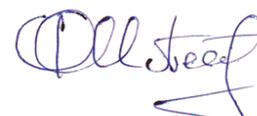


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет»

На правах рукописи



Петренко Филипп Игоревич

Расчет сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны
с учетом геометрической и физической нелинейности

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Трушин Сергей Иванович

Москва – 2017

Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Обзор исследований по теории и численным методам расчета сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны	9
1.1. Практическая реализация сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны	9
1.2. Построение расчетных моделей сплошных и сетчатых оболочек.....	16
1.3. Обзор исследований оболочек в форме гиперболического параболоида	19
1.4. Обзор исследований оболочек в форме однополостного гиперболоида	21
1.5. Численные методы исследования напряженно-деформированного состояния сплошных и сетчатых оболочек	24
1.6. Выводы по главе 1.	30
Глава 2. Геометрия исследуемых сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны	32
2.1. Исследование поверхности пологого гипара и образующих элементов	32
2.2. Исследование поверхности однополостного гиперболоида и образующих элементов.....	37
2.3. Построение уравнений исследуемых оболочек в форме однополостных гиперболоидов	51
2.4. Выводы по главе 2.....	62
Глава 3. Расчет пологих сетчатых оболочек в форме гиперболического параболоида на основе континуальной расчетной модели.....	64
3.1. Нелинейные геометрические соотношения с учетом деформаций поперечного сдвига.....	64
3.2. Физические соотношения для упругих сетчатых оболочек	68
3.3. Функционал Лагранжа и граничные условия	79

3.4. Разностно-квадратурная аппроксимация функционала и метод продолжения решения по параметру	84
3.5. Решение тестовых задач	103
3.6. Расчёт пологих сетчатых гипаров с различными граничными условиями в геометрически нелинейной постановке	108
3.7. Выводы по главе 3.....	113
Глава 4. Исследование несущей способности и устойчивости нелинейно деформируемых сетчатых гиперболоидов вращения.....	115
4.1. Анализ влияния угла наклона образующей на напряженно-деформированное состояние сетчатого гиперболоида с учётом ветровых нагрузок.....	115
4.2. Анализ в линейной постановке влияния формы образующей на напряженно-деформированное состояние и устойчивость сетчатого гиперболоида	121
4.3. Анализ в линейной постановке влияния граничных условий на напряженно-деформированное состояние и устойчивость сетчатого гиперболоида.....	131
4.4. Изучение влияния формы образующей на устойчивость сетчатого гиперболоида в геометрически нелинейной постановке	139
4.5. Влияние физической нелинейности на устойчивость сетчатого гиперболоида.....	153
4.6. Анализ структурной устойчивости сетчатой оболочки в виде однополостного гиперболоида вращения.....	160
4.7. Модальный анализ конструкций с определением собственных частот и форм колебаний	163
4.8. Выводы по главе 4.....	166
Заключение	169
Список литературы	171
Приложение	188
Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.....	188

Введение

Актуальность темы. Расчёт сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны представляет значительный интерес при проектировании зданий и сооружений с пространственными несущими конструкциями в виде гиперболоидов вращения и пологих гиперболических параболоидов (гипаров). Предпосылкой для необходимости углубленного изучения данного вида конструкций служит практика их применения в высотных зданиях, а также при устройстве большепролётных конструкций покрытий.

Хотя линейный расчёт при задании сечений элементам каркасов является основным в практической деятельности, его достоверная точность определяется лишь при малых деформациях в докритической области. С усложнением форм здания, при работе над оптимизацией каркаса, всё чаще требуются расчёты конструкций с учётом геометрической нелинейности. Особенно важное и определяющее значение учет геометрической нелинейности имеет для тонких оболочек, где в силу их работы наиболее опасным является потеря устойчивости с «прохлопыванием» конструкции [106].

С улучшением показателей конструкционных материалов, применением композитных материалов, а также при учёте возможности их работы в упругопластической области, появляется необходимость включения дополнительных характеристик в расчёт и изучения влияния учёта физической нелинейности на показатели несущей способности конструкции.

Таким образом, расчёт конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности имеет достаточно большую значимость и требует особой проработки методики при расчёте сетчатых каркасов поверхностей отрицательной гауссовой кривизны.

Достаточно важным аспектом изучения сетчатых оболочек, является разработка расчётной модели, а также исследование влияния структурных свойств каркаса на его несущую способность. Так, исследование формообразующего

аспекта сетчатых оболочек позволит вывести закономерности создания наиболее рациональных несущих систем для конкретных пространственных форм.

Для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости сетчатого гиперболоида вращения необходима разработка численного алгоритма расчета оболочки с различными формами образующих, определение критических нагрузок и форм потери устойчивости исходной формы равновесия с построением кривых равновесных состояний, собственных частот и форм колебаний, структурной устойчивости при малых возмущениях структуры сетчатой оболочки.

Целью диссертационной работы является изучение оболочек отрицательной гауссовой кривизны типа гиперболического параболоида и гиперболоида вращения на основе расчетов, проводимых с учетом физической и геометрической нелинейности. Решались следующие задачи:

1) Построение математической модели пологих нелинейно-деформируемых сетчатых оболочек в форме гипаров.

2) Разработка программного обеспечения для сетчатой оболочки в виде пологого гипара.

3) Расчёт пологой сетчатой оболочки в форме гиперболического параболоида с различными граничными условиями на основе континуальной расчётной модели в геометрически нелинейной постановке.

4) Анализ влияния морфологии сетчатого гиперболоида вращения, построенного из образующих различных форм, и граничных условий на его НДС, устойчивость, частоты свободных колебаний в линейной и нелинейной постановках.

5) Анализ устойчивости сетчатых гиперболоидов вращения при локальных разрушениях.

Научная новизна работы:

1) Построен вариант функционала Лагранжа геометрически нелинейной теории пологих сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны на основе континуальной модели.

2) Разработана методика расчета сетчатых гипаров в геометрически нелинейной постановке с использованием вариационно-разностного метода и метода продолжения решения по параметру.

3) Изучено влияние морфологии сетчатого гиперboloида вращения на критические нагрузки потери устойчивости исходной формы равновесия, частоты и формы свободных колебаний в линейной и нелинейной постановках.

4) Решены задачи структурной устойчивости сетчатых гиперboloидов вращения с различными видами каркасов при удалении отдельных элементов в статической постановке.

Практическая значимость работы. Разработано программное обеспечение, позволяющее построить кривые равновесных состояний оболочек в форме пологого гиперболического параболоида при различных закреплениях. Произведён анализ влияния различных форм образующих, который позволяет сформировать структуру каркаса в виде гиперboloида вращения, представляющую собой наиболее рациональную несущую систему.

Автором (в составе авторского коллектива) получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663623 (приведено в приложении).

На защиту выносятся:

– разработанная методика, программное обеспечение и результаты расчета сетчатых гипаров в геометрически нелинейной постановке с использованием вариационно-разностного метода и метода продолжения решения по параметру;

– результаты исследования в линейной и нелинейной постановках влияния формы образующей сетчатого гиперboloида вращения на его несущую способность;

– результаты численного анализа НДС и устойчивости исходной формы равновесия с построением кривых равновесных состояний нелинейно деформируемого сетчатого гиперboloида вращения.

Достоверность полученных результатов и обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается:

- корректностью постановки задач в рамках теоретических предпосылок строительной механики, механики деформируемого твёрдого тела;
- построением корректных математических моделей;
- применением апробированных численных методов и использованием верифицированных программных комплексов;
- анализом результатов численного решения тестовых задач.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на научно-технических конференциях:

1. III всероссийская научно-практическая конференция «Устойчивость, безопасность и энергоресурсосбережение в современных архитектурных, конструктивных, технологических решениях и инженерных системах зданий и сооружений», ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет» (НИУ), Москва, 2012.

2. Всероссийская научно-практическая конференция «Повышение эффективности строительного производства на основе новых материалов и инновационных технологий», Рязанский институт (филиал) Московского государственного машиностроительного университета (МАМИ), Рязань, 2013 г.

3. Семнадцатая международная межвузовская научно-практическая конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых, посвященная фундаментальным научным исследованиям в строительстве «Строительство — формирование среды жизнедеятельности», ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Москва, 2014 г.

4. VII международная научно-практическая конференция «Инженерные системы – 2014», Российский университет дружбы народов, Москва, 2014 г.

5. XIX Международная межвузовская научно-практическая конференция студентов, магистрантов, аспирантов и молодых учёных

«Строительство – формирование среды жизнедеятельности», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, 2016 г.

6. Научный семинар кафедры строительной и теоретической механики НИУ МГСУ, Москва, 2016 г.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в 7-ми печатных работах [109-111, 139-142], из них 3 в рецензируемых научных журналах, входящих в Перечень ВАК РФ.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и приложения.

В первой главе приведен краткий обзор работ по теории и численным методам расчета сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны, представлена практическая значимость изучаемой тематики.

Во второй главе приведены основные уравнения оболочек в форме гипаров и гиперболоидов вращения. Показаны структурные свойства оболочек указанного типа, а также выведены выражения, описывающие рассчитываемые оболочки и их образующие элементы.

В третьей главе представлены основные соотношения теории сетчатых оболочек на основе континуальной расчетной модели. Рассматриваются вопросы численного решения задач прочности и устойчивости пологих сетчатых гипаров в нелинейной постановке на основе вариационно-разностного метода и метода продолжения решения по параметру. Исследуется устойчивость гипаров с различным закреплением по контуру.

В четвертой главе изучается влияние формы оболочки в виде однополостного гиперболоида вращения на его НДС и устойчивость. Производится всесторонний анализ изменения характеристик несущей способности, структурной устойчивости каркаса гиперболоида при изменении формы его образующей. Исследуется их влияние на поведение сетчатых оболочек при локальных разрушениях в конструкции.

Глава 1. Обзор исследований по теории и численным методам расчета сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны

1.1. Практическая реализация сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны

Конструкция в виде сетчатой оболочки, в том числе отрицательной гауссовой кривизны, является одной из самых прогрессивных видов несущих систем и используется в различных областях техники [102], при этом современное строительство стало наиболее известной сферой её применения. Интерес к подобным несущим конструкциям объясняется развитием архитектуры последних десятилетий, когда одним из основных компонентов успеха архитектурного объекта являются его формообразующие возможности, позволяющие достигнуть функционального назначения здания с использованием минимального количества потребных ресурсов и энергетических затрат.

Мастера западного стиля «хай-тек», такие как Норманн Фостер, Николас Grimшоу, Сантьяго Калатрава, Филипп Самэн, Ричард Роджерс, Франк О. Гери и многие другие, в своих шедеврах часто используют конструкции, созданные с использованием сетчатых пространственных оболочек, многие из которых являются поверхностями отрицательной гауссовой кривизны [155, 164, 169, 171].

Сетчатые оболочки являются не единственным вариантом возведения пространственных конструкций, однако, свойства таких конструкций, присущие только им, выделяют их среди остальных. Подробная монография о видах и применимости несущих конструкций, описанием их общей работы в статической постановке представлена в книге Х. Энгеля [151].

Чтобы обозначить период возникновения сетчатых конструкций [20], стоит упомянуть наиболее раннее начало их применения. Знаменитый русский механик И. П. Кулибин (1733—1818), известный многими изобретениями в различных областях техники, используя законы общей механики, дал в 1776 г. проект арочного деревянного моста пролетом 300 м через реку Неву в С.-

Петербурге [119]. Следует указать на то, что наибольший пролет деревянного моста того времени, построенного братьями Груберман в 1778 г., достигал лишь 119 м. Данную конструкцию можно назвать первой в мире, использующей сетчатую оболочку в качестве несущей системы, поскольку именно несущая часть покрытия была выполнена в виде перекрёстных деревянных балок. Они обеспечивали устойчивость всей конструкции, сопряжённой из четырёх арок, воспринимали горизонтальные нагрузки, а также нагрузки, передаваемые покрытием.

Сетчатые металлические конструкции впервые были продемонстрированы на Всероссийской промышленной и художественной выставке, проводимой в Нижнем Новгороде в 1896 году, — показательный смотр достижений России в ремесленном производстве и промышленности [25]. Под руководством В.Г. Шухова были возведены павильоны и некоторые объекты экспозиции, при этом все из них были выполнены с применением сетчатых оболочек. Шухов получил великолепную возможность продемонстрировать специалистам всего мира свои новые сетчатые строительные конструкции [113]. Впечатляющий ряд сооружений состоял из четырех павильонов с висячими покрытиями, перекрывающими общую площадь порядка $10\,160\text{ м}^2$, а также из четырех павильонов с сетчатыми (выпуклыми) оболочками с общей перекрываемой площадью $16\,910\text{ м}^2$. Этот ряд завершался сетчатой конструкцией новейшего типа — водонапорной башней в виде гиперboloида. Первая в мире гиперboloидная конструкция, знаменитая водонапорная башня (рис. 1.1.1), затем, после окончания выставки, в конце 1896 года, была перевезена в село Полибино и сохранилась там до последнего времени.

Формы несущих конструкций, в виде однополостного гиперboloида, заложенные Шуховым в конце девятнадцатого – начале двадцатого века, продолжают быть актуальными в настоящее время [39]. Телебашня Гуанчжоу — вторая телебашня в мире по высоте (рис. 1.1.2). Построенная в начале двадцать первого столетия, её высота составляет 600 метров. До высоты 450 метров башня возведена в виде комбинации гиперboloидной несущей сетчатой оболочки и центрального ядра жёсткости.

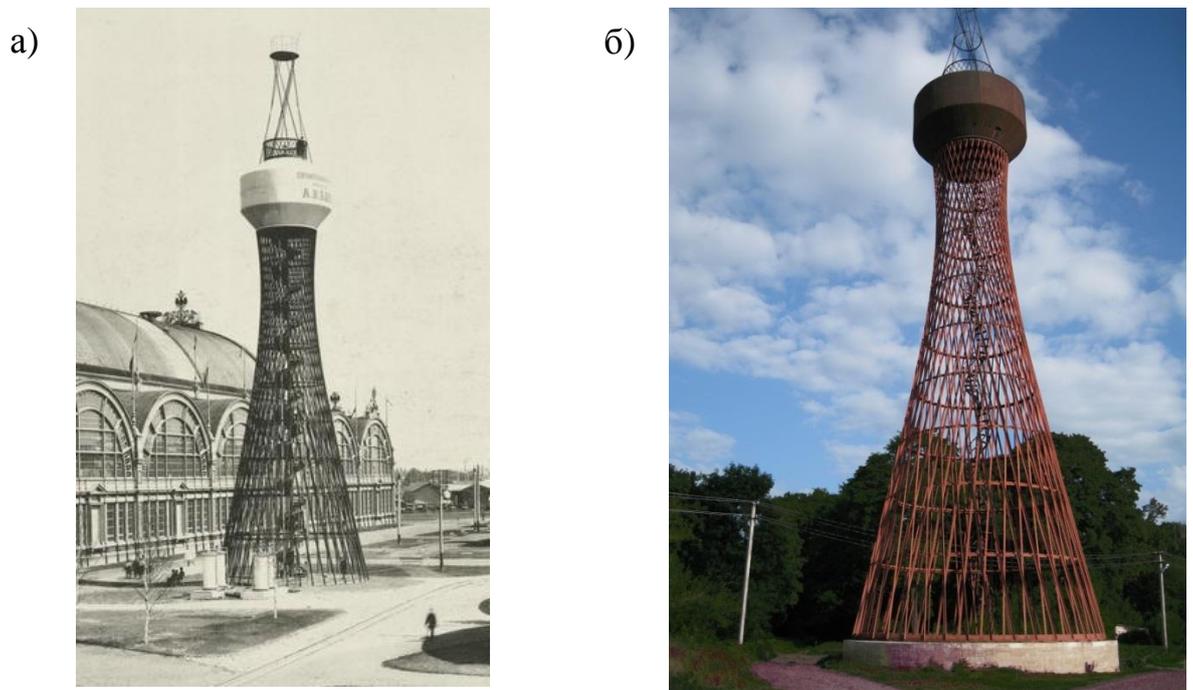


Рис. 1.1.1. Первая в мире сетчатая гиперболоидная башня:
а) на Всероссийской выставке в 1896 г.; б) в настоящее время



Рис. 1.1.2. Телебашня Гуанчжоу

В форме однополостного гиперболоида также выполнена башня порта Кобе (рис. 1.1.3). Высота башни составляет 108 метров. Примечательно, что она не разрушилась во время 7-балльного землетрясения в 1995 году.

Расположенное в столице Катара здание Aspire Tower (рис. 1.1.4) высотой

300 метров, также стоит обозначить, как сетчатую гиперболоидную оболочку вращения. По состоянию на 2015 год оно является высочайшим сооружением города и страны, 90-м по высоте в Азии и 119-м по высоте в мире.



Рис. 1.1.3. Гиперболоидная сетчатая башня в порту Кобе



Рис. 1.1.4. Гиперболоидная конструкция Aspire Tower из стали, формой напоминающая факел

Самое высокое сооружение в Сиднее и второе по высоте в Австралии и в Южном полушарии, Сиднейская башня (рис.1.1.5), также является гиперболоидной конструкцией.

Среди значимых объектов также стоит упомянуть культурно-деловой центр «Хрустальный остров», проект которого разрабатывался Норманом Фостером. Небоскрёб высотой 450 м также должен был стать гиперболоидной сетчатой оболочкой вращения.



Рис. 1.1.5. Centrepoint Tower, Сидней

Приведённые примеры показывают, что конструкции в форме однополостного гиперболоида вращения не теряют своей актуальности, а наоборот, перспективны и нуждаются в изучении.

В настоящей работе рассматриваются также оболочки в форме гиперболического параболоида, иначе – гипара, относящиеся к оболочкам отрицательной гауссовой кривизны, которые достаточно часто применяются в строительной практике. Особое место данный вид конструкций занял с началом массового применения вантовых и пространственных железобетонных конструкций в 20 веке, когда поверхность в виде седловины выполнялась как железобетонная оболочка с армированием или дополнительным усилением вантами.

Достаточно полно практика использования формы гипаров описана в учебниках железобетонных конструкций и литературе по архитектурному проектированию зданий [145]. Основной особенностью является их применимость в качестве элементов большепролётных покрытий. Устройство

оболочки данного типа, в плане имеющей форму параллелограмма, позволяет использовать ее как одиночный элемент повторного применения и создать многолепестковую конструкцию.

Мексиканский и американский архитектор и инженер, Феликс Кандела [154, 163, 171, 179, 180, 185], наиболее часто применял в своих проектах тонкостенные железобетонные оболочки в форме гиперболических параболоидов. Им были построены разрешающие уравнения для расчета мембранных оболочек, что дало возможность определять их параметры НДС и толщину. Среди множества построенных объектов, а их более трёхсот, можно выделить следующие: ресторан в Хочимилько (1957-58) (рис. 1.1.6), открытая капелла в долине Ломас-де-Куэрनावака (1959), завод фирмы «Bacardi» в Куаутитлане (1963) (рис. 1.1.7), церковь Богородицы Гваделупской в Мадриде (1962-63), подводный ресторан в Океанографическом парке «Города искусства и науки» в Валенсии (1994-2002) (рис. 1.1.8).

а)



б)

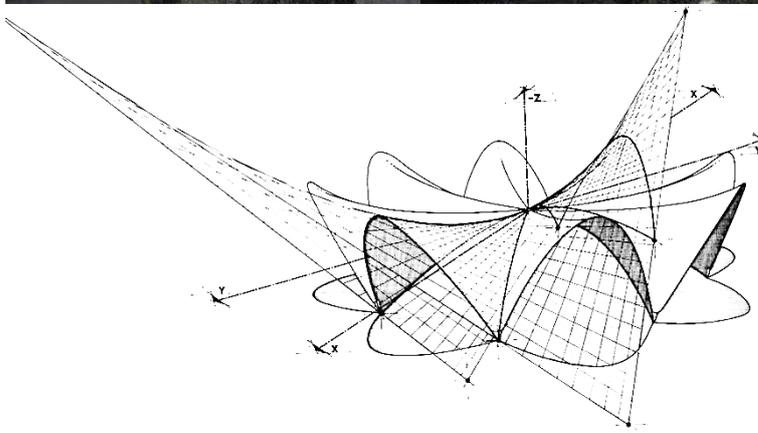


Рис. 1.1.6. Ресторан в Хочемилько (1957-1958 гг.):

а) фото здания; б) эскиз покрытия в форме гипаров



Рис. 1.1.7. Производственное здание Bacardi Rum Factory (1963 г.)



Рис. 1.1.8. Здание в Океанографическом парке «Города искусства и науки» в Валенсии (1994-2002 гг.)

Лаборатория по изучению космических лучей Мексиканского национального автономного университета (1950-1952гг.), стала одной из первых конструкций архитектора (рис. 1.1.9). В отличие от многих применяемых им в дальнейшем континуальных моделей гипаров в покрытии, здесь применена сетчатая оболочка.



Рис. 1.1.9. Лаборатория по изучению космических лучей во время возведения

1.2. Построение расчетных моделей сплошных и сетчатых оболочек

Достаточно интересным с практической точки зрения является изучение влияния строения сетчатой оболочки отрицательной гауссовой кривизны на её несущую способность. Изучение морфологии сетчатой конструкции основывается на понимании процесса проектирования, как способа создания архитектурного объекта удовлетворяющего заданным требованиям. При этом необходимо соотносить прочность, функциональность, эстетические характеристики с общей конструктивной рациональностью объекта, к характеристикам которой необходимо отнести экономичность выбранного конструктивного решения в сравнении с иными возможными системами. Конечно, важными составляющими любого проектного решения являются их экологичность, энергетическая эффективность и иные показатели, но основа последних закладывается лишь при грамотном проектировании несущей системы.

На несущую способность сетчатой оболочки, влияют два основных фактора: форма самой оболочки и форма образующих её элементов. Изменение формы образующих в сетке напрямую влияет на критические нагрузки, внутренние напряжения и собственные частоты колебаний.

Все исследования в области сетчатых конструкций можно отнести к одному

из двух направлений: исследования, основанные на дискретной расчётной модели, и исследования, основанные на континуальной расчётной модели [7]. Работы, относящиеся к каждому из этих двух направлений, удачно дополняют друг друга.

В соответствии с дискретной расчётной моделью сетчатая оболочка рассматривается как пространственная стержневая система. С увеличением количества узлов и стержней существенно возрастают трудности численной реализации подобной схемы. Эти обстоятельства привели к разработке различных подходов к расчету сложных стержневых систем на базе дискретной модели. Среди них, наиболее эффективными методами является метод суперэлементов, метод подконструкций, метод "конденсации", метод обобщенных неизвестных и метод дискретных конечных элементов, позволяющие существенно снизить порядок разрешающей системы уравнений и рассмотренные в работах В.А. Андропова [8, 9], О.В. Гурова [9, 47], В.А. Игнатъева [63-65, 71, 72], А.К. Касумова [73-74], В.М. Меланича [95]. Наиболее полно это направление представлено работами В.А. Игнатъева и его учеников.

Континуальная модель используется при расчете сетчатых оболочек, когда расстояния между узлами достаточно малы, по сравнению с размерами системы. За расчетную модель принимается некоторая эквивалентная сплошная оболочка. В этом случае важным является вопрос построения корректной математической модели континуальной оболочки, характеристики которой отображали бы как можно точнее геометрические и физические свойства реальной сетчатой системы. Существенный вклад в это направление внесли Г.И. Пшеничников [118], разработавший наиболее полно теорию тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок на основе гипотез Кирхгофа-Лява, и его ученики Байтуреев К. М. [10], Г.И. Беликов [14-17], В.И. Волченко [27], В.В. Кузнецов [87], В.В. Пономарев [115] и др.

Оба подхода к задаче расчетных моделей сетчатых оболочек обладают определенными преимуществами и недостатками. Применение дискретной модели сетчатой оболочки необходимо при сильно разреженном шаге сетки,

когда континуальная модель получить корректные результаты не позволяет. Преимуществом континуальной модели перед дискретной является возможность использования теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии, облегчающих формулировку задач и их решение. При получении решения на основе континуальной модели, точность результатов зависит от густоты сетки и характера внешних воздействий. Область применимости такой расчетной модели достаточна широка.

Существует множество работ, где сравниваются результаты, полученные с помощью расчётов с заданием модели в виде дискретных и континуальных оболочек. Среди них можно отметить работы С.П. Тимошенко [134], А.Р. Ржаницына [120], К.К. Муханова [100], Г.И. Пшеничникова [118], В.В. Волченко [27], В.В. Пономарева [115], Л.А. Розина [122], А.А. Тарасова [132] и др.

Основанные на дискретной и континуальной моделях, расчёты сетчатых оболочек, успешно развиваются и совершенствуются, взаимно дополняют и обогащают друг друга.

Теории оболочек и методам расчета тонкостенных конструкций посвящено большое число работ. Среди них в первую очередь надо назвать работы С.А. Амбарцумяна [4], А.А. Амосова [7], В.В. Болотина [19], В.З. Власова [26], А.С. Вольмира [28-30], Р.Ф. Габбасова [32, 33], К.З. Галимова [34], А.Л. Гольденвейзера [37], Э.И. Григолюка [42-44], А.Н. Гузя [46], В.Н. Иванова [59, 84], Н.В. Колкунова [75], С.Н. Кривошапка [59, 82-85, 175], А.И. Лурье [90, 91], Г.А. Мануйлова [92, 93], С.Б. Косицына [80, 81, 92], И.Е. Милейковского [96-98], Х.М. Муштари [101], В.В. Новожилова [103], А.Р. Ржаницына [120], С.П. Тимошенко [134, 135] и др.

Классическая теория оболочек не является достаточно полной и требует ряда уточнений. На свободном крае оболочки, при использовании классической теории, не выполняется пять статических условий, поэтому вводится понятие обобщенной поперечной силы. В ряде исследований предлагаются уточнения классической теории оболочек, на основе применения моделей, менее жестких, чем классические. Наибольшее распространение получила сдвиговая модель С.П.

Тимошенко [134, 135]. Согласно данной модели нормальный элемент оболочки после деформирования не остается перпендикулярным к деформированной срединной поверхности, а поворачивается на некоторый угол, при этом не искривляясь и не изменяя своей длины, то есть считается, что поперечный сдвиг равномерно распределяется по толщине оболочки. Изложению основ теории упругих сплошных оболочек и пластин на базе сдвиговой модели посвящены исследования С.А. Амбарцумяна [4], Б.Л. Пелеха [107], К.З. Галимова [34], В.В. Васильева [24], А.Н. Гузя [46], В.А. Заруцкого [53-55], В.В. Карпова [67, 70-72], И.Е. Милейковского [96-98] и других.

Исследованию сетчатых и подкреплённых оболочек посвящены работы Г.И. Беликова [15], П.С. Белоусова [18], В.А. Бунакова [21], В.В. Васильева [24], А.С. Вольмира [28-30], О.А. Грачева [40], Г.И. Гребенюка [41], А.Н. Гузя [46], С.В. Дубкова [49], В.А. Заруцкого [5, 6, 53-55], О.В. Игнатъева [71-72], В.В. Карпова [67, 70-72], А.К. Касумова [73-74], Л.В. Лозы [89], К.К. Муханова [100], Б.А. Пушкина [117], В.И. Савинова [124], И.Ф. Сытника [131], Chen-Hong-Ji [156], С.Т. Лоу [170] и др.

Расчет нелинейно деформируемых сетчатых оболочек, в том числе отрицательной гауссовой кривизны, на основе уточненной теории с учетом деформаций поперечного сдвига представляет собой одну из актуальных задач строительной механики оболочечных конструкций и представляет несомненный теоретический и практический интерес.

1.3. Обзор исследований оболочек в форме гиперболического параболоида

Задачи расчёта конструкций в форме гиперболического параболоида на воздействие различных видов нагрузок широко распространены в строительном проектировании. Чаще всего рассматривается сетка с заранее заданными параметрами для удобства изучения её свойств.

В работе [98] приведена схема расчёта пологих оболочек, очерченных по

линейчатым поверхностям с плоскостью параллелизма. Дан пример расчёта одиночного гипара. Оболочка рассчитывалась как пологая по моментной теории вариационным методом перемещений.

В качестве примера, в книге [150], исследуется квадратный гиперболический параболоид, ограниченный характеристическими линиями поверхности. Поскольку оболочка несимметрична, для анализа взята сетка 8×8 для оболочки в целом. Приведены эпюры прогибов w , нормальных усилий N_y и изгибающих моментов M_y в среднем сечении оболочки.

Автором исследования в книге [144] описаны опыты, проводимые с оболочками положительной (эллиптический параболоид) и отрицательной (гиперболический параболоид) гауссовой кривизны. Исследование модели с различными граничными условиями. Приведены формы выпучивания оболочки в виде гипара и графики нагрузка-прогиб в центре для всех испытаний.

Тимашевым С.А., в книге [133], приведены уравнения равновесия несовершенных гипаров при постоянных кривизнах с краями, отнесёнными к линиям главным кривизн. Рассмотрено в линейной поставке поведение пологого гипара в виде скрученного четырёхугольника, нагруженного равномерно распределённой нагрузкой. Считается, что в докритическом состоянии оболочка находится под действием безмоментных постоянных усилий. Даны уравнения равновесия и совместности деформаций для анизотропной полой оболочкой. Получено значение критической нагрузки $q_{кр}$. Следует отметить, что данную задачу следует рассматривать в более точной постановке, считая докритическое состояние моментным, а прогибы сопоставимыми с толщиной оболочки.

В статье [69] применяется метод Леви для расчёта оболочек типа гипара, имеющих жёсткое защемление или шарнирно-неподвижное закрепление по всему контуру. Как известно, в этих случаях непосредственно применить метод Леви невозможно. Однако здесь он используется совместно с методом сил, основная система которого выбирается такой, чтобы в ней было возможно применение данного подхода. Такое распространение метода Леви ранее было использовано С.П. Тимошенко для расчёта пластинок с защемлёнными краями. Приведены

эпюры w , M , N , Q и S для жёсткого защемления и шарнирно-неподвижного закрепления при $f/h=30$ (в безразмерной форме). Исследована сходимость решений.

В работе [48] вариационным методом перемещений дан расчёт оболочки отрицательной гауссовой кривизны типа гипара. Представлены результаты численного решения задачи.

В известной работе Г. Рюле [123] описывается характер НДС в оболочке-гипаре. При надлежащем выборе геометрии поверхности, гипар, как и другие оболочки двойкой кривизны, обладает высокой несущей способностью. Устойчивость гипара обеспечивается благодаря кривизне разного знака в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Прам А. [174] даёт указание о том, что изгибающими моментами в оболочке можно пренебречь, если отношение высоты подъёма оболочки к длине её стороны в плане более 0,2.

Определение величины критической нагрузки $q_{кр}$ дается также в работе [176]. Задача решается в линейной постановке с использованием уравнений Э. Рэйсснера.

Обзор методов расчёта оболочек-гипаров различных форм дан в книге [165].

Оболочки-гипары отличаются значительной устойчивостью благодаря разнозначности кривизн в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

1.4. Обзор исследований оболочек в форме однополостного гиперboloида

Некоторые исследования однополостного гиперboloида посвящены исключительно вопросам его построения. При этом в отличие от работ по аналитической геометрии [66], в них изучается вопрос построения сетки оболочки с учётом её дальнейшего удобства в применении. В работе [50] была поставлена задача по входным параметрам башни в виде однополостного гиперboloида

вращения произвести расчет всех необходимых характеристик: длины прямых образующих гиперboloида, угла их наклона к основанию, точки соединения образующих. По входным параметрам написаны уравнения поверхности вращения и пересекающие ее вертикальные плоскости, проходящие через точки горлового эллипса. Решение реализовано в виде программы в Delphi 7.0.

Практическое применение гиперboloидных конструкций чаще всего встречается в сфере теплоэнергетики, где оболочка данной формы является континуальной. В монографии [88] рассмотрены конструкции промышленных градирен и методы определения режимных и конструктивных характеристик.

В статье [79] представлены результаты работы по оценке силового воздействия, производимого потоком атмосферного воздуха при обтекании башенной испарительной градирни на ЛАЭС-2. Оценка проводилась с помощью метода конечных объёмов к расчёту внешнего пространственного турбулентного обтекания одиночной градирни неоднородным по высоте потоком атмосферного воздуха, параметры которого для данной местности были заимствованы из СНиП и задавались в качестве граничных условий при формулировке расчётных моделей. Проведено сравнение с консервативными рекомендациями СНиП для подобных сооружений.

На основе разработанной модели башенной градирни в вычислительном комплексе SCAD, в статье [52] представлены оценки усилий в элементах, перемещений узлов и реакций опор. Проведена проверка прочности, устойчивости и гибкости конструктивных элементов в соответствии с нормативной документацией. По результатам расчетов проведены корректировки конструктивной схемы градирни и жесткостных характеристик некоторых элементов. Проведены дополнительные расчеты стального каркаса с учетом этапности возведения конструкции, аэродинамический расчет на воздействие ветрового потока.

В книге Филина А.П. [143] рассматривается вопрос расчёта гиперboloида вращения по безмоментной теории. Приведены требования к применению безмоментной теории при расчёте однополостного гиперboloида образованного

разными семействами образующих. Изучен вопрос допустимых граничных условий для оболочки данного вида.

В книге Пшеничнова Г.И. [118] в качестве примера рассматривается сетчатый гиперболоид, образованный семействами двух прямолинейных образующих и имеющий круговые обвязки по высоте. В качестве результатов расчёта показаны графики изменения внутренних продольных сил и изгибающих моментов, возникающих в оболочке, при действии постоянной нагрузки в виде собственного веса конструкции, а также изменении соотношения геометрических параметров гиперболоида, при этом радиусы оснований гиперболоида не изменяются.

Достаточно подробно изучается расчёт сетчатых и подкреплённых оболочек в работах Беликова Г. И. Весьма значимыми и интересными по своему содержанию являются расчёты сетчатого гиперболоида, основанные на континуальной расчётной модели, показанные в трудах Беликова Г. И. [14-17], где всесторонне изучается сетчатый гиперболоид вращения на различные виды нагружения. Выполнены расчёты на действие собственного веса, внешнего давления и ветровой нагрузки. Среди прочих, в трудах Беликова Г.И. рассмотрены задачи рационального проектирования, частично нашедшие своё отражение в работе Пшеничнова Г.И. [118]. Предложена методика рационального проектирования геометрических параметров гиперболической градирни при свободных колебаниях. Приводится обоснование точности и достоверности полученных результатов различными методами. Дана оценка влияния поперечного сдвига на напряжённо-деформированное состояние оболочки.

В статье [16] рассмотрены вопросы оптимального проектирования градирен в форме однополостного гиперболоида вращения, континуальной оболочки, при свободных колебаниях. Установлено, что требования к оболочке по частоте свободных колебаний хорошо согласуются с требованиями по условию прочности. В качестве примера рассматривается упругая изотропная гиперболическая градирня.

Дополнительно Беликовым Г.И. проведены исследования свободных и

вынужденных колебаний сетчатого гиперболоида вращения, рассмотрены задачи определения рациональных параметров оболочки, при которых низшая частота свободных колебаний будет максимальной. Дана оценка влияния инерции вращения, тангенциальных сил инерции, крутильной и сдвиговой жесткостей на частоты собственных колебаний оболочек. Показана возможность использования теории трансверсально-изотропных оболочек для исследования свободных колебаний сетчатых оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига.

В указанных выше работах также рассматривается задача устойчивости сетчатого гиперболоида вращения при осевом сжатии. Рассмотрены задачи определения рациональных параметров оболочки, при которых критическая нагрузка будет максимальной.

Достаточно много работ выполнено зарубежными авторами, где также рассматриваются задачи устойчивости и колебаний гиперболических оболочек. В работах [161, 162] изучается (экспериментально) выпучивание гиперболической оболочки вращения (модель градирни) под действием ветровой нагрузки и сосредоточенной силы.

1.5. Численные методы исследования напряженно-деформированного состояния сплошных и сетчатых оболочек

Расчет конструкций в форме оболочек и пластин приводит к решению задач, описываемых нелинейными дифференциальными выражениями в частных производных (уравнения равновесия или функционалы). Поскольку точные аналитические решения подобных задач чаще всего получить невозможно, большое теоретическое и практическое значение приобретает разработка и исследование численных методов и алгоритмов применительно к ЭВМ.

В строительной механике, в том числе в теории оболочек, решение задач выполняется с помощью методов, которые в общем случае можно разделить на три вида:

1. Методы решения краевой задачи, используемые для нахождения решения

дифференциальных уравнений в совокупности с граничными условиями: метод Бубнова-Галеркина, метод В.З.Власова, метод конечных разностей (МКР).

2. Методы минимизации энергетических функционалов, используемые для нахождения экстремального (минимального) значения полной потенциальной энергии деформируемой системы: метод Ритца, вариационно-разностный метод (ВРМ), метод конечных элементов (МКЭ).

3. Методы линеаризации, сводящие нелинейную задачу к решению последовательности линейных задач: метод последовательных нагружений, метод продолжения решения по параметру, метод упругих решений, метод малого параметра, метод Ньютона-Рафсона и другие.

С различными типами граничных условий было решено множество задач в тригонометрических рядах, методом Бубнова-Галеркина [26,28,67], В.З.Власова [86,112], малого параметра [83] в основном в невысоких (одном-двух) приближениях.

Во многом эффективность методов Бубнова-Галеркина и Ритца зависит от подбора аппроксимирующих функций и числа варьируемых параметров. Увеличение числа варьируемых параметров приводит к высокому порядку системы нелинейных алгебраических уравнений, решение которых производится только на ЭВМ. Все отмеченные выше методы, как правило, не позволяют получить решение задачи для областей, имеющих сложную геометрию и состоящих из различных типов материалов.

Метод конечных разностей, или иначе метод сеток, среди численных методов решения задач строительной механики занимает важное место [147]. Применение этого метода дано в работе П.М. Варвака и Л.П. Варвака [23]. В геометрически нелинейной постановке исследование оболочек с помощью МКР приведено в монографии А.С. Вольмира [29]. Для решения задач изгиба прямоугольных и круглых пластин и пологих куполов М.С. Корнишиным был предложен вариант МКР повышенной точности [77]. Жестко защемленные и шарнирно-неподвижно опертые по контуру пологие цилиндрические оболочки рассматривались в работе М.С. Корнишина и Н.Н. Столярова [78]. Исследование

гибких пластин и оболочек, имеющих в плане сложную конфигурацию, составленную из прямоугольников, выполнено Н.П. Петуховым [114], при этом использовался МКР в сочетании с методом блочной итерации по Гауссу, что позволило свести решение исходной системы алгебраических уравнений высокого порядка к последовательности решений систем более низкого порядка. Решение задачи о равновесии прямоугольной мембраны в пределах и за пределом упругости методом конечных разностей представлено в работе А.С. Григорьева [45]. При формулировке задачи предполагалось, что прогибы мембраны являются большими в сравнении с толщиной.

