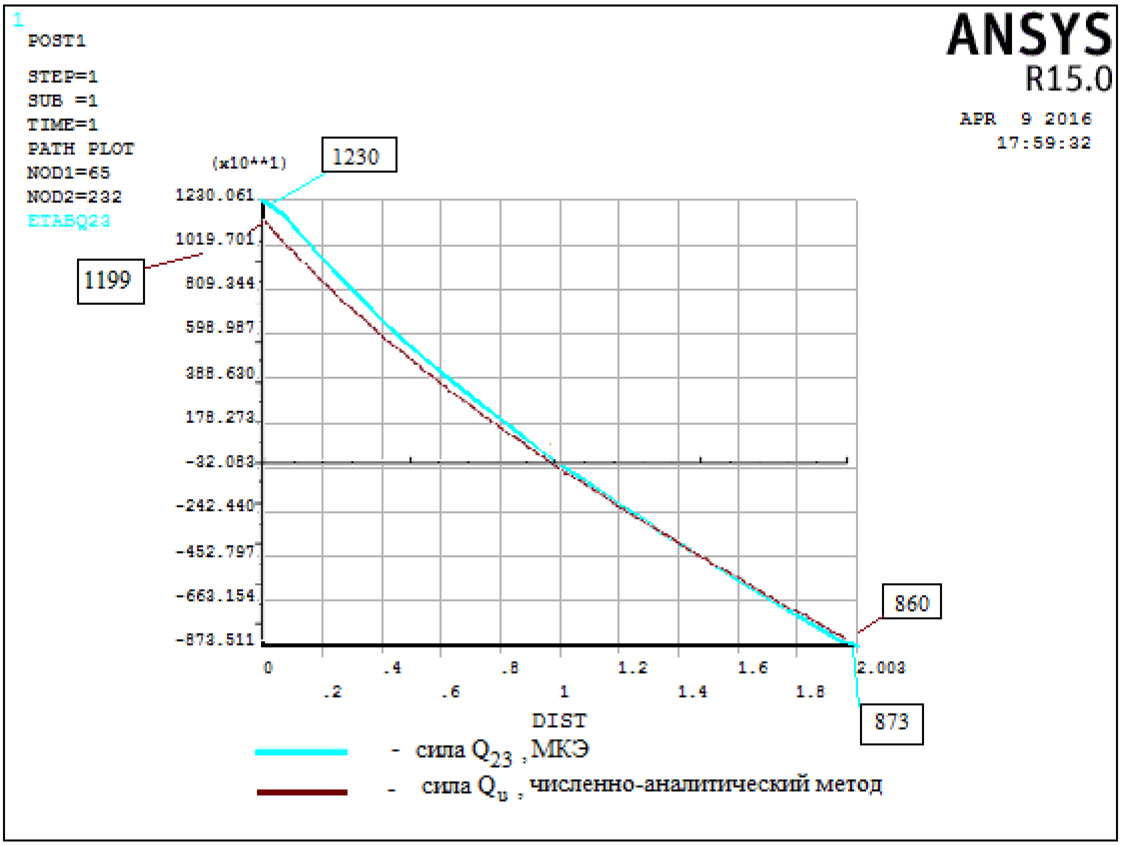


Рис.4.1.9. Поперечные силы Q_u и Q_{23}, Н

Знаки усилий, которые имеют аналогичный смысл и при этом противоположные знаки направлений, изменены для лучшей наглядности сравнения.

Эпюры сил N_u, N_v , S_u не похожи из-за разницы в системах координат усилий, полученных в МКЭ N_{11}, N_{22} , N_{12}, но порядок цифр тот же – они малы по сравнению с моментами и поперечной силой Q_u. Поперечная сила Q_{13} (в конечно-элементном расчете), соответствующая по смыслу Q_v численно-аналитического расчета, демонстрирует малые значения и неустойчивое поведение, так же как и момент M_{12}, соответствующий по смыслу уравненным моментам M_{uv}= M_{vu}.

Числовой пример (непологая оболочка):

Угол наклона образующих φ=45°,контурные радиусы— R_1=2м, R_2=4м; толщина 2 см, шаг винта направляющей — $0.01{\cdot}2\pi$; характеристики материала: E=200000 МПа, ν=0.3 (сталь) величина нагрузки -10кПа.

Расчетная модель показана на рис. 4.1.10:

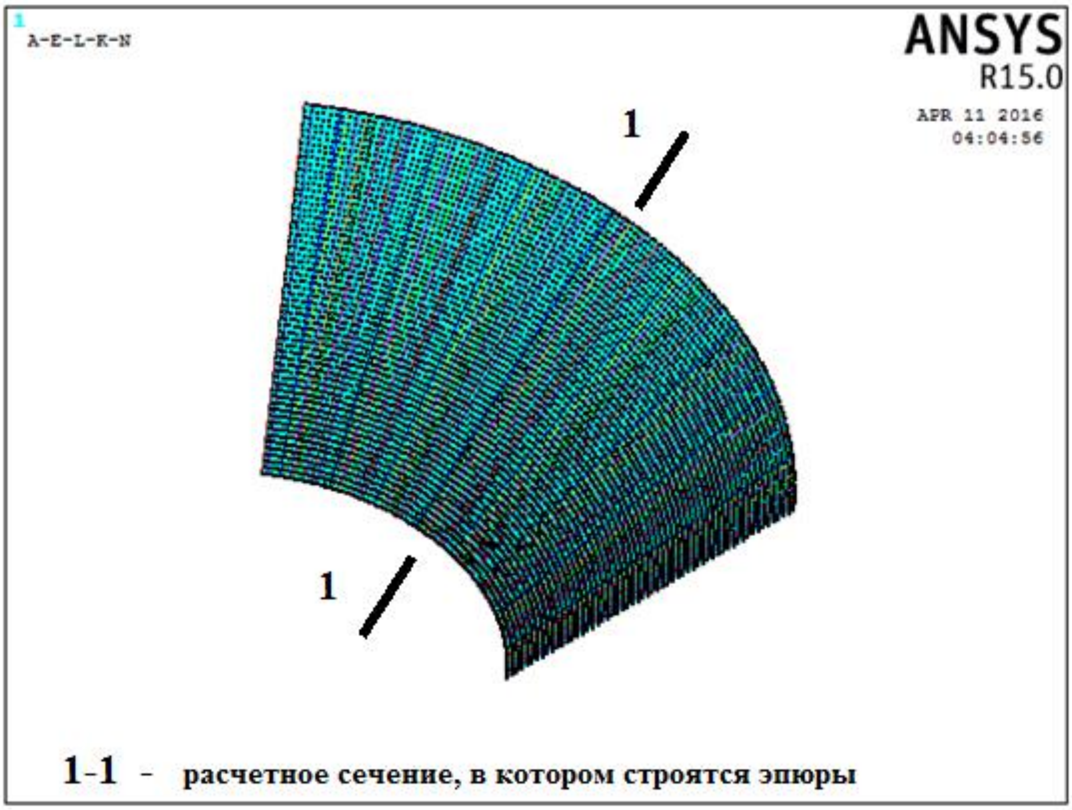


Рис. 4.1.10. Расчетная модель отсека поверхности

Эпюры суммарного вектора смещения (абсолютное значение):

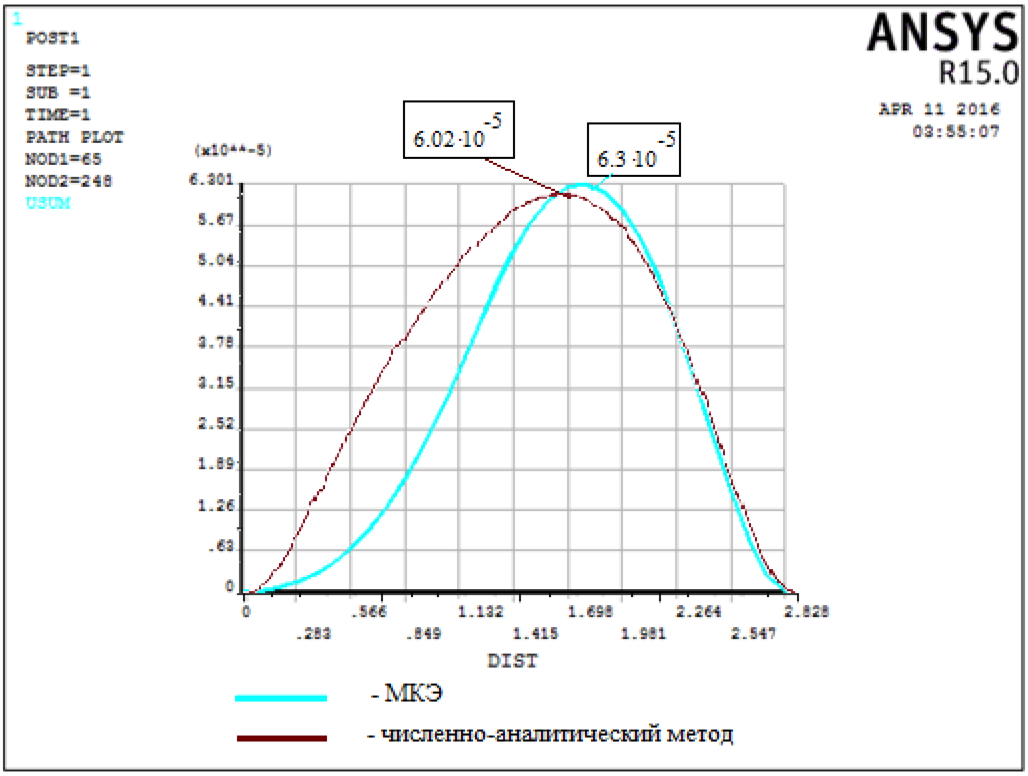


Рис. 4.1.11. Эпюры суммарного вектора смещения

в расчетном сечении, м

Числовой пример

Рассмотрим стальную оболочку, жестко закрепленную по обоим краям, загруженную вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Угол наклона образующих φ=30°,контурные радиусы— R1=5м, R2=6,7м; толщина 2 см, шаг винта направляющей — 0.01·2π; характеристики материала: E=200000 МПа, ν=0.3 величина нагрузки – 10 кПа /м². Сравнение суммарного вектора смещения, полученного по МКЭ и по полуаналитическому методу:

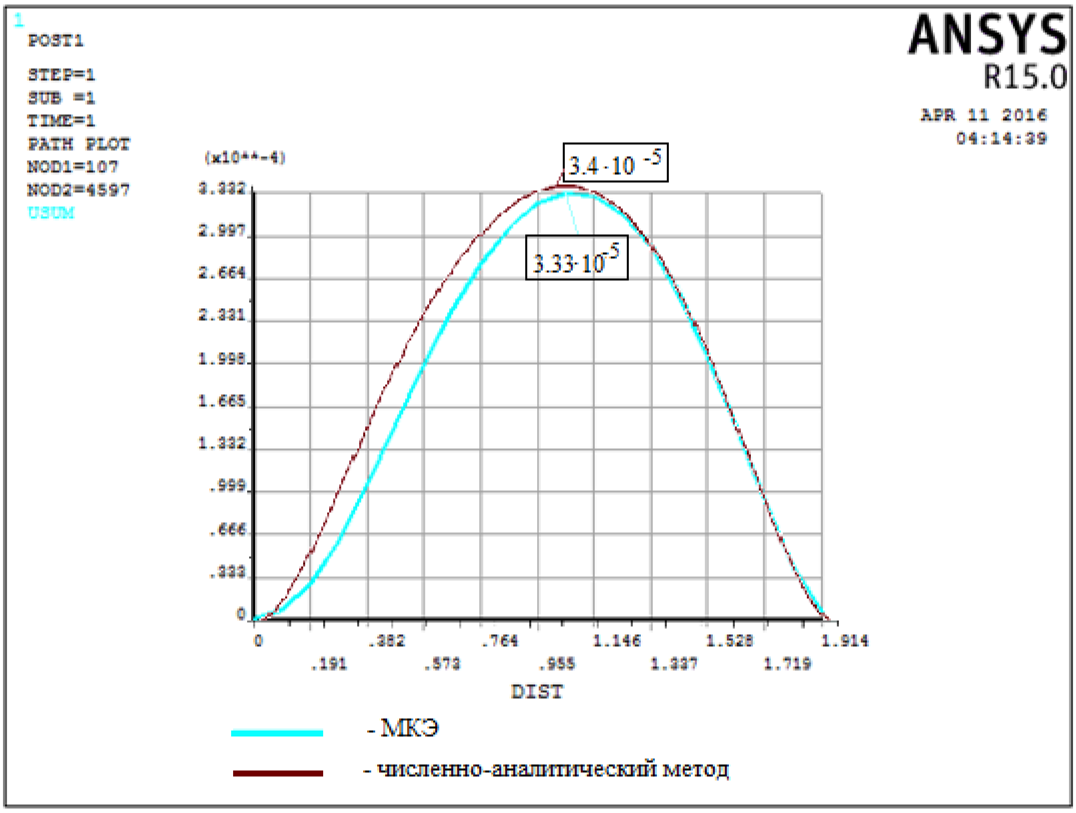


Рис. 4.1.12. Эпюры суммарного вектора смещения
в расчетном сечении, м

4.2. Численные эксперименты по полуаналитическому методу

Для исследования поведения пологих и непологих оболочек были проведены серии расчетов по полуаналитическому методу с различными параметрами.

4.2.1. Исследование НДС геликоидов с разными углами наклона образующих

В первой серии расчетов рассматривались геликоиды с различными углами наклона образующих φ –10, 20, 30, 40, 50, 60 градусов, материал – железобетон, модуль упругости E=32500 МПа, коэффициент Пуассона ν=0.17, толщина 0.1 м, внутренний радиус R1= 2м, наружный R2=4 м, шаг винта H= 0.628 м (иначе говоря, c=0.1), нагрузка типа собственного веса 10^{-2}МН/м², по обоим краям жесткое защемление.

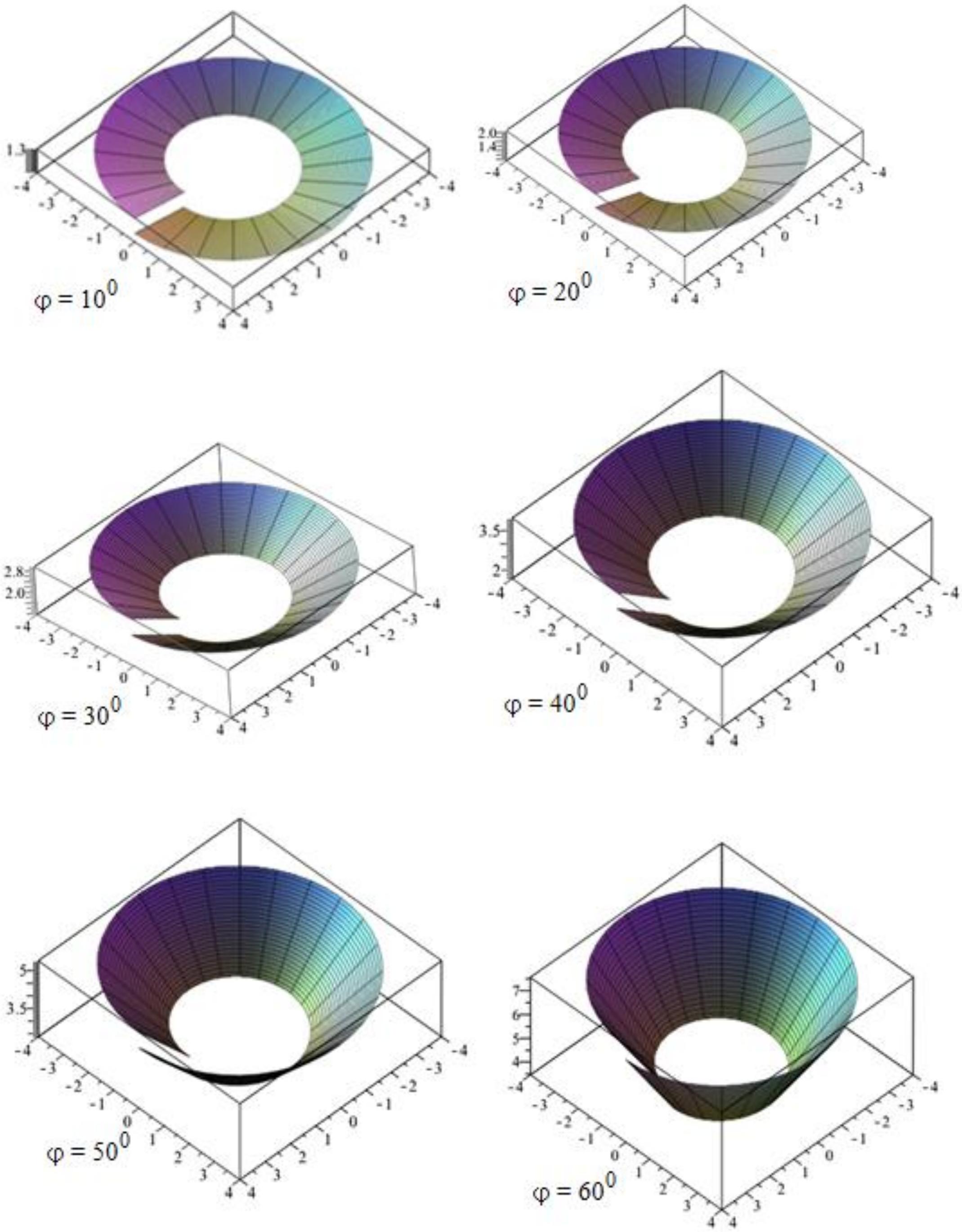


Рис. 4.2.1. Геликоиды с разными углами наклона образующих

Для углов наклона образующей φ менее 3 градусов следует пользоваться только пологой моделью, т.к. решение по непологой модели неустойчивое из-за малых значений u_u и u_v. Для углов от 3 до 10 градусов значения по пологой и непологой модели практически не отличаются, при углах более 10 градусов следует использовать непологую модель.

Перемещения и внутренние силовые факторы:

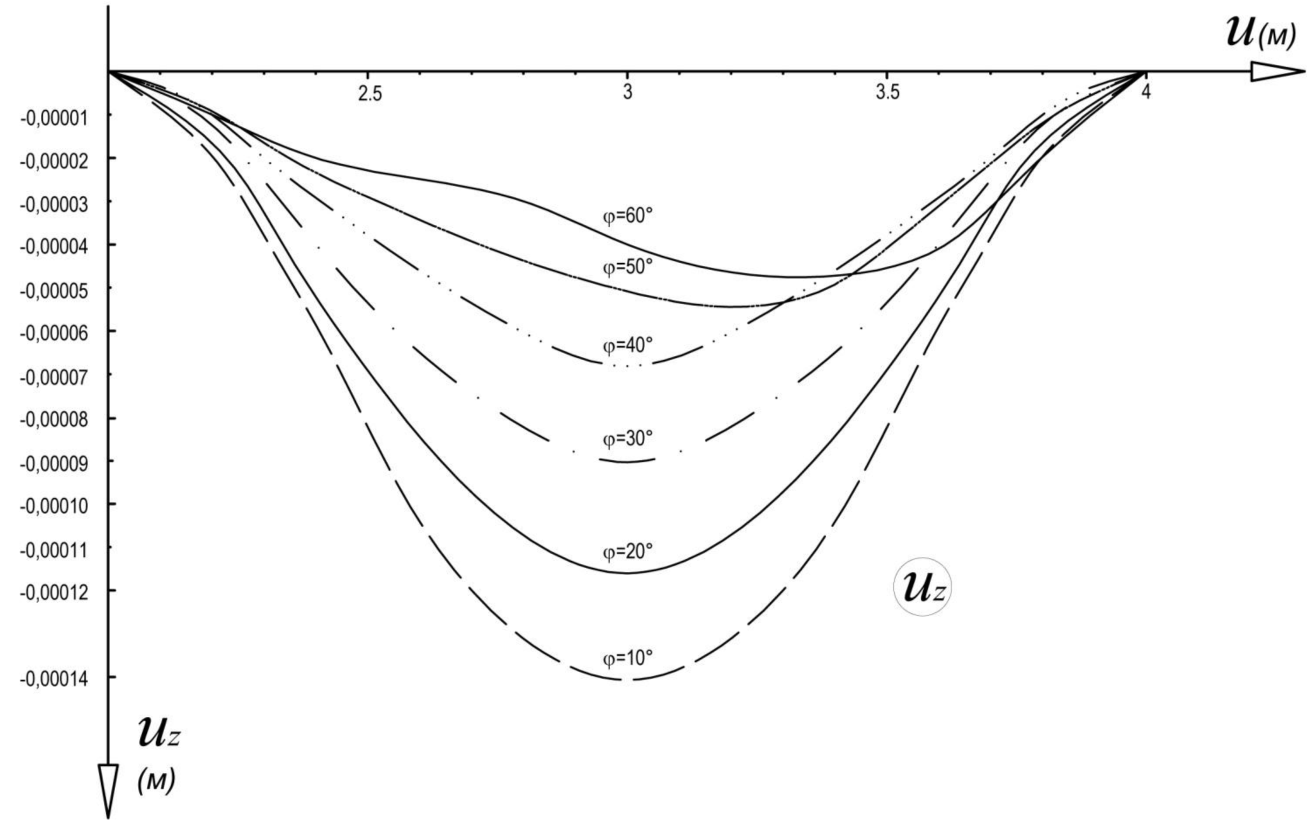


Рис. 4.2.2.Прогибы , м

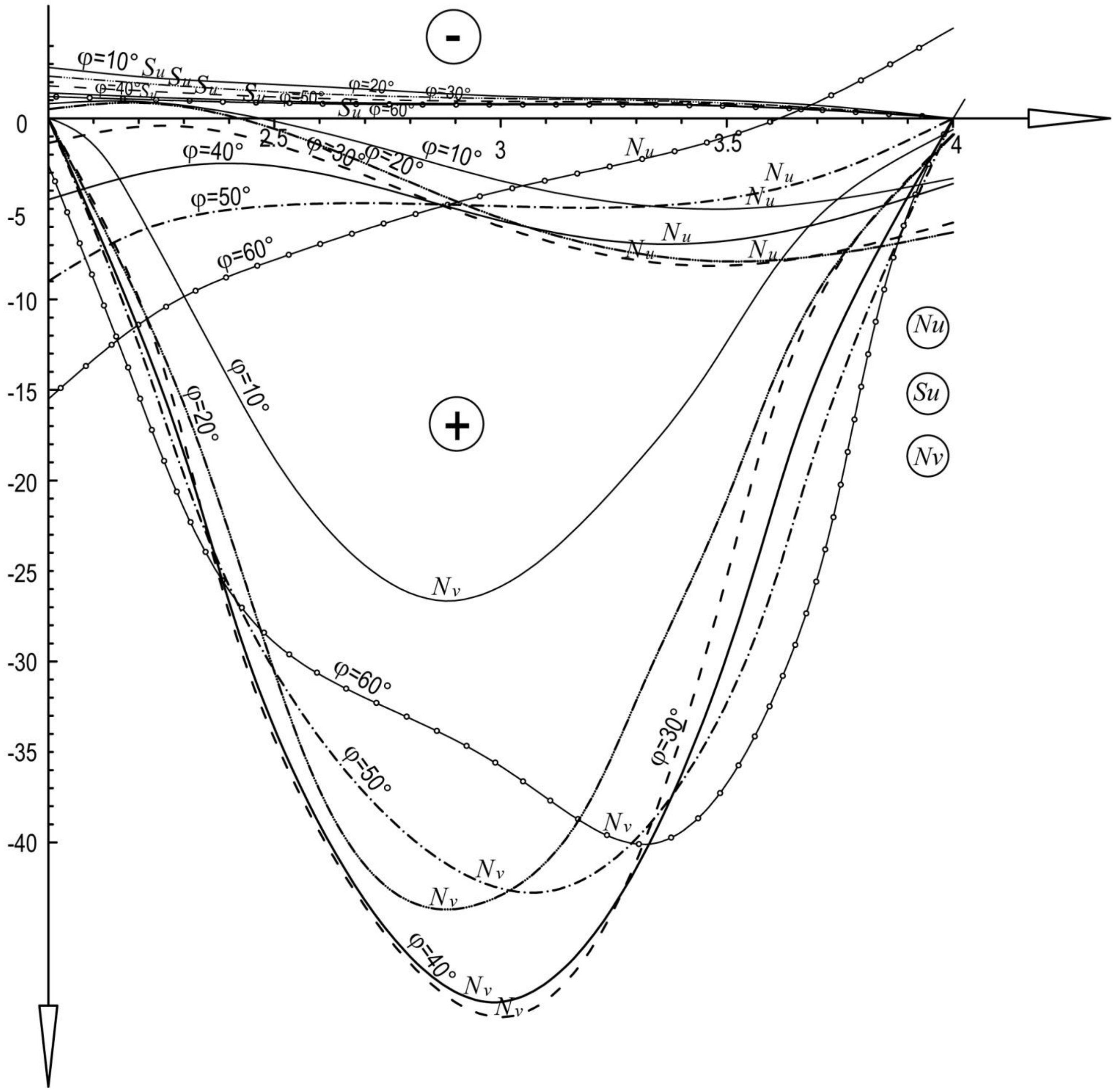


Рис. 4.2.3.Усилия N_u, N_v, S_u,кН/м

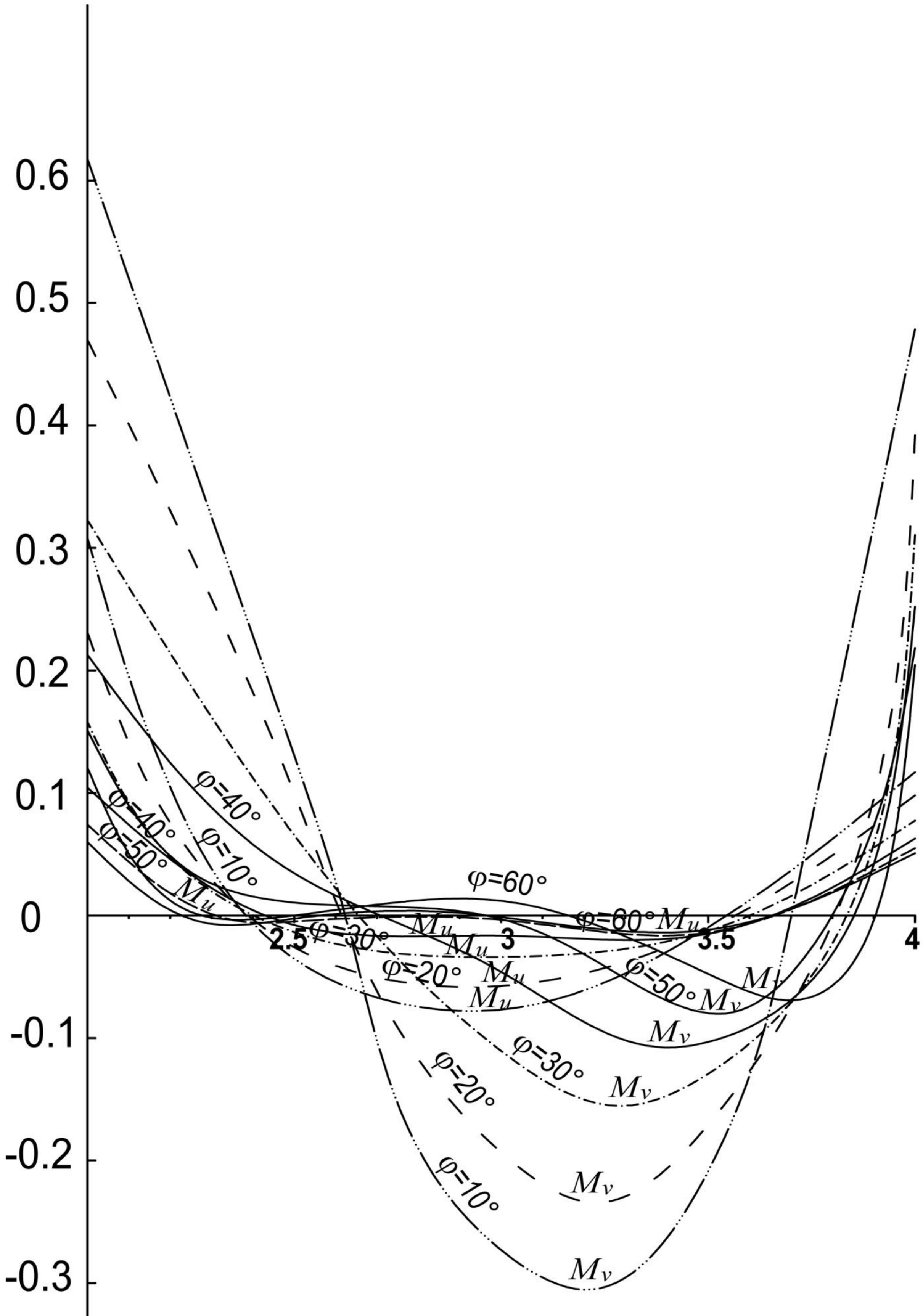


Рис. 4.2.4.Моменты M_u, M_v, кН х м/м

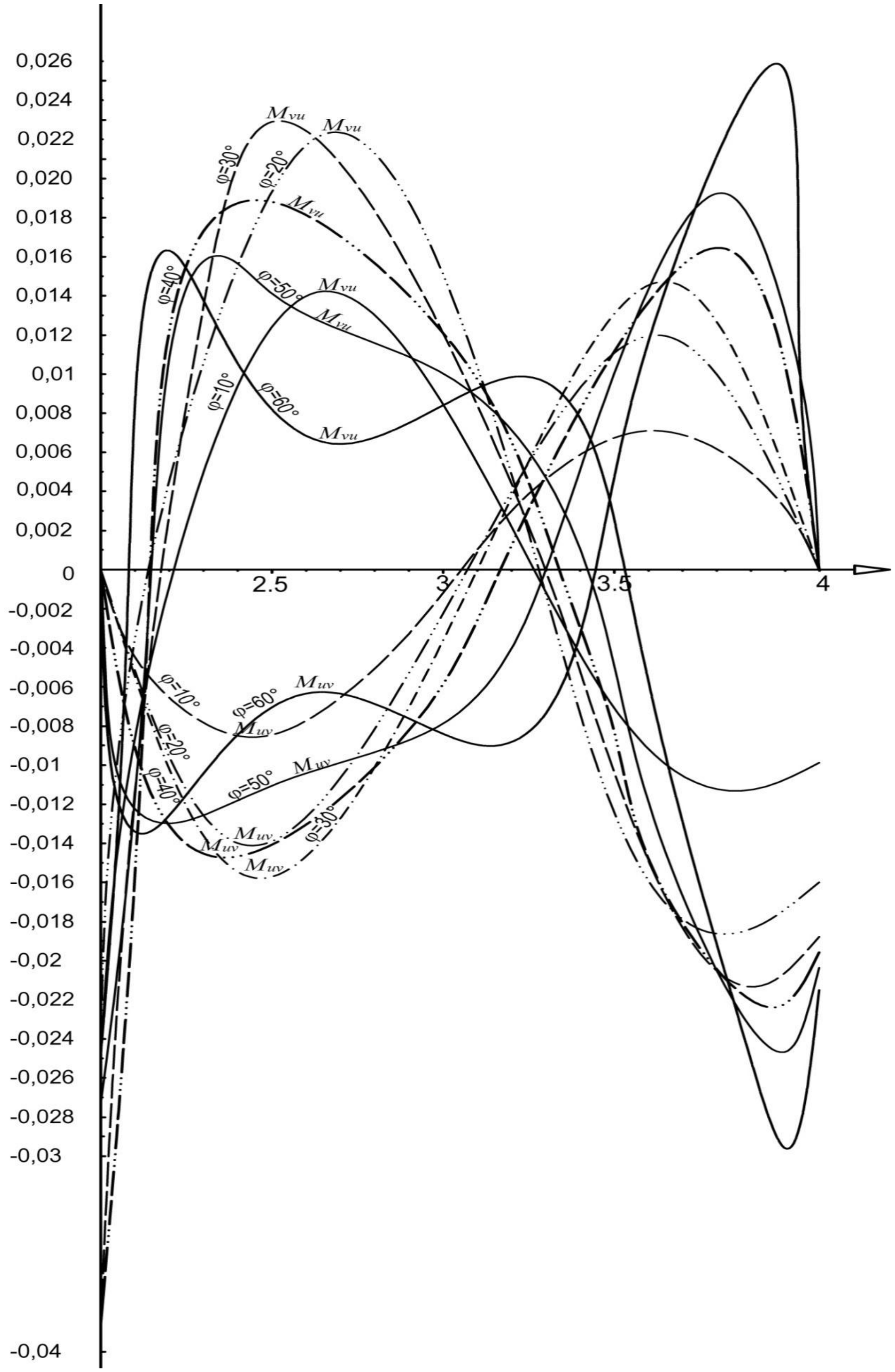


Рис. 4.2.5. Моменты M_{uv}, M_{vu}, кН х м/м

4.2.2. Исследование НДС геликоидов с разным шагом винта

Во второй серии расчетов рассматривались геликоиды с разным шагом – с параметрами c=0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2, материал оболочки –сталь, модуль упругости E=200000 МПа, коэффициент Пуассона ν=0.3, толщина 0.02 м, внутренний радиус R1= 5м, наружный R2=6.7 м, нагрузка типа собственного веса 10^{-2}МН/м², по обоим краям жесткое защемление.

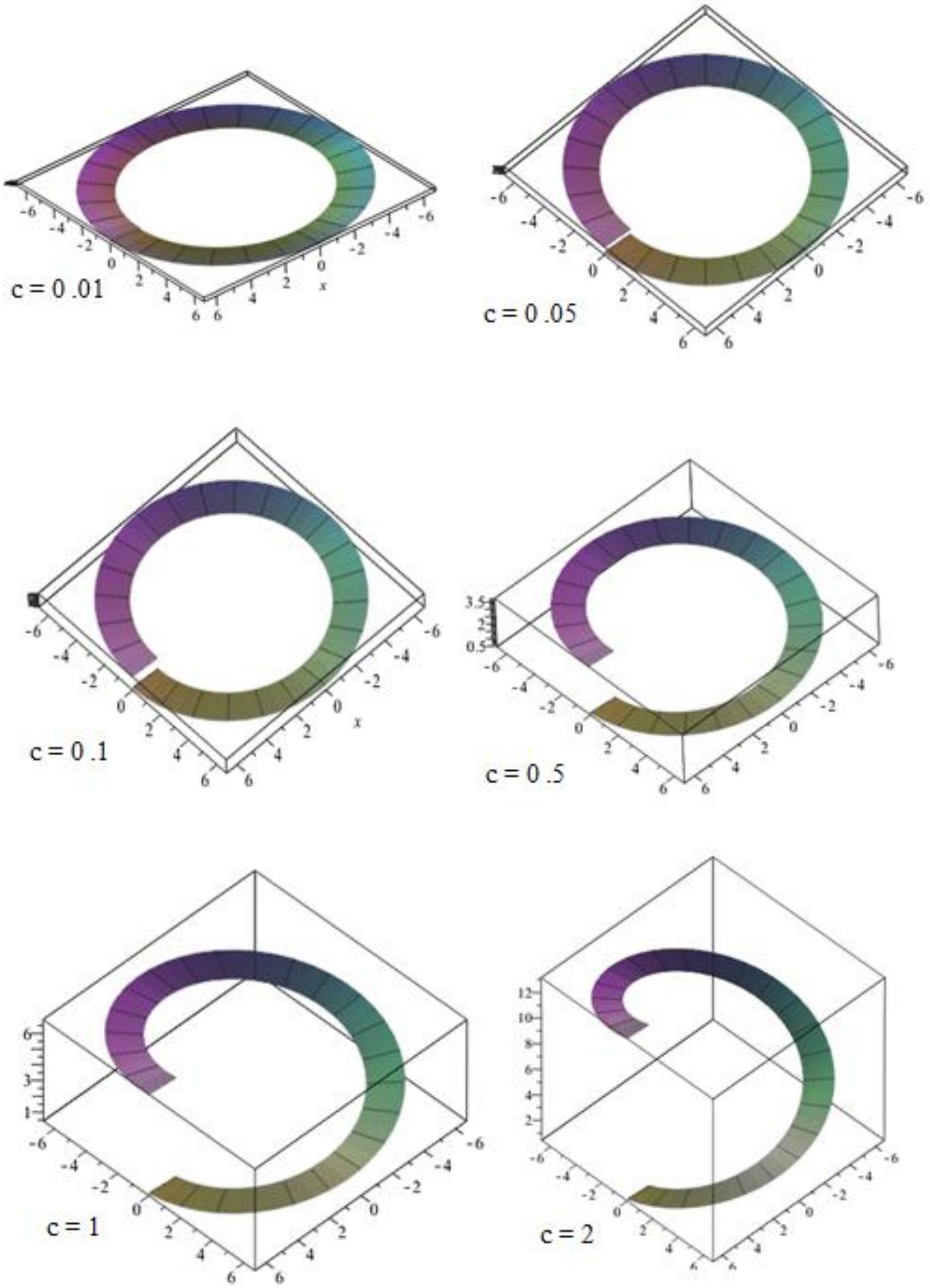


Рис. 4.2.6. Геликоиды с разным шагом винта

Перемещения и внутренние силовые факторы:

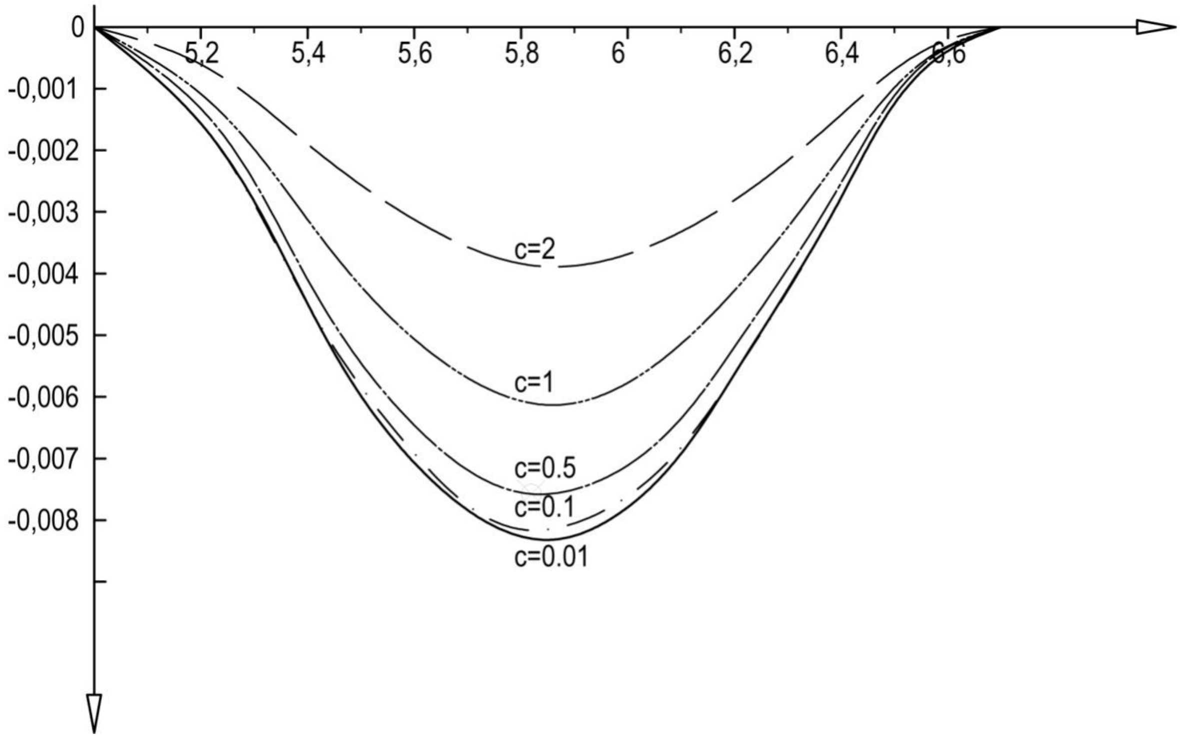


Рис. 4.2.7.Прогибы u_z,м

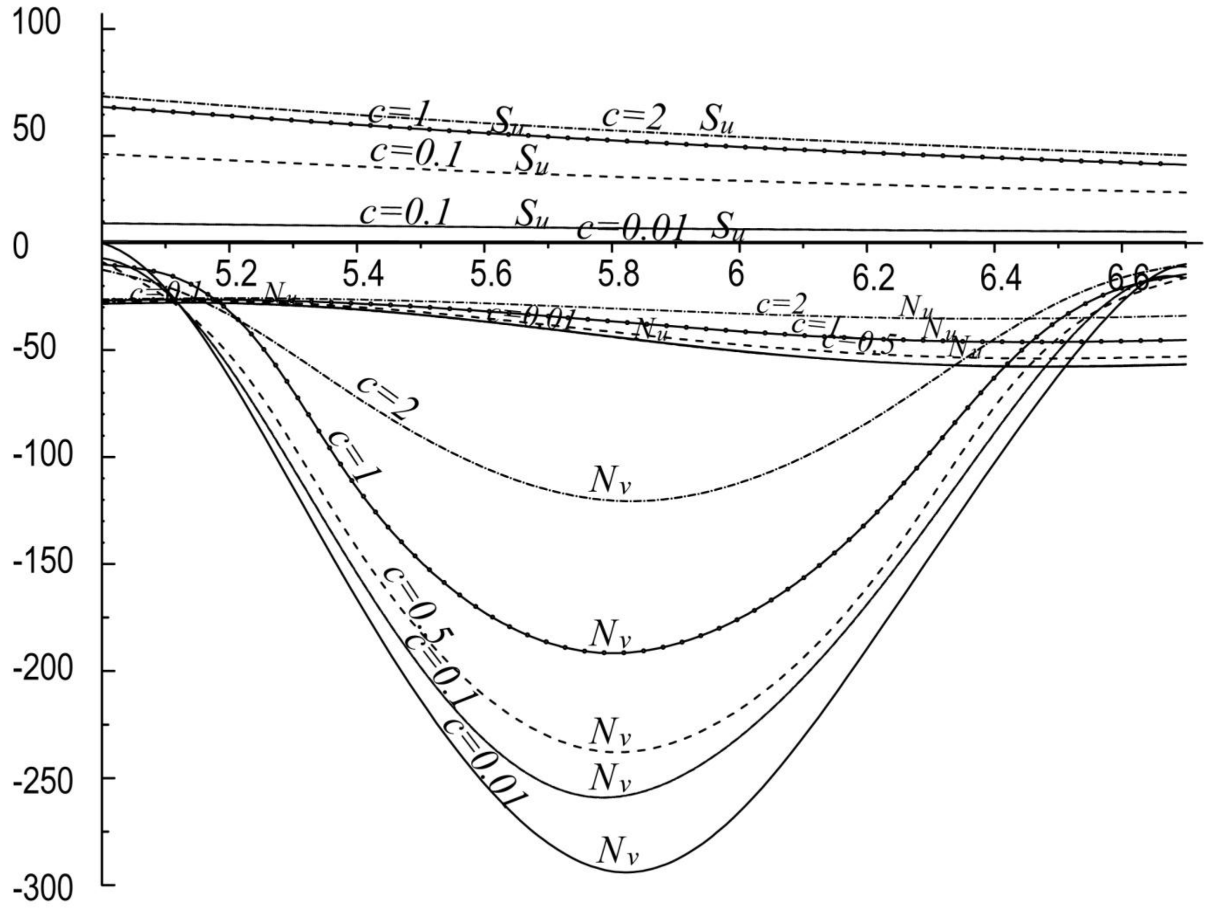


Рис. 4.2.8.Усилия N_u, N_v, S_u,кН/м

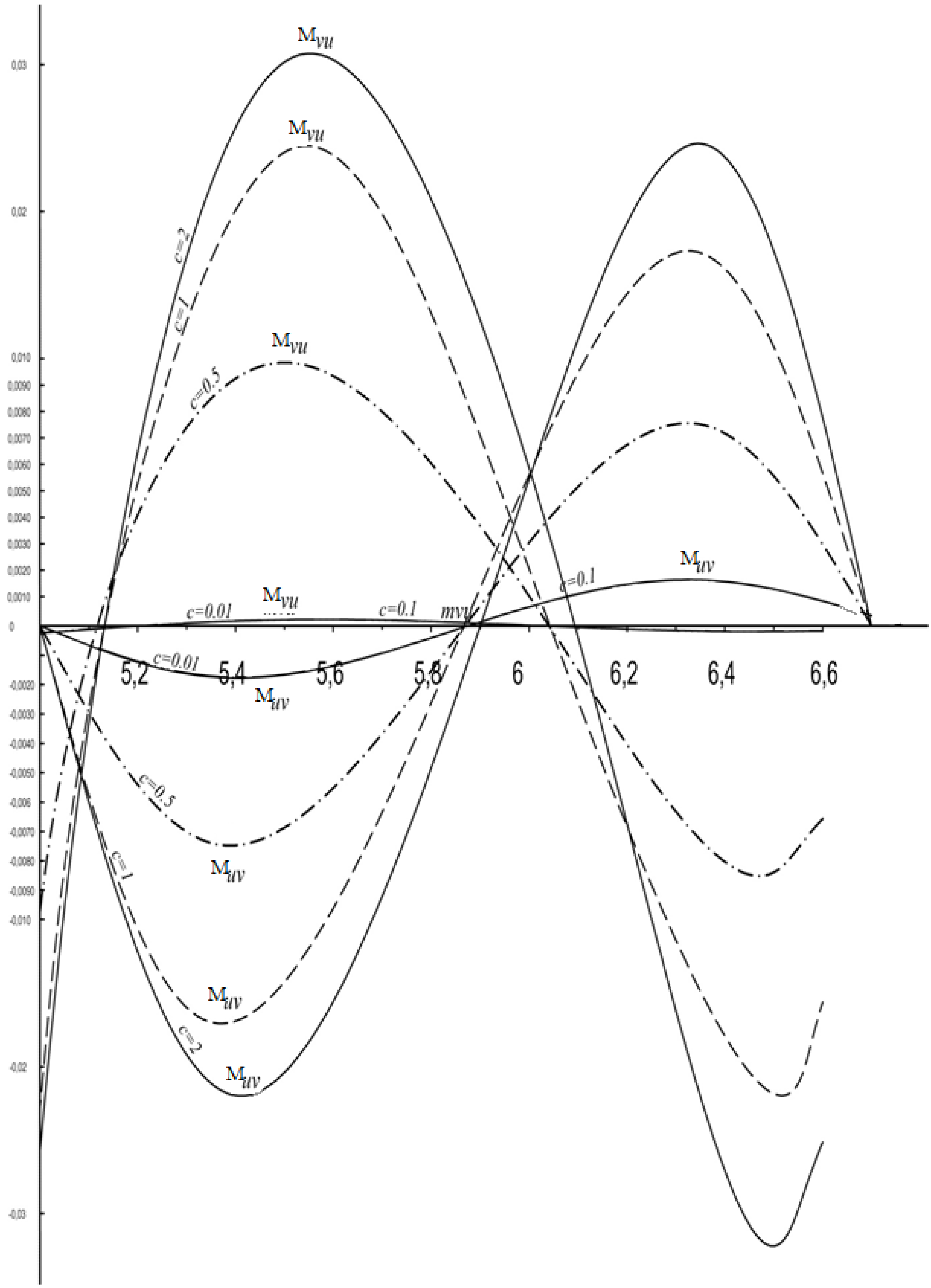


Рис. 4.2.9.Моменты M_{uv}, M_{vu}, кН х м/м

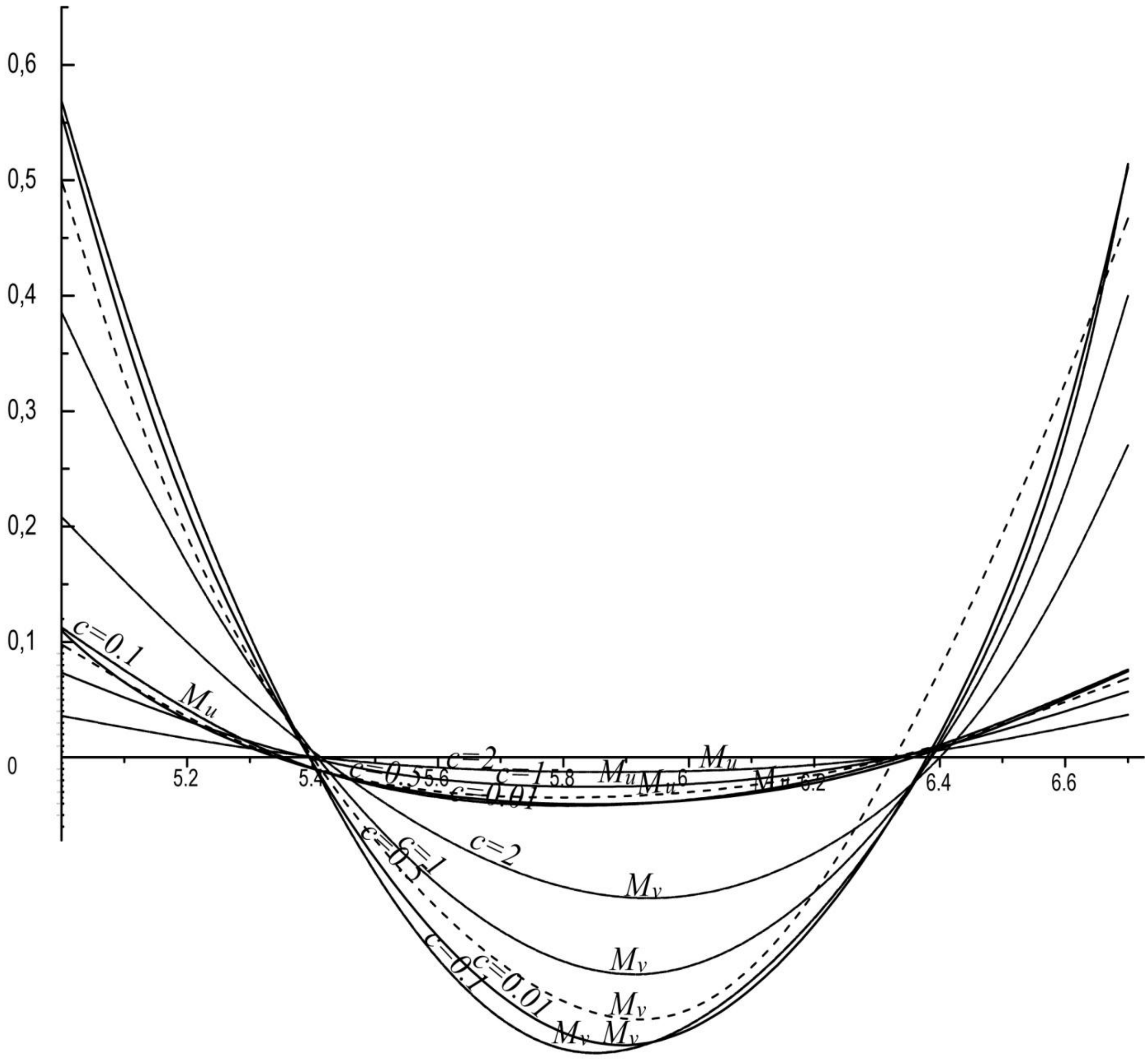


Рис. 4.2.10. Моменты M_u, M_v, кН х м/м

4.3. Сравнение результатов для прямого геликоида, полученных предложенным методом (как частного случая косого геликоида) и аналитическим методом для прямого геликоида