М.С. Корнишиным был выполнен сравнительный анализ решений по методам Ритца, Бубнова-Галеркина и конечных разностей и показано, что для пластинок и пологих оболочек МКР является наиболее экономичным [77]. Однако он имеет ряд определенных недостатков, связанных, в частности, с трудностями при решении задач на областях сложной формы, отличной от прямоугольной. Кроме того, матрица системы линейных алгебраических уравнений в общем случае не обладает симметричной ленточной структурой, как это имеет место в методе конечных элементов, что приводит к необходимости хранить большие массивы в памяти ЭВМ.

Одним из наиболее эффективных современных методов численного решения инженерных задач с применением ЭВМ является метод конечных элементов. Данный метод разрабатывался на основе методов строительной механики стержневых систем, и в частности, метода перемещений, а также как некоторая разновидность вариационно-разностного метода решения задач математической физики. Основы метода конечных элементов были заложены в работах Хренникова [166], Мак Генри [172], Р.Куранта [158], Тернера, Клафа, Мартина и Топпа [182], Аргириса [152]. При этом сам термин “конечный элемент” впервые появился в работе Клафа [157]. Постепенно оба эти направления стали объединяться друг с другом. Описание основ МКЭ и его применение к задачам теории упругости, теории пластин и оболочек, гидро- и аэродинамики, теплопроводности, расчету стержневых систем, мембранных

конструкций и многим другим задачам дано в работах О. Зенкевича [56], Д. Одена [105], Г. Стренга и Д. Фикса [129], Л. Сегерлинда [125], Р. Галлагера [35], К.-Ю. Бате и Е. Вилсона [13], Д. Норри и Ж. де Фриза [104], В.А. Постнова и И.Я. Хархурима [116], В.Н. Сидорова [38, 57, 96, 126], Л.А. Розина [122], Р.Б. Рикардса [121], А.В. Александрова, Б.Я. Лащеникова и Н.Н. Шапошникова [2], Р.А. Хечумова, Х. Кепплера и В.И. Прокопьева [146], С.И. Трушина [136, 137] и др.

Метод конечных элементов в решении нелинейных задач, связанных с большими перемещениями, был впервые применен Тернером, Диллом, Мартином и Меллошем [183] в конце 50-х годов, при этом для линеаризации задачи ими использовался метод приращений. М. Тернером [181] был разработан алгоритм МКЭ в форме метода перемещений при больших деформациях. Этот подход был развит в работе Р. Галлагера и др. [168], причем при построении основных соотношений для конечного элемента использовался принцип стационарности полной потенциальной энергии. Аналогичная методика использовалась Шмитом, Богнером, Фоксом [149], при этом геометрическая нелинейность учитывалась в выражении для потенциальной энергии с помощью нелинейных соотношений между деформациями и перемещениями. Решение задачи находилось в результате численного поиска минимума полной потенциальной энергии системы.

Расчет на устойчивость оболочек с помощью МКЭ проведен Дж. Коннором и Р. Морином [76]. Применение метода возмущений позволило исследовать поведение конструкций в закритической стадии. В работе Р. Галлагера [167] на основе численной методики, сочетающей в себе МКЭ и метод Ньютона, исследована устойчивость сферических оболочек на прямоугольном плане.

Анализ численных алгоритмов решения геометрически нелинейных прикладных задач теории упругости методом конечных элементов проведен в работе Г.В. Исаханова, Х. Кепплера, В.В. Киричевского и А.С. Сахарова [68]. Изучены вопросы о влиянии матрицы геометрической жесткости на сходимость метода и эффективность применения модифицированного процесса Ньютона-Канторовича в расчете различных видов пластин и оболочек.

В настоящее время метод конечных элементов в перемещениях занимает, безусловно, лидирующее положение в строительной механике и механике деформируемого твердого тела и в ближайшие годы будет, по всей видимости, основным аппаратом дискретизации рассчитываемых объектов. МКЭ отличается широкой областью применимости, инвариантностью по отношению к геометрии конструкции и физическим характеристикам материалов, относительная простота учета взаимодействия конструкций с окружающей средой (механические, температурные, коррозионные воздействия, граничные условия и т.д.), высокая степень приспособляемости к автоматизации всех этапов расчета. Метод имеет простую физическую интерпретацию и легко просматриваемую связь с методами Ритца и перемещений, которые довольно часто используются в механике сплошных сред и строительной механике.

На базе метода конечных элементов разработано большое количество программных комплексов, в том числе прикладного характера для решения задач только строительной направленности, общей механики твёрдого деформируемого тела, авиационной и космической техники, судостроения и т.д. Наиболее известными в инженерной практике стали Лира, SCAD, STARK ES, MicroFE, ANSYS, MSC/NASTRAN, ABAQUS и др.

Среди современных работ по МКЭ и вычислительным комплексам на его основе можно выделить работы следующих авторов: А.А. Алямовский [3], К.А. Басов [12], Городецкий А.С. [38], А.В. Перельмутер [108], С.И. Трушин [136, 137], Д. Г. Шимкович [148].

Одним из подходов к расчету с учетом физической и геометрической нелинейности является численная процедура, основанная на стержневой аппроксимации конструкции. Данный алгоритм и вычислительная программа предложены в работе В.Б. Зылева [58].

К наиболее эффективным численным методам решения задач механики деформируемого твердого тела относится вариационно-разностный метод [127], тесно связанный с методом конечных элементов.

В работе Д.В. Вайнберга и А.Л.Синявского [22] применяется метод,

основанный на дискретизации выражения энергии деформации системы и переходе от функциональных соотношений к системам алгебраических уравнений. Рассматривается широкий класс линейных и нелинейных задач механики деформируемых континуальных и дискретных тел сложной конфигурации (коробчатые системы, пластины, оболочки, массивы и др.).

Обширные исследования вариационных проблем теории упругости и теории оболочек, различные вариационно-разностные схемы, алгоритмы и программы расчета гладких и подкрепленных ребрами тонкостенных конструкций представлены в работах Н.П. Абовского, Н.П. Андреева, А.П. Деруги, Л.Н. Енджиевского [1, 51].

Для численного решения задач механики деформируемого твердого тела в работе А.Б. Золотова и В.Н. Сидорова [57] был предложен эффективный метод алгоритмизации, который в дальнейшем с большим успехом применялся их учениками и коллегами при решении одно-, двух- и трехмерных линейных и нелинейных задач, как научного, так и практического направления.

В монографии И.Е. Милейковского и С.И. Трушина [97] приведен ряд алгоритмов численного решения геометрически и физически нелинейных задач расчета тонкостенных конструкций, базирующихся на ВРМ. Рассмотрены вопросы прочности и устойчивости изотропных и ортотропных оболочечных конструкций в рамках предложенного варианта уточненной технической теории.

Вариационно-разностный метод имеет ряд несомненных достоинств:

1. Метод дает возможность рассчитывать тонкостенные конструкции с различного рода особенностями (изломами поверхности, отверстиями, подкреплениями и пр.).

2. В ходе численной реализации, весьма существенную роль играет тот факт, что вариационная постановка задачи приводит к снижению порядка производных по сравнению с формулировкой задачи в виде дифференциальных уравнений равновесия.

3. Матрица системы алгебраических уравнений имеет редко заполненную квазидиагональную структуру, что ускоряет решение задачи и сокращает

требуемый объем машинной памяти.

4. Подход, основанный на использовании ВРМ, позволяет построить эффективный и гибкий алгоритм, который дает возможность легко переходить от одной задачи к другой, внося в программу расчета небольшие изменения, связанные в основном лишь с записью конкретного функционала и аппроксимирующих функций.

По сравнению с МКР ВРМ значительно упрощает реализацию граничных условий и, как уже говорилось выше, приводит к хорошо обусловленным симметричным матрицам коэффициентов систем алгебраических уравнений.

В отличие от МКЭ ВРМ позволяет обойти трудности, связанные с громоздким численным интегрированием, обеспечением совместности соседних элементов, выделением перемещения конструкции как жесткого целого.

Анализируя в целом различные численные методы расчета тонкостенных конструкций, следует отметить, что для данного класса задач наиболее эффективными являются метод конечных элементов и вариационно-разностный метод. Высокая степень универсальности и ориентированность на численную реализацию позволяют успешно использовать эти подходы для решения задач как научного, так и прикладного направления.

1.6. Выводы по главе 1.

На основе выполненного аналитического обзора по тематике настоящего диссертационного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Оболочки отрицательной гауссовой кривизны достаточно актуальны при применении в строительной практике. Гиперболоидные конструкции представляют собой одну из самых применяемых конструктивных форм каркасов в высотном строительстве. Сетчатые оболочки данной формы позволили сконструировать наиболее высокие здания, существующие в настоящее время.

2. В связи с развитием компьютерных технологий для анализа показателей несущей способности оболочек наиболее эффективны численные методы, в

частности метод конечных элементов в сочетании с методом продолжения решения по параметру.

3. Вариационно-разностный метод решения задач строительной механики оболочечных конструкций позволяет построить эффективные численные процедуры для анализа устойчивости с учетом геометрической нелинейности.

4. В целях получения наиболее достоверных характеристик НДС и устойчивости пространственных конструкций в форме сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны, необходимо учитывать в расчетах возникновение пластических деформаций материала и геометрическую нелинейность.

Глава 2. Геометрия исследуемых сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны

2.1. Исследование поверхности пологого гипара и образующих элементов

Гиперболический параболоид (гипар) является поверхностью второго порядка отрицательной гауссовой кривизны. Чтобы изучить основные свойства гипаров, которые определяют их практическую значимость для использования в качестве несущих конструкций, рассмотрим для начала некоторые общие сведения.

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (2.1.1)$$

где, по крайней мере, один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ отличен от нуля.

Уравнение (2.1.1) называют общим уравнением поверхности второго порядка, а систему координат $Oxyz$ называют общей системой координат.

Для гипара уравнение (2.1.1) может быть представлено в виде:

$$Z(x, y) = c_0xy + c_1x + c_2y + c_3 \quad (2.1.2)$$

где $c_0, c_1, c_2,$ и c_3 – коэффициенты, определяющие поверхность гипара.

В дальнейшем, в расчётной части, будем использовать уравнение (2.1.2) для определения изучаемой поверхности. При этом для определения общих свойств гиперболического параболоида, приведём следующую, известную из линейной алгебры, теорему: для произвольной поверхности, заданной общим уравнением (2.1.1) существует такая декартова прямоугольная система координат $Oxyz$, что в этой системе поверхность имеет уравнение одного из канонических видов.

Исследовать форму поверхности второго порядка, заданную каноническим уравнением, удобнее методом сечения плоскостями. Так, если дано каноническое уравнение, то представление о поверхности можно получить по форме линий

пересечения ее плоскостями: параллельными координатной плоскости Oxy , параллельными координатной плоскости Oyz , параллельными координатной плоскости Oxz . Данный способ будем использовать как для гипара, так и в дальнейшем для определения свойств однополостного гиперboloида.

Поверхность, описываемая каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (2.1.3)$$

где $p > 0$, $q > 0$, называется гиперболическим параболоидом.

Относительно данного гиперболического параболоида система координат $Oxyz$ называется канонической.

Используя метод плоских сечений, представим форму гиперболического параболоида.

Плоскость $z = h$ пересекает гипар (2.1.3) по линии с уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, \quad (2.1.4)$$

т. е. либо с уравнением

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2hp})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2hq})^2} = 1 \quad (2.1.5)$$

(если $h > 0$), либо с уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \quad (2.1.6)$$

(если $h = 0$), либо, наконец, с уравнением

$$\frac{y^2}{(\sqrt{-2qh})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{-2ph})^2} = 1 \quad (2.1.7)$$

(если $h < 0$).

В первом случае эта линия является гиперболой с полуосями $\sqrt{2hq}$, $\sqrt{2hp}$, во втором случае она состоит из двух прямых:

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \quad (2.1.8)$$

а в третьем случае – снова является гиперболой, но уже с полуосями $\sqrt{-2hq}$, $\sqrt{-2hp}$.

Таким образом:

при $h < 0$ плоскость $z = h$ пересекает гиперболический параболоид (2.1.3) по гиперболе с полуосями

$$\sqrt{-2hq}, \sqrt{-2hp}, \quad (2.1.9)$$

монотонно убывающими от $+\infty$ до нуля, когда h возрастает от $-\infty$ до нуля;

при $h = 0$ плоскость $z = h$ пересекает гиперболический параболоид (2.1.3) по паре пересекающихся прямых

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad (2.1.10)$$

при $h > 0$ плоскость $z = h$ пересекает гиперболический параболоид (2.1.3) по гиперболе с полуосями

$$\sqrt{2hq}, \sqrt{2hp}, \quad (2.1.11)$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, когда h возрастает от нуля до $+\infty$.

Обратим внимание на то, что действительные (мнимые) оси гипербол, получающихся при $h < 0$, параллельны мнимым (действительным) осям гипербол, получающихся при $h > 0$.

Плоскость $y = h$ пересекает гипар (2.1.3) по линии с уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (2.1.12)$$

т. е. с уравнением

$$x^2 = 2p \left(z + \frac{h^2}{2q} \right). \quad (2.1.13)$$

Это означает, что плоскость $y = h$ пересекает гиперболический параболоид (2.1.1) по параболе с фокальным параметром p , с вершиной в точке $\left(0, h, -\frac{h^2}{2q} \right)$ и с ветвями, направленными в положительном направлении оси Oz («вверх»).

Аналогично показывается, что плоскость $x = h$ пересекает гиперболический параболоид (2.1.1) по параболе с фокальным параметром q , с вершиной в точке $\left(h, 0, -\frac{h^2}{2p}\right)$ и с ветвями, направленными в отрицательном направлении оси Oz («вниз»).

Отметим, что вершины парабол, получающихся в пересечении с плоскостями $y = h$ (плоскостями $x = h$), принадлежат параболе, получающейся в пересечении с плоскостью $x = 0$ (соответственно с плоскостью $y = 0$).

Поскольку уравнение (2.1.3) не меняется при изменении знаков у x и y , координатные плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида.

Таким образом, гиперболический параболоид – это поверхность, которую образует одна парабола, двигаясь по другой параболе, расположенной относительно первой так, как показано на рис. 2.1.

Гиперболический параболоид является дважды линейчатой поверхностью.

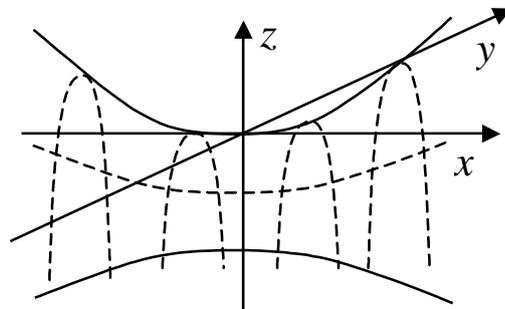


Рис. 2.1.1. Гиперболический параболоид.

Уравнения обоих семейств прямолинейных образующих (правда, в непараметрическом виде) можно получить, представив уравнение (2.1.3) в виде:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z. \quad (2.1.14)$$

Тогда ясно, что любая прямая с уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2k \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{z}{k} \end{cases}, \quad (2.1.15)$$

где $k \neq 0$, а также прямая с уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad (2.1.16)$$

(соответствующими уравнениям (2.1.15) и (2.1.16) при $k = 0$) целиком расположены на параболоиде (2.1.1). Кроме того, при $k = \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) = 0$ прямая (2.1.15) (или (2.1.16), если $k = 0$) проходит через произвольную наперед данную точку $M(x_0; y_0; z_0)$ этого параболоида. Следовательно, прямые (2.1.15) (вместе с прямой (2.1.16)) составляют семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида (2.1.3).

Аналогично показывается, что
прямые

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2k \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{z}{k} \end{cases}, \quad k \neq 0 \quad (2.1.17)$$

вместе с прямой

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad (2.1.18)$$

составляют другое семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида (1).

Свойства прямолинейных образующих гиперболического параболоида во многом аналогичны свойствам прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (см. п. 2.2).

Свойство 1. Через любую точку гиперболического параболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства.

Свойство 2. Любые две образующие гиперболического параболоида, принадлежащие разным семействам, пересекаются и потому компланарны.

Свойство 3. Две образующие гиперболического параболоида, принадлежащие одному семейству, скрещиваются.

Свойство 4. Все образующие гиперболического параболоида, принадлежащие одному семейству, параллельны некоторой плоскости.

2.2. Исследование поверхности однополостного гиперболоида и образующих элементов

Изучение в настоящей работе однополостных гиперболоидов (далее также – гиперболоид) связано с уникальностью их геометрических свойств. Знаменитому русскому инженеру Владимиру Григорьевичу Шухову принадлежит идея использования линейчатого характера однополостного гиперболоида в строительных конструкциях. В. Г. Шухов впервые выполнил конструкции из металлических балок, расположенных так, как расположены прямолинейные образующие однополостного гиперболоида (вращения). Для рассмотрения прочностных характеристик разных моделей данного вида конструкций, а также выполнения их сравнительного анализа, рассмотрим с математической точки зрения поверхность гиперболоида, а также попробуем показать некоторые его свойства.

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, имеющая в некоторой системе прямоугольных координат уравнение вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.1)$$

где $a \geq b > 0$ и $c > 0$. Эта система координат называется канонической (относительно данного гиперболоида), а уравнение (2.2.1) называется каноническим уравнением однополостного гиперболоида.

Для того чтобы определить общую форму гиперboloида, исследуем гиперболу (более подробно рассмотрим её ниже) описываемую уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.2)$$

Если мы начнём вращать её вокруг оси z , то точка $M_0(x_0; 0; z_0)$ будет вращаться по окружности, описываемой системой уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 \\ z = z_0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Подставив эти значения в уравнение гиперболы, получим уравнение однополостного гиперboloида вращения:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.4)$$

Следовательно, гиперboloид (2.2.4) получается из гиперболы расположенной в плоскости Oxz , вращением вокруг оси Oz (являющейся ее мнимой осью).

Это дает уже вполне отчетливое представление о форме гиперboloида (2.2.4) (называемого обычно однополостным гиперboloидом вращения), показанного на рис. 2.2.1.

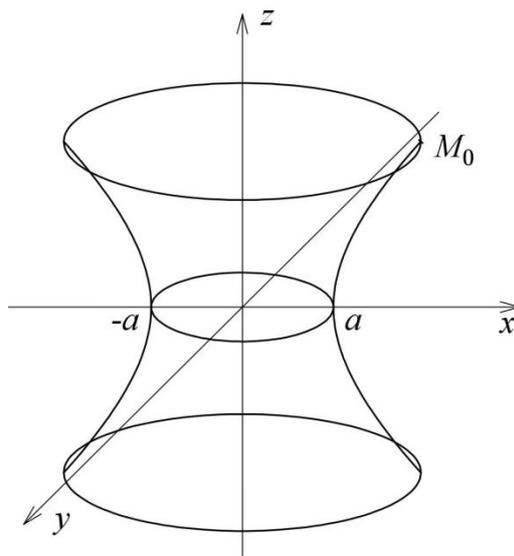


Рис. 2.2.1. Однополостный гиперboloид, образованный вращением гиперболы.

При сжатии к плоскости Oxz с коэффициентом k гиперboloид (2.2.4) переходит, очевидно, в поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ka)^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.5)$$

т.е. (при $k = \frac{b}{a}$) – в гиперboloид (2.2.1). Таким образом, произвольный однополостный гиперboloид (2.2.1) получается из однополостного гиперboloида вращения (2.2.4) сжатием к плоскости Oxz с коэффициентом $\frac{b}{a}$.

Исследуя форму гиперboloида (2.2.1) методом плоских сечений (рис. 2.2.2.), мы немедленно получим, что в пересечении с плоскостью $z = h$ гиперboloид (2.2.1) дает линию с уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \quad (2.2.6)$$

т. е. с уравнением

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \quad (2.2.7)$$

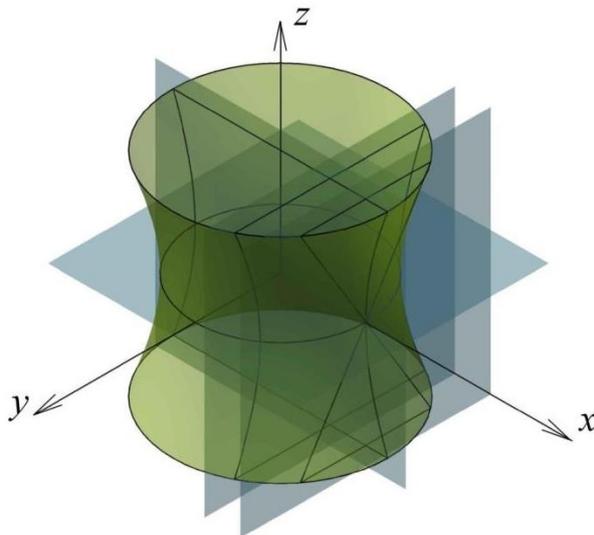


Рис. 2.2.2. Схема сечения однополостного гиперboloида вращения плоскостями.

Следовательно, любая плоскость $z = h$ пересекает гиперboloид (2.2.1) по эллипсу с полуосями

$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad (2.2.8)$$

монотонно возрастающими (соответственно от a и b до $+\infty$), когда $|h|$ возрастает от нуля до $+\infty$.

Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.2.9)$$

получающийся при $h = 0$ (и расположенный в плоскости Oxy), называется горловым эллипсом однополостного гиперboloида (2.2.1).

В пересечении с плоскостью $y = h$ гиперboloид (2.2.1) дает линию с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \quad (2.2.10)$$

т. е. либо с уравнением

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1 \quad (2.2.11)$$

(если $|h| < b$), либо с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (2.2.12)$$

(если $|h| = b$), либо, наконец, с уравнением

$$\frac{z^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} = 1 \quad (2.2.13)$$

(если $|h| > b$).

Заметив, что точка (x, y) тогда и только тогда удовлетворяет уравнению (2.2.12), когда она удовлетворяет либо уравнению

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad (2.2.14)$$

либо уравнению

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \quad (2.2.15)$$

Мы получаем, следовательно, что:

при $|h| < b$ плоскость $y = h$ пересекает гиперболоид (1) по гиперболе с полуосями

$$a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}, c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}, \quad (2.2.16)$$

монотонно убывающими (соответственно от a и c до нуля), когда $|h|$ возрастает от нуля до b ;

при $|h| = b$ плоскость $y = h$ пересекает гиперболоид (2.2.1) по прямым

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ y = h \end{cases}, \quad (2.2.17)$$

и

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = h \end{cases}, \quad (2.2.18)$$

при $|h| > b$ плоскость $y = h$ пересекает гиперболоид (2.2.1) по гиперболе с полуосями

$$c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}, a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}, \quad (2.2.19)$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от b до $+\infty$.

Аналогично показывается, что:

при $|h| < a$ плоскость $x = h$ пересекает гиперболоид (2.2.1) по гиперболе с полуосями

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, \quad (2.2.20)$$

монотонно убывающими (соответственно от b и c до нуля), когда $|h|$ возрастает от нуля до a ;

при $|h| = a$ плоскость $x = h$ пересекает гиперboloид (2.2.1) по прямым

$$\begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = h \end{cases}, \quad (2.2.21)$$

и

$$\begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \\ x = h \end{cases}, \quad (2.2.22)$$

при $|h| > a$ плоскость $x = h$ пересекает гиперboloид (2.2.1) по гиперболе с полуосями

$$c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}, b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}, \quad (2.2.23)$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от a до $+\infty$.

Все это дает вполне удовлетворительное представление о форме однополостного гиперboloида (2.2.1).

Можно также добавить, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии однополостного гиперboloида (2.2.1), а начало координат — его центром симметрии.

Обратим внимание на тот замечательный факт, что, несмотря на «искривленность», однополостный гиперboloид (2.2.1) содержит целые прямые: например, прямую (2.2.17). Более того, легко видеть, что этот гиперboloид содержит целое семейство таких прямых (рис. 2.2.3). Действительно, если гиперboloид является гиперboloидом вращения, то он переходит в себя при любом повороте вокруг оси Oz . Поэтому при этом повороте прямая (2.2.17) переходит в некоторую прямую, также принадлежащую гиперboloиду. Таким образом, мы можем сказать, что гиперboloид вращения «заметается» (или

«зачерчивается») некоторой прямой, вращающейся вокруг оси Oz . При сжатии к плоскости Oxz прямые переходят, очевидно, в прямые, а вращение — в некоторое непрерывное преобразование пространства. Следовательно, мы видим, что произвольный однополостный гиперболоид заматается некоторой непрерывно перемещающейся прямой (является линейчатой поверхностью).

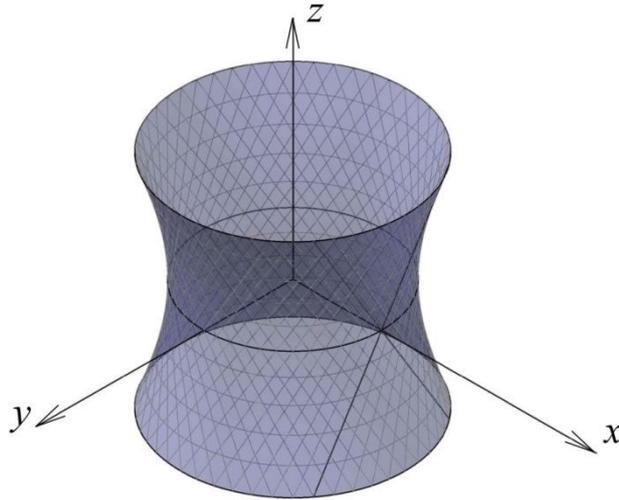


Рис. 2.2.3. Расположение прямолинейных образующих на поверхности однополостного гиперболоида вращения.

Прямые, из которых состоит линейчатая поверхность, называются ее прямолинейными образующими.

Однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью: одно семейство его прямолинейных образующих имеет вид (2.2.17), а другое — вид (2.2.18). Это значит, что через любую точку однополостного гиперболоида (2.2.1) проходят точно две прямые, целиком лежащие на этом гиперболоиде: одна, являющаяся прямолинейной образующей из семейства (2.2.17), а другая, являющаяся прямолинейной образующей из семейства (2.2.18).

Укажем основные свойства однополостного гиперболоида.

Свойство 1. Через любую точку гиперболоида проходит одна и только одна прямолинейная образующая каждого семейства.

Свойство 2. Любые две образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие разным семействам, компланарны (лежат в одной плоскости).

При этом также заметим, две прямолинейные образующие однополостного гиперboloида, принадлежащие разным семействам, тогда и только тогда параллельны, когда они проходят через диаметрально противоположные точки горлового эллипса.

Свойство 3. Две образующие однополостного гиперboloида, принадлежащие одному семейству, скрещиваются (не лежат в одной плоскости).

Свойство 4. Никакие три образующие одного семейства прямолинейных образующих однополостного гиперboloида не параллельны одной и той же плоскости.

Доказательства приведённых выше утверждений можно найти в литературе по аналитической геометрии [66, 84].

Для полноты понимания геометрии однополостного гиперboloида, рассмотрим подробнее уравнение гиперболы (2.2.2). При этом заменим трёхмерную декартову систему координат на двухмерную декартову, лежащую в плоскости сечения гиперboloида $y = h$, с осями Ox и Oy (рис. 2).

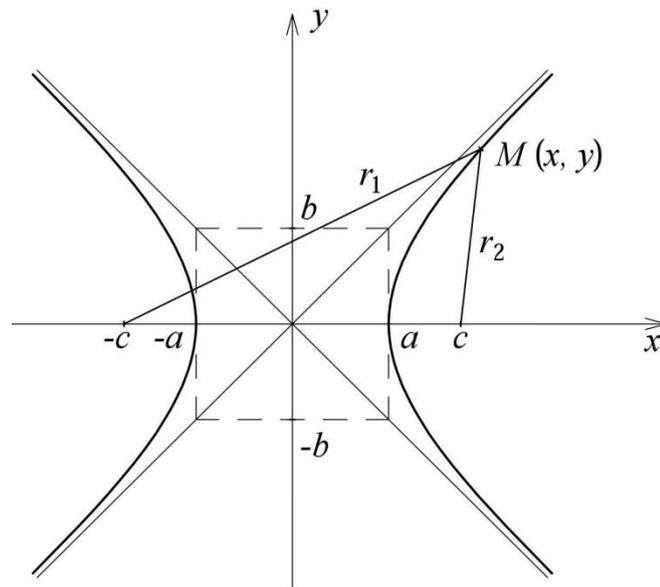


Рис. 2.2.4. Общий вид гиперболы в декартовой системе координат

Получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.2.24)$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Напомним из известного определения, что линия, выражающаяся в некоторой системе прямоугольных координат уравнением вида (2.2.24), называется гиперболой.

Система координат, в которой гипербола имеет уравнение (2.2.24), называется канонической (для этой гиперболы), а уравнение (2.2.24) называется каноническим уравнением гиперболы.

Частным случаем гиперболы является линия с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (2.2.25)$$

т. е. с уравнением

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (2.2.26)$$

Эта линия называется равнобочной гиперболой. Учитывая, что при повороте на $\pi/2$ координатные оси переходят в биссектрисы координатных углов и наоборот, мы получаем, во-первых, что оси координат являются осями симметрии равнобочной гиперболы (2.2.25), а начало координат — ее центром симметрии, и, во-вторых, что равнобочная гипербола (2.2.25) имеет две (и только две) асимптоты, являющиеся биссектрисами координатных углов.

Кроме того, гипербола (2.2.25) целиком помещается в двух вертикальных углах, образованных этими биссектрисами и содержащими ось абсцисс.

Часть гиперболы, содержащаяся в правом вертикальном угле, называется правой ветвью, а содержащаяся в левом — левой ветвью. (Конечно, различение правой и левой ветви зависит от ориентации оси абсцисс).

Поскольку уравнение (2.2.25) может быть переписано в виде

$$x^2 = a^2 + y^2 \quad (2.2.27)$$

абсцисса любой точки гиперболы удовлетворяет неравенству

$$|x| \geq a \quad (2.2.28)$$

причем равенство возможно только при $y = 0$.

Таким образом, равнобочная гипербола пересекает ось абсцисс в точках $(\pm a, 0)$, причем ее правая ветвь расположена справа от прямой $x = a$, а левая — слева от прямой $x = -a$.

В частности, в полосе $-a < x < a$ нет ни одной точки гиперболы.

Все сказанное доставляет нам уже довольно определенное представление о форме равнобочной гиперболы.

С другой стороны, легко видеть, что произвольная гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.2.29)$$

получается из равнобочной гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (2.2.30)$$

сжатием к оси Ox с коэффициентом $k = \frac{b}{a}$.

Действительно, при сжатии к оси Ox в отношении k каждая точка (x, y) плоскости получается из точки $(x, y/k)$. Поэтому в результате сжатия линия с уравнением (2.2.25) переходит в линию с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(ka)^2} = 1, \quad (2.2.31)$$

т.е. $\left(\text{при } k = \frac{b}{a}\right)$ — в гиперболу (2.2.24).

Тем самым мы получаем вполне удовлетворительное представление о форме и произвольной гиперболы.

В частности, мы видим, что гипербола (2.2.24) имеет две (и только две) асимптоты, выражающиеся уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x \quad (2.2.32)$$

Действительно, мы знаем, что асимптотами равнобочной гиперболы (2.2.25) являются биссектрисы координатных углов, т. е. диагонали произвольного квадрата с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям

координат. Рассмотрим, в частности, квадрат, длины сторон которого равны $2a$.

При сжатии к оси Ox с коэффициентом $\frac{b}{a}$ этот квадрат переходит в прямоугольник с вертикальными сторонами длины $2b$ и горизонтальными сторонами прежней длины $2a$, а его диагонали переходят в диагонали этого прямоугольника, т. е. в прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Прямоугольник $|x| \leq a, |y| \leq b$ называется основным прямоугольником гиперболы (2.2.24).

Ясно, что асимптоты гиперболы тогда и только тогда перпендикулярны, когда $b = a$, т. е. когда гипербола равнобочна.

Далее, мы видим, что гипербола (2.2.24) целиком расположена в содержащих ось абсцисс вертикальных углах, образованных асимптотами, но вне полосы $-a < x < a$.

Кроме того, гипербола (2.2.24) касается сторон $x = a$ и $x = -a$ основного прямоугольника в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ и состоит из двух ветвей — правой и левой.

Наконец, для гиперболы (2.2.24) начало координат является центром симметрии, а оси координат — осями симметрии, причем ось абсцисс пересекает гиперболу, а ось ординат — нет.

При этом никаких других осей симметрии гипербола не имеет.

Действительно, поскольку при любой симметрии асимптоты должны переходить в асимптоты, а точки касания гиперболы сторон основного прямоугольника — в точки касания, то основной прямоугольник гиперболы должен переходить сам в себя, причем его вертикальные стороны должны после симметрии остаться вертикальными. Но это, очевидно, возможно только при симметриях относительно средних линий этого прямоугольника, т. е. при симметриях относительно осей координат.

Таким образом, ось абсцисс канонической системы координат мы можем охарактеризовать как ось симметрии гиперболы, пересекающую эту гиперболу, а ось ординат — как ось симметрии гиперболы, не пересекающую гиперболу.

Поскольку с точностью до ориентации осей каноническая координатная система однозначно определена гиперболой, все конструкции и понятия, использующие эту координатную систему и не зависящие от ориентации ее осей, инвариантно связаны с гиперболой. В частности, это верно для чисел a , b ,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \text{ и гиперболой.}$$

Числа a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы, число

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.2.33)$$

называется линейным эксцентриситетом гиперболы, число $2c$ — фокусным расстоянием гиперболы, число

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad (2.2.34)$$

— (числовым) эксцентриситетом гиперболы, а число

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (2.2.35)$$

— фокальным параметром гиперболы.

С гиперболой инвариантно связаны также ее (единственный) центр симметрии $(0, 0)$ (называемый обычно просто центром гиперболы), ее оси симметрии Ox и Oy (называемые обычно просто осями, ось Ox — действительной осью, а ось Oy — мнимой осью) и две точки пересечения $(\pm a, 0)$ гиперболы с действительной осью (вершины гиперболы). Точки $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ тоже инвариантно определены гиперболой и называются ее фокусами (соответственно левым и правым; заметим, что различие левого и правого фокуса зависит от ориентации оси Ox).

Термин «фокусное расстояние» для числа $2c$ объясняется тем, что это число, очевидно, равно расстоянию между фокусами.

Действительная ось гиперболы содержит ее фокусы и потому называется также фокальной осью.

Так как $b \neq 0$, то $c > a$ и $e > 1$, причем $c = \sqrt{2}a$ (т. е. $e = \sqrt{2}$) тогда и только тогда, когда $a = b$, т. е. когда гипербола равнобочна.

Поскольку $c > a$, прямые $x = \pm c$ пересекают гиперболу. Отрезки, высекаемые гиперболой на этих прямых, называются ее фокальными хордами. Поскольку при симметрии относительно оси ординат фокальные хорды переходят друг в друга, они имеют одну и ту же длину.

Для любой точки $M(x, y)$ гиперболы длины отрезков, соединяющих ее с фокусами гиперболы, называются фокальными радиусами этой точки (соответственно правым и левым). Иногда «фокальными радиусами» называются сами эти отрезки. Опуская выкладки, показывающие следующее равенство, обозначим ещё одно важное свойство гиперболы:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad (2.2.36)$$

где r_1 и r_2 – фокальные радиусы любой произвольной точки гиперболы.

Таким образом, точка $M(x, y)$ тогда и только тогда принадлежит гиперболе (2.2.24), когда абсолютная величина разности ее расстояний от фокусов гиперболы равна $2a$. Это означает, что справедливо следующее.

Любая гипербола является геометрическим местом точек, абсолютная величина разности расстояний которых от двух данных точек (фокусов гиперболы) постоянна (равна $2a$). Согласно данному утверждению, гипербола однозначно определена, когда известны ее фокусы и действительная полуось a . При этом для любых двух различных точек и любого положительного числа a , меньшего половины расстояния между этими точками, существует (единственная) гипербола, фокусами которой являются данные точки, а действительная полуось равна a .

Прямые

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e} \quad (2.2.37)$$

называются директрисами (соответственно левой и правой) гиперболы (2.2.24). Директрисы инвариантно связаны с гиперболой, но различение правой и левой директрис зависит от ориентации оси абсцисс.

Заметим, что поскольку $e > 1$, директрисы отделяют вершины гиперболы от ее центра.

Фокус и директриса называются одноименными, если они оба – правые или оба – левые. Ясно, что это отношение между фокусом и директрисой геометрически инвариантно.

Расстояние d фокуса до одноименной директрисы выражается, очевидно, формулой

$$d = c - \frac{a}{e}. \quad (2.2.38)$$

Поскольку

$$c - \frac{a}{e} = a \left(e - \frac{1}{e} \right) = a \frac{e^2 - 1}{e} = \frac{1}{e} \frac{b^2}{a} = \frac{p}{e} \quad (2.2.39)$$

тем самым доказано, что

$$d = \frac{p}{e} \quad (2.2.40)$$

Так же, показывается, что точка $M(x, y)$ тогда и только тогда принадлежит гиперболе (2.2.24), когда отношение её расстояния до некоторого фокуса гиперболы к ее расстоянию до одноименной директрисы гиперболы равно эксцентриситету e гиперболы.

Таким образом, справедливо следующее.

Любая гипербола представляет собой, геометрическое место точек, отношения расстояний которых от данной точки (фокуса гиперболы) и от данной прямой (одноименной с фокусом директрисы) равно данному положительному числу e , большему единицы (эксцентриситету гиперболы).

В частности, гипербола однозначно определена, если известны ее фокус, одноименная с этим фокусом директриса и ее эксцентриситет e .

При этом для любой точки, любой не содержащей эту точку прямой и любого положительного числа e , большего единицы, существует (единственная) гипербола с эксцентриситетом e , для которой данная точка является фокусом, а данная прямая – одноименной с этим фокусом директрисой.

Указанные выше характеристики гиперboloида вращения и гиперболы позволяют вывести основные уравнения срединной поверхности исследуемых конструкций. В том числе проследить закономерности в геометрической изменчивости сетчатой структуры каждой изучаемой оболочки.

2.3. Построение уравнений исследуемых оболочек в форме однополостных гиперboloидов

Построение моделей оболочек, основанных на изучаемой форме поверхности тела в виде однополостного гиперboloида, связано, в первую очередь, с задачами прикладного характера. Именно получение характеристик несущей способности и устойчивости, изменяемых в зависимости от формообразования структурного каркаса поверхности, является первостепенной задачей настоящего исследования. Анализируя морфологию, формообразование сетчатой оболочки с учетом выявленных характеристик, можно определить факторы, которые оказывают наибольшее влияние на её конструктивные качества.

Так, для максимального приближения исследуемой задачи к реальности, основные габариты выбранных оболочек в форме однополостного гиперboloида вращения, соответствуют по параметрам (высота и ширина), десятиэтажному жилому дому с высотой этажа – 3 м. В зданиях жилого назначения данная высота является наиболее часто применяемой. В нашем случае, шаг обвязочных балок (перекрытий), которые также являются элементами сетчатых оболочек, принят с тем же шагом. Обвязочные балки, как будет видно далее в работе, приняты для

компенсации различий в структурных каркасах сетчатых оболочек, для лучшего восприятия горизонтальных нагрузок, приложенных к оболочке.

Среди множества форм поверхностей первостепенная особенность однополостного гиперboloида выражается в возможности построения его с помощью двух семейств прямолинейных образующих. Таким образом, поверхность можно представить в виде сетчатой оболочки, структура которой будет целиком зависеть от густоты пересекающихся образующих. При этом изменение кривизны оболочки, за счёт сжатия гиперboloида к оси (2.2.5) может быть выполнено без нарушения линейчатости поверхности.

Из соображений практического удобства исследований нами рассматриваются лишь однополостные гиперboloиды вращения, то есть те поверхности, в которых горловой эллипс переходит в окружность (2.2.4).

Сравнение характеристик различных сетчатых каркасов, а также изучение конструктивных особенностей оболочек и их форм, выраженных в данных каркасах, возможно лишь с максимальной долей приближения исходных значений каждой из изучаемых конструкций к единому «стандартному» типу. Стандартизировать, если можно так описать данный процесс, оболочки можно лишь по какому-то заранее выбранному перечню показателей. Учитывая особенность морфологии сетчатых каркасов в виде однополостных гиперboloидов вращения, предложен следующий перечень условий, по которым сформированы исследуемые оболочки.

Условие 1. Габариты оболочки: высота – 30,0 м, диаметры окружностей верхнего и нижнего оснований гиперboloидов также 30,0 м;

Условие 2. Количество образующих обоих семейств одинаково во всех сетчатых каркасах, образованных из разных поверхностей однополостного гиперboloида;

Условие 3. Все образующие должны сходиться в основаниях гиперboloида в точках, количество которых фиксировано и составляет при изучении влияния формы гиперboloида – 24 пары (то есть по 24 образующих каждого семейства),

при изучении влияния геометрии образующей – 48. Данное условие позволит создать равные граничные условия на каждом сетчатом каркасе;

Условие 4. Эллипсы (2.2.7), которые в гиперболоидах вращения переходят в окружности, при сечении оболочки горизонтальной плоскостью через каждые 3,0 м, а также окружности в основаниях гиперболоидов, представляются в качестве обвязочных балок перекрытий в создаваемых каркасах. При этом каждая из окружностей представляется в виде замкнутой ломаной кривой (многогранника), состоящей из прямых линий, соединяющих точки пересечения образующих с данной окружностью, лежащих на поверхности гиперболоида.

Чтобы построить сетки каркасов изучаемой формы поверхностей потребуется вновь показать некоторые закономерности оболочек в форме однополостного гиперболоида. Вернёмся к гиперболе (2.2.11), получаемой рассечением гиперболоида (2.2.1) вертикальной плоскостью $y = h$, при $h < b$. Учитывая то, что каждая гипербола имеет две и только две прямые–асимптоты, описываемые уравнениями (2.2.32), запишем по аналогии уравнения данных прямых, применительно к гиперболе (2.2.11)

$$z = \frac{c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}}{a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}}x, \quad z = -\frac{c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}}{a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}}x \quad (2.3.1)$$

Сокращая подкоренные выражения в дробях, получим уравнения прямых–асимптот для гипербол, получаемых сечением плоскостью $y = h$, при $h < b$

$$z = \frac{c}{a}x, \quad z = -\frac{c}{a}x \quad (2.3.2)$$

Таким образом, вместе с указанными выражениями, мы показали, что для любой плоскости $y = h$, при $h < b$, пересекающей однополостный гиперболоид, получаемые гиперболы имеют одну и ту же асимптоту. Также следует, что основной прямоугольник данных гипербол будет иметь размерность кратную

значению $\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$. Из этого ясно, что для нахождения уравнения гипербол,

лежащих на поверхности изучаемых оболочек, достаточно найти неизвестную, однозначно описывающую каждую из них.

Напомним также, что для однополостного гиперboloида вращения описываемого уравнением (2.2.4) горловой эллипс имеет равные полуоси, переходя в окружность (2.2.26). Значит, для описания уравнения поверхности гиперboloида необходимо и достаточно найти радиус окружности (или полуоси горлового эллипса, если гиперboloид не образован вращением), а также параметр c (2.2.4), являющийся мнимой полуосью гиперболы (2.2.2).

Сопоставив уравнения (2.3.2) с (2.2.17) и (2.2.18), мы видим, что уравнения прямых асимптот гипербол, лежащих на поверхности гиперboloида, являются также уравнениями двух прямых-образующих (представляющих каждое семейство).

Рассмотренные геометрические качества и свойства помогут вывести уравнения исследуемых сетчатых оболочек, а также типов элементов их каркасов.

Для построения сетчатой оболочки рассмотрим поверхность однополостного гиперboloида вращения, которая обладает следующими геометрическими параметрами: высота $H=30,0$ м, диаметры оснований гиперboloида $D=30,0$ м, радиус, соответственно $R=15,0$ м, количество образующих оболочки $m=24$ пары. Все образующие в кольцах оснований сходятся между собой в двадцати четырёх точках, расположенных на окружностях верхнего и нижнего оснований.

Рассмотрим схему гиперboloида, где покажем основные геометрические параметры модели (рис. 2.3.1).

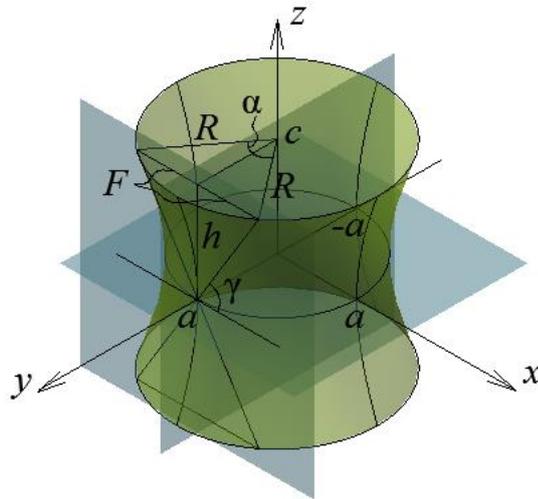


Рис. 2.3.1. Модель построения расчётного гиперboloида вращения

На рисунке представлен гиперboloид с пересекающей его плоскостью $y = a$, пересекающей гиперboloид (рис. 2.3.1) в точке касания горлового эллипса, то есть окружности (далее для понимания будем использовать термин «горловой окружности»), так как рассматривается гиперboloид вращения. Как показано в п. 2.2, сечение его плоскостью в данной точке даёт две прямые-образующие.

Окружность верхнего основания поделим на $K=24$ части из условия (3) о «сходимости образующих». Из известного равенства угла треугольника, опирающегося на дугу, и угла самой дуги имеем, что каждая часть дуги будет давать угол, равный $\kappa = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{24}$.

Допускаем, что для выведения уравнений здесь и далее все операции вычисления геометрических параметров расчётной поверхности будем производить только на верхней части гиперboloида, то есть $z > 0$ в канонической для него системе координат. Обосновано данное решение зеркальной симметрией однополостного гиперboloида относительно плоскости Oxy . При этом будем понимать, что операции применимы и для нижней части, то есть $z < 0$.

Проекция образующих на верхнее основание гиперboloида будет давать хорду и отсечённую от окружности дугу, величина которой будет зависеть от радиуса горловой окружности. Покажем хорду таким образом, чтобы условие (3)

выполнялось. Таким образом, хорда будет отсекаеть N равных частей окружности. Угол отсекаемой дуги при этом составит

$$\alpha = \kappa \cdot N = \frac{2\pi}{K} N \quad (2.3.3)$$

Перпендикуляр a , опущенный на хорду из центра окружности верхнего основания будет равен радиусу горловой окружности, и составит

$$a = R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 15 \cos \frac{\alpha}{2} \quad (2.3.4)$$

Требуется найти значение c , которое позволит определить искомое уравнение. В данном случае проще определить его в следующем порядке:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{F} = \frac{15}{15 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (2.3.5)$$

где $h = \frac{1}{2} H = 15,0$ м, а F определяется как половина хорды и равна

$$F = R \sin \frac{\alpha}{2} = 15 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2.3.6)$$

Отсюда

$$c = a \cdot \operatorname{tg} \gamma = 15 \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.3.7)$$

Используя известное тригонометрическое тождество, упростим (2.3.7):

$$c = 15 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (2.3.8)$$

Получив основные константы a , b и c , запишем уравнение гиперboloида

$$\frac{x^2}{\left(15 \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(15 \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2} = 1 \quad (2.3.9)$$

Для исследования общих характеристик несущей способности сетчатых оболочек в форме однополостного гиперboloида, рассматривается три различных каркаса (рис. 2.3.2). Различие заключается в угле наклона прямолинейной

образующей. Так, соблюдая условия (1)-(4), указанные выше, построить поверхности с различными углами образующих можно используя зависимость между углом её наклона и углом дуги окружности в основании гиперboloида, отсекаемой хордой, являющейся проекцией этой образующей на данное основание. Таким образом, для соблюдения условия (3) хорда в каждом случае должна отсекалть различное количество N равных частей окружности. Так, для исследуемых каркасов выбрано $N_1 = 5$, $N_2 = 4$ и $N_3 = 3$. Угол отсекаемой дуги по формуле (2.3.3) при этом, соответственно, составит $\alpha_1 = \frac{2\pi}{24} \cdot 5 = \frac{10\pi}{24}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{24} \cdot 4 = \frac{8\pi}{24}$ и $\alpha_3 = \frac{2\pi}{24} \cdot 3 = \frac{6\pi}{24}$. Используя (2.3.5) легко вычислть, что относительно основания гиперboloида образующие имеют угол наклона соответственно $58,71^\circ$, $63,48^\circ$ и $69,1^\circ$.

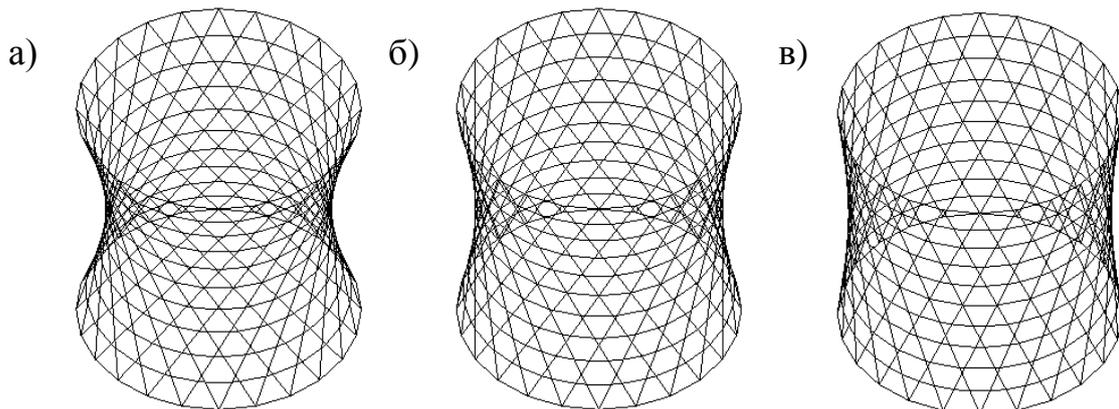


Рис. 2.3.2. Конструктивные схемы каркасов зданий в виде однополостных гиперboloидов: а) с углом образующей $58,71^\circ$; б) с углом образующей $63,48^\circ$; в) с углом образующей $69,1^\circ$.

Таким образом, определив угол образующей, поверхности однополостного гиперboloида для трёх указанных случаев будут иметь вид уравнений:

$$\frac{x^2}{\left(15 \cos \frac{5}{24} \pi\right)^2} + \frac{y^2}{\left(15 \cos \frac{5}{24} \pi\right)^2} - \frac{z^2}{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{5}{24} \pi\right)^2} = 1 \quad (2.3.10)$$

при $\alpha_1 = \frac{10\pi}{24}$ и угле образующей $58,71^\circ$;

$$\frac{x^2}{\left(15 \cos \frac{4}{24} \pi\right)^2} + \frac{y^2}{\left(15 \cos \frac{4}{24} \pi\right)^2} - \frac{z^2}{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{4}{24} \pi\right)^2} = 1 \quad (2.3.11)$$

при $\alpha_2 = \frac{8\pi}{24}$ и угле образующей $63,48^\circ$, и

$$\frac{x^2}{\left(15 \cos \frac{3}{24} \pi\right)^2} + \frac{y^2}{\left(15 \cos \frac{3}{24} \pi\right)^2} - \frac{z^2}{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{3}{24} \pi\right)^2} = 1 \quad (2.3.12)$$

при $\alpha_3 = \frac{6\pi}{24}$ и угле образующей $69,1^\circ$.

Несложно заметить, что в выражении для угла (2.3.3) в числителе стоит значение N (количество отсекаемых хордой равных дуг), а в знаменателе их общее количество K , то есть двадцать четыре. Подставив (2.3.3) в (2.3.9), можно составить одно общее уравнение, зависящее от N , справедливое для каждой из поверхностей:

$$\frac{x^2}{\left(15 \cos \frac{N}{K} \pi\right)^2} + \frac{y^2}{\left(15 \cos \frac{N}{K} \pi\right)^2} - \frac{z^2}{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{N}{K} \pi\right)^2} = 1. \quad (2.3.13)$$

После рассмотрения зависимости несущей способности от угла образующей, интерес представляет изучение влияния формообразования поверхности гиперboloида на его несущие характеристики. Как уже было сказано в п. 2.2, однополостный гиперboloид может быть образован двумя семействами прямых образующих, и при этом на нём может лежать бесконечное множество гипербол. Поскольку при рассечении плоскостью гиперboloида можно получить гиперболу, обладающую заданными параметрами, то и каркас оболочки можно также составить не только из прямолинейных образующих, но и из гипербол.

Рассмотрим уже известный нам однополостный гиперboloид вращения (2.3.10) с количеством образующих в два раза больше, то есть сорока восемь (условие 3), чем рассматриваемый первоначально каркас с углом образующей к основанию $58,71^\circ$. Тогда, по формуле (2.3.13) уравнение в канонической системе координат примет вид:

$$\frac{x^2}{\left(15 \cos \frac{10}{48} \pi\right)^2} + \frac{y^2}{\left(15 \cos \frac{10}{48} \pi\right)^2} - \frac{z^2}{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{10}{48} \pi\right)^2} = 1 \quad (2.3.14)$$

Представим себе гиперboloид (2.3.14) рассекаемый вертикальной плоскостью, но уже не в точке касания к горловой окружности, а проходящей через две точки A и B , которые получились разбиением окружности основания на сорок восемь равных дуг. Тогда для нахождения уравнения гиперболы, получаемой при данном сечении, воспользуемся уравнением (2.2.14) и, подставив известные значения, получим

$$\frac{x^2}{\left(15 \cos \frac{10}{48} \pi \cdot \sqrt{1 - \frac{h_1^2}{15 \cos \frac{10}{48} \pi^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{10}{48} \pi \sqrt{1 - \frac{h_1^2}{15 \cos \frac{10}{48} \pi^2}}\right)^2} = 1 \quad (2.3.15)$$

Перпендикуляр от центра основания до хорды h_1 можно найти аналогично (2.3.4) по уравнению:

$$h_1 = R \cdot \cos \frac{\alpha_1}{2} = 15 \cos \frac{\alpha_1}{2}, \quad (2.3.16)$$

где α_1 – угол отсекаемой дуги, составляющий

$$\alpha_1 = \kappa_1 \cdot (N_1 + n) = \frac{2\pi}{48} (10 + n) = \frac{2\pi(10 + n)}{48} \quad (2.3.17)$$

В получившемся уравнении $\kappa_1 = \frac{2\pi}{48}$, $N_1=10$, а n – параметр, геометрически определяющий количество дополнительно отсекаемых дуг окружности основания хордой, получаемой в качестве проекции секущей плоскости на основание.

Подставляя найденные значения, получим основное уравнение гипербол

$$\frac{x^2}{\left(15 \cos \frac{10}{48} \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi}\right)^2}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{10}{48} \pi \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi}\right)^2}\right)^2} = 1 \quad (2.3.18)$$

С помощью полученного уравнения (2.3.18) можно описать пять гипербол, протягивая каждую из которых вращением по поверхности гиперboloида (2.3.14), можно создать различные сетчатые каркасы (оболочки), целиком лежащие на его поверхности. Таким образом, используя параметр n , определим гиперболу для каждого из типов каркаса: $n = 1$ – для К1, $n = 2$ – для К2, $n = 3$ – для К3, $n = 4$ – для К4, $n = 5$ – для К5. Заметим, что уравнение (2.3.18) можно преобразовать, при $n = 0$, в систему двух уравнений прямых–образующих гиперboloида с каркасом К0, являющихся также асимптотами для гипербол.

Для понимания отличия гипербол (2.3.18) друг от друга вычислим их основные параметры.

Линейный эксцентриситет гипербол c' по формуле (2.2.33) составит

$$c' = \sqrt{\left(15 \cos \frac{10}{48} \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi}\right)^2}\right)^2 + \left(15 \operatorname{ctg} \frac{10}{48} \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi}\right)^2}\right)^2} =$$

$$= 15 \sqrt{\cos \frac{10}{48} \pi - \cos \frac{10+n}{48} \pi + \operatorname{ctg} \frac{10}{48} \pi - \frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\sin \frac{10}{48} \pi}}$$
(2.3.19)

Числовой эксцентриситет гипербол e' по формуле (2.2.34) получим в виде:

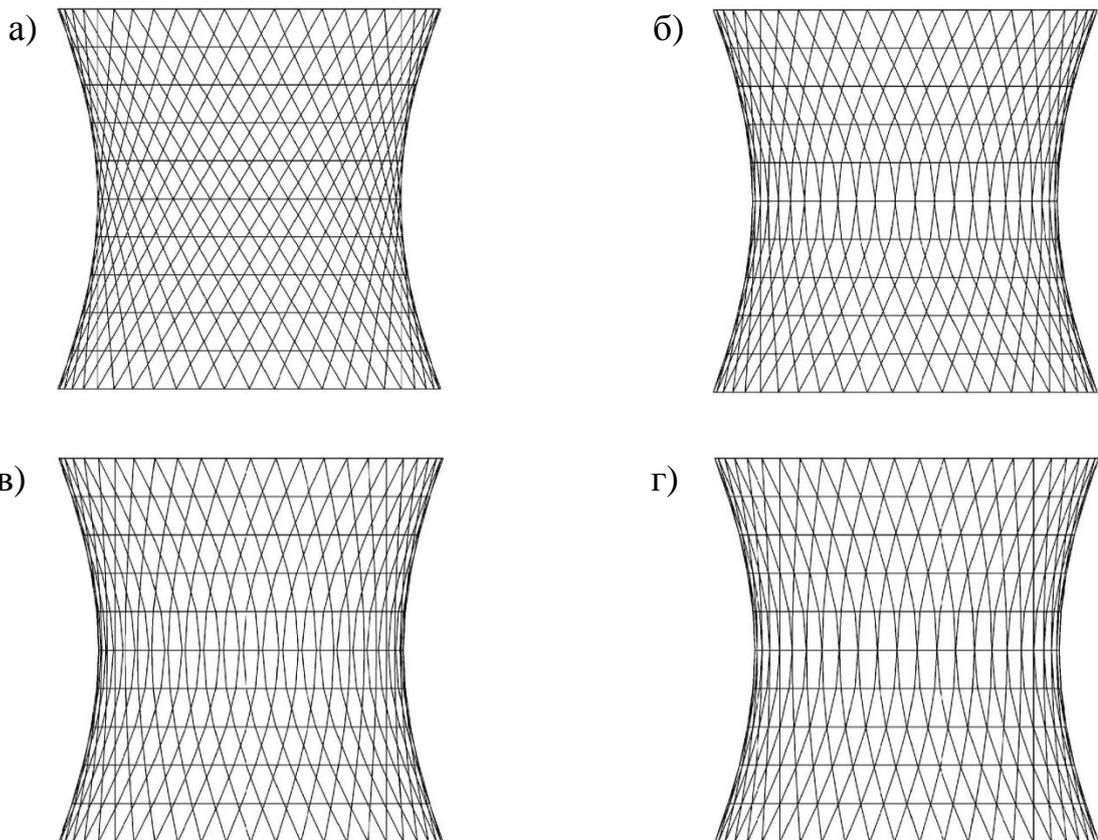
$$e' = \sqrt{1 + \frac{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{10}{48} \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi}\right)^2}\right)^2}{\left(15 \cos \frac{10}{48} \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi}\right)^2}\right)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\sin \frac{10}{48} \pi\right)^2}}$$
(2.3.20)

Фокальный параметр гипербол, в соответствии с формулой (2.2.35), будет равен:

$$p' = \frac{\left(15 \operatorname{ctg} \frac{10}{48} \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi} \right)^2} \right)^2}{15 \cos \frac{10}{48} \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi} \right)^2}} = 15 \frac{\operatorname{ctg} \frac{10}{48} \pi}{\sin \frac{10}{48} \pi} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{10+n}{48} \pi}{\cos \frac{10}{48} \pi} \right)^2} \quad (2.3.21)$$

Таким образом, образующие—гиперболы отличаются друг от друга мнимой и действительной полуосями, линейным эксцентриситетом, фокальным параметром, но при этом имеют постоянный числовой эксцентриситет и одну пару прямых асимптот.

В общем виде гиперболы будут различаться приближением к асимптотам от К5 до максимально приближенной К1. Данное качество имеет важное значение для густоты сетки формируемых каркасов. Как видно из схем каркасов на рис. 2.3.3, большей густотой сетки обладают каркасы К1 и далее, до К5.



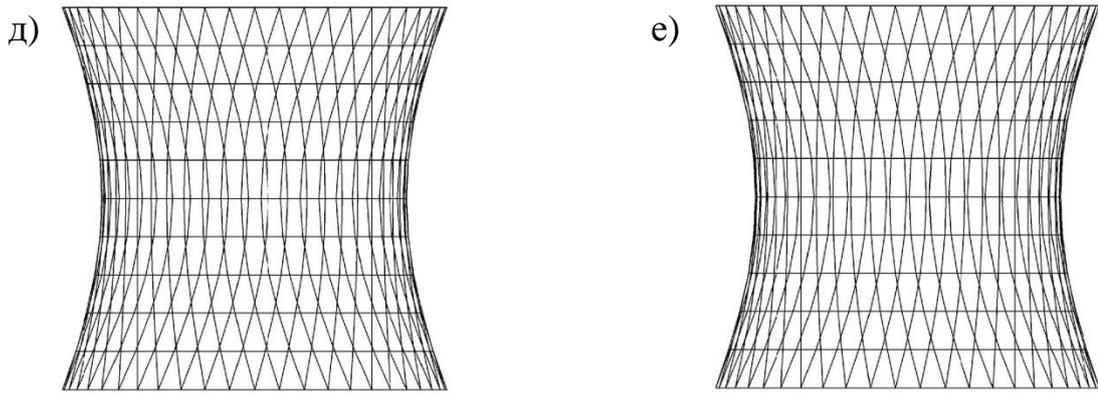


Рис. 2.3.3. Сетчатый гиперболоид вращения, выполненный в виде каркасов:
а) K0; б) K1; в) K2; г) K3; д) K4; е) K5.

В дальнейшем будут рассматриваться пять видов сетчатого каркаса (K1, K2, K3, K4 и K5), где в качестве образующих принимаются гиперболы, лежащие на поверхности гиперболоида (2.3.14). Также для сравнения будет рассматриваться сетчатый каркас, образованный системой прямолинейных образующих (K0).

2.4. Выводы по главе 2

В настоящей главе показаны основные уравнения поверхностей в форме гиперболических параболоидов и гиперболоидов вращения. Подробно изучена форма исследуемых оболочек методом плоских сечений, а также рассмотрены уравнения образующих в обеих поверхностях. Показаны основные свойства исследуемых оболочек, а также их образующих. Основные выводы по настоящей главе следующие:

1. Гипар можно образовать двумя семействами прямолинейных образующих, которые в дальнейшем в расчётах будут составлять каркас исследуемой оболочки данной формы.

2. Сетчатый гиперболоид вращения образуется также с помощью двух семейств прямолинейных образующих, при этом с изменением угла наклона образующей изменяется форма оболочки и её кривизна. Таким образом, можно

построить различные каркасы одинаковой высоты и с одинаковыми диаметрами оснований, густота сетки которых будет зависеть от угла наклона прямолинейной образующей.

3. Однополостный сетчатый гиперboloид вращения можно также выполнить из семейств криволинейных образующих, которые являются гиперболами с асимптотами из прямых–образующих данной оболочки. При этом таких гипербол может быть сколь угодно много и густота сетки каркасов будет изменяться с удалением гиперболы от своей асимптоты.

Глава 3. Расчет пологих сетчатых оболочек в форме гиперболического параболоида на основе континуальной расчетной модели

3.1. Нелинейные геометрические соотношения с учетом деформаций поперечного сдвига

Рассмотрим пологую оболочку в форме гиперболического параболоида (гипара), уравнение срединной поверхности которой в декартовой системе координат, задаётся по формуле (рис 3.1.1):

$$Z(x, y) = c_0 xy + c_1 x + c_2 y + c_3 \quad (3.1.1)$$

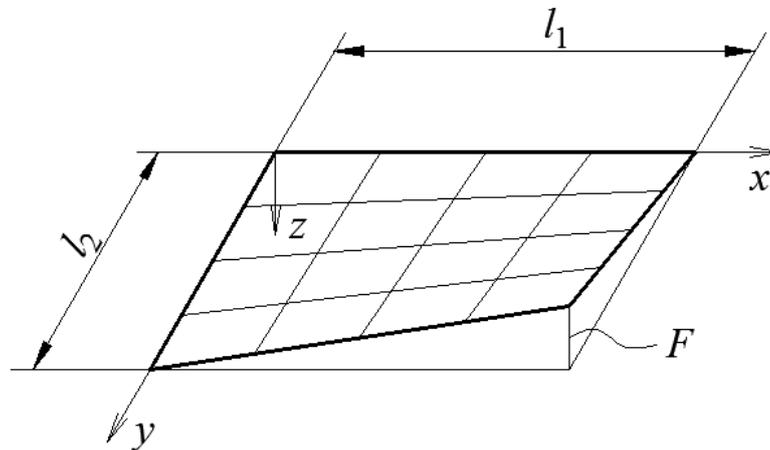


Рис. 3.1.1. Гиперболический параболоид

Для оболочки, изображенной на рис. 3.1.1

$$c_0 = -\frac{F}{ab}, c_1 = c_2 = c_3 = 0. \quad (3.1.2)$$

Оси координат x и y не совпадают с линиями главных кривизн. Для данной оболочки кривизны в направлении координатных осей и кривизна кручения определяются по формулам:

$$k_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \quad k_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad k_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = C_0 \quad (3.1.3)$$

При построении исходных геометрических соотношений технической теории сплошных оболочек вводятся следующие допущения:

1. Тангенциальные перемещения $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$, ориентированные по осям координат x и y , изменяются вдоль оси z по линейному закону, а нормальные перемещения $W(x, y, z)$ постоянны по толщине оболочки (рис. 3.1.2):

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_x(x, y); \\ V(x, y, z) &= v(x, y) + z\theta_y(x, y); \\ W(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

2. Линейная деформация $\varepsilon_z = 0$.

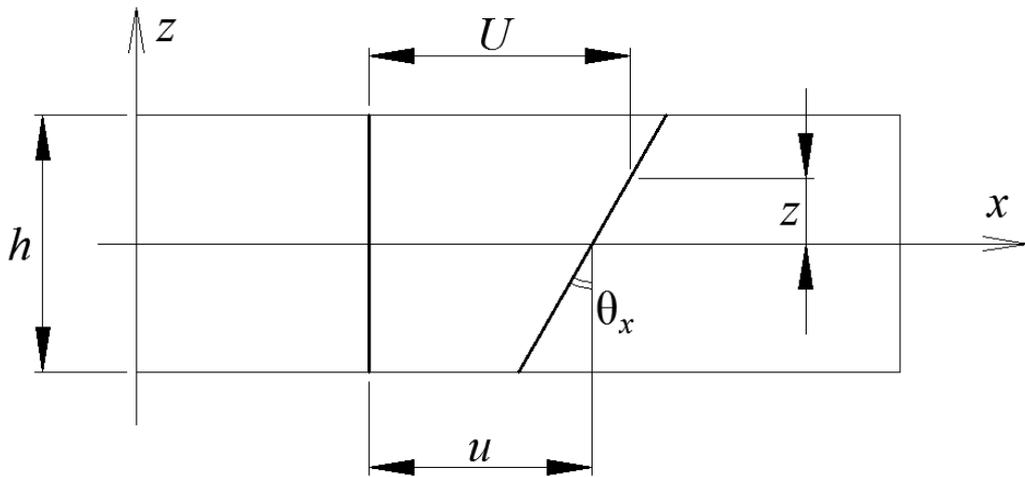


Рис. 3.1.2. Изменение тангенциальных перемещений при учете деформаций поперечного сдвига

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ характеризуют тангенциальные и нормальные перемещения точек срединной поверхности оболочки, а $\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$ представляют собой углы поворота поперечных сечений оболочки.

На основе принятых допущений геометрические соотношения для гипара записываются в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, z) &= e_x(x, y) + z\kappa_x(x, y); \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= e_y(x, y) + z\kappa_y(x, y); \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z) &= e_{xy}(x, y) + z\kappa_{xy}(x, y); \\ \varepsilon_{xz}(x, y, z) &= e_{xz}(x, y); \\ \varepsilon_{yz}(x, y, z) &= e_{yz}(x, y); \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; & e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\
 e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12}w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\
 \kappa_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; & \kappa_y &= \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \\
 e_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x; & e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y.
 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Формулы (3.1.6) в частном случае переходят в уравнения классической теории Кирхгофа-Лява. Если в (3.1.6) ввести допущения о равенстве нулю деформаций поперечного сдвига, приняв $e_{xz}=0$ и $e_{yz}=0$, то в результате получатся известные зависимости:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.1.7}$$

Формулы (3.1.7) являются следствием гипотезы о том, что нормаль, проведенная к срединной поверхности оболочки до деформации, остается нормальной к ней и после деформации. Подставляя (3.1.7) в (3.1.6), получим известные выражения для кривизн κ_{11} , κ_{22} и κ_{12} согласно классической теории Кирхгофа-Лява.

Соотношения (3.1.5), (3.1.6) являются геометрическими соотношениями теории тонких оболочек и оболочек средней толщины в квадратичном приближении. Помимо большей точности, по сравнению с классической теорией Кирхгофа-Лява, они относительно просты и удобны при реализации на ЭВМ, поскольку не содержат производных выше первого порядка.

При расчете стержневых и тонкостенных пространственных конструкций в нелинейной постановке с использованием численных методов применяются подходы, основанные на последовательности решений линейных задач при шаговом изменении ведущего параметра. В связи с этим для формулировки исходных соотношений задачи требуется построить геометрические

соотношения, связывающие приращения деформаций с приращениями перемещений.

Выделим в недеформированном состоянии оболочки некоторый бесконечно малый элемент, которому в заданной системе координат соответствует точка P . Предположим далее, что при изменении конфигурации тела от начального момента (недеформированное состояние) до момента времени t точка P перешла в положение P' (рис. 3.1.3). При этом перемещения и деформации получают значения $u^0, v^0, w^0, \theta_x^0, \theta_y^0, \varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{yz}^0$. Следует отметить, что в данном случае решается статическая задача и параметр времени t имеет смысл параметра продолжения решения.

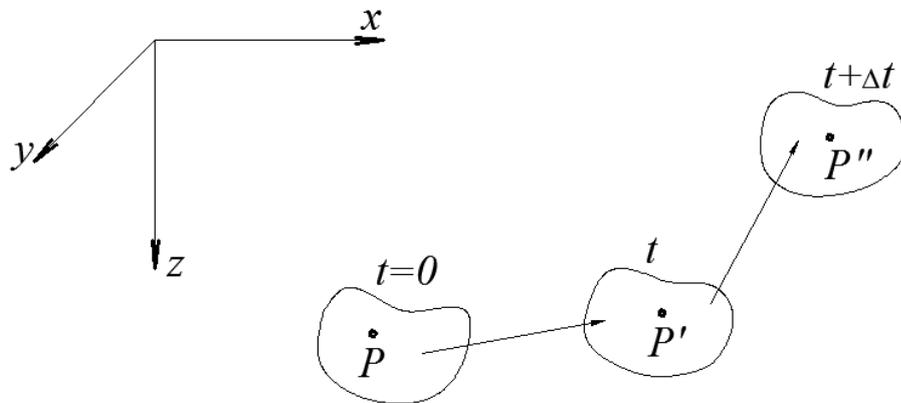


Рис. 3.1.3. Изменение конфигурации тела при изменении параметра t .

Пусть теперь рассматриваемая точка за период Δt переместилась в положение P'' . Перемещения и деформации в момент времени $t+\Delta t$ равны:

$$u = u^0 + \Delta u, \quad v = v^0 + \Delta v, \quad \dots, \quad w = w^0 + \Delta w,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \Delta \varepsilon_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \Delta \varepsilon_y, \quad \dots, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yz}^0 + \Delta \varepsilon_{yz},$$

где $\Delta u, \Delta v, \dots, \Delta \varepsilon_{yz}$ - приращения соответствующих величин при переходе из конфигурации t в конфигурацию $t+\Delta t$. Тогда в общем случае:

$$\Delta \varepsilon_x(u^0, v^0, \dots, w^0, \Delta u, \Delta v, \dots, \Delta w) = \varepsilon_x(u^0 + \Delta u, v^0 + \Delta v, \dots, w^0 + \Delta w) - \varepsilon_x^0(u^0, v^0, \dots, w^0);$$

$$\Delta \varepsilon_y(u^0, v^0, \dots, w^0, \Delta u, \Delta v, \dots, \Delta w) = \varepsilon_y(u^0 + \Delta u, v^0 + \Delta v, \dots, w^0 + \Delta w) - \varepsilon_y^0(u^0, v^0, \dots, w^0);$$

...

$$\Delta \varepsilon_{yz}(u^0, v^0, \dots, w^0, \Delta u, \Delta v, \dots, \Delta w) = \varepsilon_{yz}(u^0 + \Delta u, v^0 + \Delta v, \dots, w^0 + \Delta w) - \varepsilon_{yz}^0(u^0, v^0, \dots, w^0).$$

Приращения деформаций могут быть получены также путем разложения функций деформаций в окрестности решения, соответствующего состоянию t , в ряд Тейлора с удержанием членов до второго порядка включительно.

Запишем рассматриваемые геометрические соотношения для рассматриваемого варианта теории оболочек. Индекс «0» при этом опускаем. Зависимости для приращений деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x &= \Delta e_x + z \Delta \kappa_x; \quad \Delta \varepsilon_y = \Delta e_y + z \Delta \kappa_y; \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + z \Delta \kappa_{xy}; \\ \Delta \varepsilon_{xz} &= \Delta e_{xz}; \quad \Delta \varepsilon_{yz} = \Delta e_{yz}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta e_x &= \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2; \quad \Delta e_y = \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2; \\ \Delta e_{xy} &= \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - 2k_{12} \Delta w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y}; \\ \Delta e_{xz} &= \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x; \quad \Delta e_{yz} = \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y; \\ \kappa_x &= \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y}; \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

3.2. Физические соотношения для упругих сетчатых оболочек

Запишем основные уравнения теории упругости в декартовой системе координат.

1) Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

2) Соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

3) Обобщенный закон Гука

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \nu_{xy} \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xz} \frac{\sigma_z}{E_z}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} \sigma_y - \nu_{yz} \frac{\sigma_z}{E_z} - \nu_{yx} \frac{\sigma_x}{E_x}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} \sigma_z - \nu_{zx} \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{zy} \frac{\sigma_y}{E_y}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}}; \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G_{yz}}; \varepsilon_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{G_{zx}}.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

при этом выполняется условие симметрии упругих постоянных:

$$\nu_{xy} E_x = \nu_{yx} E_y, \quad \nu_{yz} E_y = \nu_{zy} E_z, \quad \nu_{zx} E_z = \nu_{xz} E_x.$$

Уравнения (3.2.1)-(3.2.3) образуют, как известно, систему уравнений теории упругости для ортотропного материала. Для решения этих уравнений должны быть заданы граничные условия. Геометрические граничные условия на части поверхности S_u накладываются на функции перемещений:

$$u - u^* = 0, \quad v - v^* = 0, \quad w - w^* = 0,$$

где u^*, v^*, w^* - заданные на границе значения перемещений. Статические граничные условия на части поверхности S_σ (условия на поверхности) имеют вид:

$$\begin{aligned}X_v &= \sigma_x l_x + \sigma_{xy} l_y + \sigma_{xz} l_z \\ Y_v &= \sigma_{yx} l_x + \sigma_y l_y + \sigma_{yz} l_z \\ Z_v &= \sigma_{zx} l_x + \sigma_{zy} l_y + \sigma_z l_z\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

где X_v, Y_v, Z_v - проекции поверхностной нагрузки в точке граничной поверхности на оси x, y, z ; l_x, l_y, l_z - направляющие косинусы нормали v к этой поверхности.

Потенциальная энергия деформации упругого тела определяется равенством:

$$U = \iiint_V W(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \sigma_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{zx}) dV,$$

$$\text{где } W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dV$$

есть удельная потенциальная энергия деформации (упругий потенциал).

Допустим, что существует некоторая система напряжений $\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \dots, \sigma_{zx}^{(1)}$ и не зависящая от нее система деформаций $\varepsilon_x^{(2)}, \varepsilon_y^{(2)}, \dots, \varepsilon_{zx}^{(2)}$, связанная с перемещениями формулами Коши (3.2.2).