В работе [52] предложен аналитический метод расчета прямого геликоида. Поскольку прямой геликоид является частным случаем косого, и предложенная в гл.2 методика пригодна также для расчета прямого геликоида:

Выражения для коэффициентов системы уравнений в каноническом виде упрощаются:

$$k_{10} = 0,$$

$$k_{11} = -\frac{\left(\sigma\sqrt{c^2+u^2} - \sigma + \sqrt{c^2+u^2}\right)u}{\left(c^2+u^2\right)^{3/2}},$$

$$k_{12} = -\frac{c^2\sigma\sqrt{c^2+u^2} - u^2}{\left(c^2+u^2\right)^{5/2}},$$

$$k_{13} = 0,$$

$$k_{14} = -\frac{4\sigma c^2 u}{\left(c^2+u^2\right)^{5/2}},$$

$$k_{15} = -\frac{2\sigma u^2}{\left(c^2+u^2\right)^{3/2}},$$

$$k_{1Z} = -\frac{2(1-\sigma)(c^2+u^2)^{21/2}}{D1},$$

$$k_{30} = \frac{1+\sigma}{(1-\sigma)(c^2+u^2)},$$

$$k_{31} = \frac{u\,(1+\sigma)}{(1-\sigma)(c^2+u^2)},$$

$$k_{32} = \frac{1}{(c^2+u^2)},$$

$$k_{33} = -\frac{u}{(c^2+u^2)},$$

$$k_{34} = 0,$$

$$k_{35} = 0,$$

$$k_{3Y} = \frac{2}{D1\,(1-\sigma)},$$

$$k_{70} = 0,$$

$$k_{71} = 0,$$

$$k_{72} = 0,$$

$$k_{73} = 0,$$

$$k_{74} = \frac{2(1-\sigma)c^2(4u^2-c^2)}{(c^2+u^2)^4},$$

$$k_{75} = -\frac{(3-8\sigma)uc^2+u^3}{(c^2+u^2)^3},$$

$$k_{76} = \frac{-2c^2\sigma + u^2}{\left(c^2+u^2\right)^2},$$

$$k_{77} = -\frac{2u}{c^2+u^2},$$

$$k_{7Z} = \frac{1}{D2}. \qquad (4.3.1)$$

Выражения для внутренних силовых факторов также имеют достаточно простой вид:

$$N_u = \frac{D1\,u\,\sigma\,u_u}{c^2+u^2} + D1\left(\frac{d}{du}u_u\right) + \frac{2\,D1\,u_z\sigma u^2}{\left(c^2+u^2\right)^{3/2}},$$

$$N_v = D1\,\sigma\left(\frac{d}{du}u_u\right) + \frac{D1\cdot u}{c^2+u^2}u_u,$$

$$S_u = \frac{D1\,(1+\sigma)\,u\,u_u}{2\left(c^2+u^2\right)} - \frac{D1\,(1-\sigma)\left(\frac{d}{du}u_v\right)}{2} + \frac{D1\,u_v\,(1-\sigma)\,u}{2\left(c^2+u^2\right)},$$

$$M_u = \frac{c^2(1-\sigma)\,D2\,u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2} - \frac{\sigma u\left(c^2+u^2\right)D2\frac{d}{du}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2} - D2\frac{d^2}{du^2}u_z.$$

$$M_v = -\frac{D2\,c^2\,(1-\sigma)\,u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2} - \frac{u\left(c^2+u^2\right)D2\frac{d}{du}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2} - \frac{\sigma\left(c^2+u^2\right)^2 D2\frac{d^2}{du^2}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2},$$

$$Q_u = -\frac{D2\cdot 2c^2u\,(1-\sigma)\,u_z}{\left(c^2+u^2\right)^3} - \frac{D2\left(2c^2\sigma\left(2c^2+u^2\right)-\left(c^2+u^2\right)^2\right)\frac{d}{du}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^3} - \qquad (4.3.2)$$

$$-\frac{D2\cdot u\cdot\left(c^2+u^2\right)^2\frac{d^2}{du^2}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^3} - \frac{C2\left(c^3+u^3\right)^2\frac{d^3}{du^3}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^3}.$$

Остальные силовые факторы равны нулю.

Рассчитаем численный пример по данной методике:

Рассмотрим железобетонную оболочку в виде прямого геликоида, жестко закрепленную по обоим краям, загруженную вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Все данные примем аналогично примеру косого геликоида: контурные радиусы— R1=2м, R2=4м; толщина 12 см, шаг винта направляющей

— 0.01·2π; характеристики материала: E=32500 МПа, ν=0.17, величина нагрузки – 10 кПа.

На следующих рисунках приведены эпюры перемещений и усилий:

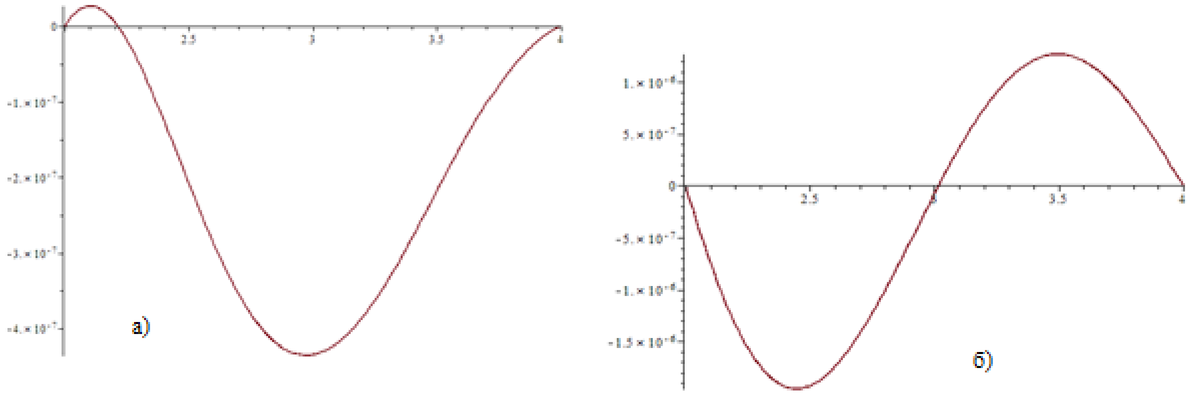


Рис.4.3.1. Перемещения а) u_u, м, б) u_v, м

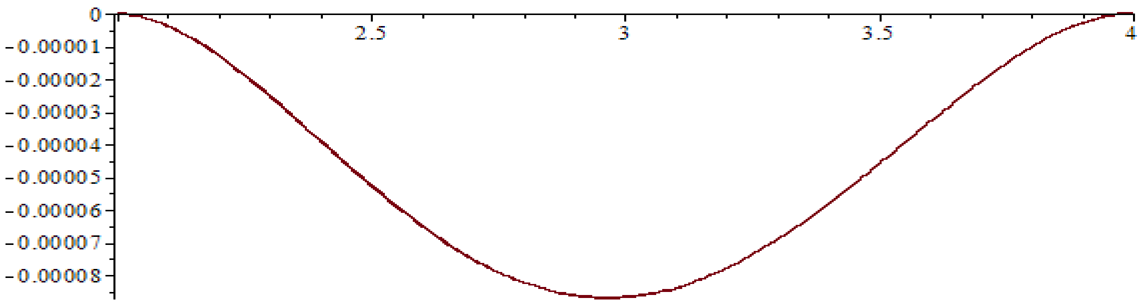


Рис. 4.3.2. Перемещение u_z (прогиб), м

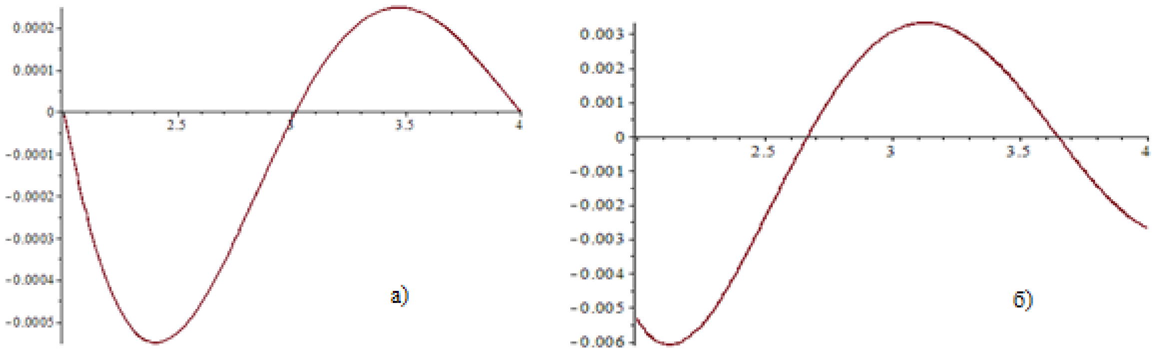
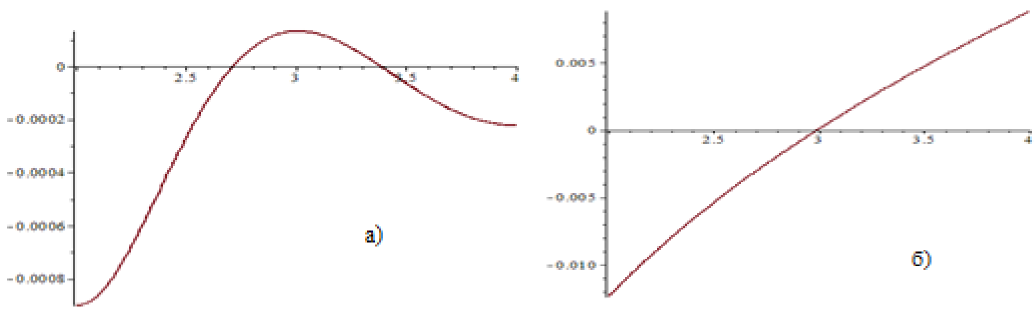


Рис. 4.3.3. Усилия, а) N_u, *кН/* м, б) N_v, *кН/* м



.

Рис.4.3.4Усилия, а) $S_u, кН/$ м, б) $Q_u, кН/$ м

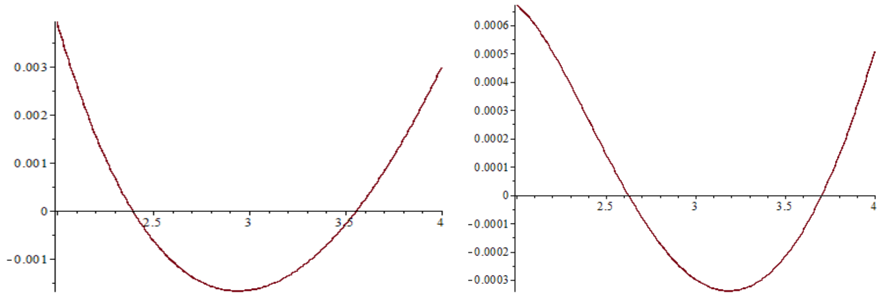


Рис. 4.3.5. Моменты, а) $M_{uv}, кН \cdot м/$ м, б) $M_{vu}, кН \cdot м/$ м

Результаты демонстрируют довольно близкое совпадение с результатами конечно-элементного анализа, а также с результатами расчета прямых геликоидов по аналитическим и полуаналитическим методикам, приведенным в работах [52,136]. Для иллюстрации приведем пример, рассчитанный в работе [52] по модифицированному аналитическому методу В.Г.Рекача для расчета прямых геликоидов:

Рассмотрим прямой геликоид со следующими характеристиками: модуль упругости E=200000 МПа, коэффициент Пуассона ν=0.3, толщина 0.02 м, внутренний радиус R_1= 5м, наружный R_2=6.708 м, шаг винта H= 0.314м (иначе говоря, c=0.05), нагрузка 10 кПа:

Получены графики результатов (см. рис. 4.3.2, 4.3.3)

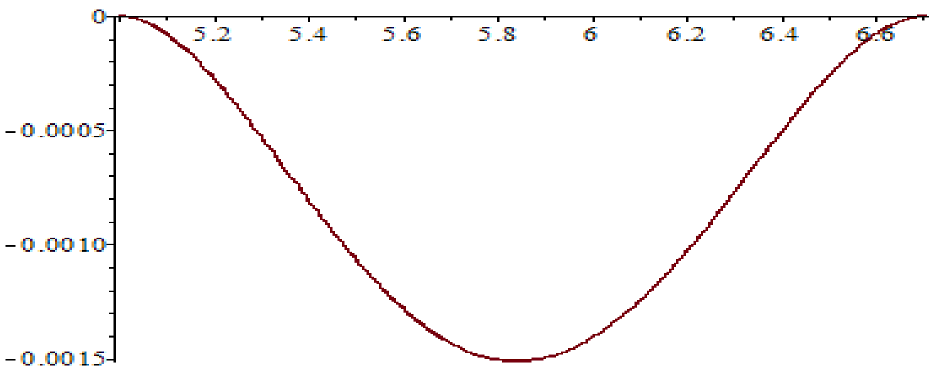
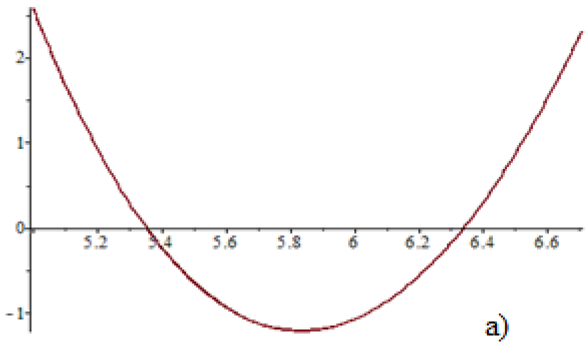


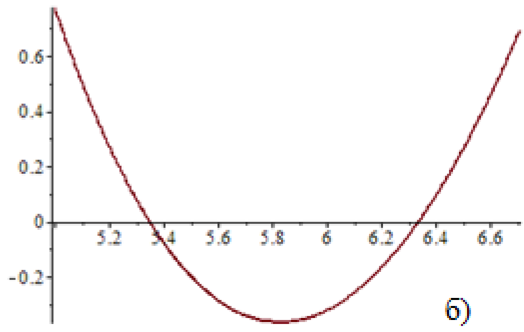
Рис. 4.3.2. Перемещение u_z, м

При расчете получен максимальный прогиб 1,51 мм, решение по аналитическому методу для прямых пологих геликоидов [52] – 1,48 мм.

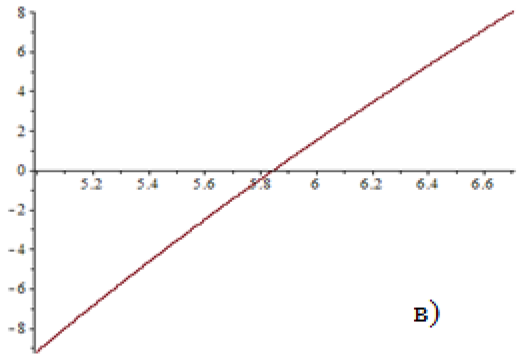
Эпюры моментов и поперечных сил представлены на рис. 4.3.3



M_u,*кНхм/м*



M_v,*кН·м/м*



Q_u,*кН/м*

Рис. 4.3.3. Эпюры внутренних силовых факторов, а) M_u, б) M_v, в) Q_u

Сравнительная таблица результатов предложенного метода (1) с аналитическим методом (2) из работы [52].

Таблица 4.3.1.

Сравнение силовых факторов, полученных по разным методам

Величина	по методу 1	по методу 2
Изгибающий момент M_u, $\frac{\text{КНхм}}{\text{м}}$ На первой опоре/максимум в пролете/на второй опоре	2,57/-1,21/2,289	2,57/-1,20/2,28
Изгибающий момент M_v $\frac{\text{КНхм}}{\text{м}}$ На первой опоре/максимум в пролете/на второй опоре	0,77/-0,36/0,68	0,77/-0,37/0,68
Поперечная сила КН На первой опоре / на второй опоре	-9,208/8,00	-9,208/8,03

В части изгибающих моментов и поперечных сил совпадение практически полное.

Также для сравнения с аналитическим решением из работы [52] был рассчитан аналогичный стальной геликоид с толщиной h=0,01 и c=0,1:

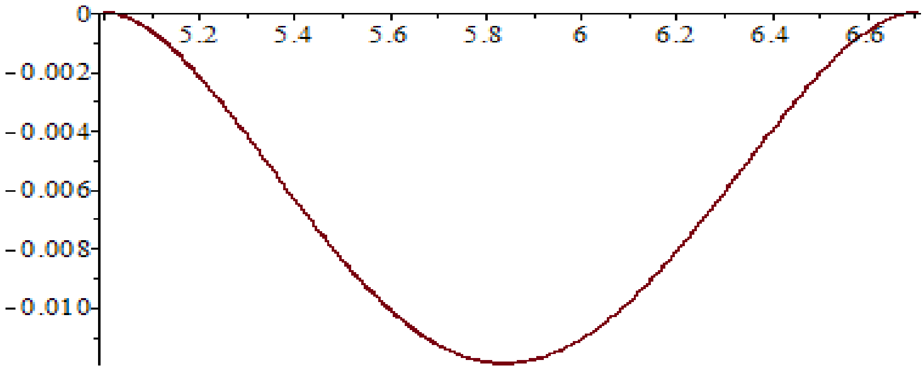
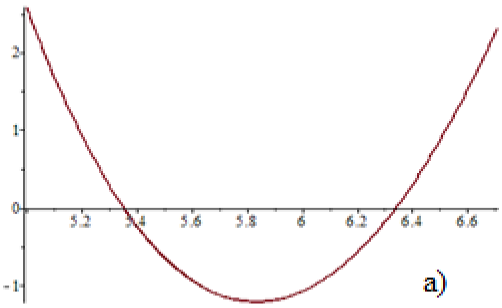
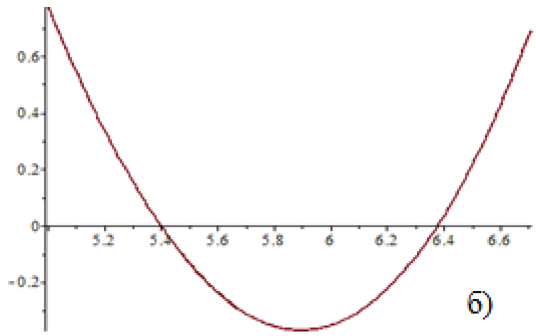


Рис. 4.3.4. Перемещение u_z, м

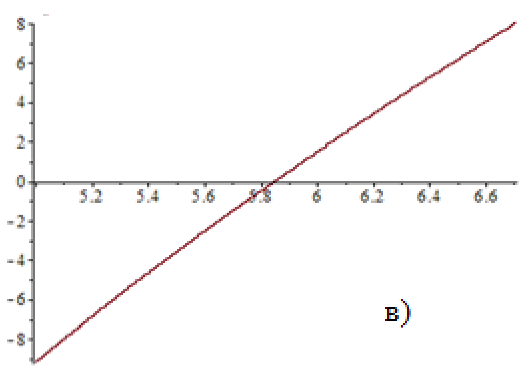
Максимальный прогиб в середине пролета составил 11,9 мм. По аналитическому методу – 11,84 мм [52].

Графики изгибающих моментов и поперечных сил представлены ниже:





M_u,кНхм/м *M_v, кНхм/м*



Q_u,кН/м

Рис. 4.3.5. Эпюры внутренних силовых факторов, а) M_u, б) M_v, в) Q_u

Следует отметить, что в данном примере прогиб уже несколько превысил толщину элемента, а значит, была достигнута граница применимости линейной модели. Учитывая, что размер конструкции в плане определяется большим диаметром - 13,416 м, а шаг винта равен 0,628 м, то конструкция приближается также и к пределу пологости.

4.4. Пример расчета практической задачи

В качестве примера практического применения методики рассчитаем отсек круговой рампы в виде половины витка геликоида, ведущей с одного этажа на другой. Для предварительного расчета примем в качестве материала условный железобетон с характеристиками E=32500 МПа, ν=0.17. В соответствии со строительными нормами примем размеры: внутренний радиус R_1= 3.1м, наружный R_2= 7.4м. Высота этажа 3 м. Поперечный уклон рампы равен 6%, или 3.52^0. Нагрузка согласно нормам принимается 6 кПа, или, иначе говоря, 600 кг/м^2. Для подъема на этаж высотой 3 м требуется проехать половину витка, параметр c=0.955. Рампа выполнена в монолите, жестко крепится к ограждающим стенам.

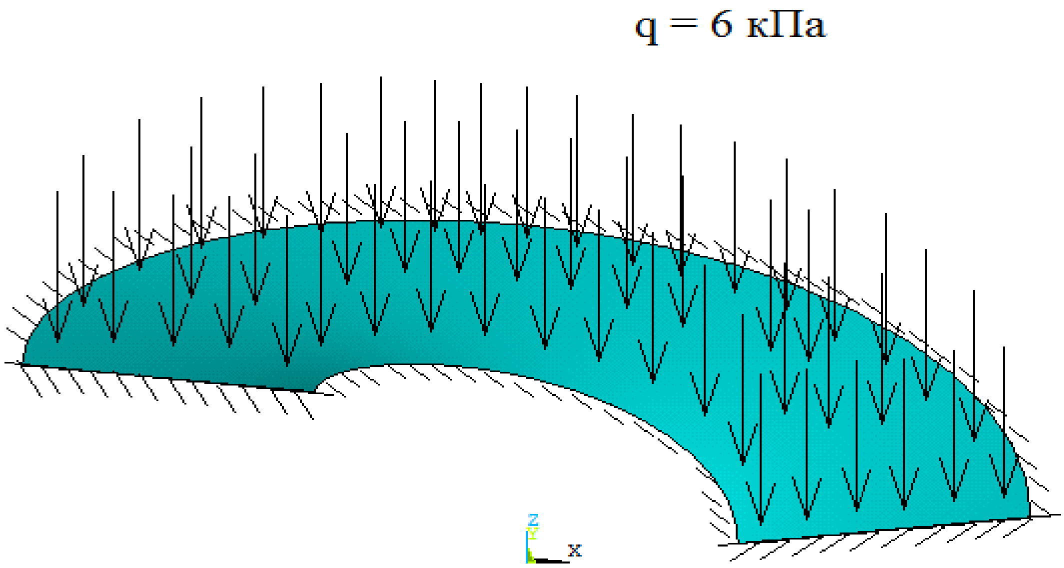


Рис. 4.4.1. Условная расчетная схема конструкции рампы

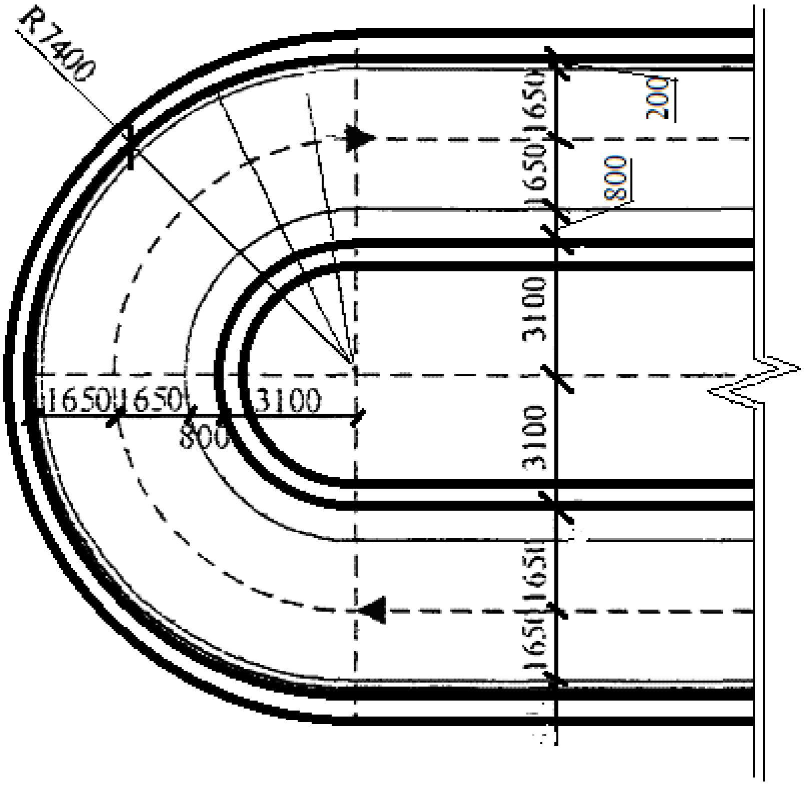


Рис. 4.4.2. Схема рампы в плане

На рис.4.4.1- 4.4.2 представлены вид конструкции в плане и расчетная схема.