Рассмотрим отдельно интеграл

$$2U = \iiint_V (\sigma_x^{(1)} \varepsilon_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \varepsilon_y^{(2)} + \sigma_z^{(1)} \varepsilon_z^{(2)} + \sigma_{xy}^{(1)} \varepsilon_{xy}^{(2)} + \sigma_{yz}^{(1)} \varepsilon_{yz}^{(2)} + \sigma_{zx}^{(1)} \varepsilon_{zx}^{(2)}) dV$$

Преобразуем первое слагаемое в подынтегральном выражении, используя формулу Остроградского:

$$\iiint_V \sigma_x^{(1)} \varepsilon_x^{(2)} dV = \iiint_V \sigma_x^{(1)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dV = \iint_S \sigma_x^{(1)} l_x^{(1)} u^{(2)} dS - \iiint_V u^{(2)} \frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} dV$$

Выполняя аналогичные преобразования для остальных слагаемых получим в итоге следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_x^{(1)} \varepsilon_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \varepsilon_y^{(2)} + \sigma_z^{(1)} \varepsilon_z^{(2)} + \sigma_{xy}^{(1)} \varepsilon_{xy}^{(2)} + \sigma_{yz}^{(1)} \varepsilon_{yz}^{(2)} + \sigma_{zx}^{(1)} \varepsilon_{zx}^{(2)}) dV = \\ & = \iint_S (u^{(2)} (\sigma_x^{(1)} l_x^{(1)} + \sigma_{xy}^{(1)} l_y^{(1)} + \sigma_{xz}^{(1)} l_z^{(1)}) + v^{(2)} (\sigma_{yx}^{(1)} l_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} l_y^{(1)} + \sigma_{yz}^{(1)} l_z^{(1)}) + \\ & + w^{(2)} (\sigma_{zx}^{(1)} l_x^{(1)} + \sigma_{zy}^{(1)} l_y^{(1)} + \sigma_z^{(1)} l_z^{(1)})) dS - \iiint_V \left(u^{(2)} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(1)}}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + v^{(2)} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1)}}{\partial z} \right) + w^{(2)} \left(\frac{\partial \sigma_{zx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(1)}}{\partial z} \right) \right) dV \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Если напряжения, деформации и перемещения являются истинными то, учитывая формулы (3.2.1) и (3.2.4), равенство (3.2.5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dV = \\ & = \iint_{S_\sigma} (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS + \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV \end{aligned}$$

или (теорема Клапейрона)

$$2U = A, \quad (3.2.6)$$

где

$$A = \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV + \iint_{S_\sigma} (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS$$

есть возможная работа внешних сил на соответствующих им перемещениях.

Предположим далее, что напряжения являются истинными, то есть удовлетворяют уравнениям равновесия (3.2.1) и статистически граничным условиям (3.2.4), а перемещения – кинематически возможными и отличаются от истинных перемещений на малые вариации $\delta u, \delta v, \delta w$.

Тогда равенство (3.2.5) примет вид:

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_x (\varepsilon_x + \delta \varepsilon_x) + \sigma_y (\varepsilon_y + \delta \varepsilon_y) + \sigma_z (\varepsilon_z + \delta \varepsilon_z) + \sigma_{xy} (\varepsilon_{xy} + \delta \varepsilon_{xy}) + \sigma_{yz} (\varepsilon_{yz} + \delta \varepsilon_{yz}) + \\ & + \sigma_{zx} (\varepsilon_{zx} + \delta \varepsilon_{zx})) dV = \iint_{S_\sigma} (X_v (u + \delta u) + Y_v (v + \delta v) + Z_v (w + \delta w)) dS + \\ & + \iiint_V (X(u + \delta u) + Y(v + \delta v) + Z(w + \delta w)) dV \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Учитывая теорему Клапейрона (3.2.6), справедливую для истинного состояния деформированного тела, и считая, что внешние силы не изменяются при варьировании перемещений, из (3.2.7) получим:

$$\delta U - \delta A = 0 \quad (3.2.8)$$

где

$$\delta U = \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \delta \varepsilon_{zx}) dV \quad (3.2.9)$$

есть вариация потенциальной энергии деформации;

$$\delta A = \delta \left(\iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV + \iint_{S_\sigma} (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w) dS \right) \quad (3.2.10)$$

есть возможная работа объемных и поверхностных сил на малых возможных перемещениях.

Если в соответствии с обобщенным законом Гука (3.2.3) напряжения выразить через деформации и полученные соотношения подставить в выражение (3.2.9), то знак вариации в (3.2.9) можно вынести за знак интеграла и тогда равенство (3.2.8) можно записать в виде:

$$\delta \Pi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{zx}) = 0, \quad (3.2.11)$$

где

$\Pi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{zx}) = U(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{zx}) - A(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{zx})$ - есть полная потенциальная энергия упругой системы (функционал Лагранжа). Формула (3.2.11) выражает известный вариационный принцип Лагранжа, согласно которому из всех возможных систем перемещений истинные перемещения сообщают полной потенциальной энергии стационарное значение.

В случае линейно-упругого тела условие (3.2.11) превращается в условие минимума полной потенциальной энергии.

Можно записать полную потенциальную энергию Π через функции перемещений u, v, w , если воспользоваться соотношениями Коши (3.2.2). Условие минимума полученного варианта функционала Лагранжа Π даст уравнения равновесия (3.2.1) и статические граничные условия (3.2.4), в которых напряжения выражены через перемещения с помощью формул (3.2.2), (3.2.3).

Предположим, что деформации и перемещения являются истинными и связанными между собой соотношениями Коши (3.2.2), а напряжения – статически возможными и отличаются от истинных напряжений на малые вариации $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\sigma_{zx}$.

Поскольку статически возможные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия (3.2.1) и статическим граничным условиям (3.2.4) равенство (3.2.5) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \iiint_V ((\sigma_x + \delta\sigma_x)\epsilon_x + (\sigma_y + \delta\sigma_y)\epsilon_y + (\sigma_z + \delta\sigma_z)\epsilon_z + \\
& + (\sigma_{xy} + \delta\sigma_{xy})\epsilon_{xy} + (\sigma_{yz} + \delta\sigma_{yz})\epsilon_{yz} + (\sigma_{zx} + \delta\sigma_{zx})\epsilon_{zx})dV = \\
& = \iint_{S_\sigma} (X_v u + Y_v v + Z_v w)dS + \iiint_V (Xu + Yv + Zw)dV
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Учитывая далее (3.2.6) получим:

$$\iiint_V (\epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \epsilon_z \delta\sigma_z + \epsilon_{xy} \delta\sigma_{xy} + \epsilon_{yz} \delta\sigma_{yz} + \epsilon_{zx} \delta\sigma_{zx})dV = 0 \tag{3.2.13}$$

Для линейно упругого тела можно выразить деформации через напряжения по формулам (3.2.3) и подставить их в соотношение (3.2.13). Тогда будем иметь

$$\delta U(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \sigma_{xz}) = 0, \tag{3.2.14}$$

где

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \iiint_V & \left(\frac{\sigma_x^2}{E_x} + \frac{\sigma_y^2}{E_y} + \frac{\sigma_z^2}{E_z} - 2 \left(\frac{\nu_{xy}}{E_y} \sigma_x \sigma_y + \frac{\nu_{xz}}{E_z} \sigma_x \sigma_z + \frac{\nu_{yz}}{E_z} \sigma_y \sigma_z \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma_{xy}^2}{G_{xy}} + \frac{\sigma_{xz}^2}{G_{xz}} + \frac{\sigma_{yz}^2}{G_{yz}} \right) dV
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

есть потенциальная энергия деформации, выражения через напряжения.

Формула (3.2.14) выражает известный принцип минимума потенциальной энергии деформации, согласно которому из всех статистически возможных систем напряжений в упругом теле действительные напряжения сообщают потенциальной энергии деформации минимальное значение. Условием минимума функционала (3.2.15) являются уравнения совместности деформаций, выраженные через напряжения.

Рассмотрим сетчатую оболочку, представляющую собой регулярную систему, образованную из n семейств часто расположенных ребер (рис. 3.2.1). Заменяем регулярную систему ребер сплошным слоем с некоторыми приведенными жесткостями из условия статической эквивалентности исходной сетчатой структуры и гладкой оболочки.

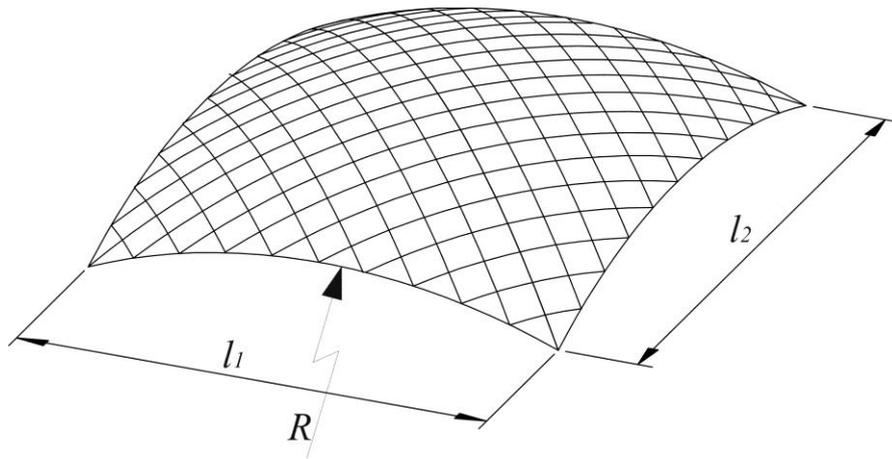


Рис. 3.2.1. Пологая сетчатая оболочка

Допустим, что оболочка состоит из одного семейства ребер, и обозначим через σ и τ нормальные и касательные напряжения в них. Представим сетчатую оболочку в виде некоторой гладкой однослойной оболочки, отнесенной к декартовым координатам x и y , вырежем из нее элемент со сторонами ds_1 и ds_2 (рис. 3.2.2).

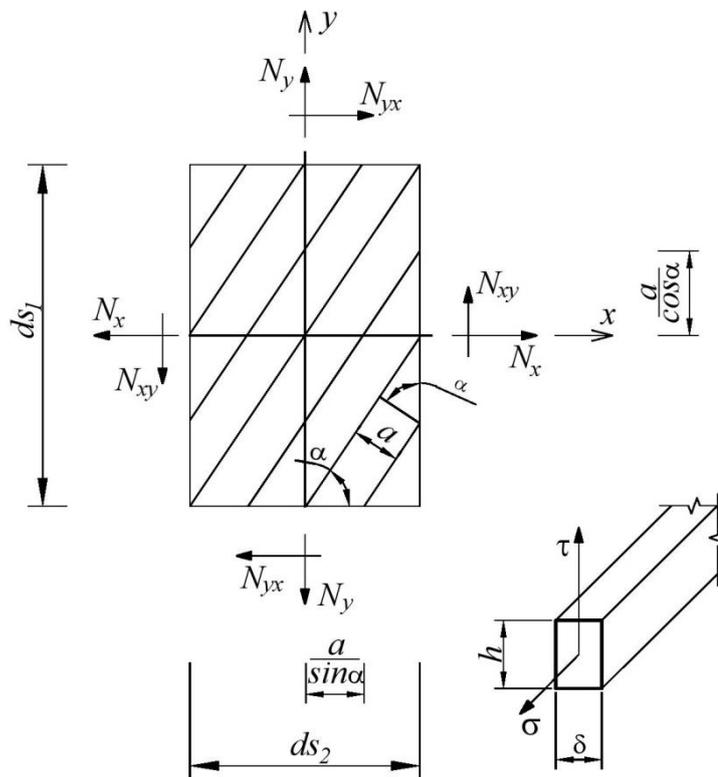


Рис. 3.2.2. Геометрия сетчатой оболочки, состоящей из одного семейства ребер

Из условия равновесия прямоугольного элемента со сторонами ds_1 и ds_2 получим следующие соотношения, связывающие нормальные σ и касательные τ напряжения с напряжениями в гладкой оболочке:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{\delta}{a} \sigma \cos^2 \alpha; \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\delta}{a} \sigma \sin^2 \alpha; \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{\delta}{a} \sigma \sin \alpha \cos \alpha; \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{\delta}{a} \tau \cos \alpha; \\ \bar{\sigma}_{yz} &= \frac{\delta}{a} \tau \sin \alpha,\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

Если оболочка содержит n семейств ребер (рис. 3.2.3), то соотношения (3.2.16) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \delta_j \cos^2 \alpha_j; \quad \bar{\sigma}_y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \delta_j \sin^2 \alpha_j; \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \sin \alpha_j \cos \alpha_j; \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \tau_j \delta_j \cos \alpha_j; \quad \bar{\sigma}_{yz} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \tau_j \delta_j \sin \alpha_j\end{aligned}\tag{3.2.17}$$

где n число семейств ребер a_j - расстояние между ребрами j -го семейства; δ_j - толщина ребер j -го семейства; α_j - угол между осью x и осью ребра j -го семейства ребер.

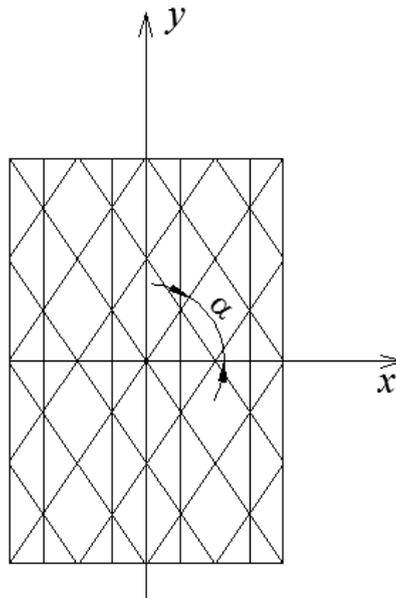


Рис. 3.2.3. Геометрия сетчатой оболочки, состоящей из n семейств ребер

Для определения физических соотношений сетчатой оболочки используется метод множителей Лагранжа. При построении функционала используется выражение для потенциальной энергии деформации (3.2.14). Дополнительные условия статической эквивалентности исходной сетчатой структуры и сплошной оболочки вводятся с помощью множителей Лагранжа e_x, e_y, \dots, e_{yz} представляющими собой деформации. Построенный функционал должен иметь стационарное значение, т.е. $\delta\Pi = 0$.

Потенциальная энергия слоя ребер единичной толщины определяется по формуле:

$$W = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_j \delta_j}{a_j} \frac{\sigma_j}{E} + \frac{1}{2} \frac{\tau_j \delta_j}{a_j} \frac{\tau_j}{G_j} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_j} \left(\frac{\sigma_j^2 \delta_j}{E_j} + \frac{\tau_j^2 \delta_j}{G_j} \right)$$

Функция, минимизируемая по методу множителей Лагранжа, записывается в виде:

$$\Pi = W + e_x(\sigma_x - \tilde{\sigma}_x) + e_y(\sigma_y - \tilde{\sigma}_y) + e_{xy}(\sigma_{xy} - \tilde{\sigma}_{xy}) + e_{yz}(\sigma_{yz} - \tilde{\sigma}_{yz}) + e_{zx}(\sigma_{zx} - \tilde{\sigma}_{zx})$$

или в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_j} \left(\frac{\sigma_j^2 \delta_j}{E_j} + \frac{\tau_j^2 \delta_j}{G_j} \right) + e_x \left(\sigma_x - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \sigma_j \cos^2 \alpha_j \right) + \\ & + e_y \left(\sigma_y - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \sigma_j \sin^2 \alpha_j \right) + e_{xy} \left(\sigma_{xy} - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \sigma_j \sin \alpha_j \cos \alpha_j \right) + \\ & + e_{yz} \left(\sigma_{yz} - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \tau_j \sin \alpha_j \right) + e_{zx} \left(\sigma_{zx} - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \tau_j \cos \alpha_j \right) \end{aligned}$$

(3.2.18)

где e_x, e_y, \dots, e_{zx} - деформации условной сплошной среды (множители Лагранжа); $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \sigma_{zx}$ - напряжения условной сплошной среды.

Из условий экстремума функции (3.2.18), которые записываются в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_j} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_j} = 0,$$

получим:

$$\sigma_j = E_j(e_x \cos^2 \alpha_j + e_y \sin^2 \alpha_j + e_{xy} \sin \alpha_j \cos \alpha_j);$$

$$\tau_j = G_j(e_{zx} \cos \alpha_j + e_{yz} \sin \alpha_j).$$

Подставляя полученные выражения для σ_j и τ_j в формулы (3.2.17) будем иметь (знак « \sim » опускается)

$$\sigma_x = A_{11}e_x + A_{12}e_y; \sigma_y = A_{21}e_x + A_{22}e_y; \sigma_{xy} = A_{33}e_{xy};$$

$$\sigma_{xz} = G_{xz}e_{xz}; \sigma_{yz} = G_{yz}e_{yz}. \quad (3.2.19)$$

Соотношения (3.2.19) соответствуют некоторому ортотропному материалу у которого нагружение вдоль осей ортотропии x и y не вызывает сдвиговых деформаций в плоскости xOy , а касательные напряжения не вызывают удлинений в направлениях осей x и y .

Жесткостные параметры, входящие (3.2.19), определяются по формулам:

$$A_{11} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \cos^4 \alpha_j; \quad A_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \sin^4 \alpha_j;$$

$$A_{12} = A_{21} = A_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j;$$

$$G_{xz} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} G_j \delta_j \cos^2 \alpha_j; \quad (3.2.20)$$

$$G_{yz} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} G_j \delta_j \sin^2 \alpha_j$$

где E_j, G_j - модуль упругости и модуль сдвига ребра.

После интегрирования по толщине с учетом (3.2.20) усилия в оболочке запишутся в виде:

$$N_x = B_{11}e_x + B_{12}e_y; \quad N_y = B_{21}e_x + B_{22}e_y; \quad N_{xy} = B_{33}e_{xy};$$

$$M_x = D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y; \quad M_y = D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y; \quad M_{xy} = D_{33}\kappa_{xy}; \quad (3.2.21)$$

$$Q_{xz} = S_1e_{xz}; \quad Q_{yz} = S_2e_{yz},$$

где

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \cos^4 \alpha_j; B_{12} = B_{21} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j; \\
B_{22} &= \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^4 \alpha_j; B_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j; \\
D_{11} &= \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \cos^4 \alpha_j; D_{12} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j; \\
D_{22} &= \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \sin^4 \alpha_j; D_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j; \\
S_1 &= \sum_{j=1}^n \frac{G_j h_j \delta_j}{a_j} \cos^2 \alpha_j; S_2 = \sum_{j=1}^n \frac{G_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j.
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Компоненты напряженного состояния в приведенной сплошной оболочке показаны на рис. 3.2.4.

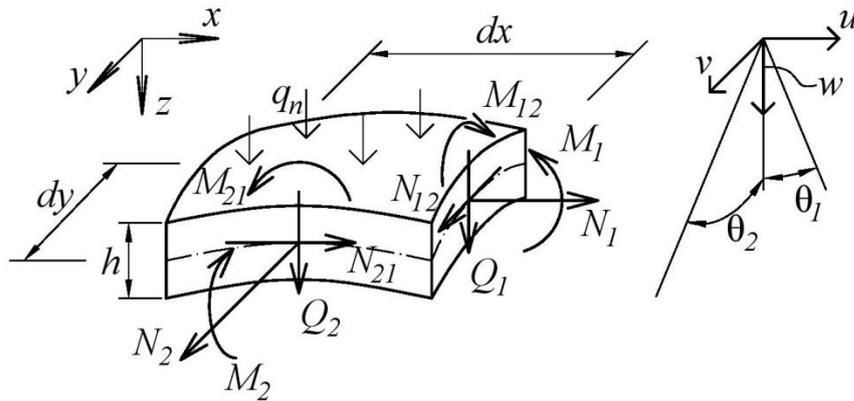


Рис. 3.2.4. Усилия и перемещения в оболочке

Физические соотношения (3.2.21) используются при формировании полной потенциальной энергии оболочки и дальнейшей реализации численного решения задачи. Приведенные жесткости (3.2.22) являются элементами матрицы упругости, входящей в подынтегральное выражение функционала Лагранжа.

3.3 Функционал Лагранжа и граничные условия

Как уже отмечалось выше, поведение деформируемых конструкций может быть описано либо локальным способом, то есть при помощи дифференциальных уравнений, либо вариационным, то есть с использованием экстремальных принципов. Между этими двумя постановками обычно существует взаимосвязь. Решение краевой задачи, описывающей поведение механической системы, оказывается эквивалентным задаче отыскания некоторой функции, которая минимизирует определенный интеграл, выражающий полную потенциальную энергию системы. Использование вариационных подходов во многих случаях имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с краевой задачей, описываемой дифференциальными уравнениями. Так, например, выражения, стоящие в функционалах, имеют более низкий порядок, чем в соответствующих уравнениях, что при использовании численных методов минимизации упрощает алгоритмизацию расчетов. Кроме того, разрешающие системы алгебраических уравнений являются, как правило, хорошо обусловленными с симметричными ленточными матрицами.

Для получения функционала Лагранжа теории ортотропных оболочек в геометрически нелинейной постановке следует учесть введенные выше допущения, позволяющие свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной задаче теории оболочек. Учитывая формулы (3.1.5) и выполнив интегрирование по z с учетом выражений (3.2.19) получим:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta U - \delta A = \\ &= \iint_S (N_x \delta e_x + N_y \delta e_y + N_{xy} \delta e_{xy} + M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_{xz} \delta e_{xz} + Q_{yz} \delta e_{yz}) dS - \\ &\quad - \iint_S (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w + m_x \theta_x + m_y \theta_y) dS = 0 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Поскольку в работе для анализа напряженно-деформированного состояния и устойчивости оболочечных конструкций используется вариационно-разностный метод, представим (3.3.1) в матричном виде, введя следующие обозначения: $\mathbf{N} = (N_x \ N_y \ N_{xy} \ M_x \ M_y \ M_{xy} \ Q_{xz} \ Q_{yz})^T$ – вектор усилий;

$\boldsymbol{\varepsilon} = (e_x \ e_y \ e_{xy} \ \kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy} \ e_{xz} \ e_{yz})^T$ - вектор, компонентами которого являются деформации оболочки; \mathbf{D} - матрица упругости, связывающая усилия и деформации; $\mathbf{q} = (q_x \ q_y \ q_z \ m_x \ m_y)^T$ - вектор внешней нагрузки, компонентами которого являются составляющие нагрузки по направлениям соответствующих обобщенных перемещений; $\mathbf{u} = (u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y)^T$ - вектор обобщенных перемещений.

Тогда учитывая симметрию матрицы \mathbf{D} можно записать:

$$\iint_S \mathbf{N}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds - \iint_S \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} dS = \iint_S (\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon})^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds - \iint_S \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} ds = \iint_S \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds - \iint_S \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} ds = 0$$

Принимая во внимание, что $\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \delta (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon})$, а также полагая, что внешние нагрузки являются консервативными, и не меняются в процессе варьирования перемещений, будем иметь:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \iint_S \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} ds - \iint_S \mathbf{q}^T \mathbf{u} dS \right) = 0$$

или

$$\delta \Pi = 0,$$

где

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dS - \iint_S \mathbf{q}^T \mathbf{u} dS \quad (3.3.2)$$

есть функционал Лагранжа теории ортотропных оболочек, в котором компоненты вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ должны быть записаны через перемещение по формулам (3.1.6).

Уравнениями Эйлера функционала (3.3.2) являются уравнения равновесия в перемещениях (система уравнений десятого порядка).

Из вариационного уравнения (3.3.1) помимо уравнений равновесия следуют естественные (статические) граничные условия, позволяющие получать граничные условия в нужном количестве. Координатные функции, аппроксимирующие искомые перемещения, должны удовлетворять лишь кинематическим краевым условиям.

Для задач теории оболочек в декартовой системе координат функционал (2.3.2) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \Pi = & \iint_{\Omega} F(x, y, u, v, \theta_1, \theta_2, w, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \frac{\partial \theta_1}{\partial y}, \frac{\partial \theta_2}{\partial x}, \frac{\partial \theta_2}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}) dx dy - \\ & - \oint_l H(u, v, \theta_1, \theta_2, w) dy - G(u, v, \theta_1, \theta_2, w) dx \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

при этом полагается, что функция F дважды дифференцируема.

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = m; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = n; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = l; \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = k; \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = f; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = g; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = s; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = t, \end{aligned}$$

то после некоторых преобразований с использованием формулы Грина получим следующее вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \iint_{\Omega} [(F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_m - \frac{\partial}{\partial y} F'_n) \delta u + (F'_v - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q) \delta v + \\ & + (F'_{\theta_1} - \frac{\partial}{\partial x} F'_l - \frac{\partial}{\partial y} F'_k) \delta \theta_1 + (F'_{\theta_2} - \frac{\partial}{\partial x} F'_f - \frac{\partial}{\partial y} F'_g) \delta \theta_2 + \\ & + (F'_w - \frac{\partial}{\partial x} F'_s - \frac{\partial}{\partial y} F'_t) \delta w] dx dy + \\ & + \oint (-H'_u dy + F'_m dy + G'_u dx - F'_n dx) \delta u + \\ & + \oint (-H'_v dy + F'_p dy + G'_v dx - F'_q dx) \delta v + \\ & + \oint (-H'_{\theta_1} dy + F'_l dy + G'_{\theta_1} dx - F'_k dx) \delta \theta_1 + \\ & + \oint (-H'_{\theta_2} dy + F'_f dy + G'_{\theta_2} dx - F'_g dx) \delta \theta_2 + \\ & + \oint (-H'_w dy + F'_s dy + G'_w dx - F'_t dx) \delta w = 0. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Из условия минимума функционала (3.3.4) следуют уравнения Эйлера (уравнения равновесия в перемещениях):

$$\begin{aligned}
F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_m - \frac{\partial}{\partial y} F'_n &= 0; & F'_{\theta_2} - \frac{\partial}{\partial x} F'_f - \frac{\partial}{\partial y} F'_g &= 0; \\
F'_v - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q &= 0; & F'_w - \frac{\partial}{\partial x} F'_s - \frac{\partial}{\partial y} F'_t &= 0 \\
F'_{\theta_1} - \frac{\partial}{\partial x} F'_l - \frac{\partial}{\partial y} F'_k &= 0;
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

и естественные (статические) граничные условия:

$$\begin{aligned}
(-H'_u + F'_m)dy + (G'_u - F'_n)dx &= 0; \\
(-H'_v + F'_p)dy + (G'_v - F'_q)dx &= 0; \\
(-H'_{\theta_1} + F'_l)dy + (G'_{\theta_1} - F'_k)dx &= 0; \\
(-H'_{\theta_2} + F'_f)dy + (G'_{\theta_2} - F'_g)dx &= 0; \\
(-H'_w + F'_s)dy + (G'_w - F'_t)dx &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Для пологой оболочки на прямоугольном плане естественные граничные условия запишутся следующим образом:

при $x = const$

$$N_x \delta u = 0,$$

$$N_{xy} \delta v = 0,$$

$$M_x \delta \theta_x = 0$$

$$M_{xy} \delta \theta_y = 0,$$

$$Q_{xz} \delta w = 0$$

при $y = const$

$$N_y \delta v = 0,$$

$$N_{yx} \delta u = 0,$$

$$M_y \delta \theta_y = 0,$$

$$M_{yx} \delta \theta_x = 0,$$

$$Q_{yz} \delta w = 0$$

Функционал Лагранжа (3.3.2), в котором деформации выражены через перемещения $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ по формулам (3.1.6) не содержит производных выше первого порядка, что упрощает алгоритмизацию решения задачи вариационно – разностным методом.

Для пологих оболочек в декартовой системе координат x, y коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $A_1=A_2=1$. В этом случае функционал (3.3.2) с учетом геометрических (3.1.6) и физических (3.2.21) соотношений может быть представлен в развернутом виде следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} \iint_s \left(\left(\sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \cos^4 \alpha_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right)^2 + \right. \\
& + \sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \\
& + \left(\sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right)^2 + \\
& + \sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^4 \alpha_j \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \\
& + \sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_{12} w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \\
& + \left(\sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \cos^4 \alpha_j \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \\
& + \left(\sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \sin^4 \alpha_j \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \\
& + \sum_{j=1}^h \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12 a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right)^2 + \\
& + \sum_{j=1}^h \frac{G_j h_j \delta_j}{a_j} \cos^2 \alpha_j \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_1 \right)^2 + \sum_{j=1}^h \frac{G_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_2 \right)^2 \Big) dx dy - \\
& - \iint_s (q_x u + q_y v + q_z w + m_x \theta_x + m_y \theta_y) dx dy
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Система уравнений равновесия в перемещениях для сдвиговой модели оболочки имеет десятый порядок, поэтому на каждом крае должно быть задано по пять граничных условий. Вариационный путь решения задачи на основе функционала (3.3.7) позволяет получать граничные условия в нужном количестве за счет удовлетворения естественных граничных условий.

Рассмотрим пологую оболочку на прямоугольном плане и сформулируем для нее некоторые типы граничных условий при $x=\text{const}$.

1) Жесткое закрепление:

Задаваемые граничные условия: $u=v=\theta_x=\theta_y=w=0$.

2) Шарнирно-неподвижное закрепление:

Задаваемые граничные условия: $u=v=\theta_y=w=0$

Естественное граничное условие: $M_x=0$

3) Шарнирно-подвижное закрепление:

Задаваемые граничные условия: $v=\theta_y=w=0$

Естественные граничные условия: $N_x=M_x=0$

4) Свободный край:

Естественные граничные условия : $N_x=M_x=N_y=M_y=Q_{xz}=0$.

3.4. Разностно-квadrатурная аппроксимация функционала и метод продолжения решения по параметру

Вариационная постановка задач расчета тонкостенных конструкций связана с нахождением функций, дающих минимальное значение функционалу, представляющему собой полную потенциальную энергию системы. Одним из наиболее эффективных численных методов минимизации функционала является вариационно-разностный метод (ВРМ), который имеет ряд существенных достоинств [22, 57, 97], в частности, он дает возможность рассчитывать тонкостенные конструкции сложной конфигурации с различного рода особенностями (изломами поверхности, отверстиями, подкреплениями и пр.). В ходе численной реализации ВРМ, как уже отмечалось выше, весьма существенную роль играет тот факт, что вариационная постановка приводит к снижению порядка производных по сравнению с формулировкой задачи в виде дифференциальных уравнений равновесия. Кроме того, матрица системы алгебраических уравнений получается симметричной, редко заполненной и имеет квазидиагональную структуру, что ускоряет решение задачи и сокращает

требуемый объем машинной памяти. Наконец подход, основанный на использовании ВРМ, позволяет построить эффективный и гибкий алгоритм, который дает возможность легко переходить от одной задачи к другой, внося в программу расчета небольшие изменения, связанные в основном лишь с записью конкретного функционала и аппроксимирующих функций.

Алгоритм формирования разрешающих уравнений ВРМ включает в себя следующие основные этапы:

1. Область изменения независимых переменных Ω разбивается на элементарные ячейки.

2. Значения искомой функции, доставляющей стационарное значение функционалу энергии, и ее производные в каждой ячейке приближенно задаются через значения функции в узловых точках.

3. Интегралы по ячейкам заменяются приближенными квадратурными формулами.

4. Для скалярной функции векторного аргумента, которая является дискретным аналогом исходного функционала, записывается необходимое условие стационарности. При фиксированном значении параметра нагрузки оно дает систему нелинейных алгебраических уравнений, представляющих собой уравнения Эйлера.

Предположим, что на область Ω наложена сетка

$$x_i = x_0 + ih_1; \quad y_j = y_0 + jh_2; \quad i = 0, 1, \dots, m_1;$$

$$j = 0, 1, \dots, m_2; \quad h = \max(h_1, h_2).$$

Определим для каждой ячейки относительную погрешность аппроксимационной схемы как отношение суммарной погрешности вычисления интеграла по ячейке к площади ячейки. Погрешность вычисления интеграла по всей области Ω можно оценить как максимум относительной погрешности по всем ячейкам.

Рассмотрим ячейку области Ω с вершинами в точках (x_i, y_j) , (x_{i+1}, y_j) , (x_i, y_{j+1}) , (x_{i+1}, y_{j+1}) и обозначим значения сеточных функций в этих точках u^0, u^1, u^2, u^3 (рис. 3.1.1). Функционал энергии $J(u)$ может быть представлен в виде суммы

интегралов по ячейкам сетки $J = \sum_{i,j} J_{ij}$. Для вычисления интеграла J_{ij} по ячейке используется его дискретный аналог I_{ij} , который вычисляется по формуле [62]:

$$I_{ij} = h_1 h_2 \sum_{s=1}^N c_s f(x_i^s, y_j^s, \sum_{m=0}^3 \alpha_m^s \mathbf{u}^m, \frac{1}{h_1} \sum_{m=0}^3 \beta_m^s \mathbf{u}^m, \frac{1}{h_2} \sum_{m=0}^3 \gamma_m^s \mathbf{u}^m), \quad (3.4.1)$$

где h_1, h_2 - линейные размеры ячейки в направлении координатных осей; f - подынтегральная функция; N - число подсчетов функции по ячейке; \mathbf{u}^m - значения искомых функций перемещений в узлах; $c_s, \alpha_m^s, \beta_m^s, \gamma_m^s$ - параметры схемы.

Для того, чтобы разностно-квадратурная аппроксимация (3.4.1) имела порядок относительной погрешности $O(h^2)$, параметры схемы должны удовлетворять дополнительным соотношениям [62]. Для единственности решения дискретной задачи необходимо потребовать, чтобы аппроксимационная схема сохраняла свойство строгой выпуклости исходного функционала. Кроме того, в целях построения наиболее экономичных схем, желательно, чтобы число подсчетов подынтегральной функции было минимальным.

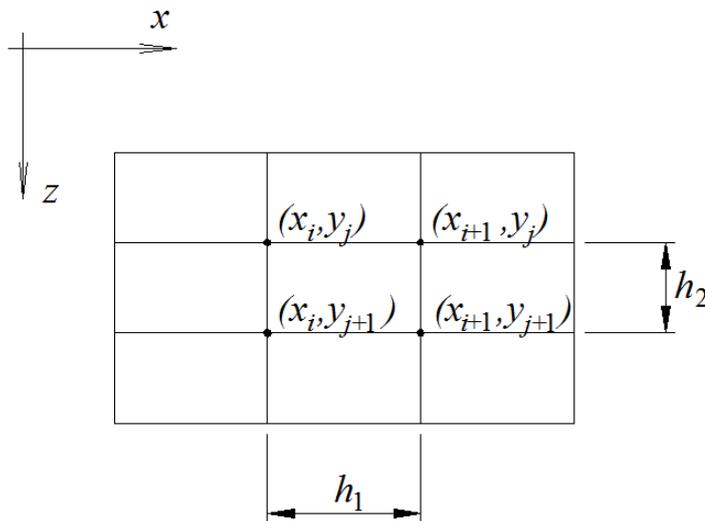


Рис. 3.4.1. К построению разностно-квадратурных аппроксимаций

Наиболее простая схема типа (3.4.1) при $N=1$ имеет следующий вид:

$$I_{ij} = h_1 h_2 f\left(\frac{\mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3}{4}, \frac{\mathbf{u}^3 + \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^2}{2h_1}, \frac{\mathbf{u}^3 + \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{2h_2}\right) \quad (3.4.2)$$

Однако, как отмечено в [11], данная схема обеспечивает решение задачи только в том случае, когда функция \mathbf{u} задана своими значениями на границе области Ω , что выполняется не всегда.

При $N=2$ можно построить схемы, сохраняющие свойство строгой выпуклости континуального функционала при любых краевых условиях, накладываемых на функции перемещений. Наиболее простые аппроксимационные схемы записываются в следующей форме:

$$I_{ij} = \frac{h_1 h_2}{2} \left(f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_m^1 \mathbf{u}^m, \frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^0}{h_2} \right) + f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_m^2 \mathbf{u}^m, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^1}{h_2} \right) \right) \quad (3.4.3)$$

$$I_{ij} = \frac{h_1 h_2}{2} \left(f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_m^1 \mathbf{u}^m, \frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^1}{h_2} \right) + f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_m^2 \mathbf{u}^m, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^0}{h_2} \right) \right) \quad (3.4.4)$$

При $N=4$ симметричная аппроксимационная схема, сохраняющая свойство строгой выпуклости, может быть образована путем осреднения схем (3.4.3) и (3.4.4):

$$I_{ij} = \frac{h_1 h_2}{4} \left(f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_m^1 \mathbf{u}^m, \frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^0}{h_2} \right) + f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_m^2 \mathbf{u}^m, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^1}{h_2} \right) + \right. \\ \left. f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_m^3 \mathbf{u}^m, \frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^1}{h_2} \right) + f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_m^4 \mathbf{u}^m, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^0}{h_2} \right) \right) \quad (3.4.5)$$

Численные расчеты оболочек и пластин в рамках кинематической модели, учитывающей деформации поперечного сдвига, показывают, что представленные выше схемы аппроксимации обладают довольно медленной сходимостью [60]. Это обстоятельство приводит к увеличению размерности задачи и неоправданно большим затратам времени решения на ЭВМ. Для повышения порядка аппроксимации используется следующий прием: в выражениях для деформаций функции перемещений аппроксимируются соотношениями, записанными относительно центральной точки того интервала, на котором аппроксимируются производные.

Возьмем в качестве примера пологую сферическую оболочку на прямоугольном плане. Тогда для конечно-разностной схемы по двум

треугольникам вида (3.4.3) аппроксимация функций и производных, входящих в выражения для деформаций

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2,$$

имеет следующий вид:

1-й треугольник

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^1 - u^0}{h_1}; \quad w = \frac{w^0 + w^1}{2}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w^1 - w^0}{h_1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v^2 - v^0}{h_2}; \quad w = \frac{w^0 + w^2}{2}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^2 - w^0}{h_2};$$

2-й треугольник

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^3 - u^2}{h_1}; \quad w = \frac{w^2 + w^3}{2}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w^3 - w^2}{h_1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v^3 - v^1}{h_2}; \quad w = \frac{w^1 + w^3}{2}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^3 - w^1}{h_2}.$$

В предлагаемой схеме порядок аппроксимации производных повышается до $O(h^2)$. С учетом данного подхода формулы (3.4.3) и (3.4.5) преобразуются следующим образом [60]:

$$I_{ij} = \frac{h_1 h_2}{2} \left(f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_{m1}^1 u^m, \dots, \sum_{m=0}^3 \alpha_{m6}^1 w^m, \frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^0}{h_2} \right) + \right. \\ \left. + f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_{m1}^2 u^m, \dots, \sum_{m=0}^3 \alpha_{m6}^2 w^m, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^1}{h_2} \right) \right) \quad (3.4.6)$$

$$I_{ij} = \frac{h_1 h_2}{4} \left(f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_{m1}^1 u^m, \dots, \sum_{m=0}^3 \alpha_{m6}^1 w^m, \frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^0}{h_2} \right) + \right. \\ \left. + f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_{m1}^2 u^m, \dots, \sum_{m=0}^3 \alpha_{m6}^2 w^m, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^1}{h_2} \right) + \right. \\ \left. + f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_{m1}^3 u^m, \dots, \sum_{m=0}^3 \alpha_{m6}^3 w^m, \frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^1}{h_2} \right) + \right. \\ \left. + f \left(\sum_{m=0}^3 \alpha_{m1}^4 u^m, \dots, \sum_{m=0}^3 \alpha_{m6}^4 w^m, \frac{\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2}{h_1}, \frac{\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^0}{h_2} \right) \right) \quad (3.4.7)$$

На рис 3.4.2 изображены следующие схемы аппроксимации:

A - схема (3.4.2);

B - схема (3.4.3) при $\alpha^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$; и $\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

C - схема (3.4.3) при $\alpha^1 = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$;

D - схема (3.4.6) при $\alpha_1^1 = \alpha_2^1 = \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha_3^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\alpha_4^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha_5^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha_6^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

$\alpha_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\alpha_5^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\alpha_6^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

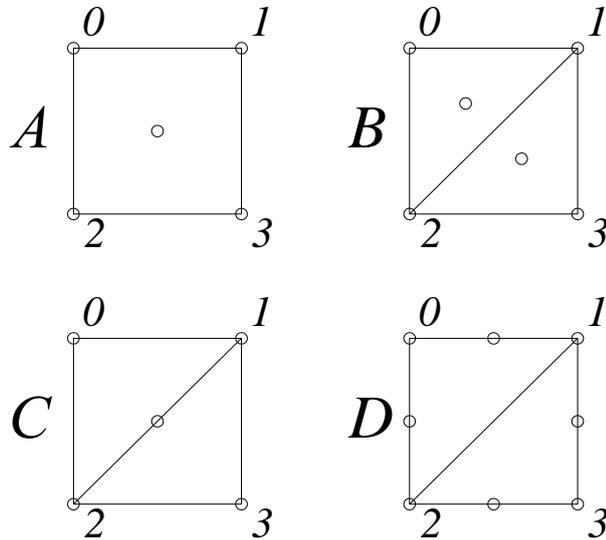


Рис. 3.4.2. Схемы аппроксимации

Предварительный численный анализ представленных выше разностно-квадратурных формул позволяет сделать вывод о том, что разностно-квадратурная аппроксимация (3.4.3) обладает очень медленной сходимостью, в то время как схема (3.4.2) и (3.4.6) обеспечивают более высокий порядок аппроксимации производных [62].

Представим уравнение равновесия оболочки в виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, p) = \nabla W(\mathbf{u}) - p\mathbf{Q} = 0 \quad (3.4.8)$$

где $\nabla W(\mathbf{u})$ - градиент потенциальной энергии деформации; \mathbf{Q} - нормированный вектор узловых нагрузок.

При непрерывном изменении параметра p решения уравнения (3.4.8) образуют непрерывную последовательность равновесных состояний. В пространстве, определяемом внутренними параметрами состояния (обобщенными координатами) и внешними параметрами управления (параметрами внешних воздействий), непрерывная последовательность равновесных состояний системы представляет собой кривую равновесных состояний.

Состояния равновесия вблизи недеформированного состояния устойчивы и удовлетворяют условию:

$$\det[\nabla^2 W(\mathbf{u}, p)] > 0$$

Необходимым условием, определяющим критическое состояние равновесия, является:

$$\det[\nabla^2 W(\mathbf{u}, p)] = 0 \quad (3.4.9)$$

Таким образом, при движении по равновесной кривой от исходной недеформированной конфигурации, критическое состояние достигается тогда, когда определитель (3.4.9) первый раз обращается в ноль.

Будем полагать, что все компоненты вектора перемещений и параметр нагрузки являются функциями некоторого параметра s и каждому значению этого параметра однозначно соответствует некоторое равновесное состояние $\mathbf{u}(s), p(s)$. Система уравнений (3.4.8) задает в неявном виде кривую равновесных состояний в пространстве $\mathbf{X}=(\mathbf{u}, p)^T$, зависящую от некоторого параметра, называемого параметром продолжения решения. Эту роль может выполнять как параметр нагрузки p , так и любая компонента вектора перемещений \mathbf{u} . Если в качестве ведущего параметра принять параметр нагрузки p , то с геометрической точки зрения решение задачи при ступенчатом нагружении сводится к определению точек равновесия, являющихся точками пересечения кривой равновесных состояний с семейством плоскостей $p - s = 0$ при $s = \Delta p, 2\Delta p, 3\Delta p, \dots$

Однако в окрестности предельной точки ступенчатое увеличение нагрузки не позволяет получить решение. В частности, в рамках метода Ньютона-Рафсона итерационный процесс, как правило, начинает расходиться или приводит к осцилляциям около некоторого значения вектора перемещений \mathbf{u} . В этом случае следует либо задавать отрицательное приращение нагрузки [96], либо произвести смену ведущего параметра p на любую из компонент вектора \mathbf{u} , для которой соответствующий матричный определитель не равен нулю [94].

При решении рассматриваемого класса задач наиболее целесообразным представляется подход [44, 157, 158, 184], основанный на введении дополнительно к N уравнениям (3.4.8) $N+1$ -го вспомогательного уравнения типа

$$F_0(\mathbf{u}, p, s) = 0 \quad (3.4.10)$$

Наиболее целесообразно принять в качестве ведущего параметра длину дуги s кривой состояний равновесия рассматриваемой механической системы, задаваемую соотношением [31]:

$$\Delta s^2 = \sum_{i=1}^n \Delta u_i^2 + \Delta p^2 \quad (3.4.11)$$

либо определять ведущий параметр в виде линейной комбинации независимых переменных:

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \alpha_{n+1} p \quad (3.4.12)$$

Коэффициенты α_i выбираются с учетом дополнительных соображений на каждом шаге численного решения. В работе [177] было предложено задавать эти коэффициенты в виде нормированного вектора производных вектора \mathbf{u} и параметра p с предыдущего шага:

$$\alpha_i = \frac{\frac{du_i}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{X}}{ds} \right\|}; \quad \alpha_{n+1} = \frac{\frac{dp}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{X}}{ds} \right\|}; \quad (3.4.13)$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{X}}{ds} \right\| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{du_i}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dp}{ds} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

Если вектор α задавать в виде $(0 \dots 0 1)^T$ или $(0 \dots 1 0 \dots 0)^T$, то параметр продолжения s будет представлять собой параметр нагрузки p или соответствующее узловое перемещение u_i .

В итерационных методах на каждом уровне нагружения m , которому соответствует значение параметра продолжения s_m , искомые функции $\mathbf{u}(s_m)$ и $p(s_m)$ находятся путем последовательных приближений к точному решению. В качестве начального приближения обычно выбираются значения $\mathbf{u}(s_{m-1})$ и $p(s_{m-1})$ с предыдущего шага нагружения. Одним из наиболее эффективных, с вычислительной точки зрения, методов решения рассматриваемого класса задач является метод Ньютона-Рафсона. Разложим функцию $F(\mathbf{u}, p)$ в ряд Тейлора с удержанием линейных слагаемых:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}, p+\Delta p)=\mathbf{F}(\mathbf{u}, p)+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{u}}\Delta\mathbf{u}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial p}\Delta p, \quad (3.4.8)$$

тогда, с учетом (3.4.8), получаем:

$$\begin{aligned} \nabla^2 W(\mathbf{u}^k(s_m))\Delta\mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{Q}\Delta p^{k+1} + \mathbf{Q}p^k(s_m) - \nabla W(\mathbf{u}^k(s_m)) \\ \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^k + \tau^k \Delta\mathbf{u}^{k+1}, \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

где k - номер итерации; $\mathbf{u}^k(s_m)$, $p^k(s_m)$ - значения искомых функций на итерации с номером k ; \mathbf{u}^{k+1} - значение искомой функции на итерации с номером $k+1$; $\Delta\mathbf{u}^{k+1}$, Δp^{k+1} - приращения функций на последующей итерации; $\nabla^2 W(\mathbf{u}^k(s_m))$ - матрица Гессе (матрица вторых производных) функции $W(\mathbf{u}^k(s_m))$; $\nabla W(\mathbf{u}^k(s_m))$ - градиент функции $W(\mathbf{u}^k(s_m))$; τ^k - итерационный параметр.

Величина параметра τ^k выбирается так, чтобы обеспечить убывание функции $F(\mathbf{u}, p)$ на каждой итерации. Существуют различные пути определения параметра итерации [99]. Один из них заключается в проверке неравенства:

$$\nabla W(\mathbf{u}^{k+1}) - \nabla W(\mathbf{u}^k) \leq \varepsilon \tau^k (\mathbf{g}^k, \Delta\mathbf{u}^{k+1}), \quad (3.4.15)$$

где

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{Q}\Delta p^{k+1} + \mathbf{Q}p^k(s_m) - \nabla W(\mathbf{u}^k(s_m)); \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Если неравенство (3.4.15) выполняется при $\tau^k = 1$, то шаг принимается равным единице и осуществляется следующая итерация. В противном случае шаг дробится до тех пор, пока условие (3.4.15) не выполнится.

Другой способ выбора итерационного параметра заключается в минимизации функции $\nabla W(\mathbf{u}^k + \tau^k \Delta \mathbf{u}^{k+1})$ с помощью одномерного поиска по τ :

$$\nabla W(\mathbf{u}^k + \tau^k \Delta \mathbf{u}^{k+1}) = \min \nabla W(\mathbf{u}^k + \tau \Delta \mathbf{u}^{k+1}), \quad \tau \geq 0$$

Наконец параметр τ^k может назначаться фиксированным в течение всего итерационного процесса, либо изменяться от шага к шагу на основе опыта решения подобных нелинейных задач.

Одна из основных трудностей, возникающих при практической реализации метода Ньютона, связана с необходимостью вычисления коэффициентов матрицы вторых производных $\nabla^2 W$ на каждой итерации. Существенно уменьшает трудоемкость вычислений модифицированный метод Ньютона-Рафсона:

$$\begin{aligned} \nabla^2 W(\mathbf{u}^0(s_m)) \Delta \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{Q} \Delta p^{k+1} + \mathbf{Q} p^k(s_m) - \nabla W(\mathbf{u}^k(s_m)), \\ \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^k + \tau^k \Delta \mathbf{u}^{k+1}, \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

где $\nabla^2 W(\mathbf{u}^0(s_m))$ - матрица вторых производных на шаге $k=0$, которая сохраняется неизменной в течение всего итерационного процесса в рамках текущего шага. Однако сходимость схемы (3.4.16) хуже, чем (3.4.14).

Численные исследования показывают, что с точки зрения затрат времени счета на ЭВМ, с одной стороны, и сходимости процесса с другой - наиболее приемлемым следует считать периодический пересчет матрицы $\nabla^2 W$ между несколькими пересчетами вектора невязки.

В рамках метода Ньютона-Рафсона вспомогательные уравнения, дополняющие (3.4.14), записываются в виде:

$$\|\delta \mathbf{u}^{k+1}\|^2 + (\delta p^{k+1})^2 = \Delta s^2 \quad (3.4.17)$$

и

$$(\alpha_0, \delta \mathbf{u}^{k+1}) + \alpha_{n+1} \delta p^{k+1} = \Delta s, \quad (3.4.18)$$

где

$$\delta \mathbf{u}^{k+1} = \delta \mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}^{k+1}, \delta p^{k+1} = \delta p^k + \Delta p^{k+1}; \quad (3.4.19)$$

$$\alpha_0 = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^T$$

Норма и скалярное произведение векторов в формулах (3.4.17) и (3.4.18) задаются в пространстве R^n .

Формула (3.4.17) описывает итерационный процесс нахождения решения на сфере с центром в точке $(\mathbf{u}(s_{m-1}), p(s_{m-1}))$ и радиусом Δs , а соотношение (3.4.18) определяет итерации на плоскости, для которой вектор \mathbf{a} является вектором нормали и которая расположена на расстоянии Δs от точки $(\mathbf{u}(s_{m-1}), p(s_{m-1}))$.

Для решения линейной системы (3.4.14) совместно с квадратным уравнением (3.4.17) используется алгоритм [152, 157], в котором процесс вычислений на шаге m состоит из следующих этапов:

1. Находятся решения двух вспомогательных систем линейных уравнений:

$$\nabla^2 W(\mathbf{u}^k(s_m))\mathbf{U} = \mathbf{Q} \quad (3.4.20)$$

$$\nabla^2 W(\mathbf{u}^k(s_m))\mathbf{V} = \mathbf{Q}p^k(s_m) - \nabla W(\mathbf{u}^k(s_m))$$

Зависимость между искомыми функциями $\Delta \mathbf{u}^{k+1}$, Δp^{k+1} и известными векторами \mathbf{U} , \mathbf{V} определяется путем подстановки соотношений (3.4.20) в уравнения (3.4.14):

$$\Delta \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{U}\Delta p^{k+1} + \mathbf{V} \quad (3.4.21)$$

2. Уравнение (3.4.10), после подстановки в него соотношений (3.4.12) и (3.4.21), преобразуется к следующему виду:

$$a(\Delta p^{k+1})^2 + 2b\Delta p^{k+1} - c = 0, \quad (3.4.22)$$

где

$$a = \|\mathbf{U}\|^2 + 1; \quad b = ((\delta \mathbf{u}^k + \mathbf{V}), \mathbf{U}) + \delta p^k;$$

$$c = \Delta s^2 - (\delta p^k)^2 - \|\delta \mathbf{u}^k + \mathbf{V}\|^2.$$

Корни уравнения (3.4.22) находятся по формуле:

$$\Delta p_{1,2}^{k+1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + ac}}{a}$$

На первой итерации

$$\Delta p_{1,2}^1 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{\|\mathbf{U}\|^2 + 1}}$$

Для определения знака Δp^1 используется следующий критерий [173]: если на текущем шаге нагружения m детерминант матрицы $\nabla^2 W(\mathbf{u}(s_{m-1}))$ и параметр

жесткости $S_p = U^T Q$ одновременно изменили знак по сравнению с предыдущим шагом нагружения, то знак перед Δp^1 меняется на обратный.

На последующих итерациях выбирается тот из корней, для которого угол между предыдущим значением вектора $(\delta u^k, \delta p^k)^T$ и текущим значением $(\delta u^{k+1}, \delta p^{k+1})^T$ является острым [157]. Если оба корня $\Delta p_{1,2}^{k+1}$ обеспечивают выполнение этого условия, то выбирается тот из корней, который ближе к линейному решению $\Delta p^{k+1} = \frac{c}{2b}$.

3. Вектор Δu^{k+1} вычисляется по формуле (3.4.21) при известном значении Δp^{k+1} .

4. Определяются величины:

$$\begin{aligned} \delta u^{k+1} &= \delta u^k + \Delta u^{k+1}, \\ \delta p^{k+1} &= \delta p^k + \Delta p^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

5. Процесс итераций продолжается до тех пор, пока норма вектора $(\Delta u^{k+1}, \Delta p^{k+1})$ не станет достаточно малой.

Процедура метода продолжения решения по описанной выше схеме Крисфилда проиллюстрирована на рис. 3.4.3.

Решение системы уравнений (3.4.14) совместно с дополнительным уравнением (3.4.18) выполняется так же, как и в описанном выше алгоритме:

1. Находятся решения двух вспомогательных линейных уравнений (3.4.20), определяющих зависимость (3.4.21) для приращений $\Delta u^{k+1}, \Delta p^{k+1}$.

2. После подстановки выражений (3.4.19) и (3.4.21) в уравнение (3.4.18) и выполнения некоторых преобразований получается следующее выражение для определения величины Δp^{k+1} :

$$\Delta p^{k+1} = \frac{\Delta s - (\alpha_0, \delta u^k) - \alpha_{n+1} \delta p^k - (\alpha_0, V)}{(\alpha_0, U) + \alpha_{n+1}}$$

3. Величина вектора Δu^{k+1} находится после подстановки Δp^{k+1} в уравнение (3.4.21).

4. По формулам (3.4.23) определяются величины δu^{k+1} и δp^{k+1} .

Основная идея методов дифференцирования по параметру заключается в приведении системы нелинейных уравнений (3.4.8) к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[\mathbf{F}(\mathbf{u}(s), p(s))] &= 0; \\ \mathbf{u}(s_0) &= \mathbf{u}^0, p(s_0) = p^0 \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

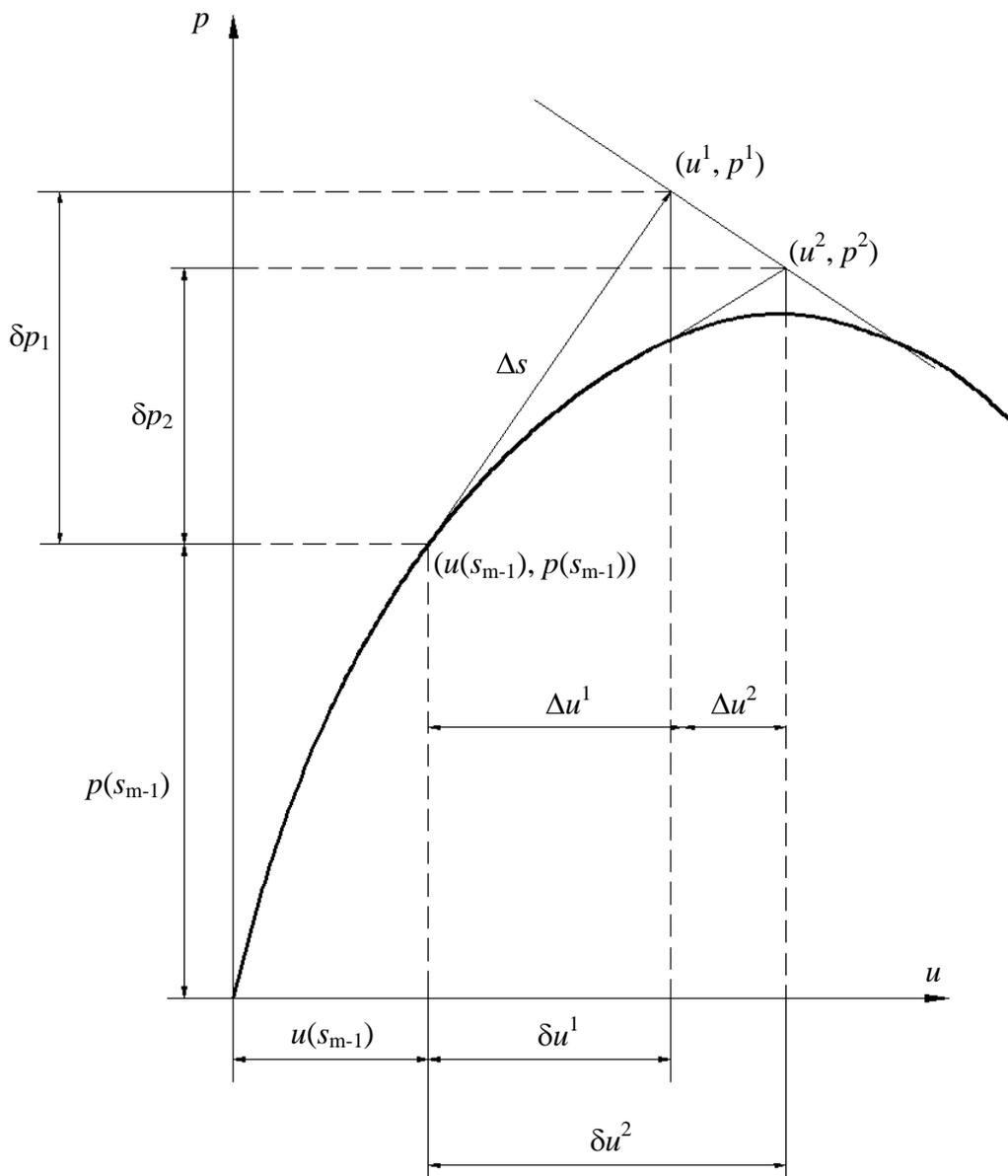


Рис. 3.4.4. Процедура метода продолжения по схеме Рикса

Система уравнений (3.4.24) должна быть дополнена одним из соотношений типа (3.4.11) или (3.4.12), записанным в дифференциальной форме:

$$\left\| \frac{du}{ds} \right\|^2 + \left(\frac{dp}{ds} \right)^2 = 1 \quad (3.4.25)$$

$$\left(\mathbf{a}_0, \frac{du}{ds} \right) + \alpha_{n+1} \frac{dp}{ds} = 1 \quad (3.4.26)$$

Решение задачи Коши можно получить с помощью любого численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, например методами Эйлера или Рунге-Кутты.

В работе [130] предложена самокорректирующаяся форма уравнений (3.4.24):

$$\frac{d}{ds} [\mathbf{F}(\mathbf{u}(s), p(s)) + Z\mathbf{F}(\mathbf{u}(s), p(s))] = 0, \quad (3.4.27)$$

где Z представляет собой некоторый положительный скалярный параметр.

Уравнение (3.4.27) имеет решение $\mathbf{F} = \mathbf{A}e^{-sZ}$, которое стремится к нулю при увеличении параметра s . Поэтому предложенный метод назван самокорректирующимся методом первого порядка, поскольку невязка при численном решении стремится к нулю и не происходит накопления погрешности вычислений.

Система уравнений (3.4.20) в более развернутой форме имеет вид:

$$\nabla^2 W(\mathbf{u}(s)) \frac{du}{ds} = \mathbf{Q} \frac{dp}{ds} + Z[\mathbf{Q}p(s) - W(\mathbf{u}(s))] \quad (3.4.28)$$

Если для численного решения системы уравнений (3.4.28) используется метод Эйлера, то расчетные соотношения на шаге с номером m задаются по формулам (полагая $Z=1/\Delta s$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 W(\mathbf{u}(s_{m-1})) \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{Q} \Delta p + \mathbf{Q} p(s_{m-1}) - \nabla W(\mathbf{u}(s_{m-1})) \\ \|\Delta \mathbf{u}\|^2 + \Delta p^2 &= \Delta s^2 \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

или

$$(\mathbf{a}_0, \Delta \mathbf{u}) + \alpha_{n+1} \delta p = \Delta s.$$

Система уравнений (3.4.29) совпадает с соотношениями метода Ньютона-Рафсона (3.4.14), (3.4.17) и (3.4.18), записанными для первой итерации. Поэтому данный алгоритм носит название метода приращений с одношаговой корректировкой по Ньютону-Рафсону.

Эффективный численный алгоритм, обладающий высокой точностью и не накапливающий погрешность вычислений, может быть построен путем применения процедуры Рунге-Кутты к решению системы уравнений (3.4.28). Самокорректирующаяся схема метода Рунге-Кутты включает в себя [62]:

1. Определение вектора $\mathbf{u}(s_m)$ и параметра $p(s_m)$ по формулам:

$$\mathbf{u}(s_m) = \mathbf{u}(s_{m-1}) + \Delta\mathbf{u}; \quad p(s_m) = p(s_{m-1}) + \Delta p; \quad (3.4.30)$$

где

$$\Delta\mathbf{u} = \frac{\Delta\mathbf{u}^1 + 2\Delta\mathbf{u}^2 + 2\Delta\mathbf{u}^3 + \Delta\mathbf{u}^4}{6};$$

$$\Delta p = \frac{\Delta p^1 + 2\Delta p^2 + 2\Delta p^3 + \Delta p^4}{6}.$$

2. Нахождение величин $\Delta\mathbf{u}^k$, Δp^k путем последовательного решения систем уравнений:

$$\nabla^2 W(\mathbf{u}^k) \Delta\mathbf{u}^k = \mathbf{Q} \Delta p^k + \mathbf{Q} p^k - \nabla W(\mathbf{u}^k) \quad (3.4.31)$$

$$\|\Delta\mathbf{u}^k\|^2 + (\Delta p^k)^2 = \Delta s^2$$

или

$$(\mathbf{a}_0, \Delta\mathbf{u}^k) + a_{n+1} \delta p^k = \Delta s.$$

Решение уравнений (3.4.31) выполняется в соответствии с алгоритмом, описанным выше для метода Ньютона-Рафсона, причем вычисления проводятся для одной итерации.

3. Корректировку значений \mathbf{u}^k и p^k на каждом текущем подшаге с помощью приращений, взятых с предыдущего подшага:

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}(s_{m-1}); \quad p^1 = p(s_{m-1});$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^2 &= \mathbf{u}(s_{m-1}) + \frac{\Delta \mathbf{u}^1}{2}; & p^2 &= p(s_{m-1}) + \frac{\Delta p^1}{2}; \\
\mathbf{u}^3 &= \mathbf{u}(s_{m-1}) + \frac{\Delta \mathbf{u}^2}{2}; & p^3 &= p(s_{m-1}) + \frac{\Delta p^2}{2}; \\
\mathbf{u}^4 &= \mathbf{u}(s_{m-1}) + \Delta \mathbf{u}^3; & p^4 &= p(s_{m-1}) + \Delta p^3.
\end{aligned}
\tag{3.4.32}$$

Формулы (3.4.30), (3.4.31) имеют четвертый порядок точности, поэтому шаг Δs может быть выбран значительно больше, чем для метода Эйлера, который имеет первый порядок точности. При необходимости решение, полученное с помощью метода дифференцирования по параметру, уточняется на некотором шаге с помощью процедуры Ньютона-Рафсона.

Во многих случаях в качестве параметра продолжения принимается параметр нагрузки p . Тогда система уравнений (3.4.17) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}[\mathbf{F}(\mathbf{u}(p), p)] &= 0 \\
\mathbf{u}(p_0) &= \mathbf{u}^0
\end{aligned}
\tag{3.4.33}$$

или в более развернутой форме

$$\begin{aligned}
\nabla^2 W(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{u}}{dp} &= \mathbf{Q} \\
\mathbf{u}(p_0) &= \mathbf{u}^0
\end{aligned}
\tag{3.4.34}$$

Процедура метода Эйлера для системы (3.4.34) записывается следующим образом:

$$\nabla^2 W(\mathbf{u}_{m-1}) \Delta \mathbf{u}_m = \mathbf{Q} \Delta p_m
\tag{3.4.35}$$

В окрестности предельной точки матрица Гессе $\nabla^2 W(\mathbf{u})$ начинает вырождаться. В этом случае производится смена ведущего параметра p на любой другой из $\mathbf{F}(\mathbf{u}(p), p)$. Если принять в качестве независимой переменной один из элементов вектора перемещений с номером s , то остальные $n-1$ элементов вектора \mathbf{u} и параметр нагрузки p будут функциями u_s , то есть $u_1 = u_1(u_s)$, $u_2 = u_2(u_s)$, ..., $p = p(u_s)$. Далее можно поступить следующим образом: в матрице Гессе заменить столбец, соответствующий приращению Δu_s на вектор \mathbf{Q} , а столбец, умноженный на Δu_s , перенести в правую часть системы линейных уравнений (3.4.35).

Основным недостатком этой операции является то, что преобразованная матрица уже не будет иметь симметричную ленточную структуру. Для того, чтобы оперировать с симметричной матрицей общего вида, обозначим через $V = \Delta u / \Delta p$ и запишем уравнение (3.4.35) следующим образом:

$$\nabla^2 W(\mathbf{u})V = Q \quad (3.4.36)$$

Решим уравнение (3.4.36) относительно V и представим приращение Δu в виде:

$$\Delta u = \Delta p V \quad (3.4.37)$$

Из уравнения с номером s можно определить Δp через заданное приращение Δu_s :

$$\Delta p = \frac{\Delta u_s}{V_s} \quad (3.4.38)$$

Подставив (3.4.38) в (3.4.37) получим выражение для компонент вектора Δu :

$$\Delta u = \left(\frac{\Delta u_s}{V_s} \right) V \quad (3.4.39)$$

Переходя в формулах (3.4.38), (3.4.39) от приращений к производным, можно получить определяющие соотношения для метода интегрирования более высокого порядка, например, для метода Рунге-Кутты:

$$\frac{dp}{du_s} = \frac{1}{V_s}, \quad \frac{du}{du_s} = \frac{V}{V_s}$$

Достаточно универсальный алгоритм вычисления компонент вектора градиента и матрицы вторых производных (матрицы Гессе) дискретного аналога $W(\mathbf{u})$ потенциальной энергии деформации строится на основе приближенных разностных формул, которые использовались при решении ряда задач в работах [96, 97, 138, 178]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\mathbf{u})}{\partial u_i} &= \frac{1}{2\delta} [W(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_i) - W(\mathbf{u} - \delta \mathbf{e}_i)]; \\ \frac{\partial^2 W(\mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j} &= \frac{1}{4\delta^2} [W(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_i + \delta \mathbf{e}_j) - W(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_i - \delta \mathbf{e}_j) - \\ & - W(\mathbf{u} - \delta \mathbf{e}_i + \delta \mathbf{e}_j) + W(\mathbf{u} - \delta \mathbf{e}_i - \delta \mathbf{e}_j)]; \\ i &= 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

где n - размерность задачи; $\delta = (10^{-3} \div 10^{-5}) \|\mathbf{u}\|$ - некоторое малое отклонение; $\|\mathbf{u}\|$ - сферическая норма вектора перемещений; $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ - единичные векторы.

Формулы (3.4.33) позволяют организовать гибкий вычислительный процесс, легко перестраиваемый в зависимости от конкретного вида вариационного функционала. Однако, они приводят к многократному вычислению функции $W(\mathbf{u})$ при определении каждого коэффициента, что требует значительных затрат машинного времени.

Наиболее экономичным и точным является подход, основанный на вычислении первых и вторых производных $W(\mathbf{u})$ по своим явным выражениям.

Если рассчитывается упругая оболочка, когда за основу принят функционал Лагранжа при условии, что контурные усилия отсутствуют, получаем следующие зависимости [62]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\mathbf{u})}{\partial u_i} &= \iint_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^E \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i} d\Omega; \\ \frac{\partial^2 W(\mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j} &= \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i} \right)^T \mathbf{D}^E \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_j} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^E \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i \partial u_j} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

Выражения (3.4.41) определены, если известны значения производных $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i}$ и $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i \partial u_j}$. Значения производных от деформаций можно получить, исходя из

разложения для функций деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + d\boldsymbol{\varepsilon}^L(\Delta \mathbf{u}) + d\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\Delta \mathbf{u}), \quad (3.4.42)$$

где $d\boldsymbol{\varepsilon}^L$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}$ - соответственно линейная и нелинейная части приращений деформаций, полученные выше.

Представим приращение перемещений в виде:

$$\Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{e}_i; \quad \Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{e}_i + \delta \mathbf{e}_j. \quad (3.4.43)$$

Подставим (3.4.43) в разложение (3.4.42), тогда получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_i) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \delta d\boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{e}_i) + \delta^2 d\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{e}_i); \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_i + \delta \mathbf{e}_j) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \delta d\boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{e}_i) + \delta d\boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{e}_j) + \delta^2 d\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) \end{aligned} \quad (3.4.44)$$

Частные производные функций деформаций по переменным u_i, u_j имеют вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_i) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{\delta};$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i \partial u_j} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_i + \delta \mathbf{e}_j) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_i) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{e}_j) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{\delta^2}$$
(3.4.45)

Подставим (3.4.44) в (3.4.45) и, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим в окончательном виде [61]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i} = d\boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{e}_i);$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_i \partial u_j} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) - d\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{e}_i) - d\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{e}_j).$$
(3.4.46)

3.5. Решение тестовых задач

Расчет квадратной сетчатой пластины в линейной постановке.
Дискретная модель. В качестве первой модели рассматривается квадратная сетчатая пластина, жестко закрепленная по контуру (рис. 3.5.1).

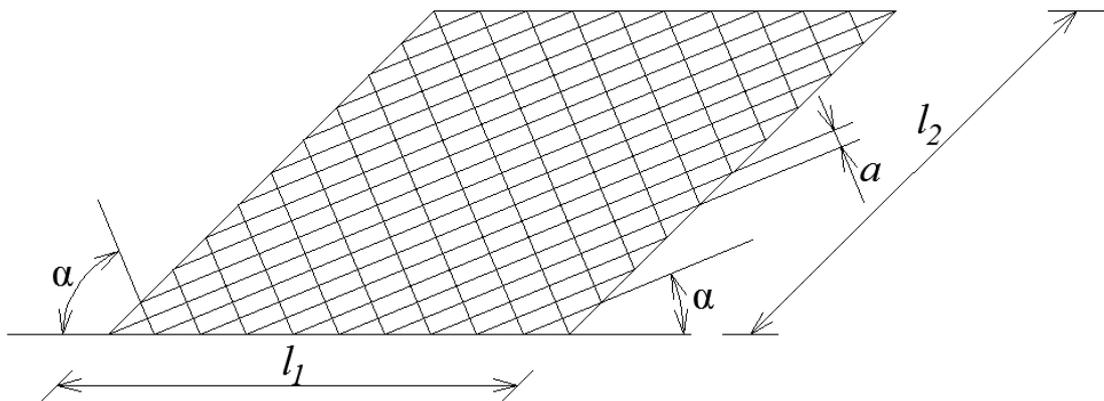


Рис.3.5.1. Сетчатая пластинка (дискретная модель)

Исходные данные для расчета следующие: модуль упругости материала $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu=0,3$; длина сторон $l_1=l_2=1,0$ м; площадь поперечного сечения ребер первого и второго семейств $A=1,0$ см²; расстояние

между ребрами $a=7,071$ см; угол наклона ребер первого и второго семейств $\alpha=\pm 45^\circ$.

Пластинка находится под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q_z=0,01$ кг/см².

Граничные условия: $u=v=\theta_1=\theta_2=w=0$ при $x=0; l_1$ и при $y=0; l_2$.

Расчет выполнялся с помощью вычислительного комплекса Лира. Использовался пространственный стержневой конечный элемент с шестью степенями свободы в каждом узле. Общее количество конечных элементов – 1648. Равномерно распределенная нагрузка приводилась к узловой нагрузке, которая составляет для каждого узла 0,5525 кг.

Мозаика вертикальных перемещений приведена на рис. 3.5.2.

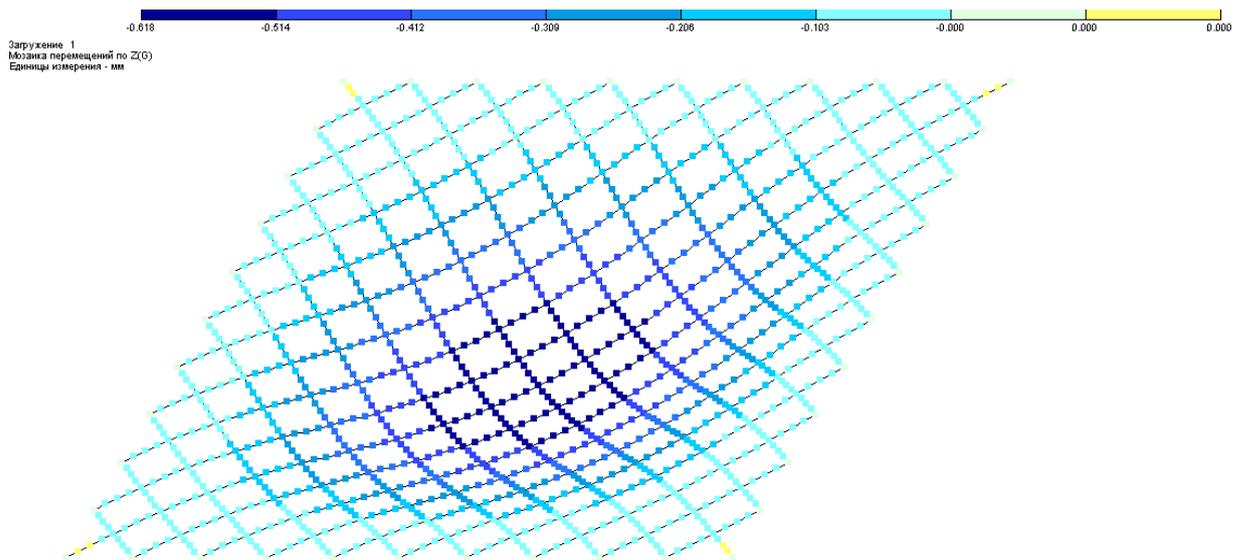


Рис. 3.5.2. Мозаика вертикальных перемещений сетчатой пластинки для дискретной модели в линейной постановке

Расчет квадратной сетчатой пластины в линейной постановке. Континуальная модель. В качестве второй модели рассматривается квадратная пластинка жестко закрепленная по контуру и представляющая собой континуальную модель сетчатой пластинки (рис. 3.5.3).

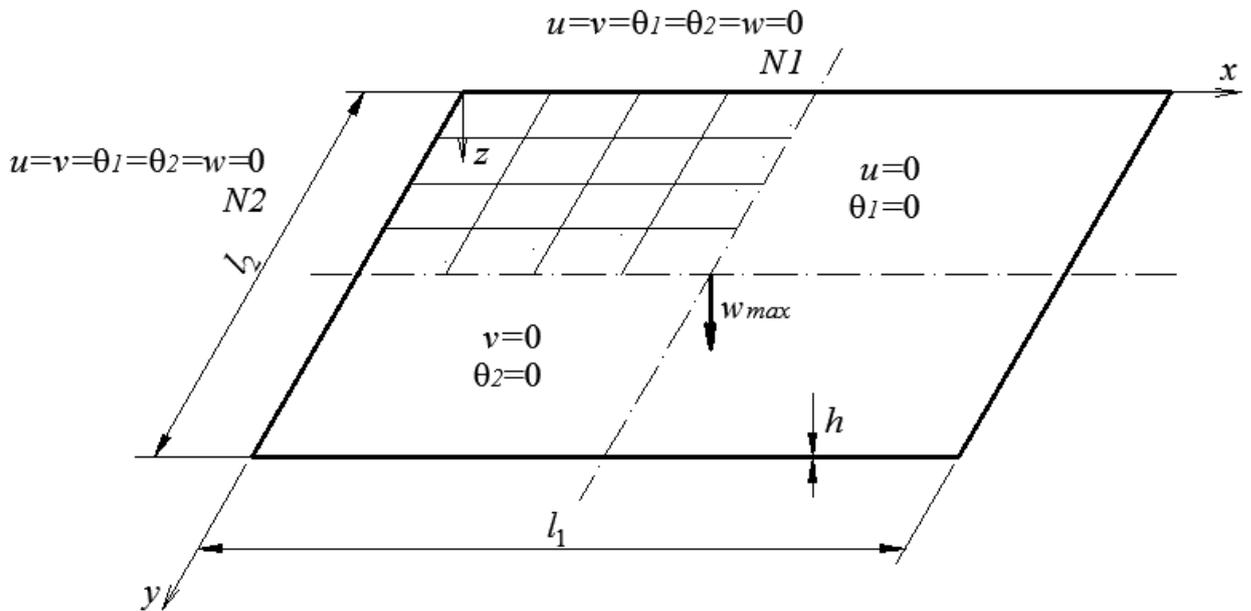


Рис. 3.5.3. Сетчатая пластинка (континуальная модель)

Исходные данные приняты такими же, как и для дискретной модели. Расчет выполнялся с помощью предложенного алгоритма вариационно-разностного метода. В силу симметрии задачи рассматривалась четверть пластинки, на которую накладывалась сетка элементов размером $N1 \times N2 = 9 \times 9$. Симметрия задачи учитывалась при формулировке граничных условий.