На рис. 4.4.3- 4.4.4. представлены эпюры прогиба и внутренних силовых факторов, полученных по численно-аналитической методике:

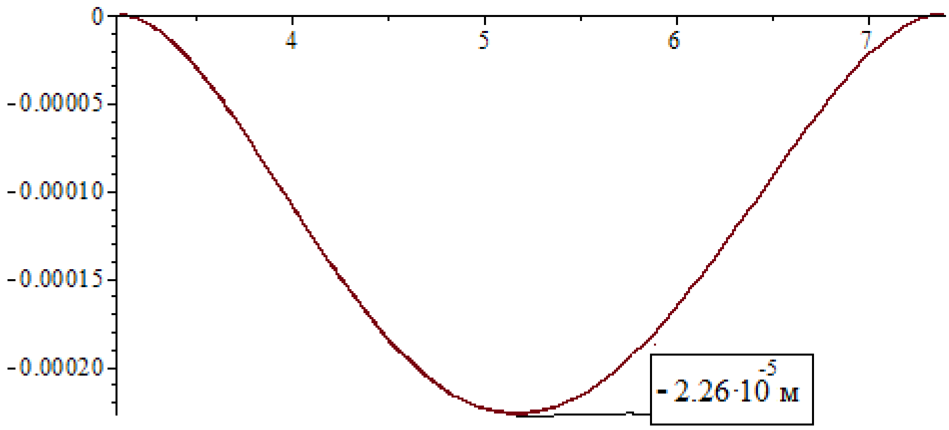


Рис.4.4.3. Прогиб u_z, м

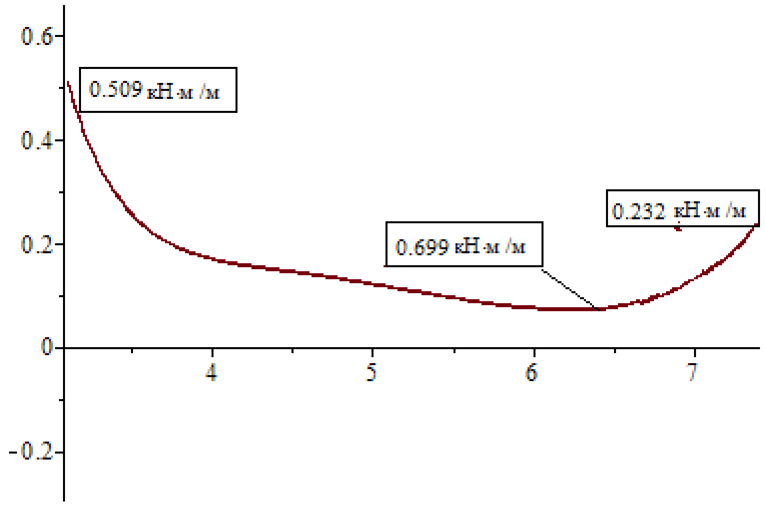


Рис.4.4.4. Момент M_u, кНхм/м

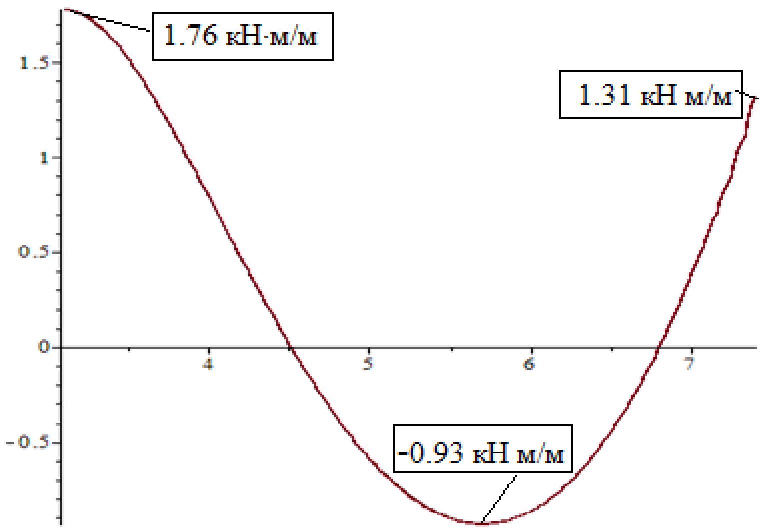


Рис.4.4.5. Момент M_v, кНхм/м

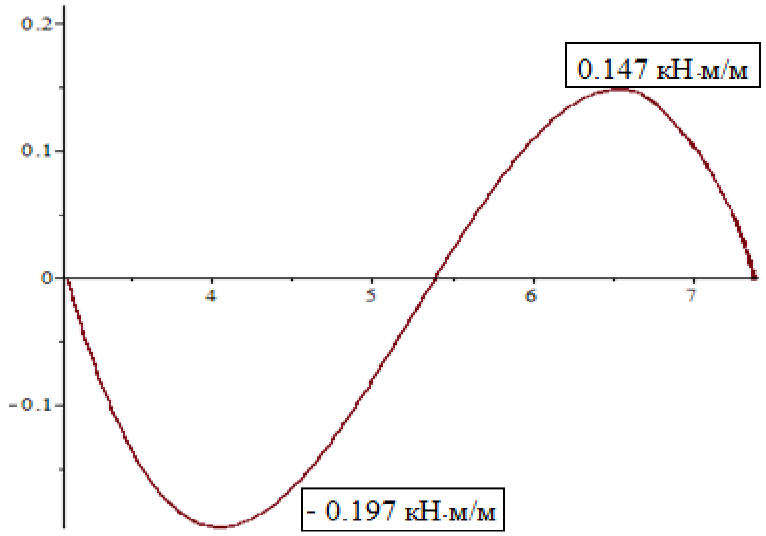


Рис.4.4.6. Момент M_{uv}, кНхм/м

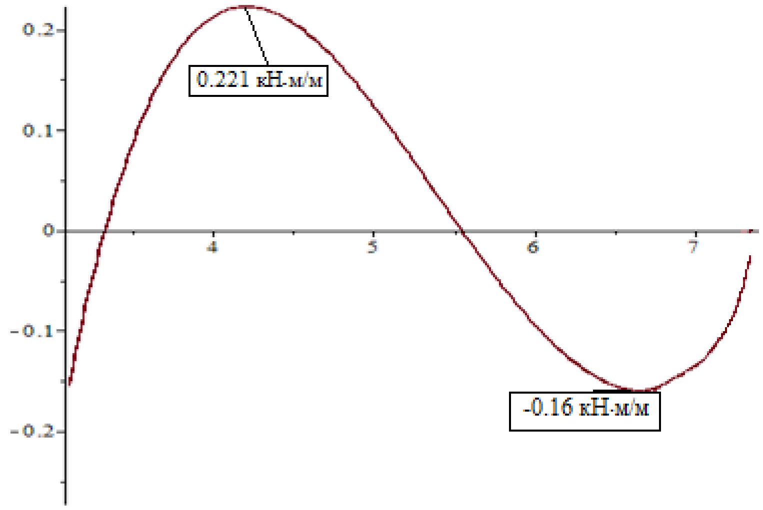


Рис.4.4.7. Момент M_{vu}, кНхм/м

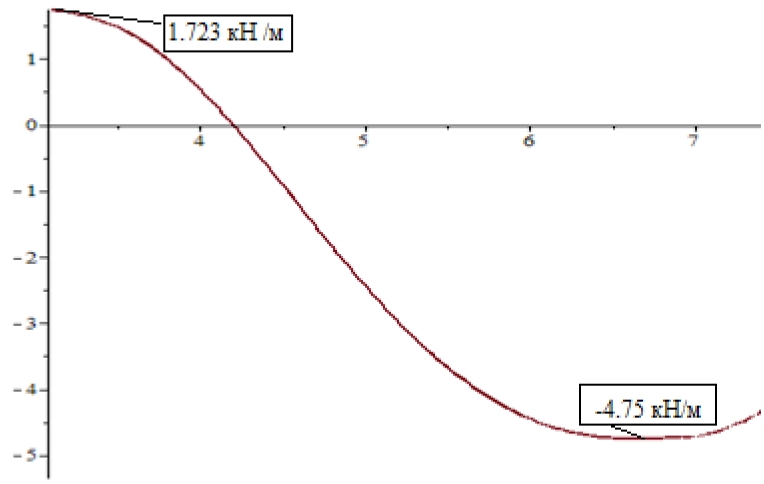


Рис.4.4.8. Сила N_u, кН/м

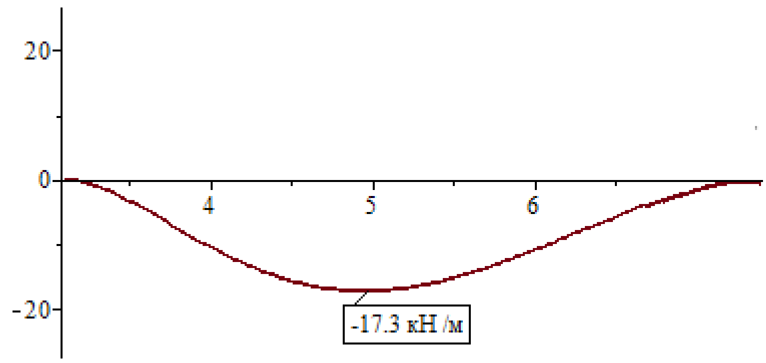


Рис.4.4.9. Сила N_v, кН/м

4.5. Выводы по главе 4

В заключение данной главы можно сделать вывод о том, что полуаналитический метод, предложенный в главе 2, в двух реализациях (программа для расчета пологих оболочек в системе координат (2.4.1), и программа для расчета непологих оболочек в системе координат (2.6.1), обладает достоверностью результатов, достаточной точностью и рядом преимуществ, как то: прозрачность физического смысла; удобство задания граничных условий и нагрузок; удобство интерпретации результатов; широкий диапазон границ применения. В данной работе рассматриваются примеры с простейшими граничными условиями, поскольку они требуют менее всего машинного времени, но с совершенствованием численных методов этого недостатка можно будет избежать, в настоящее время внедряются методы, использующие иной подход, нежели методы прогонки, требующие меньшего количества времени, они описаны, например, в работах [136,137].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги и результаты проведенной работы заключаются в следующем:

1. Предложена моментная теория расчета оболочек в форме косого геликоида в несопряженной неортогональной системе координат для пологих оболочек.

2. Предложена моментная теория расчета оболочек в форме косого геликоида в несопряженной неортогональной системе координат для непологих оболочек.

3. Апробирована методика В.Г. Рекача по расчету длинной пологой оболочки в форме косого геликоида, исправлена ошибка в корнях итогового уравнения, получено тривиальное решение.

4. Проведен анализ расчетных предпосылок, определены сомнительные положения и упрощения: использование произвольных функций согласно технической теории оболочек В.З. Власова вне границ их применения – в несопряженной системе координат; предположение о том, что кручение $\varkappa_{uv}= 0$, для постановки граничных условий.

6. Впервые произведен расчет пологой оболочки с учетом всех допущений метода В.Г. Рекача, исключая те, что признаны сомнительными, полуаналитическим методом – получено удовлетворительное решение, результаты которого совпадают с результатами, полученными по методу конечных элементов.

7. Произведен вывод уравнений, аналогичных уравнениям методики В.Г. Рекача, но без использования произвольных функций В.З. Власова – система уравнений не имеет прямого аналитического решения.

8. Разработаны компьютерные программы, в которых реализуются:

- пологая модель расчета исследуемой оболочки в несопряженных неортогональных координатах;

- непологая модель расчета исследуемой оболочки в несопряженных неортогональных координатах;

- пологая модель в ортогональной системе координат согласно допущению В.З. Власова.

9. Проведены численные эксперименты по определению границ пологой и непологой модели – установлена граница применимости пологой модели до 10^0 наклона образующей.

10. Впервые проведены численные эксперименты по изучению влияния на напряженно-деформированное состояние оболочки в форме косого геликоида двух параметров: изменения угла наклона образующих и шага винта.

11. Проведена оценка достоверности предложенного метода при помощи сравнения полученных результатов с результатами по методу конечных элементов и аналитическому методу для частного случая.

Все задачи, поставленные в работе, были решены.

Рекомендуется применять разработанную методику численно-аналитического расчета для предварительных расчетов конструкций, а также для сверки с результатами конечноэлементных расчетов реальных конструкций для их оценки и лучшего понимания их работы, для разбора некоторых «эталонных» случаев.

Перспектива дальнейших исследований видится в применении приведенных в работе численно-аналитических подходов к решению задач определения напряженно-деформированного состояния других малоизученных оболочек сложной геометрии при наименьшем количестве упрощений и огрублений расчетной модели с тем, чтобы в полной мере реализовать потенциал современных вычислительной техники и программирования в решении подобных задач.

Список литературы

1. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. - М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.-560 с.
2. Патент России № 2101560, МКИ6 F 03 D 5/00, 3/06. Шнековый ветроротор/ Смульский И.И., Мельников В.П., Кавун И.Н., опубл. 10.01.98, Бюл. № 1.
3. Панов Д.Ю. Расчет воздушного винта на прочность. – Тр. ЦАГИ. –1937. – Вып.288.
4. Taylor D.W. The speed and power of ships. – Ransdell Incorporated, Washington D.C., 1933. – 130 p.
5. Rösingh W.H. Hoogbelaste scheepsschroeven, spanningsberekeningen en sterkteberekening// Schip en Werf. – 1944. – № 11.
6. Biezeno G.G. De experimentele bepaling van de in een scheepsschroef optredente spanningen// De Ingenieur. – 1945. – № 57.
7. Romsom J.A. Sterkteberekening van scheepsschroeven// Schip en Werf. – 1951. – № 18.
8. Соломон Л.И. К расчету геликоидальных оболочек. =Дисс.К.т.н. – М.: МИСИ, 1953.
9. Соломон Л. И Одномерная задача для геликоидальной оболочки //ПММ. – 1954.-Т.18, №1.-С.43-54.
10. Работнов Ю.Н. Некоторые решения безмоментной теории оболочек // ПММ. – 1946.-Т10, №5-6. – С. 636-645.
11. Черных К.Я. Линейная теория оболочек. – Ч.2, Л.: ЛГУ, 1964.-395с.
12. Александров П.В., Немировский Ю.В. Исследование напряженного состояния армированных геликоидальных оболочек//Известия вузов. Строительство. – 1994.-№11 –с.48-55.
13. Cohen J.W. On stress calculations in helicoidal shells and propeller blades.- Delft, Holland,Walman, 1955. - 100 p.
14. Колтунов С.Я. К расчету нарпяженного состояния в конечных геликоидальных оболочках // Известия АН СССР, МТТ.- 1980.- №6. – С.149-152.

15.Александров П.В., Немировский Ю.В. Исследование напряженного состояния армированных геликоидальных оболочек // Известия вузов. Строительство.- 1994.- №11.- С.48-55.
16.Михлин С.С. Оценка погрешности в расчетах упругой оболочки как плоской пластинки// АН СССР. – ПММ. – 1952. – № 16. – С. 399-402.
17.Reissner E. Small rotationally symmetric deformations of shallow helicoidal shells// J. Appl. Mech. – 1955. – Vol. 22, № 1. – P. 31-34.
18.Рекач В.Г. Расчет пологих винтовых (геликоидальных) оболочек// Тр. МИСИ, 1957. – № 27. – С. 113-132.
19.O’Mathuna D. Rotationally symmetric deformations in helicoidal shells.- Ph.D. Thesis,MIT, April 1962.
20. O’Mathuna D. Rotationally symmetric deformations in helicoidal shells // J. of Math. and Physics.- 1963.-42, №2.-P.85-111.
21.Knabel J., Lewinski T. Selected equilibrium problem of thin elastic helicoidal shells // Arch. Civil Eng.-1999.-42(2).-P. 245-257.
22.Колтунов С.Я., Михайловский Е.И. Квазисимметричная деформация подкрепленной геликоидальной оболочки//Теория оболочек и плас¬тин: Тр. IX Всесоюзн. конференции по теории оболочек и пластин. – Л.: Су¬достроение, 1975. – С. 73-76.
23.Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
24.Knowles J.K., Reissner E. Torsion and extension of helicoidal shells// Quarterly of Applied Math. – 1960. – Vol. 17, № 4. – P. 409-422.
25. Knowles J.K., Reissner E. Note on stress strain relation for thin elastic shells// J. Math. Phys. – 1958. – Vol. 37. – P. 269-282.
26.Chen Chu. The effect of initial twist on the torsional rigidity of thin prismatical bars and tubular members// Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech., 1952. – P. 265-269.
27.Sanders J.L. Stresses and deformations in thin helicoidal shells. – SM Thesis, MIT Dept. of Math., Sept. 1950.

28. Sinclair R.G. Axial torsion and extension of helicoidal shells. – PhD Thesis, MIT, September, 1960.
29. Reissner E. On twisting and stretching of helicoidal shells// Proc. IUTAM Symposium on Shell Theory, Amsterdam (1959). – 1960. – P. 434-466.
30. Plička J. (1980), Výpočet sroubovícových konstrukci// Pozemni Stavby. – 1980. – № 4. – С. 171-174 (чешск.).
31. Шевелев Л.П., Корихин Н.В., Головин А.И. Состояние поля напряжений в геликоидальной оболочке//Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. – (2)17, – С. 25-38.
32. Дехтярь А.С. несущая способность геликоидальной оболочки//Строительная механика и расчет сооружеий. – 2013. – №6. – С.2-5.
33. Гавеля С.П., Шарапова Д.И. Об упругом равновесии геликоидальной оболочки// Киев. технол. ин-т легкой промышленности, Киев. – 1984, 29с., ил. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 5 окт.1984г., №1643 Ук-84Деп).
34. Weibel E. The trains and the energy in thin elastic shells of arbitrary shape. – Diss., Zurich, 1955.
35. Котельникова А.П. Расчет пологой геликоидальной оболочки, нагруженной изгибающим моментом// Известия вузов. Машиностроение. – 1978. – № 12. – С. 4-9.
36. Александров П.В., Немировский Ю.В. Напряженное состояние армированных геликоидальных оболочек// Известия вузов. Строительство и архитектура. –1991. – № 9. –С. 18-24.
37. Czaplinski K., Marcinkowski Z., Swiecicki W. An analysis of stress in the combined structure of a spiral stairway// 8th Cong. Mater. Fest., Budapest, 28 Sept.-1 Oct., 1982. Lectures. Vol.3, Budapest, 1982. – P. 1003-1007.
38. Неделчев В. Вита плочеста стълба, ставно подпряна в единия край// Строителство. – 1989. – 36, № 5. – С. 3-4 (болгарск.).
39. Биргер И.А. Пространственное напряженное состояние в лопатках с начальной закруткой // Тр. ЦИАМ. - 1982.-№996.-С.7-23.
40. Биргер И.А. Растяжение естественно закрученных стержней // Тр. ЦИАМ. -

№11.- 1951.

41. Биргер И.А. Расчет на прочность лопаток. – Оборонгиз, 1956.
42. Шорр Б.Ф. Колебания закрученных стержней // Изв. АН СССР, ОТН.= «Мех. И машиностроение», №3.-1961.
43. Шорр Б.Ф. Расчет на прочность естественно закрученных лопаток // Тр. ЦИАМ, №256.-1954.
44. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.- М.: «Наука», 1979.-575с.
45. Меерсон Б.М. Теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния винтообразной оболочки. – Уфим. авиац. ин-т, Уфа, 1988, 22с., ил. Библ.6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12.07.88., №5593-В88г.).
46. Simmonds James G. General helicoidal shells undergoing large, one-dimensional strains or large inextentional deformations// Int. J. Solids and Struct. – 1984. – Vol. 20, № 1. – P. 13-30.
47. Simmonds James G. Surfaces with metric and curvature tensors that depend on one coordinate only are general helicoids// Q. Appl. Math. – 1979. – Vol. 37. – P. 82-85.
48. Кривошапко С.Н., Абдельсалям Мухамед Али. К вопросу о применении метода малого параметра для расчета тонкой оболочки в форме длинного торса- геликоида// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвуз. сб. науч. трудов. – М.: МБК "Биоконтроль", 1994. – Вып. 4. – С. 3-11.
49. Сальман Абдалла А. аль-Духейсат. Аналитический и численный подходы к проблеме статического расчета тонкой винтовой оболочки с развертывающейся срединной поверхностью// Реконструкция зданий и сооружений. Усиление оснований и фундаментов: Межд. научно-практ. конф.- Пенза: ПГАСА, ПДЗ, 1999. – С.67-70.
50. Кривошапко С.Н., Абдельсалям М.А. Методы расчета винтовых оболочек в форме торсов-геликоидов// Современное строительство: Межд. научно-практ. конференция (19-20 ноября 1998г.). – Пенза: ПГАСА, ПДЗ, 1998. – С. 105-107.

51.Кривошапко С.Н. Применение асимптотического метода малого параметра для аналитического расчета тонких упругих торсов-геликоидов// Пространственные конструкции зданий и сооружений. – М.: ООО «Девятка Принт», 2004. – Вып. 9. – С. 36-44.

52.Изгибание и задачи расчета тонких упругих оболочек в форме прямого и развертывающегося геликоидов на распределенную нагрузку и осадку одной из криволинейных опор - Рынковская М.И, дисс. канд. тех наук, М.: 2013, - 217 с.

53.Mansfield E. On finite inextensional deformation of a helical strip// Int. J. Nonlinear Mech. – 1980. – Vol. 15, № 6. – P. 459-467.

54.Гибшман М.Е., Попов В.И. Проектирование транспортных сооружений. – М.: «Транспорт», 1988. – 392 с.

55.Кочетов В.И., Муратов С.Э. Расчет на прочность витка шнека// Хим. и нефтяное машиностроение. – 1979. – № 10. – С. 14-15.

56.Колтунов С.Я. О напряженном состоянии в подкрепленных геликоидальных оболочках// Сб.: «Интенсификация процессов и оборуд. пищевых производств". – Л.: ЛТИ, 1977, № 5.

57.Cohen J.W. The inadecuacy of the classical stress-strain relation for the right helicoidal shell// Proc. IUTAM. Sympos. Theory of thin elastic shells, Deft, 1959.- Amsterdam, 1960.- P.415-433.

58.. Нисимура Т., Камизоно К. Анализ спиральной оболочки методом Ритца// Межд. конференция по облегченным пространственным конструкциям покрытий для строительства в обычных и сейсмич. районах. – Алма-Ата, 1977.– М.: Стройиздат, 1977.– С.193-194.

59. Гюнтнер А.Ф., Инцкирвели Ц.Н. Некоторые граничные задачи для прямой геликоидальной оболочки// Исслед. по теории пластин и оболочек. – Тбилиси, 1977. – С. 37-55.

60.Векуа И.Н. Теория тонких оболочек переменой толщины // Тр. Тбилисского матем. ин-та. 1965.

61.Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н. Расчет упругих тонкостенных конструк-

ций сложной геометрии. – Казань: РАН, ИММ, 1993. – 208 с.
62. Якупов Н.М. Прикладные задачи механики упругих тонкостенных конструкций. – Казань: ИММ, 1994. – 124 с.
63. Корнишин М.С., Якупов Н.М. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии// Прикл. мех. – Киев, 1987. –Т.23, №3. – С.38-44.
64. Корнишин М.С., Якупов Н.М. Вариант МКЭ применительно к оболочкам сложной геометрии// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы 11 Всесоюзной конференции. – Новосибирск, 1990. – С. 124-130.
65. Трушин С.И., Сальман Аль-Духейсат. Применение вариационно-разностного метода к расчету пологой прямой геликоидальной оболочки// Вопросы прочности пространственных систем. – М.: РУДН, 1992. – С. 24-28.
66. Hirashima Masaharu, Iura Masashi. A geometrically nonlinear theory of right helicoidal shells// “Theor. and Appl. Mech., Vol.27. Proc. 27th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., Tokyo, 1977”, Tokyo, 1979. – P. 155-167.
67. Brož P. Bending of shallow shells// Acta techn. CSAV. – 1980, 25, № 1. – P. 50-62.
68. Ярошенко А.Р. Осесимметричная деформация винтовой оболочки с прямоугольным профилем// Динамика и прочность машин. – Харьков, 1971. – Вып. 12. – С. 3-9.
69. Залесский В.К. Двумерная безмоментная задача для оболочки в форме косого геликоида//Динамика и прочность машин.-Харьков, 1974. Вып. 20. – С. 88-93.
70. Баджория Г.Ч. Расчет длинного развертывающегося геликоида по моментной теории в перемещениях// Строительная механика и расчет сооружений.-1985.-№3.-С.22-24.
71. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. – М.: Изд-во УДН, 1988. – 177 с.