На рис. 3.5.4 показана форма прогибов пластинки, полученная на основе континуальной модели.

В приведенной ниже таблице 3.5.1 даны максимальные значения вертикальных перемещений w в центре пластинки, полученные с использованием двух подходов и методов решения.

Таблица 3.5.1. Максимальные значения вертикальных перемещений w в центре пластинки в линейной постановке

Модель	Метод решения	Прогиб w , см	Относительная разность значений, %
Дискретная	МКЭ (ВК Лира)	0,06173	14,1
Континуальная	ВРМ	0,07043	

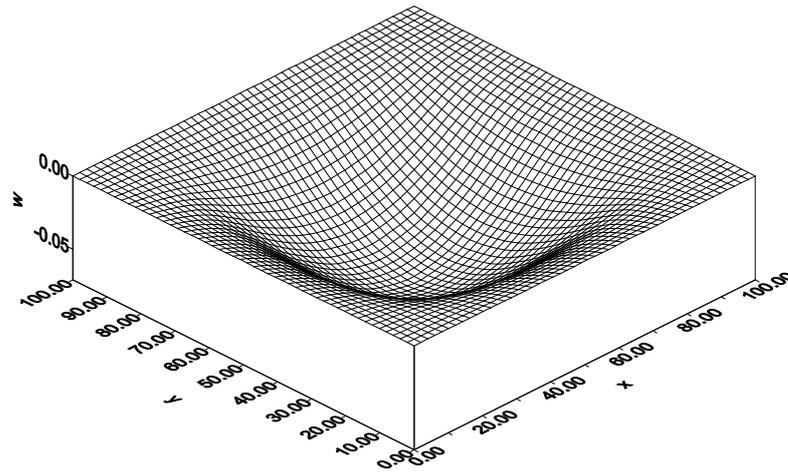


Рис. 3.5.4. Вертикальные перемещения пластинки

Расчет квадратной сетчатой пластины в геометрически нелинейной постановке. Дискретная модель. На рис. 3.5.5 приведена мозаика прогибов сетчатой плиты при нелинейном расчете на основе дискретной постановки задачи в ПК Лира. Результат получен при нагрузке $q_z=80 \times 100$ кг/м² (количество шагов по нагрузке 80). Использовались пространственный стержневой конечный элемент с 12-ю степенями свободы.

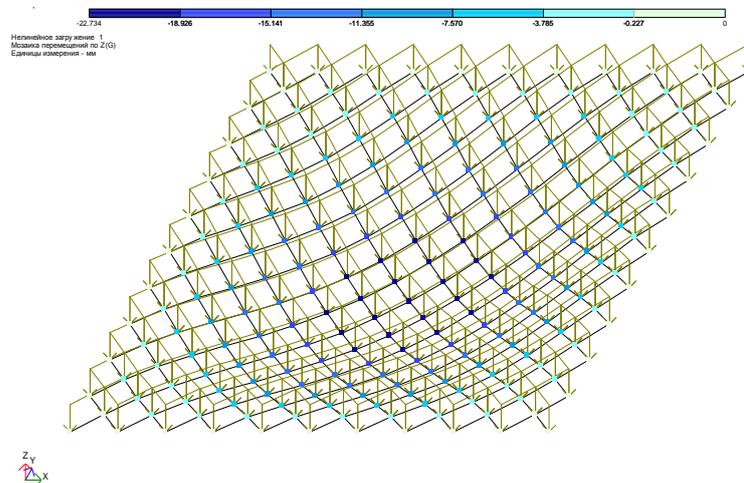


Рис. 3.5.5. Мозаика прогибов сетчатой пластинки при расчете в нелинейной постановке на основе дискретной модели.

Расчет квадратной сетчатой пластины в геометрически нелинейной постановке. Континуальная модель. На рис. 3.5.6 приведена кривая равновесных состояний сетчатой пластины жестко закрепленной по контуру, при

решении задачи использовалось шаговое нагружение в сочетании с итерациями метода Ньютона на каждом шаге.

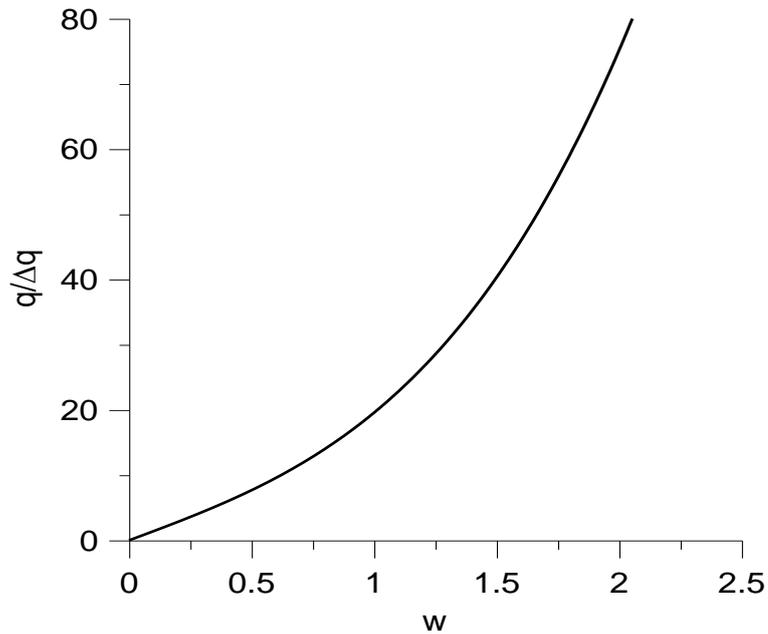


Рис. 3.5.6. Кривая равновесных состояний сетчатой пластины, жестко закрепленной по контуру

В приведенной ниже таблице 3.5.2 даны максимальные значения вертикальных перемещений w в центре пластинки при максимальном значении нагрузки, полученные с использованием двух подходов и методов решения.

Таблица 3.5.2. Максимальные значения вертикальных перемещений w в центре пластинки в нелинейной постановке

Модель	Метод решения	Прогиб w , см	Относительная разность значений, %
Дискретная	МКЭ (ВК Лира)	2,27	
Континуальная	ВРМ	2,08	9,13

Проведенные численные исследования сетчатой пластинки на основе двух моделей (дискретной и континуальной) с помощью различных программных средств показывает достаточно хорошую согласованность результатов расчета, что подтверждает их достоверность. Анализ результатов решения тестовых задач

позволяет сделать вывод о том, что предлагаемая континуальная расчетная модель, а также алгоритм решения нелинейной задачи достаточно корректны и могут быть использованы для исследования деформированного состояния и устойчивости рассматриваемых пространственных систем.

3.6. Расчёт пологих сетчатых гипаров с различными граничными условиями в геометрически нелинейной постановке

Рассмотрим задачи расчёта сетчатых оболочек в форме пологого гипара на прямоугольном плане с квадратной сеткой. Основные геометрические характеристики оболочек (рис. 3.6.1): размеры в плане $l_1 = l_2 = 6$ м; стрела подъема $F = 1,08$ м; шаг рёбер 1-го и 2-го семейства $a = 0,2$ м; площадь поперечного сечения рёбер $S = 3 \cdot 10^{-4}$ м²; углы наклона рёбер 1-го семейства к оси x составляют $\alpha_1 = 0^\circ$, углы наклона рёбер 2-го семейства к оси x составляют $\alpha_2 = 90^\circ$. Кривизны оболочки $k_1 = k_2 = 0$, $k_{12} = -F/(ab) = -0,03$ м⁻¹. Модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па.

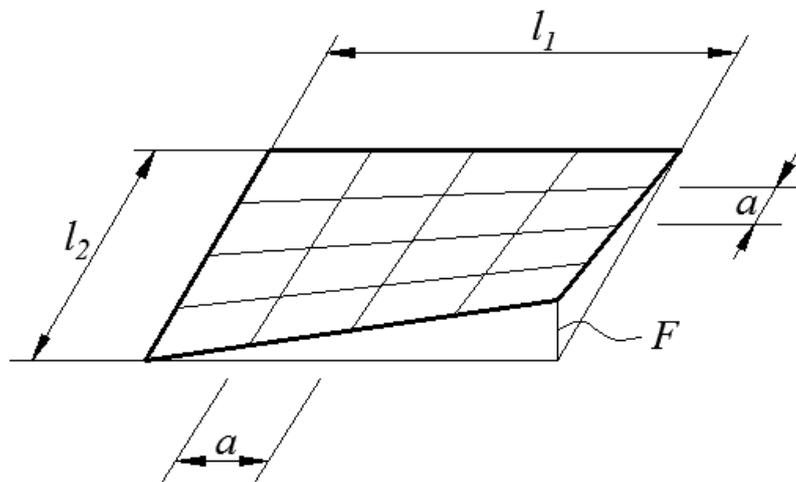


Рис. 3.6.1. Пологий сетчатый гипар с квадратной сеткой

В расчётах используется кинематическая модель с учётом деформаций поперечного сдвига, представленная в главе соотношениями (3.1.5), (3.1.6).

Физические соотношения определяются формулами (3.2.21), (3.2.22), в которые входят приведённые жёсткости, определяющие переход от исходной дискретной модели к расчётной континуальной.

Для решения нелинейной задачи используются следующие численные методики:

1) процедура продолжения решения по длине дуги кривой равновесных состояний в форме Крисфилда и Рикса (3.4.14), (3.4.17) – (3.4.23);

2) процедура пошагового нагружения с уточнением решения на каждом шаге по нагрузке по методу Ньютона-Рафсона (3.4.14).

На оболочку накладывается конечно-разностная сетка $N1 \times N2 = 13 \times 13$, показанная на рис. 3.6.2.

Приняты следующие виды граничных условий:

1) Свободное опирание по контуру: при $x = 0$, l_1 и $y = 0$; l_2 нормальное перемещение $w = 0$. Шаг по нагрузке составляет $\Delta q = 500$ Па. Общее количество шагов по нагрузке $m = 3$.

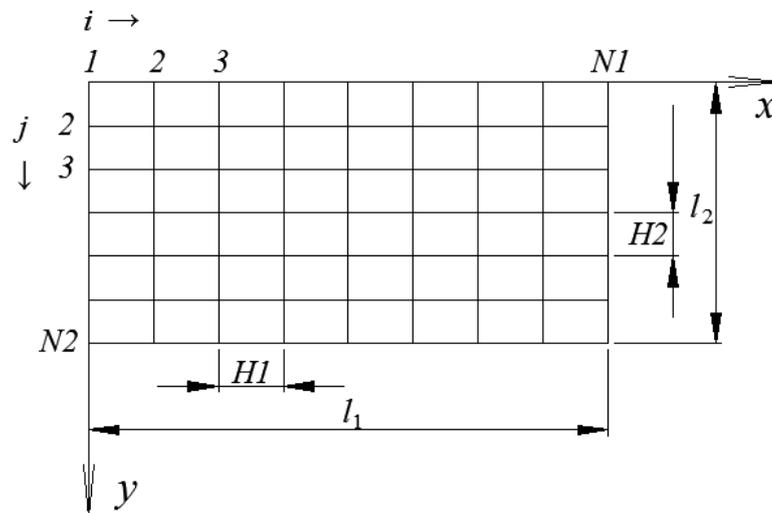


Рис. 3.6.2. Конечно-разностная сетка

Расчет показывает, что данных граничных условиях нормальные и сдвигающие усилия в элементах сетчатой оболочки практически отсутствуют. График зависимости нормальных перемещений w в центре оболочки от уровня нагружения, определяемого номером шага m , показан на рис. 3.6.3.

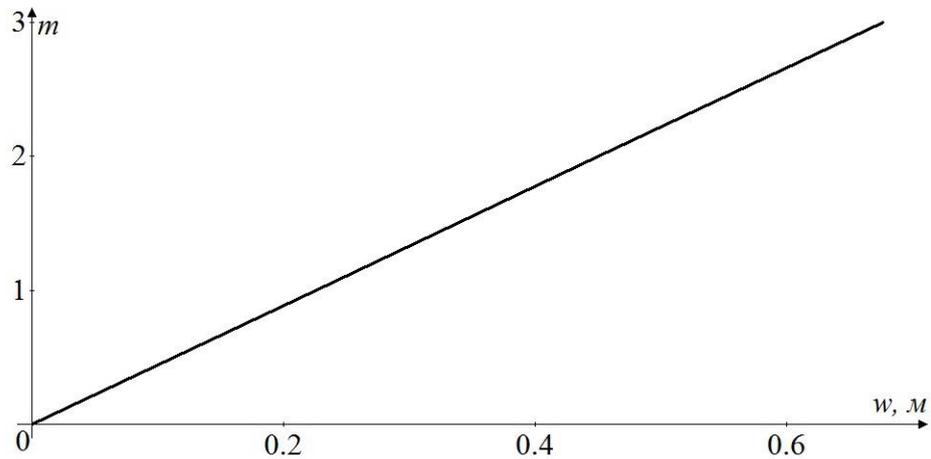


Рис. 3.6.3. График зависимости w - t при свободном опирании оболочки по контуру

Изополя нормальных перемещений w в оболочке при $m=3$ показаны на рис. 3.6.4.

В качестве основных компонентов напряженного состояния выступают изгибающие моменты и поперечные силы в стержневых элементах, составляющих сетку оболочки.

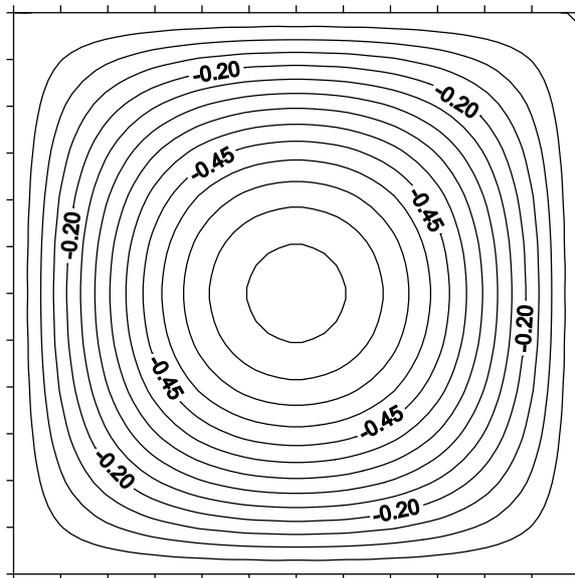


Рис. 3.6.4. Изополя нормальных перемещений w при свободном опирании оболочки по контуру

2) Шарнирно-неподвижное закрепление по контуру: при $x=0;l_1$ перемещения $u=v=\theta_y=w=0$; при $y=0;l_2$ перемещения $u=v=\theta_x=w=0$. Шаг по нагрузке составляет $\Delta q=100$ Па. Общее количество шагов по нагрузке $m=50$.

График зависимости нормальных перемещений w в центре оболочки от уровня нагружения, определяемого номером шага m , показан на рис. 3.6.5.

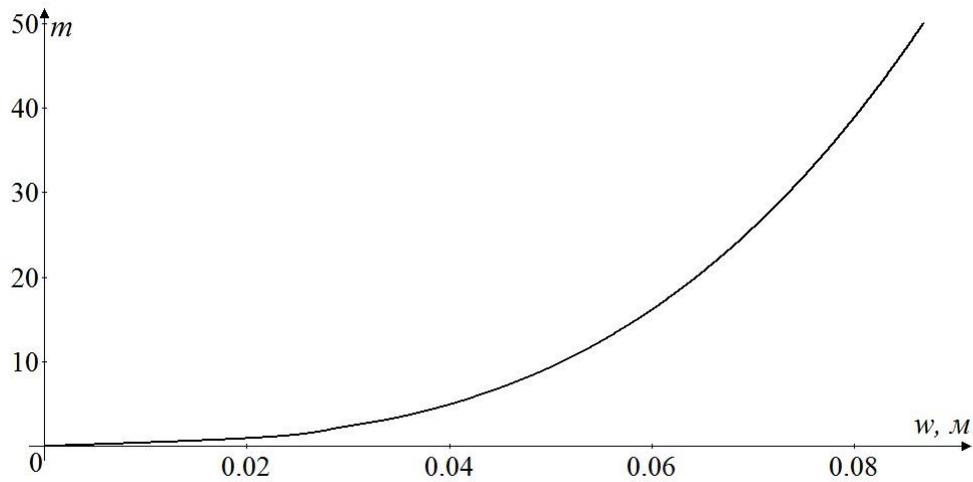


Рис. 3.6.5. График зависимости w - m при шарнирно-неподвижном закреплении оболочки по контуру

Изополя нормальных перемещений w в оболочке при $m=50$ показаны на рис. 3.6.6.

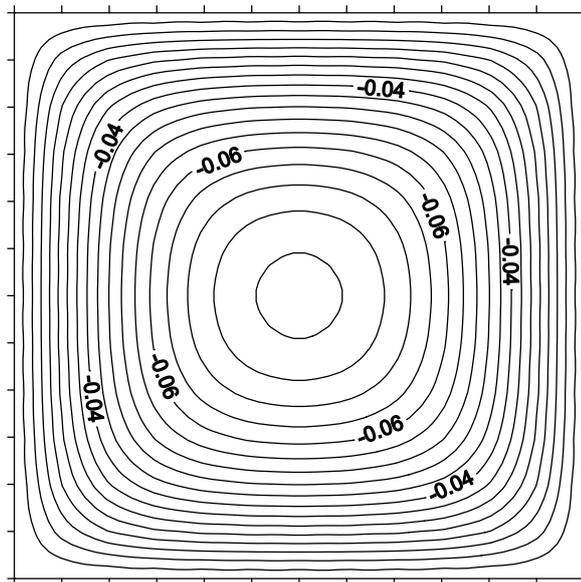


Рис. 3.6.6. Изополя нормальных перемещений w при шарнирно-неподвижном закреплении оболочки по контуру

При данных граничных условиях помимо изгибающих моментов и поперечных сил в работу вступают нормальные усилия. Их роль в общей картине напряженного состояния увеличивается по мере нагружения оболочки.

3) Жёсткое закрепление по контуру: при $x=0; l_1$ и $y=0; l_2$ перемещения $u= v= \theta_x = \theta_y= w= 0$. Шаг по нагрузке составляет $\Delta q= 100$ Па. Общее количество шагов по нагрузке $m=50$. График зависимости нормальных перемещений w в центре оболочки от уровня нагружения, определяемого номером шага m , показан на рис. 3.6.7.

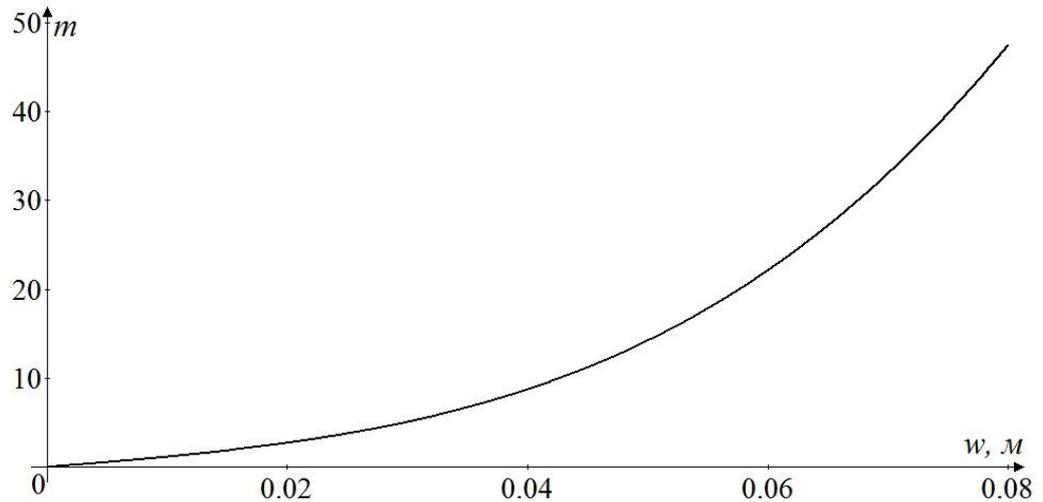


Рис. 3.6.7. График зависимости w - m при жестком закреплении оболочки по контуру

Изополя нормальных перемещений w в оболочке при $m=50$ показаны на рис. 3.6.8.

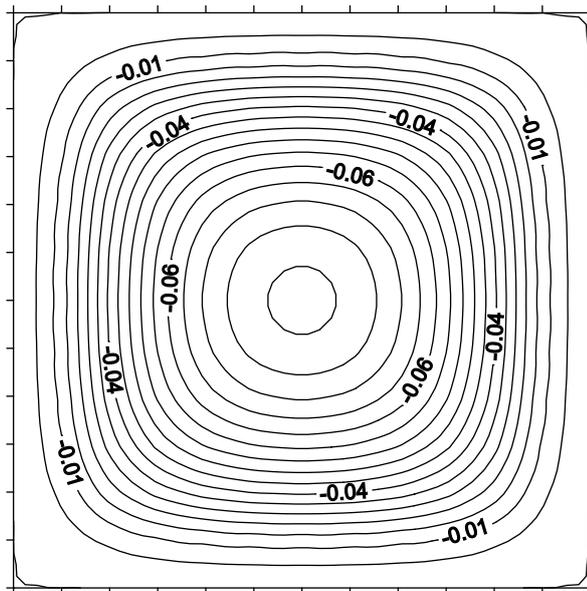


Рис. 3.6.8. Изополя нормальных перемещений w при жестком закреплении оболочки по контуру

При жестком закреплении в оболочке имеют место усилия как моментного типа – изгибающие моменты и поперечные силы, так и мембранного типа – нормальные и сдвигающие усилия. В данном случае жесткость оболочки в целом больше, чем при шарнирно-неподвижном закреплении ее по контуру.

3.7. Выводы по главе 3

В настоящей главе подробно описан и верифицирован метод решения задач пологих сетчатых оболочек, в частности гипаров с различными граничными условиями. Метод, основанный на континуальной модели, реализован на ЭВМ и позволяет решать задачи в линейной и геометрически нелинейной постановке. На базе разработанного программного комплекса решены задачи расчета пологого гипара с учётом различных закреплений по краям оболочки. В качестве основных выводов по главе следует выделить следующие:

1. Построены, при введении определённых допущений, исходные геометрические соотношения технической теории сплошных оболочек, обладающие большей точностью по сравнению с классической теорией Кирхгофа-Лява. При этом они относительно просты и удобны при реализации на ЭВМ, поскольку не содержат производных выше первого порядка.

2. Построены физические соотношения на основе континуальной модели сетчатой оболочки, используемые при формировании её полной потенциальной энергии и дальнейшей реализации численного решения задачи.

3. Построен вариант функционала Лагранжа теории ортотропных оболочек на основе континуальной расчетной модели в геометрически нелинейной постановке с учетом деформаций поперечного сдвига.

4. Приведена процедура метода продолжения по схеме Крисфилда, а также метода продолжения по схеме Рикса. Путем применения описанных процедур Ньютона-Рафсона и самокорректирующегося метода Рунге-Кутты построен эффективный численный алгоритм, обладающий высокой точностью и не накапливающий погрешность вычислений.

5. Выполнен анализ НДС пологих сетчатых гипаров в геометрически нелинейной постановке с различными граничными условиями и построены кривые равновесных состояний.

Глава 4. Исследование несущей способности и устойчивости нелинейно деформируемых сетчатых гиперболоидов вращения

4.1. Анализ влияния угла наклона образующей на напряженно- деформированное состояние сетчатого гиперболоида с учётом ветровых нагрузок

Изучение влияния наклона образующей на общие характеристики конструкций в форме однополостного гиперболоида вращения является первым шагом к изучению общих закономерностей влияния формообразования на несущие способности сетчатых оболочек данного типа.

Как было сказано в части 2.3 для достижения поставленных целей выбрано три гиперболоида, в каждом из которых образующие задавались под углами $58,71^\circ$, $63,48^\circ$ и $69,1^\circ$ соответственно (рис. 4.1.1.). Уравнения данных поверхностей (2.3.10), (2.3.11) и (2.3.12) были описаны нами ранее.

В качестве объекта исследования сетчатая оболочка представляется каркасом здания гражданского назначения, имеющего форму однополостного гиперболоида вращения. Ограждающая поверхность такого здания состоит из множества плоских треугольников (остекление), углы которых, соответственно, располагаются в узлах пересечения образующих. Данное допущение позволит принимать нагрузки от ветровых воздействий как на континуальную оболочку заданной формы.

Неизменяемыми параметрами остались количество образующих (по двадцать четыре каждого семейства), высота 30 м и диаметр оснований гиперболоида 30 м.

В расчёт принимались обвязочные балки перекрытий, но из конструктивных соображений из расчёта исключена работа самих дисков перекрытий. Все стержни приняты трубчатого сечения [36] из стали ВСтЗсп.

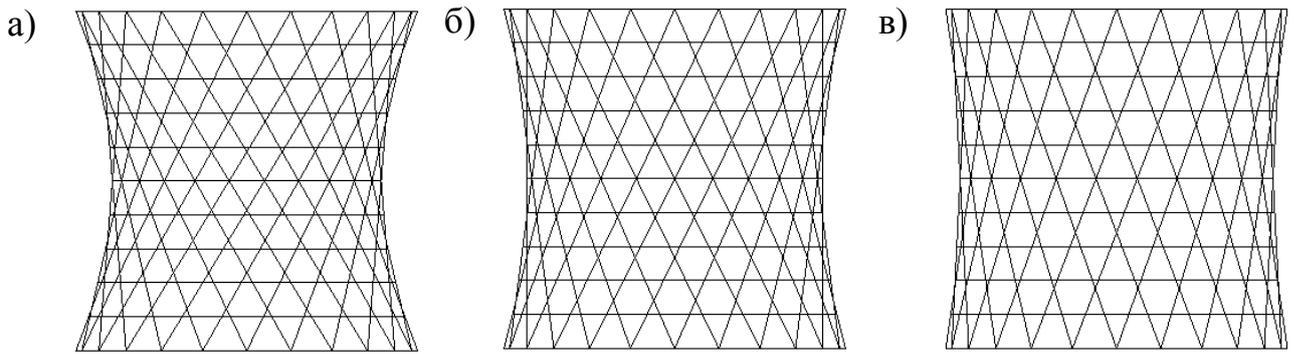


Рис. 4.1.1. Схемы каркасов в виде однополостных гиперboloидов: а) с углом образующей $58,71^\circ$; б) с углом образующей $63,48^\circ$; в) с углом образующей $69,1^\circ$.

Для анализа усилий и перемещений в указанных трёх конструкциях применялись ПК Лира 9.6, ПК SCAD Office 11.3.

При расчёте учитывались воздействия на каркас здания ветровых нагрузок и равномерно распределённых на перекрытия. Постоянные от веса сооружения и особые нагрузки – не учитывались.

Для нахождения ветровых нагрузок, конструкция была представлена как сооружение с круговой цилиндрической поверхностью с изменяющимся по высоте диаметром. Таким образом, эпюра ветровой нагрузки по высоте принята кусочно-линейной с изменением параметров давления ветра на стенки с изменением высоты приложения. Нагрузка соответствует I ветровому району [128]. Расчёт производился в программе «Вест» ПК SCAD Office 11.3 в соответствии с СП 20.13330.2011 [128]. В результате, для каждого диаметра и высоты конструкции были получены эпюры ветровой нагрузки (рис. 4.1.2) и соответствующие значения.

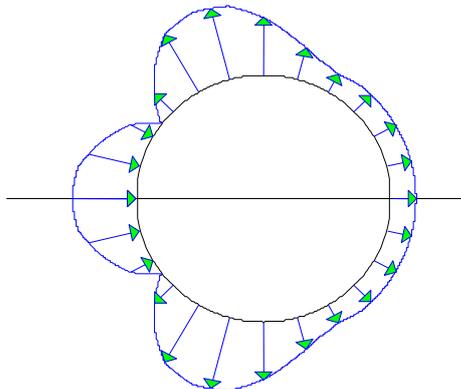


Рис. 4.1.2. Вид эпюры ветровых нагрузок в плане

Сосредоточенные силы от ветровой нагрузки прикладывались в узлы пересечения образующих (рисунок 4.1.3), как усилия равнодействующих от равномерно распределённых нагрузок, действующих на плоскости треугольников поверхности здания (остекления).

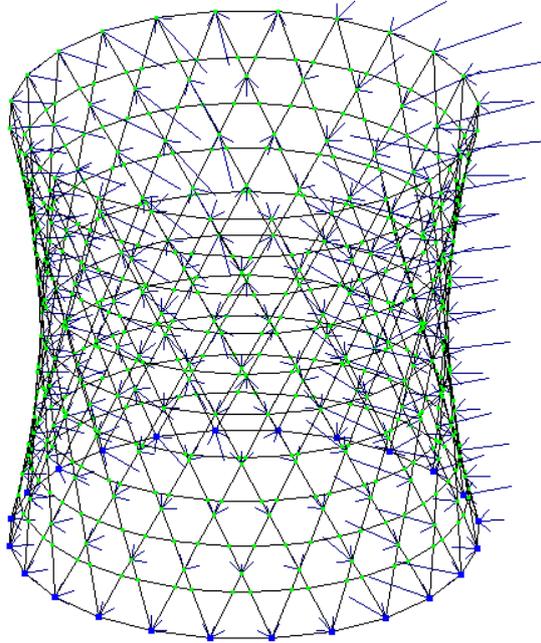


Рис. 4.1.3. Схема приложения ветровой нагрузки в виде сосредоточенных сил на примере каркаса с углом образующей $63,48^\circ$.

Равномерно распределённая нагрузка на перекрытия принималась как для помещений жилых зданий $1,5 \text{ кПа}$ в соответствии с СП 20.13330.2011 [128]. На каркас здания нагрузка составляла половину от всей приходящейся на этаж. Сосредоточенные силы приложены к узлам пересечения обвязочных балок перекрытия и образующих.

Результирующие эпюры внутренних усилий показали, что наибольшие продольные силы распределяются в конструкции по образующим в нижней части каркаса, а изгибающие моменты - в местах приложения наибольших сосредоточенных сил от ветра, преимущественно в верхних этажах здания (рис. 4.1.4). Необходимо отметить, что при отсутствии ветровой нагрузки изгибающие моменты в элементах конструкции имеют минимальные значения и практически отсутствуют.

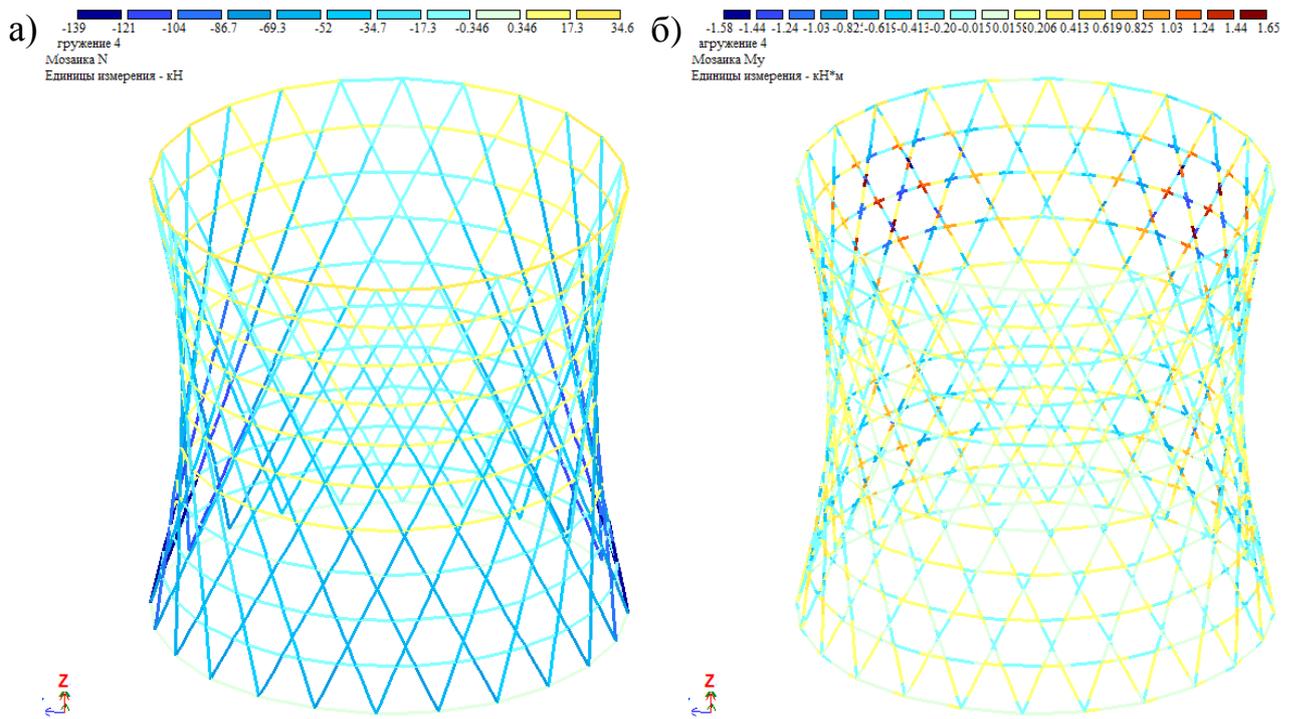


Рис. 4.1.4. Мозаики распределения внутренних усилий от ветровой нагрузки и распределённой вертикальной (на примере каркаса с углом образующей 63,48°):
 а) продольных усилий; б) изгибающих моментов.

Зависимость изменения максимальных внутренних усилий от угла наклона образующей даны на графиках (рис. 4.1.5).

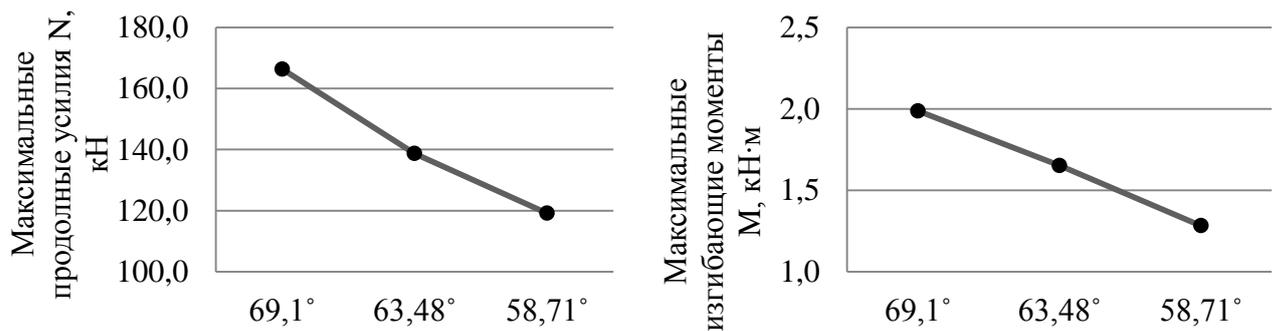


Рис. 4.1.5. Графики изменения в элементах конструкций при изменении угла наклона образующей: а) продольных сил (положительное значение выбрано для сжатия); б) изгибающих моментов (значения рассчитаны для косоугольного изгиба элемента)

Из графиков следует, что изгибающие моменты и продольные усилия в элементах конструкции уменьшаются с уменьшением угла наклона образующей к основанию гиперboloида.

По полученным внутренним усилиям найдены максимальные значения напряжения в элементах, по которым подобраны сечения элементов каждой конструкции (таблица 4.1.1.).

Таблица 4.1.1. Подобранные сечения элементов конструкции.

Угол образующей	Сечение трубы
58.71°	83×3
63.48°	114×2,5
69.1°	127×3

Полученные сечения для каждой конструкции задавались одновременно всем элементам. Сравним полученные напряжения от максимальных внутренних усилий в каждой конструкции, а также отношение напряжений от наибольших моментов к напряжениям от наибольших продольных сил (таблица 4.1.2).

Таблица 4.1.2. Сравнение напряжений от наибольших внутренних усилий.

Угол образующей	σ_M , МПа	σ_N , МПа	$\sigma_M/\sigma_N \cdot 100$, %	σ^{\max} , МПа
58.71°	89.53	160.08	55.93	191.59
63.48°	72.72	160.36	45.35	191.76
69.1°	62.06	141.51	43.85	177.13

где σ_M - максимальное напряжение от внутренних изгибающих моментов;
 σ_N - максимальное напряжение от внутренних продольных сил;
 σ_{\max} - максимальное напряжение в элементах конструкции конструкции.

Из полученных результатов следует, что наибольшие напряжения от изгибающих моментов (σ_M) возникают в конструкции с углом образующей 58.71°, не смотря на то, что к узлам пересечений образующих прикладываются меньшие сосредоточенные нагрузки от ветра (уменьшение нагрузки относительно других конструкций связано с уменьшением диаметра горловой окружности). Указанные значения показывают обратную зависимость, чем найденную по результатам

полученных внутренних усилий. Отсюда можно сделать вывод, что эффективность использования выбранного сечения гораздо выше в конструкциях с меньшим углом образующей.

Для сравнения несущей способности и жёсткости сетчатых оболочек между собой зададим всем трём конструкциям сечение стержней с углом образующей $58,71^\circ$, т.е. сечение трубы 83×3 [36].

Покажем максимальные горизонтальные перемещения узлов во всех трёх конструкциях, а также их отношение к наименьшему значению (таблица 4.1.3).

Таблица 4.1.3. Наибольшие горизонтальные перемещения узлов.

Угол образующей	Перемещения X_{\max} , мм	Превышение, %
$58,71^\circ$	48,9	0
$63,48^\circ$	53,1	8,59
$69,1^\circ$	54,3	11,04

Следовательно, более жёстким является каркас с наименьшим углом образующей. Общая картина деформаций конструкций показана на рисунке 4.1.5.

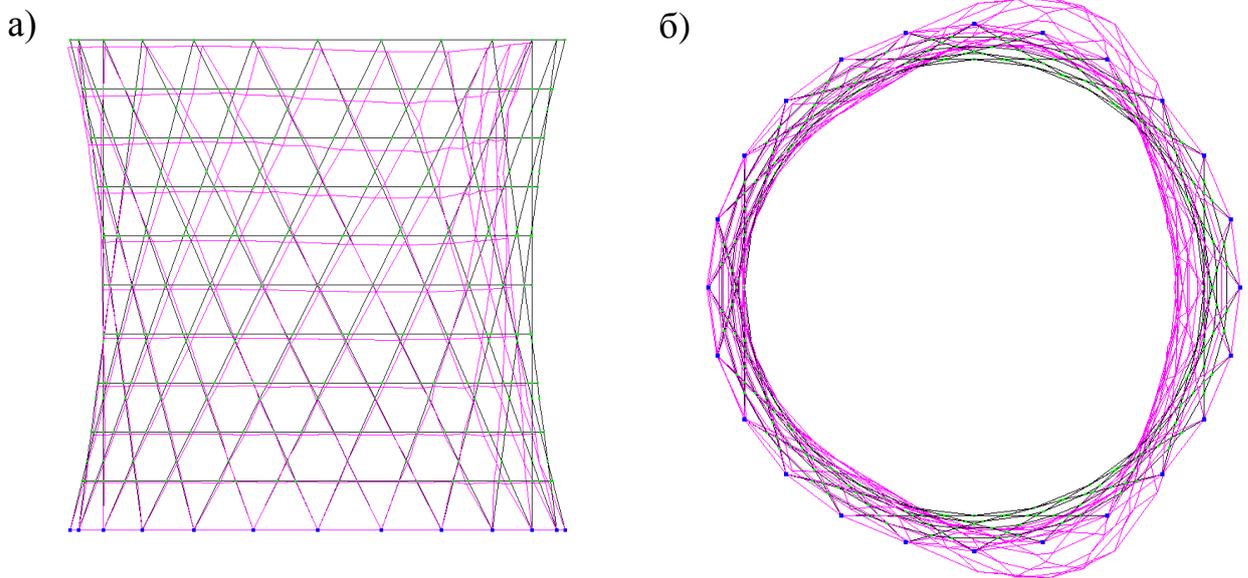


Рис. 4.1.5. Форма деформирования каркаса от ветровой нагрузки и распределённой вертикальной (на примере каркаса с углом образующей $63,48^\circ$)

Сравнив найденные максимальные напряжения в конструкциях между собой, видим, что изменение угла на $\sim 10^\circ$ приводит к увеличению максимальных напряжений в конструкции на 68% (таблица 4.1.4).

Таблица 4.1.4. Сравнение напряжений в конструкциях при одинаковом сечении стержней.

Угол образующей	σ_{\max} при наименьшем сечении, МПа	Превышение σ_{\max} , %
58.71°	191.59	0
63.48°	238.01	24.23
69.1°	322.26	68.2

В результате полученных данных можно сказать, что при восприятии совместных вертикальных распределённых по этажам здания и ветровых нагрузок, сетчатая оболочка в виде однополостного гиперboloида вращения гораздо лучше работает с меньшим углом образующей. Конструкция каркаса с более развитой структурой, а в отношении к гиперboloиду вращения с меньшим углом образующей, является более жёсткой и прочной.

4.2. Анализ в линейной постановке влияния формы образующей на напряженно-деформированное состояние и устойчивость сетчатого гиперboloида

Рассмотрение влияния общей морфологии сетчатой оболочки, заданной поверхностью однополостного гиперboloида, на несущие способности конструкции невозможно без рассмотрения НДС конструкции. Опираясь на данные, полученные при анализе влияния угла наклона образующей (п. 4.1), была выявлена наилучшая конструкция с углом образующей к основанию 58.71°. Дальнейшее построение работы будем связывать именно с этой формой, то есть с каркасом срединная поверхность образующих которого удовлетворяет найденному ранее уравнению (2.3.14). Густота сетки указанной сетчатой

оболочки позволит гораздо лучше приблизить различные варианты её построения к сходным значениям. Так, если рассматривать гиперболоиды с большим углом образующей сетка каркаса имеет меньшее количество жёстких узлов, а, следовательно, влияние обвязочных балок перекрытий будет играть большую роль и вносить большие погрешности в значения численного анализа роли образующей.

Как было описано в главе 2, формирование сетчатого каркаса однополостного гиперболоида возможно с помощью образующих прямых и гипербол. Так, рассчитывается пять видов сетчатого каркаса (K_1 , K_2 , K_3 , K_4 и K_5), где в качестве образующих принимаются гиперболы, лежащие на поверхности гиперболоида (2.3.14). Также для сравнения и достижения общих целей исследования рассматривается сетчатый каркас, образованный системой прямолинейных образующих (K_0). Гиперболы, составляющие каркасы (K_1 , K_2 , K_3 , K_4 и K_5), были показаны уравнением (2.3.18), определяющим форму одной из гипербол. Как было сказано, каркасы образуются с помощью протягивания гиперболы вращением вокруг оси симметрии гиперболоида. Тем не менее, указанную оболочку трудно сделать практически удобной для применения в строительной практике ввиду криволинейности элементов. Тогда, предложен вариант замены криволинейной гиперболы ломаной кривой, характерные точки которой будут лежать на поверхности исследуемого гиперболоида и будут определяться как места пересечений образующих между собой и с окружностями обвязочных балок перекрытий в каркасах. Данное допущение позволит избавиться от изгибающих моментов, вызванных продольными силами в криволинейном элементе.

Формируемый сетчатый каркас однополостного гиперболоида обладает геометрическими параметрами, удовлетворяющими условиям, приведенным в части 2.3, главы 2. По-прежнему, высота конструкции $H=30,0$ м, диаметры оснований гиперболоида $D=30,0$ м, количество образующих оболочки $m=48$ пар. Все образующие в кольцах оснований сходятся между собой в сорока восьми точках.

На рисунке 2.3.3, главы 2, указаны все рассчитываемые каркасы в проекции на вертикальную плоскость. Общие виды некоторых каркасов в перспективе даны на рисунке 4.2.1.

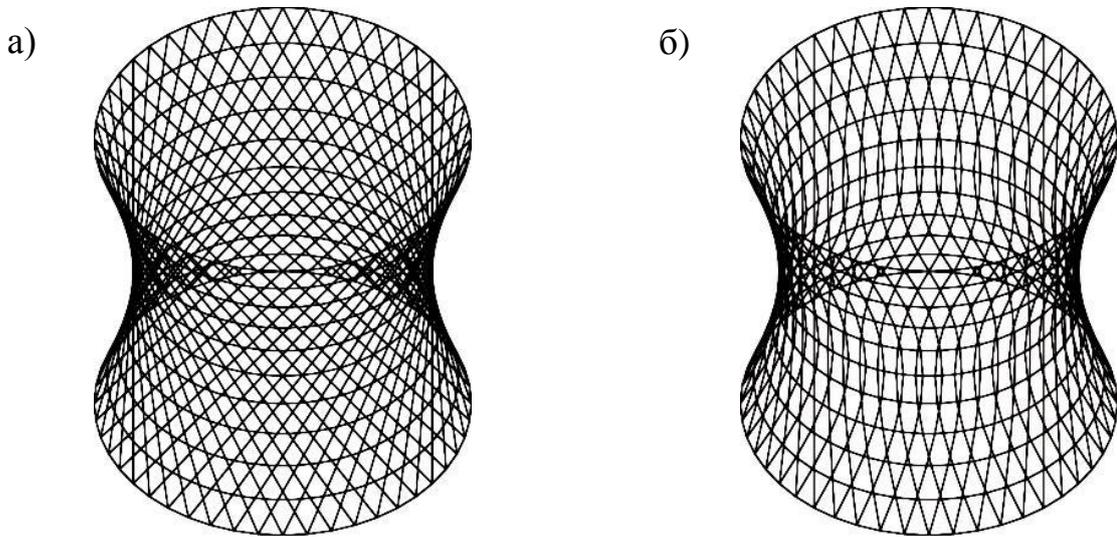


Рис. 4.2.1. Сетчатая оболочка в виде однополостного гиперboloида вращения: а) с прямолинейными образующими, каркас К0; б) с образующими—гиперболами, каркас К4.

Напряжённо–деформированное состояние сетчатой оболочки в виде однополостного гиперboloида вращения, образованного семействами образующих различных форм определяется численным анализом, проводимым с помощью ВК «ANSYS Release 14.5», реализующий метод конечных элементов [12, 137]. Для расчета выбран жёсткий пространственный стержень с шестью степенями свободы в узле. Каждый стержень каркаса сетчатой оболочки разбивался на пять конечных элементов.

Узлы пересечений образующих приняты жёсткими. Закрепление узлов нижнего основания гиперboloида с основанием принимается шарнирным.

Все элементы каркаса приняты трубчатого сечения с наружным диаметром трубы $d = 83$ мм и толщиной стенки $\delta = 3$ мм [36]. Сечение было подобрано с учетом ветровых и временных нагрузок на перекрытия в части 4.1 настоящей главы. Материал элементов – сталь, с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа,

плотностью $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$, пределом текучести $R_{ny} = 250,0 \text{ МПа}$ и пределом прочности $R_{um} = 460,0 \text{ МПа}$.

Общее поведение конструкции, при нагрузках, приближенных к реальным (ветровой и временной нагрузки на перекрытия), было изучено в части 4.1 настоящей главы. Для анализа несущих способностей конструкций сетчатых оболочек будет удобнее использовать нагрузки не нормативного характера, а абстрактные, но имеющие возможность выявить искомые закономерности. Для реализации поставленной задачи были произведены следующие статические расчёты с определением внутренних усилий в элементах сетчатого каркаса от нагрузок:

1) вертикальной сосредоточенной нагрузки величиной $100,0 \text{ кН}$, приложенной к узлу схождения двух образующих в верхнем основании гиперboloида;

2) вертикальных сосредоточенных нагрузок, приложенных в узлах верхнего основания по 10 кН в каждом узле (то есть распределённой по узлам верхнего основания и составляющей в сумме $480,0 \text{ кН}$);

3) горизонтальной сосредоточенной нагрузки, приложенной к узлу верхнего основания перпендикулярно касательной к его окружности, величиной $10,0 \text{ кН}$.

Графики значений внутренних максимальных сжимающих продольных усилий и изгибающих моментов в элементах конструкций с разными образующими приведены в таблице 4.2.1.

Приведённые графики показывают, что меньшие изгибающие моменты появляются в конструкциях с образующими гиперболами, более приближёнными к прямолинейным образующим гиперboloида, от К5 к конструкции К1. Лучшее восприятие внешних усилий обеспечивает конструкция с прямолинейными образующими (тип каркаса К0). Необходимо отметить, что при равномерно распределённой по верхнему основанию нагрузке, изгибающие моменты в данной конструкции имеют минимальное значение и практически не возникают.

Таблица 4.2.1. Графики максимальных усилий, возникающих в элементах конструкций под действием внешних приложенных нагрузок

Вид нагрузки	Графики максимальных продольных усилий	Графики максимальных изгибающих моментов																												
1	2	3																												
Вертикальная сосредоточенная	<p>Продольные усилия, кН</p> <table border="1"> <tr><th>Узел</th><td>K5</td><td>K4</td><td>K3</td><td>K2</td><td>K1</td><td>K0</td></tr> <tr><th>Усилия, кН</th><td>65</td><td>75</td><td>85</td><td>80</td><td>85</td><td>95</td></tr> </table>	Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0	Усилия, кН	65	75	85	80	85	95	<p>Изгибающий момент, кН·м</p> <table border="1"> <tr><th>Узел</th><td>K5</td><td>K4</td><td>K3</td><td>K2</td><td>K1</td><td>K0</td></tr> <tr><th>Момент, кН·м</th><td>19,5</td><td>18,5</td><td>17,0</td><td>17,0</td><td>15,5</td><td>14,0</td></tr> </table>	Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0	Момент, кН·м	19,5	18,5	17,0	17,0	15,5	14,0
Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0																								
Усилия, кН	65	75	85	80	85	95																								
Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0																								
Момент, кН·м	19,5	18,5	17,0	17,0	15,5	14,0																								
Вертикальная, распределённая по узлам верхнего основания	<p>Продольные усилия, кН</p> <table border="1"> <tr><th>Узел</th><td>K5</td><td>K4</td><td>K3</td><td>K2</td><td>K1</td><td>K0</td></tr> <tr><th>Усилия, кН</th><td>26,5</td><td>26,7</td><td>27,0</td><td>27,2</td><td>27,5</td><td>28,1</td></tr> </table>	Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0	Усилия, кН	26,5	26,7	27,0	27,2	27,5	28,1	<p>Изгибающий момент, кН·м</p> <table border="1"> <tr><th>Узел</th><td>K5</td><td>K4</td><td>K3</td><td>K2</td><td>K1</td><td>K0</td></tr> <tr><th>Момент, кН·м</th><td>0,056</td><td>0,054</td><td>0,051</td><td>0,050</td><td>0,049</td><td>0,046</td></tr> </table>	Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0	Момент, кН·м	0,056	0,054	0,051	0,050	0,049	0,046
Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0																								
Усилия, кН	26,5	26,7	27,0	27,2	27,5	28,1																								
Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0																								
Момент, кН·м	0,056	0,054	0,051	0,050	0,049	0,046																								
Сосредоточенная горизонтальная, приложенная к верхнему основанию	<p>Продольные усилия, кН</p> <table border="1"> <tr><th>Узел</th><td>K5</td><td>K4</td><td>K3</td><td>K2</td><td>K1</td><td>K0</td></tr> <tr><th>Усилия, кН</th><td>17,0</td><td>19,0</td><td>22,0</td><td>17,0</td><td>16,0</td><td>15,5</td></tr> </table>	Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0	Усилия, кН	17,0	19,0	22,0	17,0	16,0	15,5	<p>Изгибающий момент, кН·м</p> <table border="1"> <tr><th>Узел</th><td>K5</td><td>K4</td><td>K3</td><td>K2</td><td>K1</td><td>K0</td></tr> <tr><th>Момент, кН·м</th><td>5,5</td><td>5,2</td><td>4,7</td><td>4,7</td><td>4,3</td><td>3,8</td></tr> </table>	Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0	Момент, кН·м	5,5	5,2	4,7	4,7	4,3	3,8
Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0																								
Усилия, кН	17,0	19,0	22,0	17,0	16,0	15,5																								
Узел	K5	K4	K3	K2	K1	K0																								
Момент, кН·м	5,5	5,2	4,7	4,7	4,3	3,8																								

Общие картины деформирования оболочек относительно каркасов различных форм в общем виде сходны между собой. Деформирование при линейном расчёте и статическом нагружении различными силами на примере конструкции К4 показан на рисунке 4.2.2, где перемещения в конструкциях с целью наглядности показаны с различными множителями.

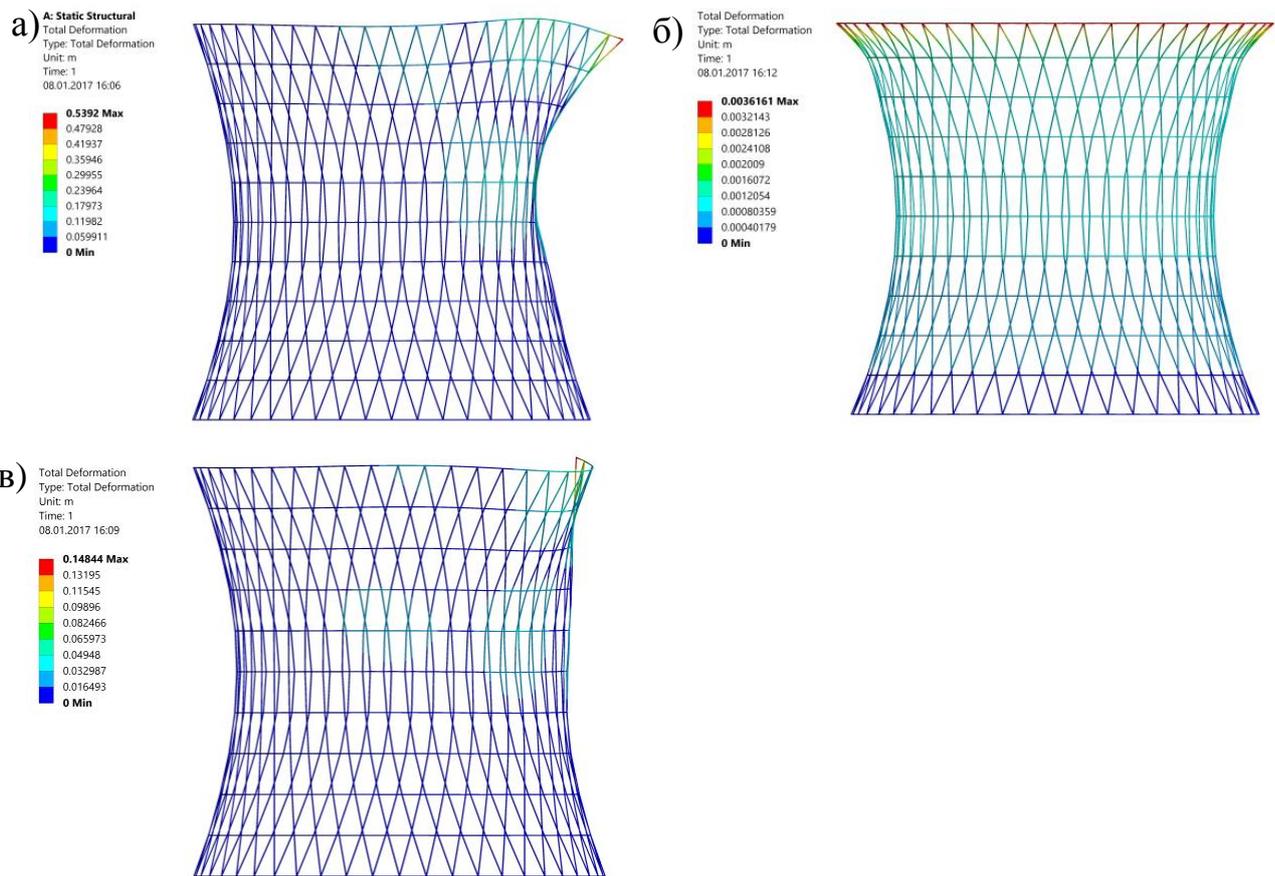


Рис. 4.2.2. Деформированные формы конструкции К4 при расчетах в линейной постановке: а) при вертикальной сосредоточенной нагрузке; б) при вертикальной распределённой по верхнему основанию; в) при горизонтальной сосредоточенной нагрузке

Для всех типов конструкций были найдены наибольшие перемещения (рис. 4.2.3).

Наиболее жёсткой конструкцией является с прямолинейными образующими. Возрастание графика деформаций возникает с приближением гипербол к асимптоте лишь при равномерных вертикальных нагрузках. Данное поведение объясняется растяжением кольца верхнего основания.

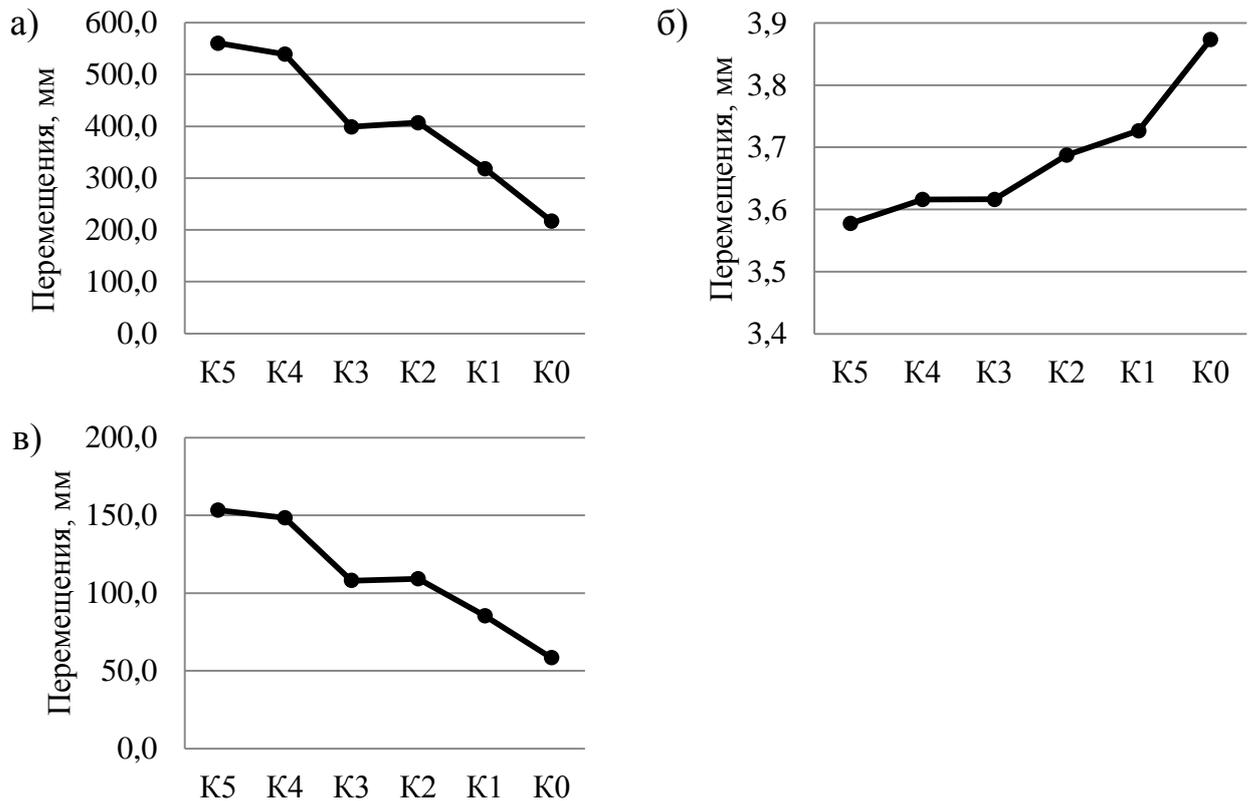


Рис. 4.2.3. Максимальные перемещения узлов конструкций:

а) при вертикальной сосредоточенной нагрузке; б) при вертикальной распределённой по верхнему основанию; в) при горизонтальной сосредоточенной нагрузке

Анализ деформаций конструкций и распределения внутренних усилий показывает, что их наибольшие значения проявляются локально, в областях приложения нагрузок.

В качестве основного показателя несущей способности используется критическая сила, для нахождения которой выполняются статические расчёты на устойчивость в линейной постановке для каждого из видов нагружения. Определив искомые значения, можно понять максимально возможные значения воспринимаемых конструкциями сил. Следовательно, выявить наилучшие из форм каркаса в данной постановке задачи.

Проведение анализа устойчивости конструкций с нахождением критических нагрузок (рисунок 4.2.4) показывает, что конструкции с гиперболами наиболее

приближенными к асимптоте характеризуются наибольшими критическими силами.

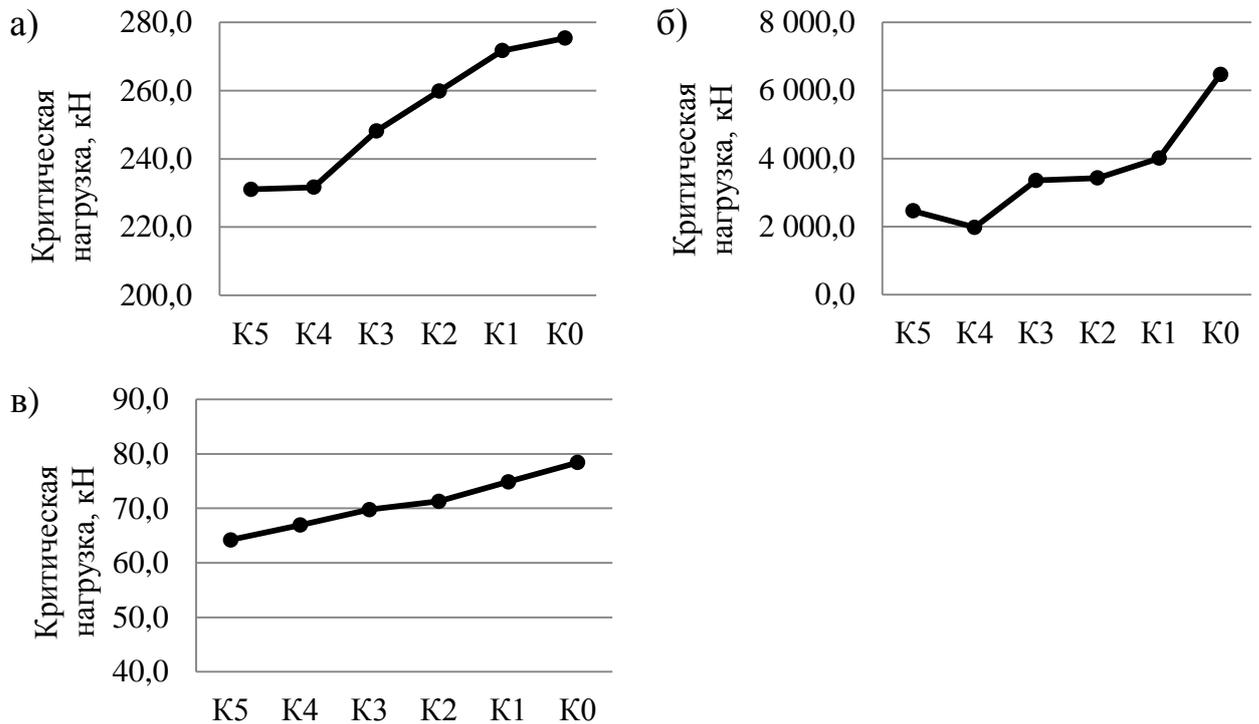


Рис. 4.2.4. Графики критических нагрузок для конструкций с различными образующими при следующих нагружениях: а) при вертикальной сосредоточенной нагрузке; б) при вертикальной распределённой по верхнему основанию; в) при горизонтальной сосредоточенной нагрузке

В случае с приложением горизонтальной нагрузки, график изменения критических сил близок к линейной зависимости. При действии на оболочку распределённой вертикальной нагрузки разница между критическими силами конструкций K0 и K1 составляет 61 %.

При вертикальной распределённой нагрузке, первые формы потери устойчивости конструкций K2, K3, K4 и K5 совпадают между собой, а также совпадают у вариантов K0 и K1. Характерные формы потери устойчивости исходной формы равновесия двух типов оболочек представлены на рис. 4.2.5.

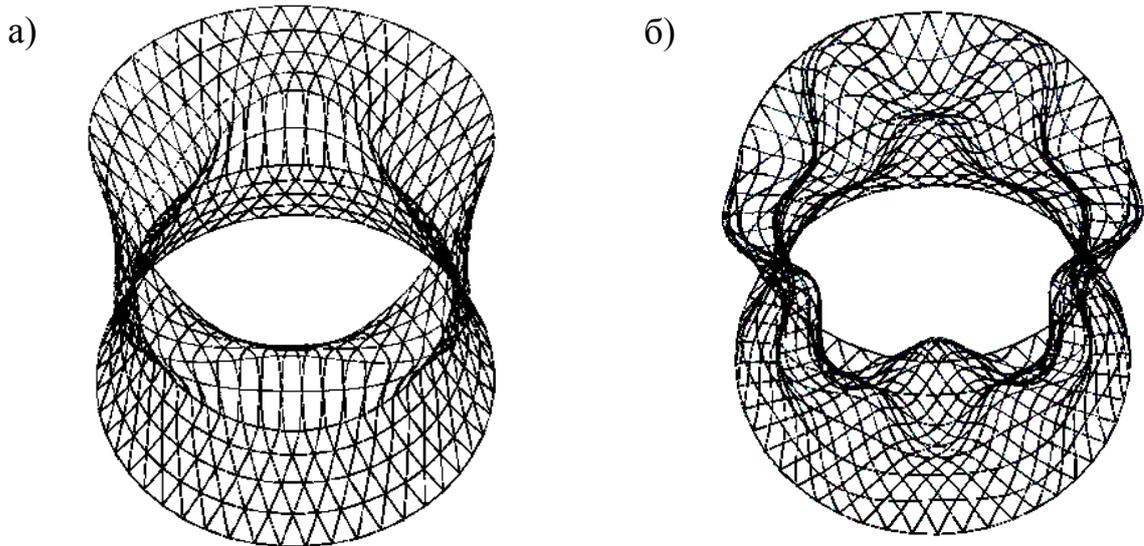


Рис. 4.2.5. Первые формы потери устойчивости: а) для конструкции К4;
б) для конструкции К0

Различие каркасов по форме образующих оказывает влияние на густоту сетки, а, следовательно, и на общий вес конструкций. Очевидна необходимость анализа увеличения критической нагрузки конструкции, в сравнении с увеличением её массы. На рисунке 4.2.6 показаны графики критических нагрузок с одновременным представлением графика изменения массы в изучаемых каркасах. Величины на графиках представлены в процентах, по отношению к наиболее лёгкой конструкции К5.

Анализ показывает, что при незначительном увеличении массы конструкции, вызываемом густотой сетки каркаса, а именно формой её образующей, существенно возрастают значения критических нагрузок. При воздействии вертикальной сосредоточенной нагрузки на конструкцию, наиболее экономичным вариантом может оказаться каркас К1, где увеличение массы конструкции на 4% по сравнению с вариантом К5 даёт приращение критической силы на 18%. При действии вертикальной распределенной по верхнему основанию нагрузки наиболее экономичной будет конструкция К0 поскольку увеличение массы на 9,5%, может увеличить несущую способность гиперboloида в 2,6 раза.

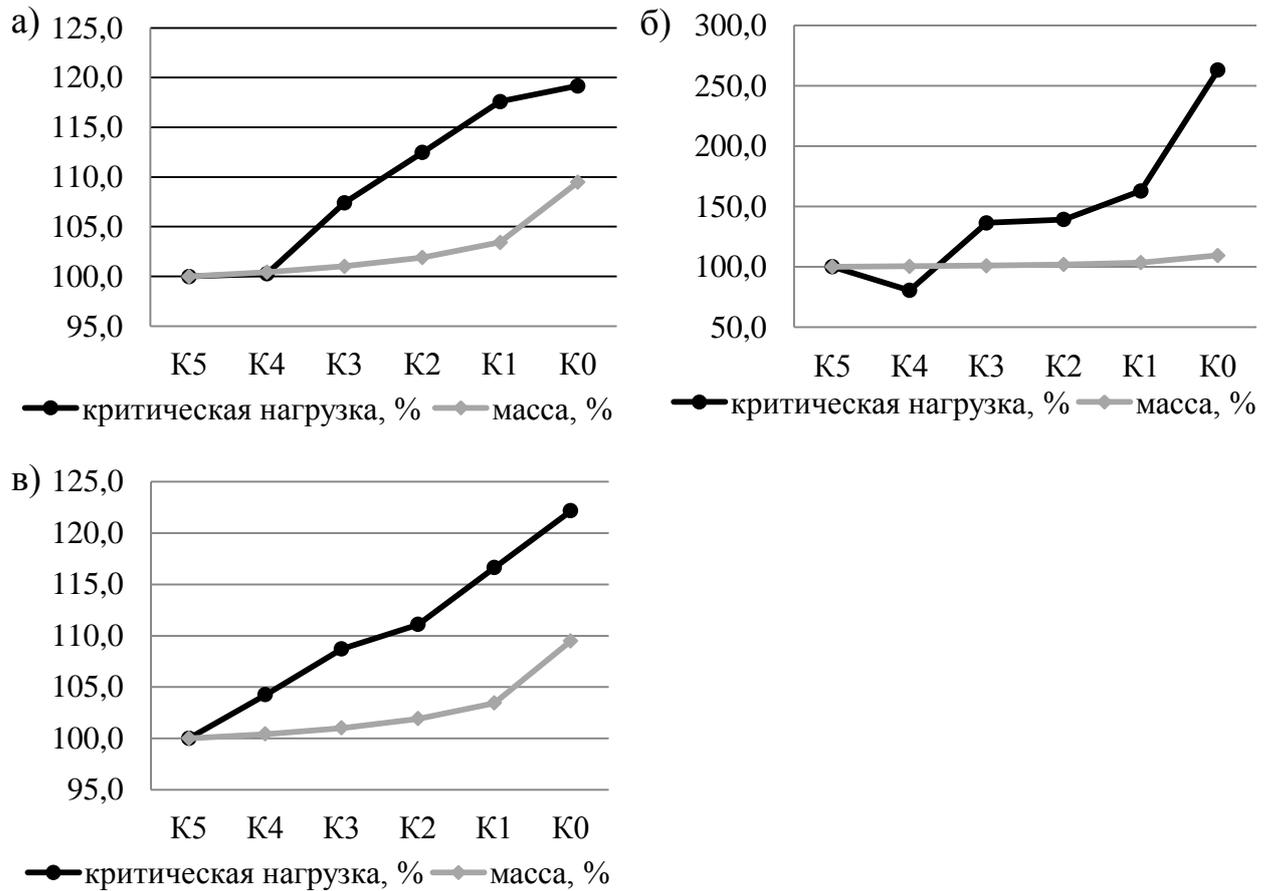


Рис. 4.2.6. Графики изменения критических нагрузок конструкций в зависимости от массы: а) при вертикальной сосредоточенной нагрузке; б) при вертикальной распределённой по верхнему основанию; в) при горизонтальной сосредоточенной нагрузке

Внутренние усилия в элементах сетчатого гиперboloида, картина их распределения и соотношение между ними зависят во многом от формы образующей. Наименьшие изгибающие моменты проявляются в конструкциях с образующими гиперболами, более приближенными к их асимптотам. Необходимо отметить, что конструктивные особенности структуры каждой из рассчитываемых оболочек могут придавать её НДС особый характер, выделяющийся в сравнении с остальными конструкциями.

В конструкциях с образующими–гиперболами наилучшими характеристиками устойчивости исходной формы равновесия обладает вариант оболочки K1, то есть с гиперболами, наиболее приближенными к асимптотам.

При работе только на сосредоточенные вертикальные нагрузки этот вариант по экономичности может превзойти конструкцию с прямолинейными образующими. При действии вертикальной распределенной по верхнему основанию нагрузки наиболее экономичной будет конструкция К0, для которой критическая нагрузка потери устойчивости значительно выше по сравнению с остальными вариантами.

Наиболее жёсткой из конструкций является вариант оболочки К0 с прямолинейными образующими, что определяется с помощью полученных перемещений.

4.3. Анализ в линейной постановке влияния граничных условий на напряженно-деформированное состояние и устойчивость сетчатого гиперболоида

Важным вопросом при задании расчётной модели каркаса сетчатой оболочки является определение её граничных условий. Для вертикально ориентированных оболочек, представляющих собой каркас многоэтажного здания, возможными вариантами закрепления каркаса на фундаменте могут являться свободное опирание на обрез фундаментных конструкций или закрепление в каждом узле от смещения конструкции. Первое реализуется с помощью шарнирно-подвижных связей на каждом из узлов нижнего основания, при этом в некоторых узлах производится раскрепление дополнительными связями, создавая, таким образом, в плоскости нижнего основания статически определимую раму. В данном случае усилия от возникающего распора в нижней части конструкции, то есть в основании гиперболоида, воспринимаются исключительно нижней обвязкой. В результате, возникают растягивающие усилия в кольце нижнего основания и соответствующие перемещения (см. рисунок 4.3.1). Во втором варианте производится закрепление обвязки нижнего основания гиперболоида в каждом узле в виде шарнирно неподвижной связи. Тогда нагрузки от возникающих распорных усилий в нижнем основании воспринимаются

основанием (фундаментом) и, следовательно, общая форма деформирования при некоторых нагрузках отличается от первого способа.

Отметим, что общие картины деформирования свободно опёртых оболочек с различными образующими, также как и в случае с шарнирно-закреплёнными по узлам основания конструкциями, в общем виде сходны между собой. Деформирование при линейном расчёте и статическом нагружении на примере конструкции К4 различными силами показан на рисунке 4.3.1, где перемещения в конструкциях с целью наглядности показаны с различными множителями.

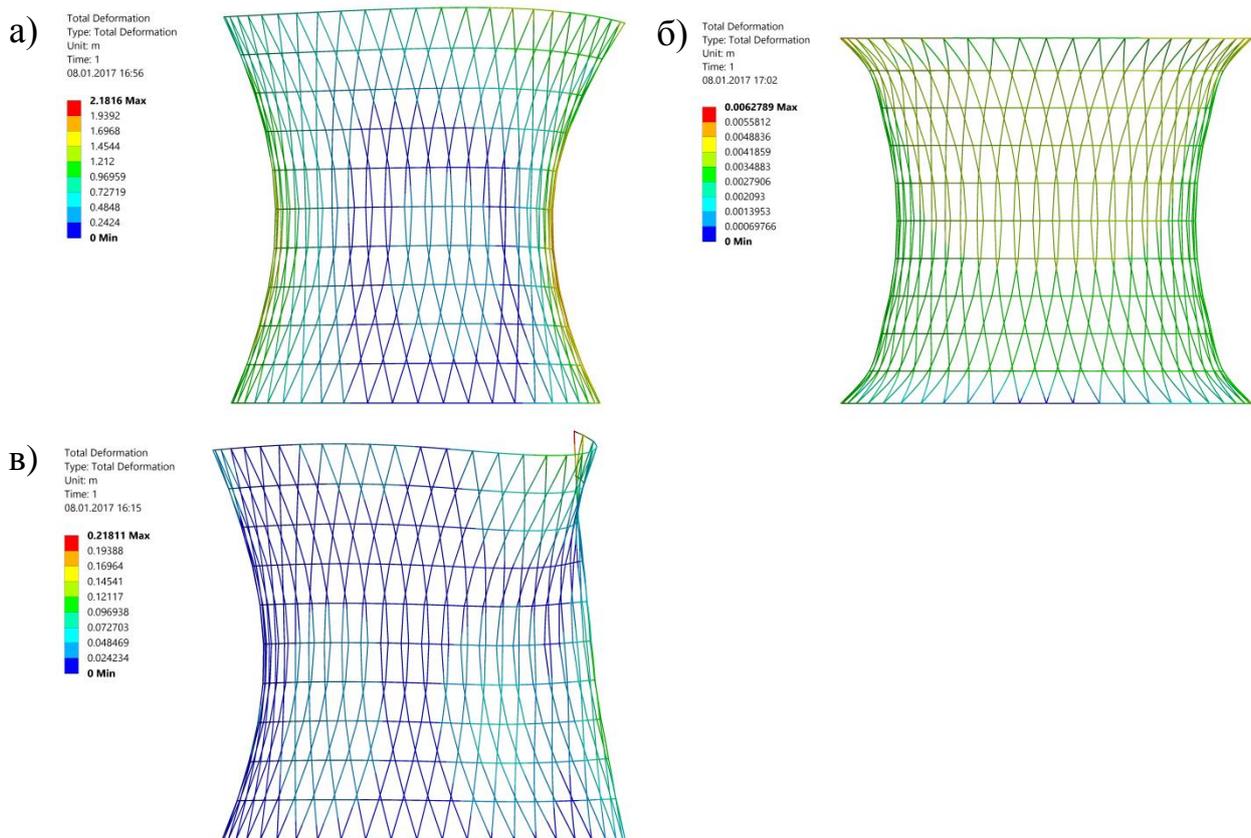


Рис. 4.3.1. Деформированные формы конструкции К4 при шарнирно-подвижном закреплении узлов к основанию и расчетах в линейной постановке:

- а) при вертикальной сосредоточенной нагрузке; б) при вертикальной распределённой по верхнему основанию; в) при горизонтальной сосредоточенной нагрузке

Сравним влияние граничных условий на распределение внутренних усилий в конструкции, выявив при каждом наибольшие значения продольных усилий и

изгибающих моментов в элементах. Нагрузки на конструкции примем теми же, что и принимались в части 4.2 настоящей главы.