72. Кривошапко С.Н., М.К. Кумудини Джаявардена. Расчет тонких упругих оболочек в форме винтов Архимеда с равными углами наклонов их прямолинейных образующих// Проблемы математики в задачах физики и техники. – М.: МФТИ, 1992. – С. 96-103.
73. Кумудини Джаявардена. Решение задач расчета тонких упругих оболочек в форме развертывающихся геликоидов: Дис. к.т.н., М.: РУДН, 1992. – 183 с.
74. Косицын С.Б. Метод конечных элементов в перемещениях для расчета оболочек произвольной формы// Торсовые поверхности и оболочки: Справочник/ Под ред. С.Н. Кривошапко, М.: Изд-во УДН, 1991. – С.188-196.
75. Александров А.В., Косицын С.Б., Косицын А.С. Нетрадиционные модели конечных элементов высоких порядков// Теоретические основы строительства. – Warszawa 2.07.96-5.07.96, Москва: Изд-во АСВ, 1996. – С.26-30.
76. Кривошапко С.Н. Тонкие упругие винтообразные оболочки с развертывающейся срединной поверхностью// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – М.: Изд-во АСВ, 2000. – Вып.9. – С. 7-13.
77. Кривошапко С.Н. Результаты расчета пологого торса-геликоида на действие квазисимметричной распределенной нагрузки// Теоретические и эксперим. исследования прочности и жесткости элементов строит. конструкций. – М.: МГСУ, 2001. – С. 53-56.
78. Krivoshapko S.N. Stress-strain analysis of thin elastic open helicoidal shells// Shells in Architecture and Strength Analysis of Thin-Walled Civil Engineering and Machine-Building Constructions of Complex Forms: Proc. Int. Conf., June 4-8, 2001, Moscow, Russia. – Moscow: RPFU, 2001. – PP. 193-200.
79. Сорокина А.Г. Расчет формы деформированной срединной поверхности геликоидально симметричной оболочки открытого профиля при больших перемещениях на основе теории чистого изгибания // Известия высших заведений. Машиностроение. 2011. №11. С.8-13.
80. Shrivastava N.K. Effect of boundary restraints on curved spatial forms// Int. Symp. "Innov. Appl. Shells and Spat. Forms", Bangalore, Nov.21-25, 1988: Proc. Vol.1. – Rotterdam, 1989. – P. 217-226

81. Flegel R. Statische Grundlagen für Zweiwangen-Wendeltreppen mit kastenförmigen Tritten-Besondere Randbedingungen// Stahlbau, 1982. – 51, № 8. – S. 241-245.
82. *Fardis MichaelN., Skouteropoulou Anna-Maria O., Bousias Stathis N.* Stiffness matrix of free-standing helical stairs// J. Struct. Eng. (USA), 1987, 113, №1.– P.74-87.
83. Flegel R. Statische Grundlagen für Zweiwagen-Wendeltreppen mit trogförmigen Tritten// Der Stahlbau, 1980. – 49, № 2. – S. 58.
84. Flegel R. Statische Grundlagen für Zweiwagen-Wendeltreppen mit kastenförmigen Tritten, Ergänzungen// Der Stahlbau, 1981. – 50, № 2. – S. 54.
85. Holmes A.M.C. Analysis of helical beams under symmetrical loading// J. Struct. Div., ASCE. – 1957. – 83, № 6. – P. 1-37.
86. Scordelis A.C. Internal forces in uniformly loaded helicoidal girders// ACI J. – 1960. – 31, № 10. – P. 1013-1026.
87. Pocanschi A., Olariu I. Rampe elicoidale pe reazeme intermediare// Bul. sti. Inst. politehn. cluj., 1969, 12. – S. 345-353 (рум.).
88. Белкин А.Е., Нарская Н.Л., Пожалостин А.А. Деформации винтовой лопасти шнека при изгибе// Расчеты на прочность (Москва). – 1990. – № 31. – С. 3-11.
89. Нерви П.Л. Строить правильно. – М.: Госстройиздат, 1956. – 164 с.
90. Лестницы и лифты. – 1999, вып. 2. – 96 с.
91. Bangash M.Y.H., Bangash T. Staircases: Structural analysis and design. – Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1999. – 337 p.
92. Карташов А.И. Поверхности одинакового ската: Дисс. канд. техн. наук. – Л.: ЛИИЖТ, 1954.
93. Нгуен Чам. Расчет криволинейных пролетных строений геликоидального очертания// Исследование автодорожн. и горных мостов и тоннелей. – М., 1982. – С. 33-38.
94. Новые виды свай Л.Н. Панасюк, В.Ф. Акопян, А.Ф. Акопян, Хо Чантха / Электронный журнал Инженерный вестник Дона

http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/437 №2 2011

95. Основания на винтовых сваях. Комиссарова О.Ю., Емельянов С.В.// Достижения вузовской науки, изд-во ООО «центр развития научного сотрудничества», Новосибирск, 2014 г, №10, стр. 136-139
96. Арыкин И.Г., Бейлин И.Я., Некрасов Е.М. Механизированное заглубление в грунт винтовых якорей. – М.: ЦНИИлесосплава, 1965. – 30 с.
97. Бейлин И.Я. Винтовые якорные и анкерные опоры (Обзор). – М.: ВНИИПИЭИлеспром, 1972. – 34 с.
98. Турышев В.А. Винтовые конвейеры. – Красноярск: КПИ, 1970. – 20 с.
99. Roberts A.W., Manjunath K.S., Mcbride W. The mechanics of screw feeder performance for bulk solids flow control// Nat. Conf. Publ., Inst. Eng., Austral., 1992. – №92/7. –P. 333-338.
100. Можайское экспериментально-механическое предприятие. Каталог. – М.: Союзгидроспецстрой, 1990. – 96 с.
101. Василишин Я.В. К вопросу вооружения торцевой поверхности лопасти бурового долота// Прикладная геометрия и инженерная графика. – Киев, 1985. – Вып. 40. – С. 38-41.
102. Bottcher Siegfried, Stahl Holger. Abwicklung gerader Wendelflächen von Schneckenförderern. Tail II// F+H: Fordern und Heben. – 1994. – 44, №11. – S. 880-883.
103. Dabrowski Otton, Sapian Czeslaw. Loading of a central screw chute in a coal storage container// Pr. nauk. Inst. beed. pwrocl. – 1987, № 51. – P. 125-130.
104. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. – М.: Машиностроение, 1968. – 371с.
105. Рябинов Д.Л. Развертывание геликоида на основе изгибания поверхностей// Труды Мос-ковск. сем. по начертат. геометрии и инж. графике. – М., 1963. – Вып. 2. – С. 212-216.
106. Люкшин В.С. Теория винтовых линий и поверхностей. – М.: Моск. станкоинструментальный ин-т, 1963. – 217 с.

107. Можаев С.С. Аналитическая теория спирального сверла. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

108. Lysholm A. Rotationskompressor. – Sweden, 1934, Patent N 87610 (kl.27 c3) handed 13.08.1936.

109. Андреев П.А., Шнепп В.Б., Шварц А.И., Бобриков Н.И., Галеев А.М. Состояние и перспективы развития винтового компрессоростроения// Винтовые компрессоры в энергомашиностроении: Тр. ЦКТИ. – Л., 1975. – Вып. 127. – С. 3-7.

110. Винтовые компрессорные машины: Аннотированный сб. описаний иностранных изобретений. – Л.: ЛенНИИХимМаш, 1966. – 32 с.

111. Винтовые компрессорные машины: Аннотированный сб. описаний иностранных изобретений. – Л.: ЛенНИИХимМаш, 1968. – 60 с.

112. Teraoka Ats. Analisis del husillo de alta plastificacion para el moldeo por inyeccion// Rev. plast. mod. – 1995. – 46, № 463. – P. 55-64

113. Патент России №2148185 МКИ6 F 03 D 5/00, 3/06. Ветроротор для ветряка/Антонов Ю.М., ВНИИЭСХ, опубл. 1998.12.10

114. Патент России №2223414 МКИ6 F 03 D 5/00, 3/06.Ротор-спираль/Морозов В.А., ЗАО «Подольскинновация» опубл. 10.02.2004

115. Патент России № 2101560, МКИ6 F 03 D 5/00, 3/06.Шнековый ветроротор/ Смульский И.И., Мельников В.П., Кавун И.Н., опубл. 10.01.98, Бюл. № 1.

116. Смульский И.И. Шнековые ветродвигатели и их особенности // Инженерно-физический журнал. - 2001 г.- Т. 74, №5, с.187-195.

117. Механика упругих оболочек – В.А.Еремеев, Л.М.Зубов. изд-во «наука», 2008 -288 с.

118. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: ГТТИ.: 1953, 544 с.

119. Кривошапко С.Н. Геометрические исследования и напряженно-деформированное состояние тонких упругих торсовых оболочек – канд. Докт. Техн. Наук, -Москва, 1995, 248 с.

120. Иванов, В.Н., Кривошапко, С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы М.:РУДН, 2010. -542 стр. с илл.

121. Дьяконов, В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах, М.: ДМК Пресс, 2011. -800 с.

122. Бидерман, В.Л. Механика тонкостенных конструкций, Статика. М.: Машиностроение, 1977, (Библиотека расчетчика), - 488 стр. с илл.

123. Рекач, В.Н., Кривошапко, С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии.- М.: Изд-во УДН, 1988.-177 с.

124. Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике М.: ГТТИ, 1949 -784 с.

125. Dubois F. Uber die Festigkeit der Kegelschale. Dokt. Diss? Zurich? 1917

126. Флюгге В. Статика и динамика оболочек . –М., 1961

127. Рекач, В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости: Учебное пособие. Изд 3-е, - М.: Книжный дом Либроком, 2010. -288 стр.

128. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 392 с.

129. Перельмутер, А.В. , Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа//Издание второе Переработанное и дополненное-Киев Издательство «Сталь» 2002

130. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных конструкций 2000, М .: АСВ - 152 стр

131. Concepts and Applications of Finite Element Analysis by Robert J. Witt, Robert D. Cook, Michael E. Plesha and David S. Malkus (2001, Hardcover, Revised)

132. Kohnke P. (ed.) Ansys: Theory Reference, release 5.6 Ansys, inc., 1999. - 1286 p.

133. Ansys в примерах и задачах Басов К.А, Под общ. ред. Д. Г. Красков-

ского. — М: КомпьютерПресс, 2002. —224 с: ил.

134. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство – М.: Едиториал УРСС, 2003,272 стр.

135. Кривошапко С.Н. Геликоидальные оболочки // Проблемы теории и практики в инженерных исследованиях. М.: Изд-во АСВ, 1998. - С.132-136.

136. Виноградов Ю.И., Виноградов А.Ю. Решение жестких краевых задач строительной механики (расчет оболочек составных и со шпангоутами) методом Виноградовых (без ортонормирования) // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1-1.;

137. Виноградов Ю.И., Виноградов А.Ю. Простейший метод решения жёстких краевых задач // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 12–12. – С. 2569-2574;

138. Sigrid Adriaenssens, Philippe Block, Diederick Veennendaal, Chris Williams –Shell Structures for Arckitechture –Form finding and Optimization. Routledge -2014, 323 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Алгоритм решения задачи определения НДС пологой оболочки в форме косого геликоида в программном комплексе Maple 17 – фрагменты кода с пояснениями

> *В алгоритме используются обозначения, более удобные для записи программного кода :*

E0 — *модуль Юнга,*
σ - *коэффициент Пуассона,*
φ — *угол наклона образующей к горизонтали,*
u1, u2 - *координаты вдоль оси и криволинейных краев,*
c — *параметр, связанный с шагом винта,*
h — *толщина оболочки,*
p — *нагрузка,*
C1, C2, C3 — *соответствуют константам* C_i (*см. формулу*)
x, y, z — *компоненты нагрузки,*
Mu, Mv, Mvu, Muv, - *моменты, аналогичны* M_u, M_v, M_{uv}, M_{vu},
Nu, *Nv, Su, Sv,* - *усилия, аналогичны* N_u, N_v, S_u, S_v,

> *uu(u), uv(u), uz(u)* - *перемещения, аналогичны* u_u, u_v, u_z,

> *Задание исходных параметров* :

$$u1 := 2 : u2 := 4 : c := 0.01 : \varphi := \frac{3\cdot 3.14}{180} : h := 0.12 : E0 := 32500 : \sigma := 0.17 : p := 0.01 :$$

Задание констант :

$$C1 := \frac{E0\cdot h}{\left(1-\sigma^2\right)} : C2 := \frac{E0\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\sigma^2\right)} : C3 := \frac{E0\cdot h^3}{12\cdot(1+\sigma)} :$$

Задание нагрузки:

$$z := p\cdot\cos(\varphi) : y := 0 : x := p\cdot\sin(\varphi) :$$

Коэффициенты итоговой системы уравнений:

$$K10 := \frac{1}{2}\left(\left(-(\cos(\varphi)-1)\left(\left(\left(\left(\sigma^2-2\sigma-3\right)c^6+4\left(\sigma^2+\frac{5}{2}\sigma+\frac{7}{2}\right)u^2c^4+4\left(\sigma^2+\frac{7}{2}\sigma-\frac{3}{2}\right)u^4c^2+u^6(\sigma+1)^2\right)\cos(\varphi)^4+c^2\left(\left(\sigma^2+4\sigma+11\right)c^4+u^2\left(\sigma^2-4\sigma-29\right)c^2-8u^4(\sigma-1)\right)\cos(\varphi)^2-8c^6+16c^4u^2\right)c\left(\cos(\varphi)+1\right)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{3/2}+\sin(\varphi)\left(\left((\sigma+5)c^6+4u^2(\sigma-2)c^4+4\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u^4c^2+u^6(\sigma-1)\right)u^2\cos(\varphi)^6+4c^2\left(c^6+\frac{1}{2}u^2(\sigma-10)c^4+\frac{1}{2}u^4(\sigma+5)c^2-\frac{1}{2}u^6\right)\cos(\varphi)^4+c^4\left((\sigma-9)c^4+u^2(\sigma+19)c^2-8u^4\right)\cos(\varphi)^2+4c^8-8u^2c^6\right)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)(\sigma+1)\right)c\right)\Big/\left(\left(c^2+u^2\right)^3\cos(\varphi)^2\left(\left(\left((\sigma+1)c^2+u^2(\sigma-1)\right)\cos(\varphi)^2-2c^2\right)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{5/2}+c\sin(\varphi)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^3(\sigma+1)\right)\right) :$$

$$K11 := -\left(u\left(\left(\left((\sigma+1)c^2+u^2(\sigma-1)\right)\left(c^2+u^2\right)\cos(\varphi)^4+\left(-c\sin(\varphi)u^2\sigma-2c^4-2c^2u^2\right)\cos(\varphi)^2-c^3\sin(\varphi)\sigma\right)(\sigma+1)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{3/2}+\left(\left(c(\sigma+1)^2\left(c^2+u^2\right)\sin(\varphi)-\left((\sigma+1)c^2+u^2(\sigma-1)\right)\sigma\right)\cos(\varphi)^2+2c^2\sigma\right)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^2\right)\right)\Big/\left(\left(c^2+u^2\right)\left(\left(\left((\sigma+1)c^2+u^2(\sigma-1)\right)\cos(\varphi)^2-2c^2\right)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{5/2}+c\sin(\varphi)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^3(\sigma+1)\right)\right) :$$

>

$$
\begin{aligned}
K12 := {}& -\Big(\frac{1}{2} c \Big(-5 c \Big((\sigma+1)^2 c^6 + \frac{14}{5} (\sigma+1) \Big(\sigma+\frac{5}{7}\Big) u^2 c^4 + \frac{12}{5} (\sigma-1) u^4 \Big(\sigma \\
& + \frac{3}{2}\Big) c^2 + \frac{3}{5} \Big(\sigma^2 - \frac{8}{3}\sigma + \frac{1}{3}\Big) u^6\Big) u^2 \cos(\varphi)^8 + \Big(2 \big((\sigma^2-1) c^4 + 2 u^2 \sigma (\sigma \\
& - 1) c^2 + u^4 \sigma (\sigma-3)\big) u^2 (c^2+u^2) \sin(\varphi) + c \Big((\sigma+1)^2 c^8 + 10 (\sigma+1) u^2 \Big(\sigma \\
& + \frac{3}{5}\Big) c^6 + 25 u^4 \Big(\sigma^2 + \frac{52}{25}\sigma + \frac{63}{25}\Big) c^4 + 21 u^6 \Big(\sigma^2 + \frac{4}{3}\sigma - \frac{37}{21}\Big) c^2 + 5 \Big(\sigma^2 \\
& - 2\sigma + \frac{1}{5}\Big) u^8\Big)\Big) \cos(\varphi)^6 - 8 c^2 \Big(\frac{1}{2} u^2 \big((\sigma-1) c^2 + 2 u^2 \sigma\big) (c^2+u^2) \sin(\varphi) \\
& + \Big((\sigma+1) c^6 - \frac{1}{4} u^2 (\sigma^2 - 5\sigma + 12) c^4 - \frac{1}{8} u^4 (\sigma^2 - 32\sigma - 93) c^2 + \frac{1}{8} u^6 (\sigma^2 \\
& + 30\sigma - 19)\Big) c\Big) \cos(\varphi)^4 + c^4 \big(-2 u^2 (c^2+u^2) (\sigma+1) \sin(\varphi) + c \big((\sigma^2 + 4\sigma \\
& + 15) c^4 + u^2 (\sigma^2 - 4\sigma - 41) c^2 - 8 u^4 (\sigma-5)\big)\big) \cos(\varphi)^2 - 8 c^9 + 16 c^7 u^2\Big) \\
& \sqrt{u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2} + \Big(c \Big((\sigma+1)^2 c^8 + \frac{5}{2} (\sigma+1) \Big(\sigma - \frac{3}{5}\Big) u^2 c^6 + 3 \Big(\sigma^2 - 3\sigma \\
& - \frac{8}{3}\Big) u^4 c^4 + 2 u^6 (\sigma-1)^2 c^2 + \frac{1}{2} u^8 (\sigma-1) (\sigma-3)\Big) \sin(\varphi) - u^2 \big((\sigma^2-1) c^4 \\
& + u^2 \sigma (\sigma+1) c^2 + u^4 (\sigma-1)\big) (c^2+u^2)\Big) u^2 \cos(\varphi)^8 - \frac{1}{2} c^2 u^2 \Big(c \Big((\sigma^2 + 10\sigma \\
& + 9) c^6 - 4 u^2 (\sigma^2 - 9\sigma - 6) c^4 - 8 u^4 (\sigma^2 + 2\sigma + 5) c^2 - 3 u^6 \Big(\sigma^2 - 2\sigma + \frac{7}{3}\Big)\Big) \\
& \sin(\varphi) + 2 \big((\sigma^2-1) c^4 + 2 u^2 (\sigma+1) c^2 - u^4 (\sigma^2 - 2\sigma + 3)\big) (c^2+u^2)\Big) \cos(\varphi)^6 \\
& + c^4 \Big(c \Big((\sigma+1)^2 c^6 + \frac{11}{2} \Big(\sigma^2 - \frac{3}{11}\Big) u^2 c^4 + \frac{13}{2} \Big(\sigma^2 + \frac{54}{13}\sigma + \frac{57}{13}\Big) u^4 c^2 \\
& + 2 \Big(\sigma^2 - \frac{7}{2}\sigma - \frac{5}{2}\Big) u^6\Big) \sin(\varphi) + \big((\sigma^2 - \sigma - 2) c^2 + u^2 (\sigma^2 - \sigma + 4)\big) u^2 (c^2 \\
& + u^2)\Big) \cos(\varphi)^4 + \frac{1}{2} \big((\sigma+1) c \big((\sigma-7) c^4 + u^2 (\sigma+17) c^2 - 24 u^4\big) \sin(\varphi) \\
& + 4 c^2 u^2 + 4 u^4\big) c^6 \cos(\varphi)^2 + 2 c^9 \sin(\varphi) (c^2 - 2u^2) (\sigma+1)\Big) \Big/ \big((c^2 \\
& + u^2)^3 \cos(\varphi)^2 \big(\big(((\sigma+1) c^2 + u^2 (\sigma-1)) \cos(\varphi)^2 - 2 c^2\big) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^{5/2} \\
& + c \sin(\varphi) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^3 (\sigma+1)\big)\big):
\end{aligned}
$$

>

$$
\begin{aligned}
K13 := {}& \Big(c \Big(-2 \Big(\Big(-\frac{1}{4}\sigma + \frac{1}{4}\Big) \sin(2\varphi) + c \cos(\varphi) (\cos(\varphi)-1) (\cos(\varphi)+1) (\sigma \\
& + 1)\Big) \big(\big(((\sigma+1) c^2 + u^2 (\sigma-1)) \cos(\varphi)^2 - 2 c^2\big) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^{3/2} \\
& + \sin(\varphi) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2) \Big(\frac{1}{2} c (\sigma-1) (\sigma+1) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2) \sin(2\varphi) \\
& + \cos(\varphi) \big(\big((\sigma+1)^2 c^4 + u^2 (\sigma+1) (\sigma-3) c^2 + u^4 (\sigma-1)^2\big) \cos(\varphi)^4 - \big(c^2 (\sigma^2 \\
& + 6\sigma + 5) - u^2 (\sigma^2 - 2\sigma + 5)\big) c^2 \cos(\varphi)^2 + c^4 (\sigma^2 + 2\sigma + 5)\big)\big)\big) u\Big) \Big/ \big(\cos(\varphi) (c^2 \\
& + u^2) \big(\big(((\sigma+1) c^2 + u^2 (\sigma-1)) \cos(\varphi)^2 - 2 c^2\big) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^{5/2} \\
& + c \sin(\varphi) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^3 (\sigma+1)\big)\big):
\end{aligned}
$$

$$K14 := -\Big(4 \Big(c \Big(-\frac{1}{4} u^2 c \cos(\varphi) (\cos(\varphi) - 1) (\cos(\varphi) + 1) (\sigma + 1)^2 (c^2$$
$$+ u^2) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2) \sin(2 \varphi) - \frac{1}{2} u^2 (((\sigma - 1) c^2 + u^2 (\sigma + 1)) c ((\sigma + 1) c^2$$
$$+ u^2 (\sigma - 1)) \sin(\varphi) + (-2 \sigma^2 - 2 \sigma) c^5 - 4 c^3 u^2 \sigma^2 - 2 u^2 (\sigma + 1) c^2 - 2 u^4 \sigma (\sigma$$
$$- 1) c - u^4 (\sigma + 1)) \cos(\varphi)^6 + \Big(c \Big((\sigma + 1) c^6 + \frac{1}{2} u^2 (\sigma + 5) (\sigma - 1) c^4 + u^4 (\sigma^2$$
$$+ \sigma + 2) c^2 + \Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sigma^2\Big) u^6\Big) \sin(\varphi) + (\sigma^2 + \sigma) c^7 + 2 u^2 \sigma (\sigma - 1) c^5 + u^2 (\sigma$$
$$+ 1) c^4 + u^4 \sigma (\sigma - 3) c^3 - u^4 (\sigma + 1) c^2 - \frac{1}{2} u^6 (\sigma + 1)\Big) \cos(\varphi)^4 - \Big(((\sigma + 3) c^4$$
$$+ 2 u^2 (\sigma - 1) c^2 + u^4 (\sigma + 1)) \sin(\varphi) + 2 c \Big(c^3 \sigma + c u^2 \sigma + \frac{3}{4} u^2 (\sigma + 1)\Big)\Big)$$
$$c^3 \cos(\varphi)^2 + 2 c^4 \Big(c^3 \sin(\varphi) + \frac{1}{4} u^2 (\sigma + 1)\Big)\Big) \sqrt{u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2} + (u^2 \cos(\varphi)^2$$
$$+ c^2) \Big(\frac{1}{4} \cos(\varphi) (\sigma + 1) c (((\sigma + 1) c^2 + u^2 (\sigma - 1)) \cos(\varphi)^2 - 2 c^2) \sin(\varphi) u^2 (c^2$$
$$+ u^2) \sin(2 \varphi) + \frac{1}{2} ((\sigma - 1) c^2 + u^2 (\sigma + 1)) (\sigma + 1) c^3 u^2 \cos(\varphi)^6 + \Big(\Big((\sigma^2$$
$$+ \sigma) c^5 + (-\sigma - 1) c^4 + u^2 \sigma (\sigma + 1) c^3 - \frac{3}{2} \Big(\sigma - \frac{1}{3}\Big) u^2 c^2 - \frac{1}{2} u^4 (\sigma - 1)\Big)$$
$$u^2 \sin(\varphi) - (\sigma + 1) c^3 (c^4 + u^2 (\sigma - 1) c^2 + u^4 (\sigma + 1))\Big) \cos(\varphi)^4 + \Big(\Big((\sigma^2 + \sigma) c^5$$
$$+ u^2 \sigma (\sigma + 1) c^3 + \frac{1}{2} u^2 (\sigma + 5) c^2 + \frac{1}{2} u^4 (\sigma + 1)\Big) \sin(\varphi) + 2 \Big(c^4 + \frac{1}{4} u^2 (\sigma$$
$$- 1) c^2 + \frac{1}{4} u^4 (\sigma + 1)\Big) (\sigma + 1) c\Big) c^2 \cos(\varphi)^2 - c^4 \sin(\varphi) u^2 - c^7 (\sigma + 1)\Big)\Big) u\Big) \Big/$$
$$\Big(\cos(\varphi) (c^2 + u^2)^{5/2} ((((\sigma + 1) c^2 + u^2 (\sigma - 1)) \cos(\varphi)^2 - 2 c^2) (u^2 \cos(\varphi)^2$$
$$+ c^2)^{5/2} + c \sin(\varphi) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^3 (\sigma + 1))\Big) :$$

$$K15 := -(2 (((c^2 \sin(\varphi) + \sigma (c^2 + u^2)) \cos(\varphi)^2 - c^2 \sin(\varphi)) ((((\sigma + 1) c^2 + u^2 (\sigma$$
$$- 1)) \cos(\varphi)^2 - 2 c^2) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^{3/2} + c (\sigma + 1) (-\cos(\varphi)^4 c^2 + (\sigma (c^2$$
$$+ u^2) \sin(\varphi) + 2 c^2) \cos(\varphi)^2 - c^2) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^2) u^2) \Big/ ((c^2 + u^2)^{3/2}$$
$$\cos(\varphi) ((((\sigma + 1) c^2 + u^2 (\sigma - 1)) \cos(\varphi)^2 - 2 c^2) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^{5/2}$$
$$+ c \sin(\varphi) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^3 (\sigma + 1))) :$$

> $$K1X := \frac{1}{C1} \cdot (2 ((((\sigma + 1) c^2 + u^2 (\sigma - 1)) \cos(\varphi)^2 - 2 c^2) \sqrt{u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2}$$
$$+ c \sin(\varphi) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2) (\sigma + 1)) (c^2 + u^2)^6 (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^3 \cos(\varphi)^4) :$$

>

$$K30 := -((\cos(\varphi)^2 ((2 c^2 u^2 + u^4) \cos(\varphi)^2 + c^4) (\sigma + 1) (c^2 + u^2) \sqrt{u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2}$$
$$+ (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2) \sin(\varphi) (((\sigma - 3) c^2 + u^2 (\sigma + 9)) \cos(\varphi)^2 + 4 c^2 - 8 u^2) c^3)$$
$$(u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^2) \Big/ ((c^2 + u^2)^3 \cdot \cos(\varphi)^2 ((((\sigma + 1) c^2 + u^2 (\sigma - 1)) \cos(\varphi)^2$$
$$- 2 c^2) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^{5/2} + c \sin(\varphi) (u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2)^3 (\sigma + 1))) :$$

$$\begin{aligned}
K31 &:= ((u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^2\cdot u((-(c^2+u^2)\,(\sigma+1)\cos(\varphi)^2 \\
&\quad -2\,c\sin(\varphi)\,\sigma)\sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2}+(((\sigma+1)\,c^2+u^2\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^2 \\
&\quad -2\,c^2)\sin(\varphi)\,c))\Big/((c^2+u^2)\cdot((((\sigma+1)\,c^2+u^2\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^2 \\
&\quad -2\,c^2)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{5/2}+c\sin(\varphi)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^3\,(\sigma+1))):
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K32 &:= (2\cdot(\frac{1}{2}\,(c^2+u^2)\cos(\varphi)^2(-2\,u^2((\sigma+1)\,c^6+\frac{3}{2}\,u^2\,(\sigma+1)\,c^4-\frac{1}{2}\,u^4\,(\sigma \\
&\quad -1)\,c^2-\frac{1}{2}\,u^6\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^6+c(-2\sin(\varphi)\,u^6+c((\sigma+1)\,c^6+5\,u^2(\sigma \\
&\quad +\frac{3}{5})\,c^4+10\,u^4(\sigma+\frac{1}{5})\,c^2+3\,u^6\,(\sigma-1)))\cos(\varphi)^4-c^3\,(4\sin(\varphi)\,u^4+c\,((\sigma \\
&\quad +3)\,c^4-u^2\,(\sigma-5)\,c^2+u^4\,(\sigma+5)))\cos(\varphi)^2+c^5\,(-2\sin(\varphi)\,u^2+c^3\,(\sigma+1))) \\
&\quad \sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2}+(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,c^2(-u^2(c((\sigma+1)\,c^4+\frac{3}{2}\,u^2\,(\sigma+3)\,c^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\,u^4\,(\sigma-5))\sin(\varphi)+(c^2+u^2)^2\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^6+(c((\sigma+1)\,c^6+5\,u^2(\sigma \\
&\quad -\frac{1}{5})\,c^4+6(\sigma+\frac{7}{3})\,u^4\,c^2+2\,u^6\,(\sigma-1))\sin(\varphi)+u^2\,(c^2+u^2)^2\,(\sigma-1)) \\
&\quad \cos(\varphi)^4+\frac{1}{2}\,c^3\sin(\varphi)\,((\sigma-5)\,c^4+u^2\,(\sigma+15)\,c^2-16\,u^4)\cos(\varphi)^2 \\
&\quad +2\,c^5\sin(\varphi)\,(c^2-2\,u^2))))\Big/((c^2+u^2)^3\cdot\cos(\varphi)^2((((\sigma+1)\,c^2+u^2\,(\sigma \\
&\quad -1))\cos(\varphi)^2-2\,c^2)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{5/2}+c\sin(\varphi)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^3\,(\sigma+1))) \\
&\quad :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K33 &:= (u(2(((\sigma+1)\,c^4+\frac{1}{2}\,u^2\,(\sigma+1)\,c^2-\frac{1}{2}\,u^4\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^4-\frac{3}{2}\,c^2((\sigma \\
&\quad +1)\,c^2+u^2(\sigma-\frac{1}{3})))\cos(\varphi)^2+c^4)\cos(\varphi)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{3/2} \\
&\quad +(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^2\,c^2\,((-\sigma+1)\sin(2\,\varphi)+c\cos(\varphi)\,(\cos(\varphi)-1)\,(\cos(\varphi)+1)\,(\sigma \\
&\quad +1))\sin(\varphi)))\Big/((c^2+u^2)\cos(\varphi)\cdot((((\sigma+1)\,c^2+u^2\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^2 \\
&\quad -2\,c^2)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{5/2}+c\sin(\varphi)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^3\,(\sigma+1))):
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K34 &:= -(4((-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\,u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,(\sigma+1)\,(c^2+u^2)^2\cos(\varphi)\sin(2\,\varphi) \\
&\quad -2\,c\,u^2\,(\cos(\varphi)+1)\,(\cos(\varphi)-1)((c^2+\frac{1}{2}\,u^2)\cos(\varphi)^2-\frac{1}{2}\,c^2))\,(u^2\cos(\varphi)^2 \\
&\quad +c^2)^{3/2}+(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,(\cos(\varphi)-1)\,c^3\,(\cos(\varphi)+1)\,(-2\cos(\varphi)^4\,u^4+((\sigma \\
&\quad +1)\,c^4+2\,u^2\,(\sigma-1)\,c^2+u^4\,(\sigma+1))\cos(\varphi)^2-2\,c^4))\cdot u)\Big/((c^2+u^2)^{5/2}\cos(\varphi) \\
&\quad \cdot((((\sigma+1)\,c^2+u^2\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^2-2\,c^2)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{5/2} \\
&\quad +c\sin(\varphi)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^3\,(\sigma+1))):
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K35 &:= -(2(-\frac{1}{2}\sin(2\,\varphi)\cos(\varphi)\,(c^2+u^2)\,(\sigma+1)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{5/2}+(\cos(\varphi) \\
&\quad -1)\,c\,(\cos(\varphi)+1)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^2\,(((\sigma+1)\,c^2+u^2\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^2-2\,c^2)) \\
&\quad u^2)\Big/(\cos(\varphi)\,(c^2+u^2)^{3/2}\cdot((((\sigma+1)\,c^2+u^2\,(\sigma-1))\cos(\varphi)^2 \\
&\quad -2\,c^2)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{5/2}+c\sin(\varphi)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^3\,(\sigma+1))):
\end{aligned}$$

> $K3Y := -\left(2\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{5/2}\cos(\varphi)^2\left(c^2+u^2\right)\right)\Big/\left(C1\cdot\left(\left(\left((\sigma+1)c^2+u^2(\sigma-1)\right)\cos(\varphi)^2-2c^2\right)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{5/2}+c\sin(\varphi)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^3(\sigma+1)\right)\right)$
:

>

$$K70 := -\frac{\cos(\varphi)^2\,C1\sin(2\varphi)\,u^3}{\sqrt{c^2+u^2}\;C2\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^2}:$$

$$K71 := -\frac{\sqrt{c^2+u^2}\;\cos(\varphi)^2\,C1\sin(2\varphi)\,u^2\,\sigma}{C2\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^2}:$$

$$K72 := \frac{\sqrt{c^2+u^2}\;\cos(\varphi)^4\,C1\sin(\varphi)\sin(2\varphi)\,u^3\,(\sigma-1)\,c}{\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{7/2}C2}:$$

$$K73 := \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{c^2+u^2}\;\cos(\varphi)\,C1\,(\cos(2\varphi)-1)\,(\cos(2\varphi)+1)\,u^2\,(\sigma-1)\,c}{\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{5/2}C2}:$$

$$K74 := \frac{1}{\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^5\left(c^2+u^2\right)^3C2}\Bigg(\Bigg(4\sin(\varphi)\cos(\varphi)\Bigg(-\Bigg(\left(C1\,u^2+C3\right)c^6 + \frac{5}{2}\left(C1\,u^2-\frac{9}{5}C3\right)u^2c^4+\left(2\,C1\,u^6-2\,C3\,u^4\right)c^2+\frac{1}{2}u^8\,C1\Bigg)u^6\cos(\varphi)^6 - 3u^2c^2\Bigg(c^8\,C3+\frac{2}{3}u^2\left(C1\,u^2+8\,C3\right)c^6+\frac{3}{2}\left(C1\,u^2+\frac{17}{9}C3\right)u^4c^4+u^6\left(C1\,u^2+2\,C3\right)c^2+\frac{1}{6}u^{10}\,C1\Bigg)\cos(\varphi)^4+c^4\Bigg(c^8\,C3+\left(-C1\,u^4-3\,C3\,u^2\right)c^6-\frac{3}{2}u^4\left(C1\,u^2-\frac{1}{3}C3\right)c^4-6c^2u^6\,C3+\frac{1}{2}u^{10}\,C1\Bigg)\cos(\varphi)^2+\frac{1}{2}\left(\left(C1\,u^2+3\,C3\right)c^4+\left(2\,C1\,u^4-4\,C3\,u^2\right)c^2+C1\,u^6\right)u^2c^6\Bigg)\sin(2\varphi)-2\left(c^2+u^2\right)\cos(\varphi)^2\Bigg(-3\Bigg(c^6\,C3+\frac{10}{3}c^4u^2\,C3+\frac{1}{3}u^4\left((\sigma-1)\,C2+12\,C3\right)c^2-\frac{4}{3}u^6\,C2\,(\sigma-1)\Bigg)u^2\cos(\varphi)^6+\Bigg(c^6\,C3+2c^4u^2\,C3-3u^4\left((\sigma-1)\,C2+\frac{2}{3}C3\right)c^2+12u^6\left((\sigma-1)\,C2+C3\right)\Bigg)c^2\cos(\varphi)^4-3\,(c-2u)\,(c+2u)\,u^2\left((\sigma-1)\,C2+C3\right)c^4\cos(\varphi)^2-(c-2u)\,(c+2u)\left((\sigma-1)\,C2+C3\right)c^6\Bigg)c^2\Bigg)\Bigg):$$

$$K75 := \frac{1}{\left(u^{2}\cos(\varphi)^{2}+c^{2}\right)^{5}\left(c^{2}+u^{2}\right)^{3} C2}\Big(\Big(-4\left(u^{2}\cos(\varphi)^{2}+c^{2}\right) u\Big(\frac{1}{2} u^{4}\Big(\Big(\Big((\sigma+1)\, C2$$

$$+\frac{7}{2} C3\Big) c^{6}-\frac{1}{2} u^{2}\left((\sigma+21)\, C2-4\, C3\right) c^{4}-\frac{3}{2} u^{4}\left((\sigma-2)\, C2+C3\right) c^{2}$$

$$+\frac{1}{2} u^{6}\, C2\Big)\cos(\varphi)^{8}+c^{2}\Big(c^{8}\, C3+\Big((\sigma+1)\, C2+\frac{31}{4} C3\Big) u^{2} c^{6}-3 u^{4}\Big(\Big(\sigma$$

$$+\frac{9}{2}\Big) C2-\frac{23}{12} C3\Big) c^{4}-\frac{21}{4}\Big(\Big(\sigma-\frac{55}{21}\Big) C2+\frac{1}{21} C3\Big) u^{6} c^{2}-\frac{5}{4}\Big(\Big(\sigma-\frac{1}{5}\Big) C2$$

$$-\frac{3}{5} C3\Big) u^{8}\Big)\cos(\varphi)^{6}+\frac{1}{2}\Big(\left((\sigma+1)\, C2+4\, C3\right) c^{6}-\frac{21}{2}\Big(\Big(\sigma+\frac{15}{7}\Big) C2$$

$$+\frac{17}{21} C3\Big) u^{2} c^{4}-\frac{33}{2}\Big(\Big(\sigma-\frac{35}{11}\Big) C2+\frac{28}{33} C3\Big) u^{4} c^{2}-5 u^{6}\Big(\Big(\sigma+\frac{8}{5}\Big) C2$$

$$+\frac{3}{10} C3\Big)\Big) c^{4}\cos(\varphi)^{4}-\frac{5}{2}\Big(\Big(\Big(\sigma+\frac{6}{5}\Big) C2+\frac{6}{5} C3\Big) c^{4}+\frac{3}{2}\Big(\Big(\sigma-\frac{23}{5}\Big) C2$$

$$+\frac{14}{15} C3\Big) u^{2} c^{2}+\frac{1}{2} u^{4}\Big(\Big(\sigma+\frac{31}{5}\Big) C2+\frac{2}{5} C3\Big)\Big) c^{6}\cos(\varphi)^{2}+\frac{13}{4} C2\Big(c^{2}$$

$$-\frac{15}{13} u^{2}\Big) c^{8}\Big)+8\sin(\varphi)\cos(\varphi)\left(c^{2}+u^{2}\right)\Big(\Big(-\frac{13}{8} c^{2} u^{4}-\frac{7}{16} u^{6}\Big)\cos(\varphi)^{4}+\Big(c^{6}$$

$$+\frac{11}{8} c^{2} u^{4}\Big)\cos(\varphi)^{2}-\frac{3}{8} c^{6}+\frac{13}{16} c^{4} u^{2}\Big)\left(u^{2}\cos(\varphi)^{2}+c^{2}\right) u\, C3\, c^{2}\sin(2\varphi)\Big)\Big):$$

$$K76 := \frac{1}{\left(c^{2}+u^{2}\right)^{2}\left(u^{2}\cos(\varphi)^{2}+c^{2}\right)^{3} C2}\Big(3\Big(\frac{1}{6}\left(c^{2}+u^{2}\right)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\, C3\, c^{2}\Big(\big(5 c^{2} u^{2}$$

$$-u^{4}\big)\cos(\varphi)^{2}+c^{4}-5 c^{2} u^{2}\Big)\sin(2\varphi)+\frac{2}{3}\Big(c^{6}\, C3-\frac{1}{2}\left((\sigma+13)\, C2+C3\right) u^{2} c^{4}$$

$$-\frac{1}{2}\left((\sigma-7)\, C2+3\, C3\right) u^{4} c^{2}+\frac{1}{2} u^{6}\, C2\Big) u^{2}\cos(\varphi)^{6}+\Big(c^{6}\, C3-\Big(\Big(\sigma+\frac{17}{3}\Big) C2$$

$$+\frac{1}{3} C3\Big) u^{2} c^{4}-\frac{4}{3}\Big((\sigma-9)\, C2+\frac{1}{4} C3\Big) u^{4} c^{2}-\frac{1}{3} u^{6}\left((\sigma+4)\, C2-3\, C3\right)\Big)$$

$$c^{2}\cos(\varphi)^{4}-\frac{2}{3}\Big(\Big((\sigma+2)\, C2+\frac{3}{2} C3\Big) c^{4}+\frac{3}{2}\Big((\sigma-11)\, C2+\frac{1}{3} C3\Big) u^{2} c^{2}$$

$$+\frac{1}{2} u^{4}\left((\sigma+20)\, C2-2\, C3\right)\Big) c^{4}\cos(\varphi)^{2}+\frac{4}{3} c^{8}\, C2-5 c^{6} u^{2}\, C2\Big)\Big):$$

$$K77 := \frac{1}{\left(c^{2}+u^{2}\right) C2\left(u^{2}\cos(\varphi)^{2}+c^{2}\right)^{2}}\Big(\Big(\frac{1}{2} c^{2}\sin(\varphi)\, C3\cos(\varphi)\left(c^{2}+u^{2}\right)\sin(2\varphi)$$

$$+\Big(c^{4}\, C3-8 u^{2}\Big(C2-\frac{1}{8} C3\Big) c^{2}-2 u^{4}\, C2\Big)\cos(\varphi)^{4}-8\Big(\Big(C2+\frac{1}{8} C3\Big) c^{2}$$

$$-\frac{1}{2}\Big(C2-\frac{1}{4} C3\Big) u^{2}\Big) c^{2}\cos(\varphi)^{2}+6 c^{4}\, C2\Big) u\Big):$$

> $K7Z := \dfrac{\left(c^{2}+u^{2}\right)^{2}\cos(\varphi)^{4}}{C2\left(u^{2}\cos(\varphi)^{2}+c^{2}\right)^{2}}:$

>

Задание системы уравнений:

$$ode0 := \frac{d}{du} y0(u) = y1(u):$$

$$ode1 := \frac{d}{du} y1(u) = K10\cdot y0(u) + K11\cdot y1(u) + K14\cdot y4(u) + K15\cdot y5(u):$$

$$ode1p := \frac{d}{du} y1(u) = K10\cdot y0(u) + K11\cdot y1(u) + K14\cdot y4(u) + K15\cdot y5(u) + K7X\cdot \mathrm{x}:$$

$$ode2 := \frac{d}{du} y2(u) = y3(u):$$

$ode3 := \frac{d}{du} y3(u) = K30 \cdot y0(u) + K31 \cdot y1(u) + K32 \cdot y2(u) + K33 \cdot y3(u) + K34 \cdot y4(u) + K35 \cdot y5(u) :$

$ode3 := \frac{d}{du} y3(u) = K30 \cdot y0(u) + K31 \cdot y1(u) + K32 \cdot y2(u) + K33 \cdot y3(u) + K34 \cdot y4(u) + K35 \cdot y5(u) + K7Y \cdot \mathrm{y} :$

$ode4 := \frac{d}{du} y4(u) = y5(u) :$

$ode5 := \frac{d}{du} y5(u) = y6(u) :$

$ode6 := \frac{d}{du} y6(u) = y7(u) :$

$ode7 := \frac{d}{du} y7(u) = K70 \cdot y0(u) + K71 \cdot y1(u) + K72 \cdot y2(u) + K73 \cdot y3(u) + K74 \cdot y4(u) + K75 \cdot y5(u) + K76 \cdot y6(u) + K77 \cdot y7(u) :$

$ode7p := \frac{d}{du} y7(u) = K70 \cdot y0(u) + K71 \cdot y1(u) + K72 \cdot y2(u) + K73 \cdot y3(u) + K74 \cdot y4(u) + K75 \cdot y5(u) + K76 \cdot y6(u) + K77 \cdot y7(u) + K7Z \cdot \mathrm{z} :$

$odesys := ode0, ode1, ode2, ode3, ode4, ode5, ode6, ode7 :$

$odesys := ode0, ode1p, ode2, ode3p, ode4, ode5, ode6, ode7p :$

Задание размеров оболочки :

$u1 := 2 : u2 := 4 :$

Прямой ход прогонки - вычисление прогоночных коэффициентов:

> $ics1 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 1, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1) = 0 :$

> $YY1 := dsolve(\{odesys, ics1\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :$

> $YY10 := subs(YY1, y0(u)) :$

> $YY11 := subs(YY1, y1(u)) :$

> $YY12 := subs(YY1, y2(u)) :$

> $YY13 := subs(YY1, y3(u)) :$

> $YY14 := subs(YY1, y4(u)) :$

> $YY15 := subs(YY1, y5(u)) :$

> $YY16 := subs(YY1, y6(u)) :$

> $YY17 := subs(YY1, y7(u)) :$

>

>

> $ics3 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 1, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1) = 0 :$

> $YY3 := dsolve(\{odesys, ics3\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :$

> $YY30 := subs(YY3, y0(u)) :$

> $YY31 := subs(YY3, y1(u)) :$

> $YY32 := subs(YY3, y2(u)) :$

> $YY33 := subs(YY3, y3(u)) :$

> $YY34 := subs(YY3, y4(u)) :$

> $YY35 := subs(YY3, y5(u)) :$

> $YY36 := subs(YY3, y6(u)) :$

> $YY37 := subs(YY3, y7(u))$:

>

> $\mathrm{ics6} := y0(\mathrm{u1}) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 1,$
> $y7(u1) = 0$:

> $YY6 := dsolve(\{odesys, ics6\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure)$:

> $YY60 := subs(YY6, y0(u))$:
> $YY61 := subs(YY6, y1(u))$:
> $YY62 := subs(YY6, y2(u))$:
> $YY63 := subs(YY6, y3(u))$:
> $YY64 := subs(YY6, y4(u))$:
> $YY65 := subs(YY6, y5(u))$:
> $YY66 := subs(YY6, y6(u))$:
> $YY67 := subs(YY6, y7(u))$:

>

> $ics7 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0,$
> $y7(u1) = 1$:

> $YY7 := dsolve(\{odesys, ics7\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure)$:

> $YY70 := subs(YY7, y0(u))$:
> $YY71 := subs(YY7, y1(u))$:
> $YY72 := subs(YY7, y2(u))$:
> $YY73 := subs(YY7, y3(u))$:
> $YY74 := subs(YY7, y4(u))$:
> $YY75 := subs(YY7, y5(u))$:
> $YY76 := subs(YY7, y6(u))$:
> $YY77 := subs(YY7, y7(u))$:

Решение с нагрузкой:

>

> $icsP := y0(\mathrm{u1}) = 0, y1(\mathrm{u1}) = 0, y2(\mathrm{u1}) = 0, y3(\mathrm{u1}) = 0, y4(\mathrm{u1}) = 0, y5(\mathrm{u1}) = 0, y6(\mathrm{u1}) = 0,$
> $y7(\mathrm{u1}) = 0$:

> $YYP := dsolve(\{odesysP, icsP\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure)$:

> $YYP0 := subs(YYP, y0(u))$:
> $YYP1 := subs(YYP, y1(u))$:
> $YYP2 := subs(YYP, y2(u))$:
> $YYP3 := subs(YYP, y3(u))$:
> $YYP4 := subs(YYP, y4(u))$:
> $YYP5 := subs(YYP, y5(u))$:
> $YYP6 := subs(YYP, y6(u))$:
> $YYP7 := subs(YYP, y7(u))$:

> *Заполнение матриц* :

> $$AA := \begin{bmatrix} \mathrm{YY10(u2)} & \mathrm{YY30(u2)} & \mathrm{YY60(u2)} & \mathrm{YY70(u2)} \\ \mathrm{YY12(u2)} & \mathrm{YY32(u2)} & \mathrm{YY62(u2)} & \mathrm{YY72(u2)} \\ \mathrm{YY14(u2)} & \mathrm{YY34(u2)} & \mathrm{YY64(u2)} & \mathrm{YY74(u2)} \\ \mathrm{YY15(u2)} & \mathrm{YY35(u2)} & \mathrm{YY65(u2)} & \mathrm{YY75(u2)} \end{bmatrix} :$$

> $CP := \begin{bmatrix} \mathrm{YYP0(u2)} \\ \mathrm{YYP2(u2)} \\ \mathrm{YYP4(u2)} \\ \mathrm{YYP5(u2)} \end{bmatrix}:$

> *Обратный ход прогонки* :

> *with*(*LinearAlgebra*) :

> *MatrixInverse*(*AA*) :

> CC := MatrixVectorMultiply(*MatrixInverse*(*AA*), CP) :

>

> *Искомые функции* :

> $yy0 := \mathrm{YY10}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY30}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY60}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY70}\cdot\mathrm{CC}(4) - YYP0;$

> $yy2 := \mathrm{YY12}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY32}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY62}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY72}\cdot\mathrm{CC}(4) - YYP2;$

> $\mathrm{yy4} := + \mathrm{YY14}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY34}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY64}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY74}\cdot\mathrm{CC}(4) - \mathrm{YYP4};$

> $\mathrm{yy1} := + \mathrm{YY11}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY31}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY61}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY71}\cdot\mathrm{CC}(4) - \mathrm{YYP1};$

> $\mathrm{yy7} := + \mathrm{YY17}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY37}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY67}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY77}\cdot\mathrm{CC}(4) - \mathrm{YYP7};$

> $\mathrm{yy3} := + \mathrm{YY13}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY33}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY63}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY73}\cdot\mathrm{CC}(4) - \mathrm{YYP3};$

> $\mathrm{yy5} := + \mathrm{YY15}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY35}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY65}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY75}\cdot\mathrm{CC}(4) - \mathrm{YYP5};$

> $\mathrm{yy6} := + \mathrm{YY16}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY36}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY66}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY76}\cdot\mathrm{CC}(4) - \mathrm{YYP6};$

Выражения для внутренних силовых факторов :