Сопоставляя найденные значения (таблица 4.3.1), полученные при нагружении распределённой нагрузкой по узлам верхнего основания (480,0 кН), видим, что различие во внутренних усилиях при изменении закрепления конструкции не превышает 1,5%, а в случае продольных сил практически совпадают.

Таблица 4.3.1. Значения внутренних усилий при распределённой нагрузке при различных закреплениях

Наименование конструкции	Шарнирное закрепление узлов основания		Свободное опирание конструкции на основание	
	Продольные усилия наибольшие, кН	Изгибающие моменты наибольшие, кН·м	Продольные усилия наибольшие, кН	Изгибающие моменты наибольшие, кН·м
1	2	3	4	5
К5	26,595	0,055626	26,594	0,05576
К4	26,753	0,054715	26,752	0,054715
К3	26,952	0,052923	26,952	0,053003
К2	27,209	0,052368	27,213	0,052393
К1	27,579	0,051463	27,579	0,052201
К0	28,085	0,048855	28,085	0,048915

Гораздо больше расхождения в значениях максимальных внутренних усилий (таблица 4.3.2) при различных граничных условиях получаются при расчётах на сосредоточенную вертикальную нагрузку, приложенную к верхнему основанию конструкций (100,0 кН). Соотношения найденных значений между собой достигают в случае с продольными усилиями 6,2%, а в случае изгибающих моментов – 11,1 %.

Общая картина расхождения значений между продольными силами и изгибающими моментами показана на графиках ниже (рисунок 4.3.2).

Таблица 4.3.2. Значения внутренних усилий при сосредоточенной вертикальной нагрузке при различных закреплениях

Наименование конструкции	Шарнирное закрепление узлов основания		Свободное опирание конструкции на основание	
	Продольные усилия наибольшие, кН	Изгибающие моменты наибольшие, кН·м	Продольные усилия наибольшие, кН	Изгибающие моменты наибольшие, кН·м
1	2	3	4	5
К5	64,773	19,53	60,733	21,37
К4	73,536	18,734	70,025	20,557
К3	83,422	16,91	79,721	18,705
К2	81,251	16,984	77,413	18,767
К1	86,705	15,581	82,331	17,308
К0	94,42	14,047	90,253	15,585

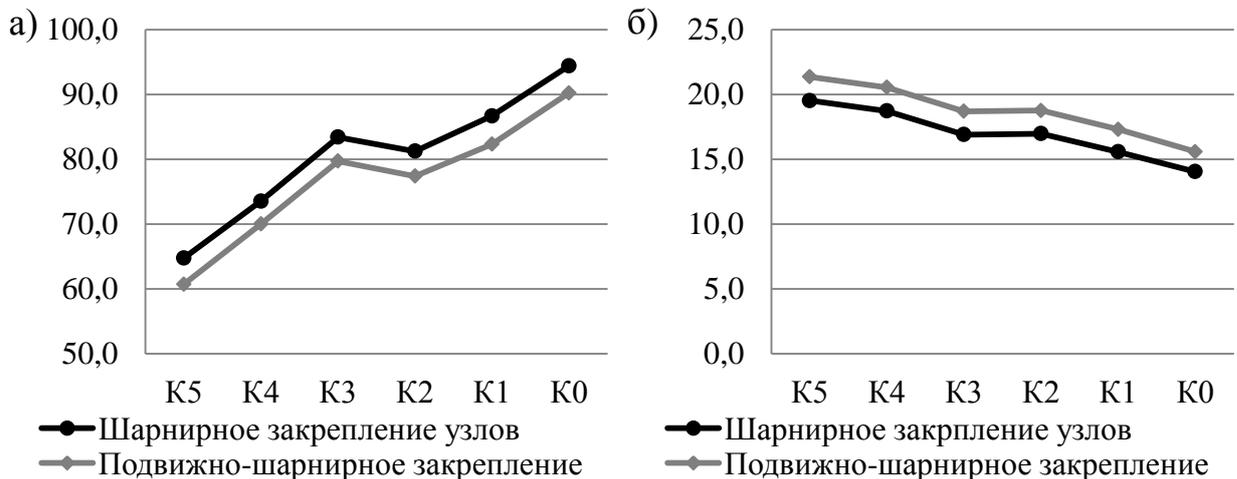


Рис. 4.3.2. Сопоставление при сосредоточенной вертикальной нагрузке с изменением граничных условий графиков: а) продольных внутренних сил, кН; б) изгибающих моментов, кН·м.

Из графиков наглядно видно, что свободное опирание каркаса на основание (фундамент) в сравнении с закреплением по узлам вызывает перераспределение внутренних усилий, сопровождающихся уменьшением продольных сил и увеличением изгибающих моментов в элементах сетчатой оболочки.

Расчёты с различными закреплениями на сосредоточенную горизонтальную нагрузку, приложенную к верхнему основанию конструкций (10,0 кН), выявили

расхождения между продольными усилиями в пределах 0,5%, а изгибающими моментами – не более 8,2 % (таблица 4.3.3).

Таблица 4.3.3. Значения внутренних усилий при сосредоточенной горизонтальной нагрузке при различных закреплениях

Наименование конструкции	Шарнирное закрепление узлов основания		Свободное опирание конструкции на основание	
	Продольные усилия наибольшие, кН	Изгибающие моменты наибольшие, кН·м	Продольные усилия наибольшие, кН	Изгибающие моменты наибольшие, кН·м
1	2	3	4	5
К5	17,005	5,46	17,065	5,82
К4	18,993	5,17	19,079	5,54
К3	21,651	4,66	21,717	5,01
К2	17,174	4,67	17,239	5,02
К1	16,264	4,26	16,263	4,61
К0	15,668	3,80	15,591	4,11

Завершить анализ влияния граничных условий на общую несущую способность сетчатых оболочек в виде однополостного гиперболоида вращения с образующими различных форм позволит сравнение критических сил воспринимаемых нагрузок на конструкции в зависимости от вида закрепления нижнего основания. Также как и в части 4.2. настоящей главы для конструкций с шарнирным закреплением по узлам нижней обвязки, расчёты с шарнирно-подвижными связями были произведены в линейной постановке. Общие результаты сравнения значений, при нагружении оболочки распределённой вертикальной нагрузкой, представлены в таблице 4.3.4.

Таблица 4.3.4. Значения критических сил при распределённой по верхнему основанию вертикальной нагрузке при различных закреплениях

Наименование конструкции	Критические силы при различных граничных условиях, кН	
	Шарнирное закрепление узлов основания	Свободное опирание конструкции на основание
1	2	3
К5	2460,43	298,38
К4	1979,28	303,35

Наименование конструкции	Критические силы при различных граничных условиях, кН	
	Шарнирное закрепление узлов основания	Свободное опирание конструкции на основание
1	2	3
К3	3356,21	310,39
К2	3425,81	321,19
К1	4007,71	340,44
К0	6470,88	433,70

Определить разницу в значениях критических нагрузок для закреплений более наглядно можно, показав их на одном графике (рисунок 4.3.3, а). Для понимания общей формы графика изменений критической силы при свободном опирании конструкции покажем его отдельно (рисунок 4.3.3, б).

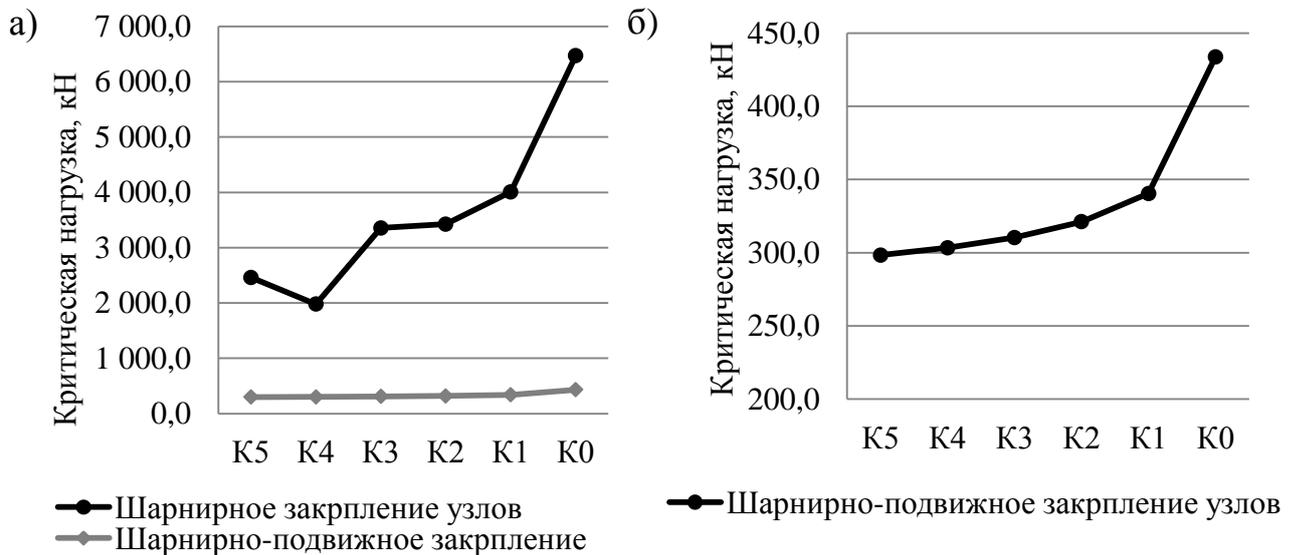


Рис. 4.3.3. Графики критических сил при распределённой вертикальной нагрузке с изменением граничных условий: а) для обоих типов закрепления; б) для шарнирно-подвижного закрепления узлов.

На графиках видно, что конструкции, имеющие шарнирное закрепление в каждом узле нижнего основания, имеют критические нагрузки, превышающие до 15 раз те же значения, что в конструкциях с подвижно-шарнирными закреплениями. Выявленные показатели показывают значимость восприятия распорных сил, образуемых в нижнем кольце основания гиперboloида.

Аналогичные сравнения проведём для вертикальной сосредоточенной нагрузки, приложенной к верхнему узлу основания (таблица 4.3.5).

Покажем общие картины изменения критических сил сосредоточенной нагрузки при разных закреплениях на совместном графике для всех типов конструкций, от К0 до К5 (рисунок 4.3.4.).

Таблица 4.3.5. Значения критических сил при сосредоточенной вертикальной нагрузке при различных закреплениях

Наименование конструкции	Критические силы при различных граничных условиях, кН	
	Шарнирное закрепление узлов основания	Свободное опирание конструкции на основание
1	2	3
К5	2460,43	298,38
К4	1979,28	303,35
К3	3356,21	310,39
К2	3425,81	321,19
К1	4007,71	340,44
К0	6470,88	433,70

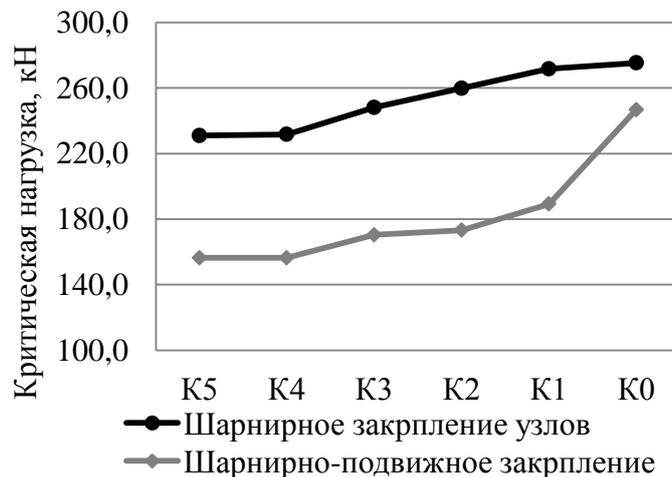


Рис. 4.3.4. Графики критических сил при сосредоточенной вертикальной нагрузке с изменением граничных условий

В указанном случае можно наблюдать существенное увеличение значений критических сил также в пользу шарнирно-закреплённой по узлам конструкции. Общее превышение для конструкций с образующими-гиперболами колеблется в

пределах 50%. Стоит обратить внимание, что для конструкции с прямолинейными образующими превышение значений составляет порядка 12 %. Данный фактор показывает некоторую универсальность конструкции с прямолинейными образующими в плане применения различных граничных условий.

Окончательное сравнение влияния закреплений нижнего основания на несущие характеристики конструкций произведём при проведении анализа критических нагрузок в форме горизонтальной сосредоточенной силы на верхнее основание (таблица 4.3.6).

Таблица 4.3.6. Значения критических сил при сосредоточенной горизонтальной нагрузке при различных закреплениях

Наименование конструкции	Критические силы при различных граничных условиях, кН	
	Шарнирное закрепление узлов основания	Свободное опирание конструкции на основание
1	2	3
К5	64,193	63,129
К4	66,918	65,676
К3	69,783	68,503
К2	71,303	70,129
К1	74,859	73,756
К0	78,405	77,888

Значения полученных сил сведём в графики и представим совместно для обоих закреплений (рисунок 4.3.5).

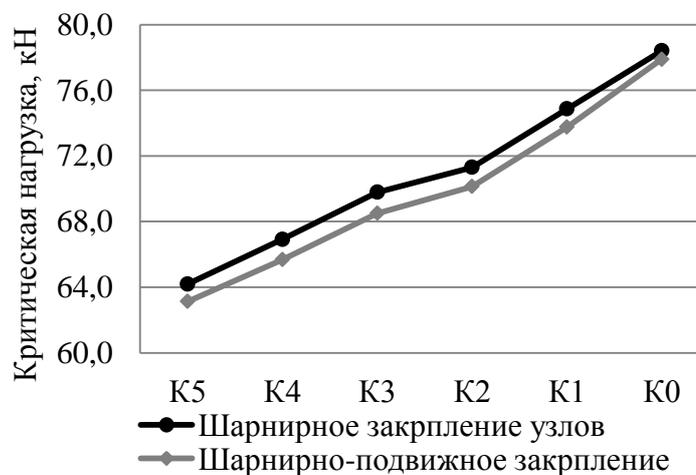


Рис. 4.3.5. Графики критических сил при сосредоточенной горизонтальной нагрузке с различными граничными условиями.

Как видно из приведённых результатов, разница в критических силах практически не превышает 2%. Таким образом, граничные условия наименьшим образом проявляют своё влияние при горизонтальной нагрузке. В данном случае выбор граничного условия определяющей роли не играет.

Изучив различные стороны проблемы влияния граничных условий, а именно закрепления нижнего основания гиперболоида, на его несущую способность, удалось выявить, что лучшими характеристиками обладают конструкции с шарнирным закреплением к основанию в каждом узле нижней обвязки. На общем фоне результатов расчётов конструкций со свободным закреплением на фундаменте также прослеживается закономерность увеличения несущей способности и устойчивости конструкций с приближением образующих-гипербол к асимптотам, а также ранее найденная закономерность изменения значений внутренних сил по величине. При этом результаты анализа показывают схожие формы распределения и значения внутренних усилий в элементах конструкции с разным закреплением. Тем не менее, величины критических сил отображают реальное влияние граничных условий на устойчивость конструкций.

В дальнейшем будем использовать расчётную схему с шарнирным закреплением конструкции в каждом узле.

4.4. Изучение влияния формы образующей на устойчивость сетчатого гиперболоида в геометрически нелинейной постановке

Изучение влияния формы образующей сетчатой оболочки в виде однополостного гиперболоида вращения на его устойчивость с большей точностью возможно, лишь рассмотрев задачу в нелинейной постановке, отражающей приближённую к реальной картину нагружения конструкции и восприятия ею приложенных усилий.

Изложенные результаты численного анализа сетчатой оболочки, проведённого с помощью метода конечных элементов в геометрически нелинейной постановке, с представленными кривыми равновесных состояний

оболочки при горизонтальной и вертикальных нагрузках, позволят сделать заключение о влиянии применяемой образующей на устойчивость каркаса сетчатых оболочек в форме гиперболоидов вращения.

Задача устойчивости рассматривается для ранее рассчитываемых в частях 4.2 и 4.3 настоящей главы сетчатых гиперболоидов (K0, K1, K2, K3, K4 и K5).

Закрепление узлов нижнего основания гиперболоида с основанием принимается шарнирным. Физико-механические характеристики сечения элементов и конструкционной стали остались прежними и указаны в части 4.3 настоящей главы.

Расчёт конструкций производился также с помощью ВК *ANSYS Release 14.5*. Для решения нелинейной задачи на горизонтальную нагрузку использовался метод продолжения по параметру, в качестве которого выбиралась длина дуги кривой равновесных состояний [136]. Каждый стержень каркаса сетчатой оболочки разбивался на три конечных элемента, в качестве которого выбран пространственный стержень с шестью степенями свободы в каждом узле.

Расчёт в геометрически нелинейной постановке на горизонтальную сосредоточенную нагрузку выявил сходные по форме кривые равновесных состояний у конструкций K1...K5, а также отличие равновесной кривой у конструкции K0.

На рисунке 4.4.1 представлены кривые равновесных состояний с перемещениями по направлению приложения нагрузки. Очевидно наличие «прохлопываний» для всех конструкций. На рисунке 4.4.2 также представлены кривые равновесных состояний при горизонтальной сосредоточенной нагрузке, но с перемещениями в направлении перпендикулярном приложенной нагрузке.

Можно отметить, что в указанных графиках на рисунке 4.4.1 появляются петли, предельные точки которых являются критической силой, при которой происходит потеря устойчивости исходной формы равновесия оболочки.

Сравнение вариантов равновесных кривых (рисунки 4.4.1 и 4.4.2) показывает, что экстремумы одноимённых графиков совпадают по своему значению, и обозначают предельную нагрузку.

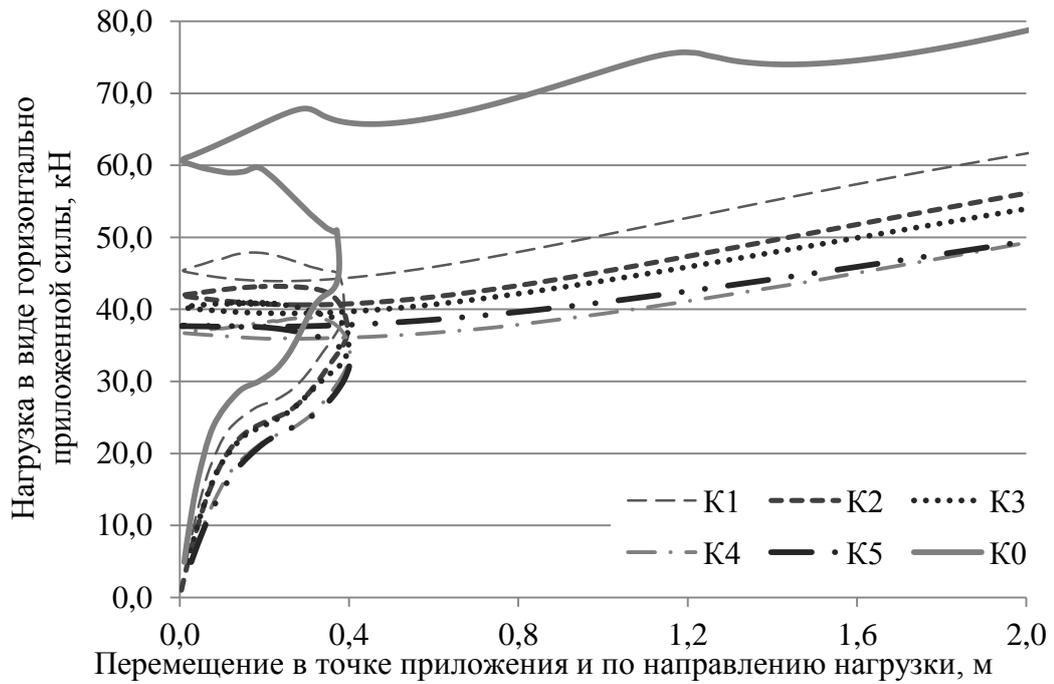


Рис. 4.4.1. Кривые равновесных состояний при действии горизонтальной сосредоточенной нагрузки с перемещениями по направлению нагрузки

На рис. 4.4.3 показан график зависимости критических нагрузок от формы конструкции, согласно которому величины нагрузок растут с приближением образующей гиперболы к асимптоте. При этом наибольшая предельная нагрузка выявляется у оболочки с прямолинейными образующими.

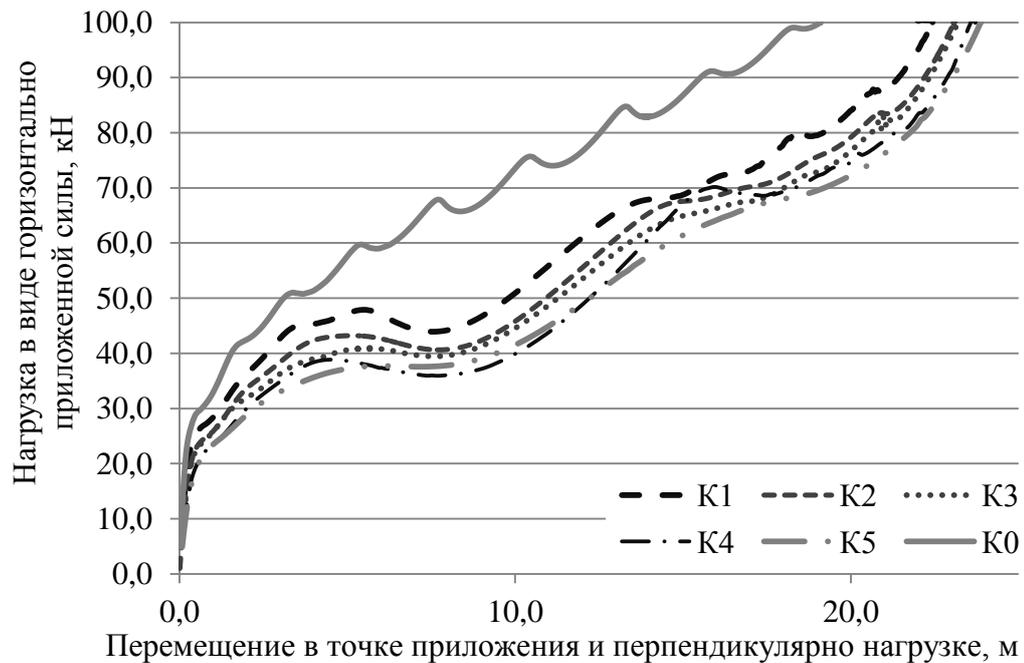


Рис. 4.4.2 Кривые равновесных состояний при действии горизонтальной сосредоточенной силы с перемещениями перпендикулярно направлению нагрузки

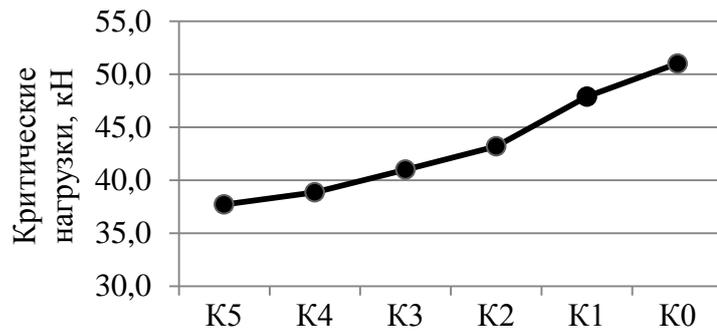


Рис. 4.4.3. График критических нагрузок в виде горизонтальных сосредоточенных сил в зависимости от вида конструкции.

Таким образом, устойчивость оболочки в форме сетчатого гиперboloида под воздействием сосредоточенных сил в значительной степени зависит от формы образующей. В конструкциях с образующими—гиперболами наилучшими характеристиками устойчивости исходной формы равновесия при действии рассмотренного варианта горизонтальных сил обладает схема оболочки K1, то есть с гиперболами, наиболее приближенными к асимптотам.

Во всех конструкциях, в том числе и с прямолинейными образующими, при горизонтальной сосредоточенной нагрузке, формы потери устойчивости имеют сходный характер (рис. 4.4.4).

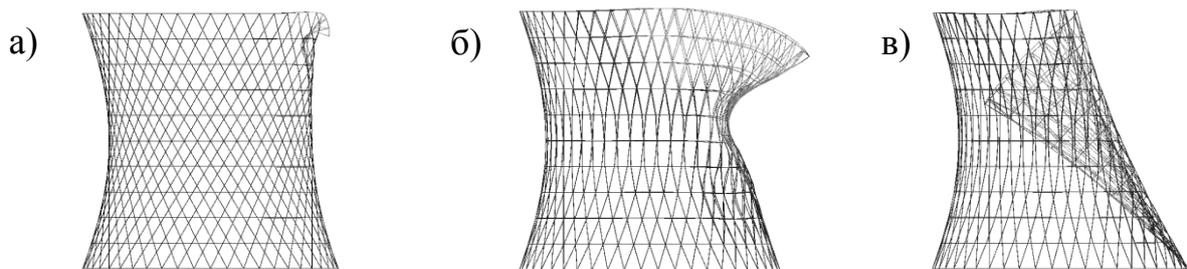


Рис. 4.4.4. Формы потери устойчивости для конструкций: а) K0 при вертикальной сосредоточенной нагрузке; б) K3 при вертикальной сосредоточенной нагрузке; в) K1 при горизонтальной сосредоточенной нагрузке.

При действии горизонтальной сосредоточенной нагрузки, указанного вида, наиболее устойчивой будет конструкция K0, для которой критическая нагрузка потери устойчивости значительно выше по сравнению с остальными вариантами.

При этом в работе только на сосредоточенную вертикальную нагрузку, как будет показано далее, этот вариант конструктивной формы не является наиболее устойчивым, поскольку сопровождается локальной потерей устойчивости стержней в местах приложения нагрузки.

Разница в значениях критических сил, найденных в линейной и геометрически нелинейной постановках, показана на рисунке 4.4.5.

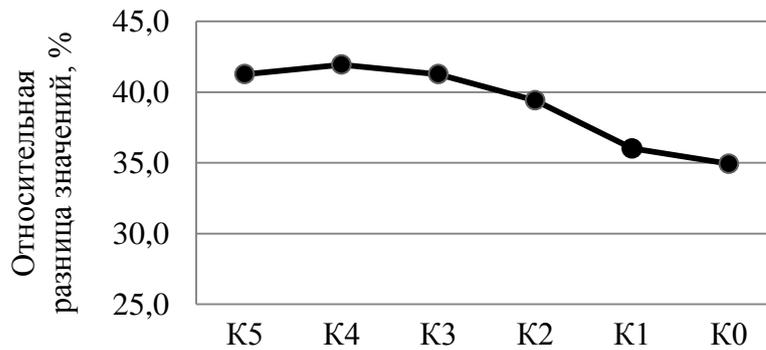


Рис. 4.4.5. Относительная разница, %, между найденными значениями критических значений горизонтальной силы в линейной и нелинейной постановке.

В среднем, значения критических нагрузок, найденных в геометрически нелинейной постановке, меньше ранее определённой в линейной постановке на 39,1%. При этом наименьшая разница составляет для конструкции K0 в пределах 35,0 %, а наибольшая – для конструкций K4 и K5 более 41,0%.

Для решения нелинейной задачи на вертикальную нагрузку использовался метод Ньютона-Рафсона совместно со схемой Крисфилда [160]. В результате расчётов в геометрически нелинейной постановке на вертикальную сосредоточенную силу также были получены кривые равновесных состояний. Для конструкций K1, K2, K3, K4 и K5 кривые равновесных состояний при вертикальной сосредоточенной нагрузке имеют сходную форму с отличием в значении критической силы. Для конструкции K0 кривая равновесных состояний имеет форму с множеством «прохлопываний». Для остальных конструкций с криволинейной сеткой элементов такая картина не характерна. На рис. 4.4.6 представлены кривые для конструкций K0... K5 при действии вертикальной

сосредоточенной нагрузки, построенные по перемещениям, сонаправленным нагрузке в точке её приложения.

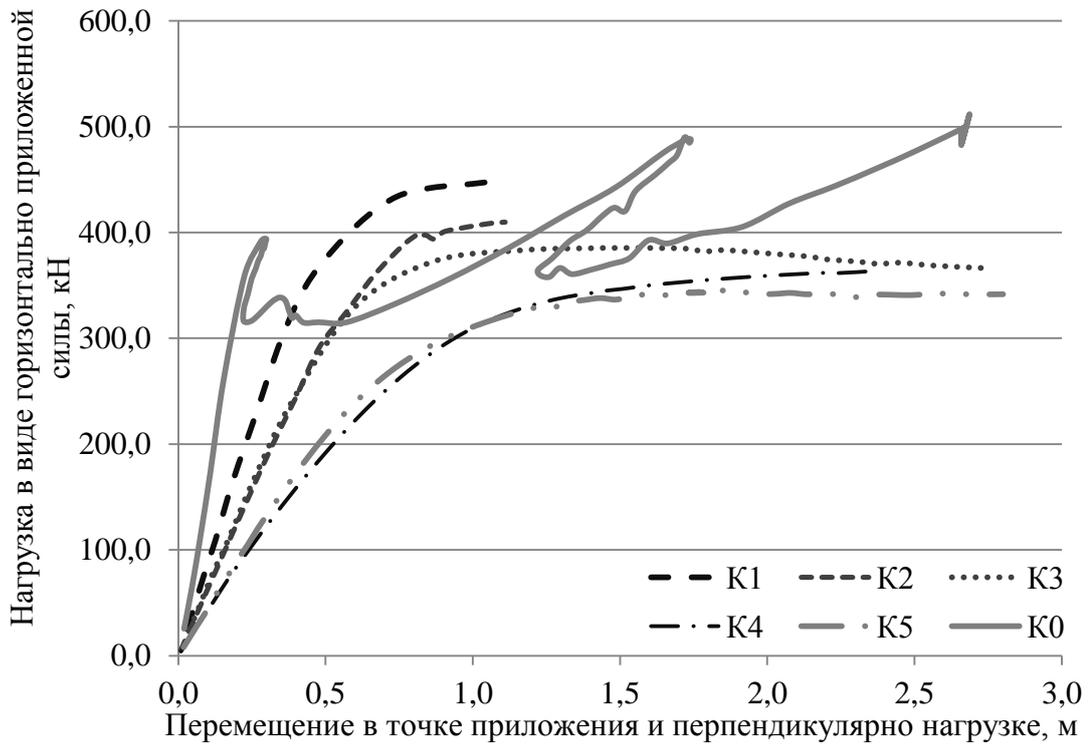


Рис. 4.4.6. Кривые равновесных состояний при действии вертикальной сосредоточенной силы на верхнее основание

График изменения значений критических нагрузок при действии сосредоточенной вертикальной силы представлен на рис. 4.4.7.

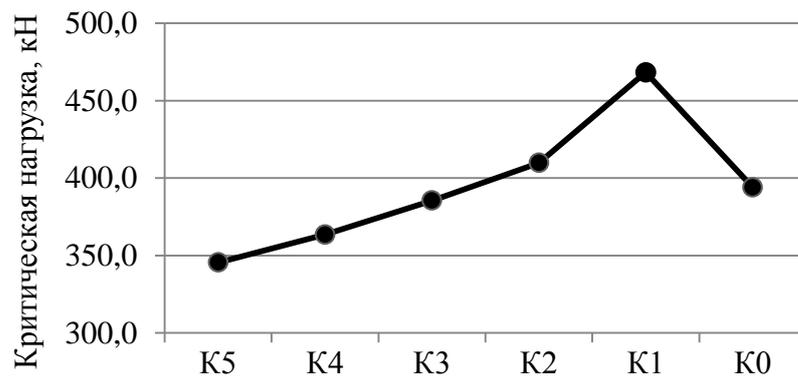


Рис. 4.4.7. График изменения критических нагрузок в виде вертикальной сосредоточенной силы, приложенной к верхнему основанию, в зависимости от вида конструкции.

Также как и кривые равновесных состояний для горизонтальной нагрузки (рис. 4.4.1 и рис. 4.4.2), значения, полученные для вертикально приложенной к верхнему основанию силы, находились в виде её пошагового увеличения. На графиках (рис. 4.4.6) можно видеть, что для некоторых конструкций с образующими-гиперболами как таковая критическая сила, определяемая первым локальным экстремумом кривой, не определяется. График обрывается на определённом шаге итерации. Происходит данное явление, как предполагается, в связи с тем, что ВК *ANSYS* при нахождении кривых равновесных состояний не определяет точки бифуркации. Различное количество итераций на одном шаге приращения нагрузки при постановке одной задачи могли дать несколько отличные друг от друга значения. То есть на определённом шаге кривая либо отклонялась от траектории, предположительно в локальном экстремуме функции кривой или точке бифуркации, возвращаясь затем на уже полученную ранее кривую при другом количестве итераций, либо расчёт распадался, предположительно как раз в экстремуме кривой. Увидеть пример данного явления можно на рисунке 4.4.13 при геометрически нелинейном расчёте на распределённую нагрузку.

Чтобы показать, что конечные значения данных графиков являются критическими силами, была предложена замена приложенной нагрузки на задаваемое перемещение (режим кинематически задаваемого нагружения), эквивалент которого в привычном значении задаваемой силы не сложно определить. Таким образом, в тех же точках было приложено перемещение, увеличиваемое на каждом шаге итерации [153]. Графики для конструкций К1, К3 и К5 показаны на рисунке 4.4.8.

Как видно из кривой равновесных состояний для конструкции К1 на рисунке 4.4.8, график имеет дальнейшее построение, не найденное ранее. При этом кривые всех указанных на рисунке конструкций практически совпадают с ранее найденными. Сравним результаты в табличной форме, определив также соотношение между ними (таблица 4.4.1).

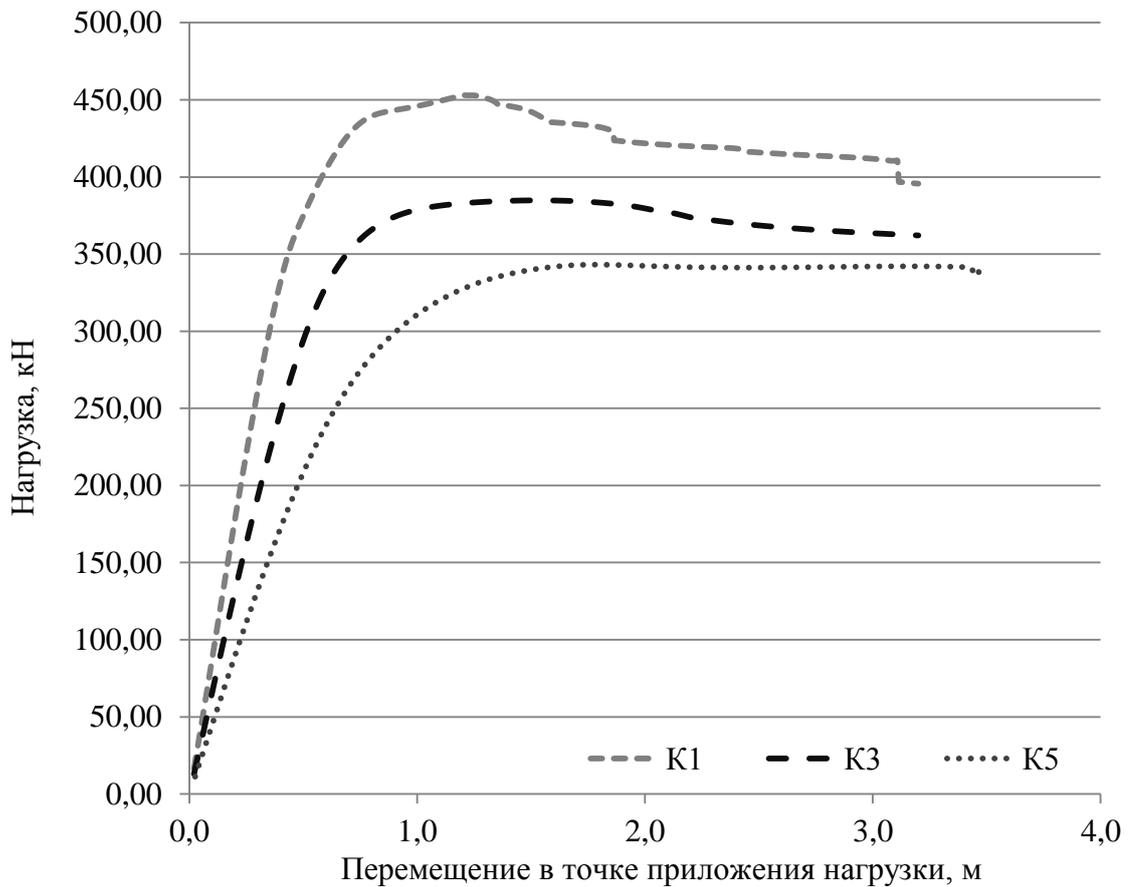


Рис. 4.4.8. Кривые равновесных состояний при действии вертикальной сосредоточенной нагрузки на верхнее основание в виде перемещения узла

Таблица 4.4.1. Сравнение значений критических сил при сосредоточенной вертикальной нагрузке при задании в виде сосредоточенной силы и перемещения в узле

Конструкция	Критическое значение нагрузки, кН		Относительная разница, %
	в виде силы	в виде перемещения узла	
K5	345,41	343,14	0,66
K3	385,39	384,80	0,15
K1	468,32	452,97	3,39

Как видно из вышеприведённой таблицы, разница в критических силах для конструкций, расчёт которых производился на вертикальную сосредоточенную нагрузку двумя способами нагружений, составляет не более 3,4%. Можно с уверенностью предположить, что нагружение перемещением даёт результат

соответствующий нагружению силой, приемлемый для изучения поставленных целей.

Интерес представляет сравнение значений критических нагрузок, полученных для конструкций в линейной и геометрически нелинейной постановках. Сопоставляя значения, полученные в обоих случаях, получили значения относительной разницы между ними (рисунок 4.4.9) для каждой конструкции.