>

> $$Nu := \frac{1}{(c^2+u^2)^{5/2}\sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2}\,\cos(\varphi)^2}\cdot\Big(C1\Big(u\big(\cos(\varphi)^2\sigma(c^2+u^2) + c^2\sin(\varphi)^2\big)(c^2+u^2)\cos(\varphi)\,uu(u) + 2\,uz(u)\big(\cos(\varphi)^2\sigma(c^2+u^2) - c^2\sin(\varphi)^3\big)u^2\sqrt{c^2+u^2} + (c^2+u^2)^2\big(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\big)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}uu(u)\Big)\cos(\varphi)\Big)\Big):$$

$$Nv := \frac{1}{(c^2+u^2)^{5/2}\big(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\big)^{3/2}\cos(\varphi)^2}\cdot\Big(C1\Big(\big(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\big)^2u(c^2+u^2)\cos(\varphi)\,uu(u) + \frac{1}{2}c\big(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\big)^{3/2}(\sigma-1)(c^2+u^2)^2\sin(2\varphi)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}uv(u)\Big) + \big(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\big)^2\sigma(c^2+u^2)^2\cos(\varphi)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}uu(u)\Big) - \cos(\varphi)^3u\,uv(u)(\sigma-1)(c^2+u^2)^2c\sin(\varphi)\sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2} + 2\,uz(u)\,u^2\sin(\varphi)\big((c^2+u^2)\cos(\varphi)^2 - c^2\sin(\varphi)^2\big)\sqrt{c^2+u^2}\,\big(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\big)\Big)\Big):$$

$$
\begin{aligned}
Su := -\frac{1}{2}\,&\frac{1}{\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^{3/2}\left(c^2+u^2\right)^2\cos(\varphi)^2}\Big(C1\,\Big(\Big(\cos(\varphi)^3\,u\,(c^2+u^2)^{3/2}\,(\sigma \\
&+1)\,c\sin(\varphi)\sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2}+\cos(\varphi)^3\,u\,\big(\cos(\varphi)^2\sigma\,(c^2+u^2)-c^2\sin(\varphi)^2 \\
&-u^2\cos(\varphi)^2-c^2\big)\,(c^2+u^2)^{3/2}\Big)\,uv(u)+\Big(2\sin(\varphi)^2u^2\,\big(\cos(\varphi)^2\sigma\,(c^2+u^2) \\
&-c^2\sin(\varphi)^2-u^2\cos(\varphi)^2-c^2\big)\,c\sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2}+\sin(2\varphi)\,u^2\,\big(u^2\cos(\varphi)^2 \\
&+c^2\big)\,(\sigma+1)\,(c^2+u^2)\cos(\varphi)\Big)\,uz(u)-\Big(-\cos(\varphi)\,u\,\big(\cos(\varphi)^2\sigma\,(c^2+u^2) \\
&-c^2\sin(\varphi)^2-u^2\cos(\varphi)^2-c^2\big)\,c\sin(\varphi)\sqrt{c^2+u^2}\sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2} \\
&+u\cos(\varphi)^3\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,(\sigma+1)\,(c^2+u^2)^{3/2}\Big)\,uu(u)-\Big(\cos(\varphi)\,(c^2+u^2)^{3/2} \\
&(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{3/2}\,(\sigma+1)\,c\sin(\varphi)+\big(\cos(\varphi)^2\sigma\,(c^2+u^2)-c^2\sin(\varphi)^2 \\
&-u^2\cos(\varphi)^2-c^2\big)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,(c^2+u^2)^{3/2}\cos(\varphi)\Big)\left(\frac{d}{du}\,uv(u)\right)\Big)\Big):
\end{aligned}
$$

$$Sv := -Su:$$

$>$

$$
\begin{aligned}
Mu := -&\frac{1}{(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,(c^2+u^2)^2\cos(\varphi)^2}\Big(\Big((c^2+u^2)\,\big(u^2\cos(\varphi)^2 \\
&+c^2\big)^2\left(\frac{d\partial^2}{du^2}\,uz(u)\right)+(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,u\,\Big(\big((\sigma+1)\,c^2+u^2\sigma\big)\cos(\varphi)^2 \\
&-c^2\Big)\left(\frac{d}{du}\,uz(u)\right)+c^2\,uz(u)\cos(\varphi)^2\,(c^2+u^2)\,(\sigma-1)\Big)\,C2\Big):
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mv} := -&\frac{1}{(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,(c^2+u^2)^2\cos(\varphi)^2}\Big(\Big((u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^2\,\big(c^2 \\
&+u^2\big)\left(\frac{d^2}{du^2}\,uz(u)\right)\sigma+(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,\Big(\big((\sigma+1)\,c^2+u^2\big)\cos(\varphi)^2 \\
&-c^2\sigma\Big)\,u\left(\frac{d}{du}\,uz(u)\right)-c^2\,uz(u)\cos(\varphi)^2\,(c^2+u^2)\,(\sigma-1)\Big)\,C2\Big):
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Muv := -&\frac{1}{(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{3/2}\,(c^2+u^2)^2\cos(\varphi)}\Big(C3\,\Big((u^2\cos(\varphi)^2+c^2)\,u\,\big(c^2 \\
&+u^2\big)\left(\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\left(\frac{d}{du}\,uz(u)\right)+\Big(\Big(\Big(\Big(-\frac{3}{2}\,c^2u^2-u^4\Big)\cos(\varphi)^2 \\
&+c^2u^2+\frac{1}{2}\,c^4\Big)\sin(2\varphi)+c^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,(c^2+u^2)\Big)\,uz(u)\Big)\,c\Big):
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Mvu := &\frac{1}{\sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2}\,(c^2+u^2)^2\cos(\varphi)^2}\Big(u\,\Big(-\frac{1}{2}\,(c^2+u^2)\cos(\varphi)\sin(2\varphi) \\
&+c^2\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi)-1)\,(\cos(\varphi)+1)\Big)\,c\,C3\left(\frac{d}{du}\,uz(u)\right)\Big) \\
&+\frac{\sin(\varphi)\sqrt{u^2\cos(\varphi)^2+c^2}\;c\,C3\left(\frac{d^2}{du^2}\,uz(u)\right)}{(c^2+u^2)\cos(\varphi)^2} \\
&-\frac{1}{\cos(\varphi)\,(u^2\cos(\varphi)^2+c^2)^{3/2}\,(c^2+u^2)^2}\Big(\Big(\Big(\Big(\frac{3}{2}\,c^2u^2+u^4\Big)\cos(\varphi)^2-\frac{1}{2}\,c^4 \\
&-c^2u^2\Big)\sin(2\varphi)+c^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,(c^2+u^2)\Big)\,uz(u)\,c\,C3\Big):
\end{aligned}
$$

Процедура нахождения силового фактора (*на примере момента Mu*) :

$$Mu := -\frac{1}{\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)\left(c^2+u^2\right)^2\cos(\varphi)^2}\Bigg(\bigg(\left(c^2+u^2\right)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^2\left(\frac{d}{du^2}\,uz(u)\right)+\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)u\left(\left((\sigma+1)\,c^2+u^2\,\sigma\right)\cos(\varphi)^2-c^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\,uz(u)\right)+c^2\,uz(u)\cos(\varphi)^2\left(c^2+u^2\right)(\sigma-1)\bigg)\,C2\Bigg):$$

$$Myy6 := \mathbf{proc}(u);\ -\frac{\left(\left(c^2+u^2\right)\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)^2\right)C2}{\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)\left(c^2+u^2\right)^2\cos(\varphi)^2}\ \mathbf{end\ proc}:$$

$$Myy5 := \mathbf{proc}(u);\ -\frac{\left(\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)u\left(\left((\sigma+1)\,c^2+u^2\,\sigma\right)\cos(\varphi)^2-c^2\right)\right)C2}{\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)\left(c^2+u^2\right)^2\cos(\varphi)^2}\ \mathbf{end\ proc}:$$

$$Myy4 := \mathbf{proc}(u);\ -\frac{\left(c^2\cdot\cos(\varphi)^2\left(c^2+u^2\right)(\sigma-1)\right)C2}{\left(u^2\cos(\varphi)^2+c^2\right)\left(c^2+u^2\right)^2\cos(\varphi)^2}\mathbf{end\ proc}:$$

$$Mu := Myy4\cdot yy4+Myy5\cdot yy5+Myy6\cdot yy6:$$

Построение графика момента :

$$plot(Myy4\cdot yy4+Myy5\cdot yy5+Myy6\cdot yy6,\ \mathrm{u1}\ ..\mathrm{u2}):$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Алгоритм решения задачи определения НДС непологой оболочки в форме косого геликоида в программном комплексе Maple 17 – фрагменты кода с пояснениями

> *Вывод уравнений* :

>

>

> *Квадратичные формы и связанные с ними геометрические величины, обозначения R, Rv, Ruv соответствуют* R'_u, R'_v, R'_{uv} :

> $$A := A : B := \sqrt{u^2 + c^2} : F := k \cdot c : L := 0 : M := -\frac{c}{\sqrt{A^2 \cdot u^2 + c^2}} : N := \frac{\mathrm{k} \cdot \mathrm{u}^2}{\sqrt{A^2 \cdot u^2 + c^2}} : Ru := \infty :$$

> $$Rv := \frac{1}{-\frac{N}{B^2}} : Ruv := \frac{1}{\frac{M}{A \cdot B}} : \chi := \arccos\left(\frac{F}{A \cdot B}\right) :$$

>

$$\Gamma 111 := 0 : \Gamma 112 := 0 : \Gamma 121 := -\frac{F \cdot u}{\mathrm{A}^2 \cdot (c^2 + u^2) \cdot \left(1 - \frac{F^2}{\mathrm{A}^2 \cdot (c^2 + u^2)}\right)} : \Gamma 122 := \frac{u}{(c^2 + u^2) \cdot \left(1 - \frac{F^2}{\mathrm{A}^2 \cdot (c^2 + u^2)}\right)} : \Gamma 221 := -\frac{u}{\mathrm{A}^2 \cdot \left(1 - \frac{F^2}{\mathrm{A}^2 \cdot (c^2 + u^2)}\right)} : \Gamma 222 := \frac{\mathrm{F} \cdot u}{\mathrm{A}^2 \cdot (c^2 + u^2) \left(1 - \frac{\mathrm{F}^2}{A^2 \cdot (c^2 + u^2)}\right)}$$

: - *коэффициенты Кристоффеля, обозначение Гijk соответствует* Γ_{ij}^{k}.

>

> *Компоненты деформации – выражения, определяющие их геометрический смысл и итоговые выражения в перемещениях, полученные при помощи применения команды Maple* "simplify" (*алгебраическое упрощение*) :

> $$\varepsilon u := \frac{1}{A} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left(uu(u) + \cos(\chi) \cdot uv(u)\right) - B \cdot \frac{(\sin(\chi))^2}{A^2} \cdot \Gamma 112 \cdot uv(u) - \frac{uz(u)}{Ru} :$$

– *деформация* ε_u

> $$\varepsilon u := \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uu(u) - \frac{k\, c\, uv(u)\, u}{A\, (c^2 + u^2)^{3/2}} + \frac{k\, c \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uv(u)\right)}{A \sqrt{c^2 + u^2}}}{A} :$$

> $$\varepsilon v := -\frac{A \cdot (\sin(\chi))^2}{B^2} \cdot \Gamma 221 \cdot uu(u) - uz(u) \cdot \left(\frac{1}{Rv}\right) :$$ – *деформация* ε_v

> $$\varepsilon v := \frac{u\, uu(u)}{A\, (c^2 + u^2)} + \frac{uz(u)\, k\, u^2}{\sqrt{A^2\, u^2 + c^2}\, (c^2 + u^2)} :$$

> $$\omega u := \frac{\sin(\chi)}{A} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uv(u) - \left(\frac{\sin(\chi)}{B} \cdot \Gamma 121 + \frac{1}{A} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \chi\right) \cdot uu(u, v) + \cos(\chi) \cdot \left(\frac{B \cdot \sin(\chi)}{A^2} \cdot \Gamma 112 + \frac{1}{A} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \chi\right) \cdot uv(u) + \frac{1}{\sin(\chi)} \cdot \left(\frac{1}{Ruv} + \cos(\chi) \cdot \frac{1}{Ru}\right) \cdot uz(u) :$$

–*деформация* ω_u

> $$\omega u := -\left(\left(-\left(c^2+A^2u^2\right)\left(c^2+u^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uv(u)\right)-c^2k^2u\,uv(u)\right)\sqrt{A^2u^2+c^2}+A^2\left(c^2+u^2\right)^{3/2}c\,uz(u)\right)\Big/\left(\sqrt{A^2u^2+c^2}\,\sqrt{k^2u^2+c^2+u^2}\,\left(c^2+u^2\right)^{3/2}A^2\right):$$

> $$\omega v := -\left(\frac{\sin(\chi)}{A}\cdot\Gamma122\right)\cdot uv(u)+\cos(\chi)\cdot\left(\frac{A\cdot\sin(\chi)}{B^2}\cdot\Gamma221\right)\cdot uu(u)+\frac{1}{\sin(\chi)}\cdot\left(\frac{1}{Ruv}+\cos(\chi)\cdot\left(\frac{1}{Rv}\right)\right)\cdot uz(u):$$ -деформация ω_v

> $$\omega v := -\frac{u\left(A\,uv(u)\sqrt{c^2+u^2}+c\,k\,uu(u)\right)\sqrt{A^2u^2+c^2}+c\left(c^2+u^2\cdot A^2\right)uz(u)\,A}{\sqrt{k^2u^2+c^2+u^2}\,\sqrt{A^2u^2+c^2}\,A\left(c^2+u^2\right)}:$$

> $\omega := \omega u+\omega v : \varepsilon uv := \omega :$ -деформация ε_{uv}

> $\delta := \frac{1}{2}\cdot(\omega v-\omega u) :$ - δ

> $\gamma u := -\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uz(u)+\frac{uu(u)}{Ru}-\frac{uv(u)}{Ruv}\right):$ - деформация γ_u

> $$\gamma u := -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uz(u)}{A}-\frac{uv(u)\,c}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,A\sqrt{c^2+u^2}}:$$

> $\gamma v := -\left(\frac{uv(u)}{Rv}-\frac{uu(u)}{Ruv}\right):$ - деформация γ_v

> $$\gamma v := \frac{uv(u)\,k\,u^2}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\left(c^2+u^2\right)}-\frac{uu(u)\,c}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,A\sqrt{c^2+u^2}}:$$

> $\kappa u := -\frac{1}{A}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{(\gamma u-\cos(\chi)\cdot\gamma v)}{\sin(\chi)}-\frac{\sin(\chi)}{B}\cdot\Gamma121\cdot\gamma v+\left(\frac{\delta}{Ruv}\right):$ - деформация κ_u

> $$\kappa u := -\frac{u\left(A^6u^6+3A^4c^2u^4+c^{10}+3A^2c^4u^2\right)\left(k^2+\frac{3}{2}\right)c\,uv(u)}{\left(c^2+u^2\right)^2\left(A^2u^2+c^2\right)^3A^3}+\frac{2k\left(\left(A^2+\frac{1}{4}\right)c^2+\frac{5}{4}A^2u^2\right)u\,c^2\,uu(u)}{\left(c^2+u^2\right)^{3/2}\left(A^2u^2+c^2\right)^2A^2}-\frac{c^2k^2u\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uz(u)\right)}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{3/2}\sqrt{c^2+u^2}\,A}+\frac{\left(\frac{1}{2}+A^2\right)c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uv(u)\right)}{\left(c^2+u^2\right)A^3}-\frac{c^2k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uu(u)\right)}{\left(A^2u^2+c^2\right)\sqrt{c^2+u^2}\,A^2}+\frac{\sqrt{c^2+u^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}uz(u)\right)}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,A}+\frac{1}{2}\,\frac{c^2u^2uz(u)\,k^2}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{3/2}\left(c^2+u^2\right)^{3/2}A}:$$

> $\kappa v := -\frac{\sin(\chi)}{A}\cdot\Gamma122\cdot\gamma u-\frac{\delta}{Ruv}:$ - деформация κ_v

> $$\kappa v := \frac{1}{2}\,\frac{c\,u\,uv(u)}{A^3\left(c^2+u^2\right)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{u\,c^2k\,uu(u)}{\left(A^2u^2+c^2\right)A^2\left(c^2+u^2\right)^{3/2}}+\frac{u\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uz(u)\right)}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,\sqrt{c^2+u^2}\,A}-\frac{1}{2}\,\frac{c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uv(u)\right)}{\left(c^2+u^2\right)A^3}-\frac{1}{2}\,\frac{c^2u^2uz(u)\,k^2}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{3/2}A\left(c^2+u^2\right)^{3/2}}:$$

> $\kappa uv := -\frac{1}{A}\cdot\frac{d}{du}\frac{(\gamma v - \cos(\chi)\cdot\gamma u)}{\sin(\chi)} + \cos(\chi)\cdot\kappa u - \frac{1}{Ruv}\cdot\left(\sin(\chi)\cdot\varepsilon v - \frac{\omega}{2}\cdot\cos(\chi)\right)$:

– деформация κ_{uv}

>

$$\kappa uv := -\frac{1}{(c^2+u^2)^{5/2}(A^2u^2+c^2)^3A^4}\Big(u\Big(-A^8u^8-3A^6u^6c^2-3u^4A^4c^4-u^2A^2c^6 + \frac{1}{2}(2\cdot A^2+1)c^{12}+\frac{1}{2}(-2\cdot A^2-1)c^8\Big)k\,uv(u)\Big) - \frac{c\,u\left(\left(A^2\cdot u^2+c^2\right)^2(c^2+u^2)\cdot A^2\right)uu(u)}{A^3(c^2+u^2)^2(A^2u^2+c^2)^3} + \frac{c\,u\,(c^2+A^2u^2)^{\frac{1}{2}}k\left(\frac{d}{du}uz(u)\right)}{(c^2+u^2)\cdot A^2} - \frac{u^2k\left(\frac{d}{du}uv(u)\right)}{A^2(c^2+u^2)^{3/2}} + \frac{c\left(\frac{d}{du}uu(u)\right)}{(c^2+u^2)A^3} + \frac{1}{2}\frac{c\cdot 2(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}uz(u)\,k}{A^2(c^2+u^2)}:$$

> *Внутренние силовые факторы*

– определяющее выражение и *итоговое выражение через перемещения после упрощений* :

> $Nu := \frac{E0\cdot h}{(1-\sigma^2)}\cdot\frac{\varepsilon u - \cot(\chi)\cdot\omega + \sigma\cdot\varepsilon v}{\sin(\chi)}$: *– сила* N_u

>

$$Nu := -\frac{1}{(A^2u^2+c^2)^2(c^2+u^2)^{3/2}A(\sigma^2-1)}\Big(E0\big(A^2ku^2\sigma(c^2+u^2)(A^2u^2+c^2) + (2c^2+u^2(A^2+1))c^2(c^2+u^2)A^2k\big)h\,uz(u)\Big) - \frac{E0\left(u\sigma A(c^2+u^2)+uc^2Ak^2(c^2+u^2)\right)h\,uu(u)}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(c^2+u^2)^{3/2}A(\sigma^2-1)} - \frac{E0\left(-k(-c^2-u^2)c\sqrt{c^2+u^2}-(c^2+u^2)^{3/2}kc\right)h\left(\frac{d}{du}uv(u)\right)}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(c^2+u^2)^{3/2}A(\sigma^2-1)} - \frac{E0\sqrt{c^2+u^2}\,h\left(\frac{d}{du}uu(u)\right)}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,(\sigma^2-1)}:$$

> $Nv := \frac{E0\cdot h}{(1-\sigma^2)}\cdot\frac{\varepsilon v - \cot(\chi)\cdot\omega + \sigma\cdot\varepsilon u}{\sin(\chi)}$: *– сила* N_u

>

$$Nv := \frac{E0\,h\,k(\sigma-1)\,c\,u\,uv(u)}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,(c^2+u^2)A(\sigma^2-1)} - \frac{E0\,h\,u\left(A^2\cdot(c^2+u^2)\right)uu(u)}{(A^2u^2+c^2)^{3/2}\sqrt{c^2+u^2}\,(\sigma^2-1)} + \frac{E0\,h\,k(1-\sigma)\cdot c\cdot\left(\frac{d}{du}uv(u)\right)}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\cdot A(\sigma^2-1)} - \frac{h\sqrt{c^2+u^2}\,E0\,\sigma\left(\frac{d}{du}uu(u)\right)}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,(\sigma^2-1)} - \frac{E0\,h\,A\,uz(u)\,k\sqrt{c^2+u^2}\,(A^2u^2+2c^2)}{(A^2u^2+c^2)^2(\sigma^2-1)}:$$

> $Mu := -\frac{E0\cdot h^3}{12\cdot(1-\sigma^2)}\cdot\frac{\kappa u + \sigma\cdot\kappa v}{\sin(\chi)}$: *– момент* M_u

>

$$\mathrm{Mu} := -\frac{1}{12}\,\frac{1}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^{7/2}\left(c^2+u^2\right)^{3/2} A^2\left(\sigma^2-1\right)}\Bigg(\bigg(\Big(\Big(k^2-\frac{1}{2}\,\sigma+\frac{3}{2}\Big)\big(A^6 u^6 + 3 A^4 c^2 u^4 + 3 A^2 c^4 u^2\big) + c^{10} k^2 + \frac{3}{2}\,c^{10} - \frac{1}{2}\,c^6\,\sigma\Big)\,u\,c\,E0\,h^3\,uv(u)\bigg)$$

$$+\frac{1}{6}\,\frac{k\,u\left(\left(A^2-\frac{1}{4}\,\sigma+\frac{1}{4}\right)c^2-\frac{1}{4}\,A^2 u^2\left(\sigma-5\right)\right)c^2\,E0\,h^3\,uu(u,v)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^{5/2} A\left(c^2+u^2\right)\left(\sigma^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{12}\,\frac{\left(\left(-k^2+\sigma\right)c^2+A^2 u^2\,\sigma\right)u\,E0\,h^3\left(\frac{d}{du}\,uz(u)\right)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^2\left(\sigma^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{12}\,\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\sigma+A^2\right)c\,E0\,h^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\,uv(u)\right)}{\sqrt{c^2+u^2}\,\sqrt{A^2 u^2+c^2}\,A^2\left(\sigma^2-1\right)}-\frac{1}{12}\,\frac{k\,c^2\,E0\,h^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\,uu(u)\right)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^{3/2} A\left(\sigma^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{12}\,\frac{\left(c^2+u^2\right)E0\,h^3\left(\frac{\mathrm{d}^2}{du^2}\,uz(u)\right)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)\left(\sigma^2-1\right)}-\frac{1}{24}\,\frac{uz(u)\,c^2 k^2 u^2\left(\sigma-1\right)E0\,h^3}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^2\left(c^2+u^2\right)\left(\sigma^2-1\right)}:$$

> $Mv := -\frac{E0\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\sigma^2\right)}\cdot\frac{\kappa v+\sigma\cdot\kappa u}{\sin(\chi)}$: - *момент* M_v

>

$$Mv := -\frac{1}{12}\,\frac{1}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^{7/2}\left(c^2+u^2\right)^{3/2} A^2\left(\sigma^2-1\right)}\Bigg(E0\,h^3\bigg(\Big(\Big(k^2\,\sigma+\frac{3}{2}\,\sigma-\frac{1}{2}\Big)\big(u^6\left(k^2+1\right)^3+3\,u^4\left(k^2+1\right)^2 c^2+3\,u^2\left(k^2+1\right)c^4\big)+\sigma\,c^{10} k^2+\frac{3}{2}\,\sigma\,c^{10}-\frac{1}{2}\,c^6\Big)\,u\,c\,uv(u)\bigg)$$

$$+\frac{1}{6}\,\frac{E0\,h^3\,u\left(\left(A^2\,\sigma+\frac{1}{4}\,\sigma-\frac{1}{4}\right)c^2+\frac{5}{4}\left(\sigma-\frac{1}{5}\right)u^2 A^2\right)c^2\,k\,uu(u)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^{5/2}\left(c^2+u^2\right)A\left(\sigma^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{12}\,\frac{E0\,h^3\left(\left(-k^2\,\sigma+1\right)c^2+u^2 A^2\right)u\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\,uz(u)\right)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^2\left(\sigma^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{12}\,\frac{E0\,h^3\left(-\frac{1}{2}+A^2\,\sigma+\frac{1}{2}\,\sigma\right)c\left(\frac{d}{du}\,uv(u)\right)}{\sqrt{A^2 u^2+c^2}\,\sqrt{c^2+u^2}\,A^2\left(\sigma^2-1\right)}$$

$$-\frac{1}{12}\,\frac{E0\,h^3\,\sigma\,c^2\,k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\,uu(u)\right)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^{3/2} A\left(\sigma^2-1\right)}+\frac{1}{12}\,\frac{E0\,h^3\,\sigma\left(c^2+u^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{du^2}\,uz(u)\right)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)\left(\sigma^2-1\right)}$$

$$+\frac{1}{24}\,\frac{E0\,h^3\,uz(u)\,c^2 k^2 u^2\left(\sigma-1\right)}{\left(A^2 u^2+c^2\right)^2\left(c^2+u^2\right)\left(\sigma^2-1\right)}:$$

> $Muv := \frac{E0\cdot h^3}{12\cdot(1+\sigma)}\cdot\frac{\kappa uv-\cos(\chi)\cdot\kappa v}{\sin(\chi)}$: - *момент* M_{uv}

>

>

> > $Mvu := -\frac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot (1+\sigma)} \cdot \frac{\kappa uv - \cos(\chi) \cdot \kappa u}{\sin(\chi)}$: - *момент* M_{vu}

> >

$$Mvu := -\frac{1}{12} \frac{1}{(c^2+u^2)^2 (A^2 u^2 + c^2)^{7/2} A^3 (1+\sigma)} \left(\left(\left(\left(\frac{1}{2} + A^2 \right) c^8 + 3 \left(k^2 + \frac{11}{6} \right) A^2 u^2 c^6 + 3 \left(k^2 + \frac{5}{2} \right) A^4 u^4 c^4 + \left(k^2 + \frac{9}{2} \right) A^6 u^6 c^2 + A^8 u^8 \right) u\, k\, E0\, h^3\, uv(u) \right) \right.$$
$$+ \frac{1}{12} \frac{1}{(c^2+u^2)^{3/2} (A^2 u^2 + c^2)^{5/2} A^2 (1+\sigma)} \left(c \left(\left((2k^2+1) A^2 + \frac{1}{2} k^2 \right) c^4 + A^2 \left(A^2 + \frac{5}{2} k^2 + 1 \right) u^2 c^2 + u^4 A^4 \right) u\, E0\, h^3\, uu(u) \right)$$
$$- \frac{1}{12} \frac{k \left(c^4 + (2 A^2 u^2 + k^2) c^2 + u^4 A^4 \right) u\, c\, E0\, h^3 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} uz(u) \right)}{\sqrt{c^2+u^2}\, (A^2 u^2 + c^2)^2 A (1+\sigma)}$$
$$+ \frac{1}{12} \frac{\left(\left(\frac{1}{2} + A^2 \right) c^2 + u^2 A^2 \right) k\, E0\, h^3 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} uv(u) \right)}{(c^2+u^2) \sqrt{A^2 u^2 + c^2}\, A^3 (1+\sigma)}$$
$$- \frac{1}{12} \frac{c \left(A^2 c^2 + A^2 u^2 \right) E0\, h^3 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} uu(u) \right)}{\sqrt{c^2+u^2}\, (A^2 u^2 + c^2)^{3/2} A^2 (1+\sigma)}$$
$$+ \frac{1}{12} \frac{\sqrt{c^2+u^2}\, k\, c\, E0\, h^3 \left(\frac{d^2}{du^2} uz(u) \right)}{(A^2 u^2 + c^2) A (1+\sigma)}$$
$$- \frac{1}{12} \frac{1}{(c^2+u^2)^{3/2} (A^2 u^2 + c^2)^2 A (1+\sigma)} \left(k\, uz(u) \left(c^6 + (2 A^2 u^2 + u^2) c^4 + \left(A^4 u^2 + 2 u^2 A^2 - \frac{1}{2} k^2 \right) u^2 c^2 + A^4 u^6 \right) c\, E0\, h^3 \right) :$$

$Su := \frac{E0 \cdot h}{2 \cdot (1-\sigma^2)} \cdot \left(\frac{1 + (\cos(\chi))^2}{(\sin(\chi))^2} \cdot \varepsilon uv - \cot(\chi) \cdot (\varepsilon u + \varepsilon v) - \sigma \cdot (\varepsilon uv + \cot(\chi) \cdot (\varepsilon u + \varepsilon v)) \right)$: - *сила* S_u

> $$Su := -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(A^2u^2+c^2\right)^2\left(c^2+u^2\right)A^2\left(\sigma^2-1\right)}\Bigl(E0\,h\Bigl(\bigl(2c^2+u^2\bigl(A^2+1\bigr)\bigr)c\,A^2\Bigl(u^2\,\mathrm{A}^2(\sigma-1)-2\Bigl(k^2-\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\Bigr)c^2\Bigr)-\bigl(A^2u^2+c^2\bigr)k^2(1+\sigma)\,c\,A^2u^2\Bigr)uz(u)\Bigr)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{1/2}\left(c^2+u^2\right)^{\frac{1}{2}}A^2\left(\sigma^2-1\right)}\Bigl(E0\,h\bigl(u\,\bigl(\bigl((\sigma-1)A^2-k^2(1+\sigma)\bigr)c^2+u^2A^2(\sigma-1)\bigr)+k^2(1+\sigma)\,c^2\,u\bigr)uv(u)\Bigr)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{3/2}\left(c^2+u^2\right)A^2\left(\sigma^2-1\right)}\Bigl(E0\,h\bigl(u\,k\,c\,A\cdot\bigl(\bigl((\sigma-1)A^2-k^2(1+\sigma)\bigr)c^2+u^2A^2(\sigma-1)\bigr)-\bigl(A^2u^2+c^2\bigr)\cdot\mathrm{k}\,(1+\sigma)\,c\cdot u\,A\bigr)\,uu(u)\Bigr)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{1/2}\left(c^2+u^2\right)^{\frac{1}{2}}A^2\left(\sigma^2-1\right)}\Bigl(E0\,h\cdot\Bigl(\bigl(\bigl((\sigma-1)A^2-k^2(1+\sigma)\bigr)c^2+u^2A^2(\sigma-1)\bigr)+k^2(1+\sigma)\,c^2\Bigr)\Bigl(\frac{\mathrm{d}}{du}uv(u)\Bigr)\Bigr)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{E0\,h\,k\,(1+\sigma)\,c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}uu(u)\right)}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,A\left(\sigma^2-1\right)}:$$

> $Sv := -Su:$

> *Первое уравнение равновесия* :

> $$\frac{1}{\sin(\chi)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(B\cdot(\mathrm{N}+\cos(\chi)\cdot Su)\right)-\frac{B^2}{A}\cdot\Gamma 112\cdot\sin(\chi)\cdot Su-B\cdot\Gamma 122\cdot\sin(\chi)\cdot Nv-\frac{A\cdot B}{\sin(\chi)}\cdot\left(\frac{Qu}{Ru}-\frac{Qv}{Ruv}\right)+A\cdot B\cdot\left(X(u)+(\cos(\chi))\cdot Y(u)\right);$$

> (...)

> *Второе уравнение равновесия* :

> $$\frac{1}{\sin(\chi)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(B\cdot(Su+\cos(\chi)\cdot N)\right)-A\cdot\Gamma 121\cdot\sin(\chi)\cdot\mathrm{Nu}+\frac{A^2}{B}\cdot\Gamma 221\cdot\sin(\chi)\cdot Sv-\frac{A\cdot B}{\sin(\chi)}\cdot\left(\frac{Qv}{Rv}-\frac{Qu}{Ruv}\right)+A\cdot B\cdot\left(Y(u)+(\cos(\chi))\cdot X(u)\right);$$

> (...)

> *Третье уравнение равновесия* :

> $$A\cdot B\cdot\left(\frac{\mathrm{N}}{Ru}+\frac{Nv}{Rv}+\frac{\mathrm{Sv}-\mathrm{Su}}{Ruv}\right)+\frac{d}{\mathrm{d}u}\left(B\cdot Qu\right)+A\cdot B\cdot\sin(\chi)\cdot Z(u);$$

> (...)

>

Задаем исходные данные, аналогично заданию в *Приложении* А :

$$\mathrm{c} := 0.955;\ \varphi := 0.061;\ h := 0.2;\ E0 := 32500;\ \sigma := 0.17;\ p := 0.006;\ C1 := \frac{E0\cdot h}{\left(1-\sigma^2\right)};\ C2 := \frac{E0\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\sigma^2\right)};\ C3 := \frac{E0\cdot h^3}{12\cdot(1+\sigma)};\ \mathrm{z} := \mathrm{p}\cdot\cos(\varphi);\ \mathrm{y} := 0;\ \mathrm{x} := p\cdot\sin(\varphi);\ k := \tan(\varphi);\ A := \sqrt{1+k^2};\ F := k\cdot c;$$

> *Из уравнений равновесия вычленяем коэффициенты* :

> *коэффициенты первого уравнения равновесия*

> $k1d3uz := \frac{1}{12} \frac{c^2 h^3 (c^2+u^2)^{3/2} k E0}{(A^2 u^2 + c^2)^2 \sqrt{(c^2+u^2) A^2 - c^2 k^2} (\sigma^2 - 1)}$

> k1d2uu :=

> *k1d2uv* :=

> k1d2uz :=

> k1duu :=

> k1duv :=

> *k1duz* :=

> k1uu :=

> *k1uv* :=

> k1uz :=

> k1X :=

> k1Y :=

> *коэффициенты второго уравнения равновесия*

> $k2d3uz := -\frac{1}{12} \frac{c A (c^2+u^2)(c^2+u^2(k^2+1)) h^3 E0}{(A^2 u^2 + c^2)^2 \sqrt{(c^2+u^2) A^2 - c^2 k^2} (\sigma^2 - 1)}$

> k2d2uu :=

> *k2d2uv* :=

> k2d2uz :=

> k2duu :=

> k2duv :=

> *k2duz* :=

> k2uu :=

> *k2uv* :=

> k2uz :=

> k2X :=

> k2Y :=

>

> *коэффициенты третьего уравнения равновесия*

> $k3d4uz := \frac{1}{12} \frac{h^3 (c^2+u^2)^2 E0}{(A^2 u^2 + c^2)^{3/2} (\sigma^2 - 1)}$:

> *k3d3uu* :=

> k3d3uv :=

> *k3d3uz* :=

> k3d2uu :=

> *k3d2uv* :=

> k3d2uz :=

> k3duu :=

> k3duv :=

> *k3duz* :=

> k3uu :=

> *k3uv* :=

> k3uz :=

> k3Z :=

> *Возьмем производные от первого* и *второго уравнений равновесия* и *тоже вычленим коэффициенты* :

> *коэффициенты производной от первого уравнения равновесия*

> $dk1d4uz := -\frac{1}{12} \frac{h^3 u^3 E0 (A u - F)^3 (A u + F)^3 (A c + F k)}{(A^2 u^2 - F^2)^5 (\sigma^2 - 1)}$

> *dk1d3uu* := ...

> dk1d3uv := ...
> $dk1d3uz$:= ...
> dk1d2uu := ...
> $dk1d2uv$:= ...
> dk1d2uz := ...
> dk1duu := ...
> dk1duv := ...
> $dk1duz$:= ...
> dk1uu := ...
> $dk1uv$:= ...
> $dk1uz$:= ...
> dk1Z := ...
> dk1Y := ...
> dk1X := 0
>
>
> *коэффициенты производной от второго уравнения равновесия*
> $$dk2d4uz := -\frac{2\,c\,(c^2+u^2)\,h^3\,A\,E0}{(A^2\,u^2+c^2)^{3/2}\,(24\,\sigma^2-24)}$$
> $dk2d3uu$:= ...
> dk2d3uv := ...
> $dk2d3uz$:= ...
> dk2d2uu := ...
> $dk2d2uv$:= ...
> dk2d2uz := ...
> dk2duu := ...
> dk2duv := ...
> $dk2duz$:= ...
> dk2uu := ...
> $dk2uv$:= ...
> $dk2uz$:= ...
> dk2Z := ...
> dk2Y := 0
> dk2X := ...
> *промежуточные коэффициенты*
>
> $$kkuz := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2uz - dk2d3uu\cdot dk1uz)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$
> $$kkduz := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2duz - dk2d3uu\cdot dk1duz)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$
> $$kkd2uz := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2d2uz - dk2d3uu\cdot dk1d2uz)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$
> $$kkd3uz := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2d3uz - dk2d3uu\cdot dk1d3uz)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$
> $$kkd4uz := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2d4uz - dk2d3uu\cdot dk1d4uz)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$
> $$kkuv := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2uv - dk2d3uu\cdot dk1uv)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$
> $$kkduv := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2duv - dk2d3uu\cdot dk1duv)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$
> $$kkd2uv := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2d2uv - dk2d3uu\cdot dk1d2uv)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$
> $$kkuu := \frac{(dk1d3uu\cdot dk2uu - dk2d3uu\cdot dk1uu)}{(dk2d3uu\cdot dk1d3uv - dk1d3uu\cdot dk2d3uv)}:$$

> $kkduu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duu - dk2d3uu \cdot dk1duu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kkd2uu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uu - dk2d3uu \cdot dk1d2uu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kkX := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2X - dk2d3uu \cdot dk1X)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kkY := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2Y - dk2d3uu \cdot dk1Y)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

>

> $kcuz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uz - dk2d3uu \cdot dk1uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcduz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duz - dk2d3uu \cdot dk1duz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcd2uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uz - dk2d3uu \cdot dk1d2uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcd3uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d3uz - dk2d3uu \cdot dk1d3uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcd4uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d4uz - dk2d3uu \cdot dk1d4uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcuv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uv - dk2d3uu \cdot dk1uv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcduv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duv - dk2d3uu \cdot dk1duv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcd2uv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uv - dk2d3uu \cdot dk1d2uv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcuu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uu - dk2d3uu \cdot dk1uu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcduu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duu - dk2d3uu \cdot dk1duu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcd2uu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uu - dk2d3uu \cdot dk1d2uu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcX := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2X - dk2d3uu \cdot dk1X)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> $kcY := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2Y - dk2d3uu \cdot dk1Y)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}$:

> *коэффициенты итоговой системы*

> $K10 := k11uu$:

> $K11 := k11duu$:

> $K12 := k11uv$:

> $K13 := k11duv$:

> $K14 := k11uz$:

> $K15 := k11duz$:

> $K16 := k11d2uz$:

> $K17 := k11d3uz$:

> $K1X := k11X$:

> $K1Y := k11Y$:

>

> $K30 := k22uu$:

> $K31 := k22duu$:

> $K32 := k22uv$:

> $K33 := k22duv$:

> $K34 := k22uz$:

> $K35 := k22duz$:

> $K36 := k22d2uz$:

> $K37 := k22d3uz$:

> $K3X := k22X$:

> $K3Y := k22Y:$

> $K70 := \dfrac{(k3uu + k3d3uv \cdot kkuu + k3d3uu \cdot kcuu + k3d2uu \cdot (k11uu + k22uu))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

>

> $K71 := \dfrac{(k3duu + k3d3uv \cdot kkduu + k3d3uu \cdot kcduu + k3d2uu \cdot (k11duu + k22duu))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K72 := \dfrac{(k3uv + k3d3uv \cdot kkuv + k3d3uu \cdot kcuv + k3d2uu \cdot (k11uv + k22uv))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K73 := \dfrac{(k3duv + k3d3uv \cdot kkduv + k3d3uu \cdot kcduv + k3d2uu \cdot (k11duv + k22duv))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K74 := \dfrac{(k3uz + k3d3uv \cdot kkuz + k3d3uu \cdot kcuz + k3d2uu \cdot (k11uz + k22uz))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K75 := \dfrac{(k3duz + k3d3uv \cdot kkduz + k3d3uu \cdot kcduz + k3d2uu \cdot (k11duz + k22duz))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K76 := \dfrac{(k3d2uz + k3d3uv \cdot kkd2uz + k3d3uu \cdot kcd2uz + k3d2uu \cdot (k11d2uz + k22d2uz))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K77 := \dfrac{(k3d3uz + k3d3uv \cdot kkd3uz + k3d3uu \cdot kcd3uz + k3d2uu \cdot (k11d3uz + k22d3uz))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K7Z := \dfrac{(k3Z)}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K7X := \dfrac{(k3d3uv \cdot kkX + k3d3uu \cdot kcX + k3d2uu \cdot (k11X + k22X))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

>

> $K7Y := \dfrac{(k3d3uv \cdot kkY + k3d3uu \cdot kcY + k3d2uu \cdot (k11Y + k22Y))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

>

> *Уравнения системы* в *каноническом виде* :

> $ode0 := \dfrac{d}{du} y0(u) = y1(u):$

> $ode1 := \dfrac{d}{du} y1(u) = K10 \cdot y0(u) + K11 \cdot y1(u) + K12 \cdot y2(u) + K13 \cdot y3(u) + K14 \cdot y4(u) + K15 \cdot y5(u) + K16 \cdot y6(u) + K17 \cdot y7(u):$

> $ode1p := \dfrac{d}{du} y1(u) = K10 \cdot y0(u) + K11 \cdot y1(u) + K12 \cdot y2(u) + K13 \cdot y3(u) + K14 \cdot y4(u) + K15 \cdot y5(u) + K16 \cdot y6(u) + K17 \cdot y7(u) + K1X \cdot x + K1Y \cdot y:$

> $ode2 := \dfrac{d}{du} y2(u) = y3(u):$

> $ode3 := \dfrac{d}{du} y3(u) = K30 \cdot y0(u) + K31 \cdot y1(u) + K32 \cdot y2(u) + K33 \cdot y3(u) + K34 \cdot y4(u) + K35 \cdot y5(u) + K36 \cdot y6(u) + K37 \cdot y7(u):$

> $ode3p := \dfrac{d}{du} y3(u) = K30 \cdot y0(u) + K31 \cdot y1(u) + K32 \cdot y2(u) + K33 \cdot y3(u) + K34 \cdot y4(u) + K35 \cdot y5(u) + K36 \cdot y6(u) + K37 \cdot y7(u) + K3X \cdot x + K3Y \cdot y:$

> $ode4 := \dfrac{d}{du} y4(u) = y5(u):$

> $ode5 := \dfrac{d}{du} y5(u) = y6(u):$

> $ode6 := \dfrac{d}{du} y6(u) = y7(u):$

> $ode7 := \dfrac{d}{du} y7(u) = K70 \cdot y0(u) + K71 \cdot y1(u) + K72 \cdot y2(u) + K73 \cdot y3(u) + K74 \cdot y4(u) + K75 \cdot y5(u) + K76 \cdot y6(u) + K77 \cdot y7(u):$

```
> ode7p := d/du y7(u) = K70·y0(u) + K71·y1(u) + K72·y2(u) + K73·y3(u) + K74·y4(u)
      + K75·y5(u) + K76·y6(u) + K77·y7(u) + K7X·x + K7Y·y + K7Z·z :
>
> odesys := ode0, ode1, ode2, ode3, ode4, ode5, ode6, ode7 : -однородная система

> odesysP := ode0, ode1p, ode2, ode3p, ode4, ode5, ode6, ode7p : - система с нагрузкой
>
> Задание радиусов оболочки :
> u1 := 3.1 : u2 := 7.4 :
>
> Искомые функции :
> fncs := {y0(u), y1(u), y2(u), y3(u), y4(u), y5(u), y6(u), y7(u)} :
> Прямой ход прогонки :
>
> ics1 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 1, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0,
      y7(u1) = 0 :
> YY1 := dsolve({odesys, ics1}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :
> YY10 := subs(YY1, y0(u)) :
> YY11 := subs(YY1, y1(u)) :
> YY12 := subs(YY1, y2(u)) :
> YY13 := subs(YY1, y3(u)) :
> YY14 := subs(YY1, y4(u)) :
> YY15 := subs(YY1, y5(u)) :
> YY16 := subs(YY1, y6(u)) :
> YY17 := subs(YY1, y7(u)) :
>
> ics3 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 1, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0,
      y7(u1) = 0 :
> YY3 := dsolve({odesys, ics3}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :

> YY30 := subs(YY3, y0(u)) :
> YY31 := subs(YY3, y1(u)) :
> YY32 := subs(YY3, y2(u)) :
> YY33 := subs(YY3, y3(u)) :
> YY34 := subs(YY3, y4(u)) :
> YY35 := subs(YY3, y5(u)) :
> YY36 := subs(YY3, y6(u)) :
> YY37 := subs(YY3, y7(u)) :
>
> ics6 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 1,
      y7(u1) = 0 :
> YY6 := dsolve({odesys, ics6}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :

> YY60 := subs(YY6, y0(u)) :
> YY61 := subs(YY6, y1(u)) :
> YY62 := subs(YY6, y2(u)) :
> YY63 := subs(YY6, y3(u)) :
> YY64 := subs(YY6, y4(u)) :
> YY65 := subs(YY6, y5(u)) :
> YY66 := subs(YY6, y6(u)) :
> YY67 := subs(YY6, y7(u)) :
```

```
>
> ics7 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0,
    y7(u1) = 1 :
> YY7 := dsolve({odesys, ics7}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :

> YY70 := subs(YY7, y0(u)) :
> YY71 := subs(YY7, y1(u)) :
> YY72 := subs(YY7, y2(u)) :
> YY73 := subs(YY7, y3(u)) :
> YY74 := subs(YY7, y4(u)) :
> YY75 := subs(YY7, y5(u)) :
> YY76 := subs(YY7, y6(u)) :
> YY77 := subs(YY7, y7(u)) :
>
> icsP := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0,
    y7(u1) = 0 :
> YYP := dsolve({odesysP, icsP}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :

> YYP0 := subs(YYP, y0(u)) :
> YYP1 := subs(YYP, y1(u)) :
> YYP2 := subs(YYP, y2(u)) :
> YYP3 := subs(YYP, y3(u)) :
> YYP4 := subs(YYP, y4(u)) :
> YYP5 := subs(YYP, y5(u)) :
> YYP6 := subs(YYP, y6(u)) :
> YYP7 := subs(YYP, y7(u)) :
> Заполнение матриц :
```

$$> AA := \begin{bmatrix} \mathrm{YY10(u2)} & \mathrm{YY30(u2)} & \mathrm{YY60(u2)} & \mathrm{YY70(u2)} \\ \mathrm{YY12(u2)} & \mathrm{YY32(u2)} & \mathrm{YY62(u2)} & \mathrm{YY72(u2)} \\ \mathrm{YY14(u2)} & \mathrm{YY34(u2)} & \mathrm{YY64(u2)} & \mathrm{YY74(u2)} \\ \mathrm{YY15(u2)} & \mathrm{YY35(u2)} & \mathrm{YY65(u2)} & \mathrm{YY75(u2)} \end{bmatrix} :$$

$$> CP := \begin{bmatrix} \mathrm{YYP0(u2)} \\ \mathrm{YYP2(u2)} \\ \mathrm{YYP4(u2)} \\ \mathrm{YYP5(u2)} \end{bmatrix} :$$

```
> Обратный ход прогонки :
> with(LinearAlgebra) :
> MatrixInverse(AA) :
> CC := MatrixVectorMultiply(MatrixInverse(AA), CP) :
>
> Искомые функции :
> yy0 := YY10·CC(1) + YY30·CC(2) + YY60·CC(3) + YY70·CC(4) − YYP0;
> yy2 := YY12·CC(1) + YY32·CC(2) + YY62·CC(3) + YY72·CC(4) − YYP2;
> yy4 := + YY14·CC(1) + YY34·CC(2) + YY64·CC(3) + YY74·CC(4) − YYP4;
> yy1 := + YY11·CC(1) + YY31·CC(2) + YY61·CC(3) + YY71·CC(4) − YYP1;
> yy7 := + YY17·CC(1) + YY37·CC(2) + YY67·CC(3) + YY77·CC(4) − YYP7;
> yy3 := + YY13·CC(1) + YY33·CC(2) + YY63·CC(3) + YY73·CC(4) − YYP3;
> yy5 := + YY15·CC(1) + YY35·CC(2) + YY65·CC(3) + YY75·CC(4) − YYP5;
> yy6 := + YY16·CC(1) + YY36·CC(2) + YY66·CC(3) + YY76·CC(4) − YYP6;
>
```

> *нахождение функции момента через промежуточные процудуры* :

> $M0 := \textbf{proc}(u);\ \frac{1}{6}\frac{k\,u\left(\left(A^2-\frac{1}{4}\sigma+\frac{1}{4}\right)c^2-\frac{1}{4}A^2u^2(\sigma-5)\right)c^2\,E0\,h^3}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{5/2}A\left(c^2+u^2\right)\left(\sigma^2-1\right)}$ **end proc**:

> $M1 := \textbf{proc}(u);\ -\frac{1}{12}\frac{k\,c^2\,E0\,h^3}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{3/2}A\left(\sigma^2-1\right)}$ **end proc**:

> $Mu2 := \textbf{proc}(u);\ -\frac{1}{12}\frac{1}{\left(A^2u^2+c^2\right)^{7/2}\left(c^2+u^2\right)^{3/2}A^2\left(\sigma^2-1\right)}\left(\left(\left(k^2-\frac{1}{2}\sigma+\frac{3}{2}\right)\left(A^6u^6+3A^4c^2u^4+3A^2c^4u^2\right)+c^{10}k^2+\frac{3}{2}c^{10}-\frac{1}{2}c^6\sigma\right)u\,c\,E0\,h^3\right)$ **end proc**:

> $M3 := \textbf{proc}(u);\ \frac{1}{12}\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma+A^2\right)c\,E0\,h^3}{\sqrt{c^2+u^2}\,\sqrt{A^2u^2+c^2}\,A^2\left(\sigma^2-1\right)}$ **end proc**:

> $M4 := \textbf{proc}(u);\ \frac{1}{12}\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma+A^2\right)c\,E0\,h^3}{\sqrt{c^2+u^2}\,\sqrt{A^2u^2+c^2}\,A^2\left(\sigma^2-1\right)}$ **end proc**:

> $M5 := \textbf{proc}(u);\ -\frac{1}{24}\frac{c^2k^2u^2(\sigma-1)\,E0\,h^3}{\left(A^2u^2+c^2\right)^2\left(c^2+u^2\right)\left(\sigma^2-1\right)}$ **end proc**:

> $M6 := \textbf{proc}(u);\ \frac{1}{12}\frac{\left(\left(-k^2+\sigma\right)c^2+A^2u^2\sigma\right)u\,E0\,h^3}{\left(A^2u^2+c^2\right)^2\left(\sigma^2-1\right)}$ **end proc**:

> *построение графика момента* :

> $plot((Mu0\cdot \mathrm{yy0} + \mathrm{Mu1}\cdot\mathrm{yy1} + \mathrm{Mu2}\cdot\mathrm{yy2} + \mathrm{Mu3}\cdot\mathrm{yy3} + \mathrm{Mu4}\cdot\mathrm{yy4} + \mathrm{Mu5}\cdot\mathrm{yy5} + \mathrm{Mu6}\cdot\mathrm{yy6}), \mathrm{u1}\,..\mathrm{u2})$: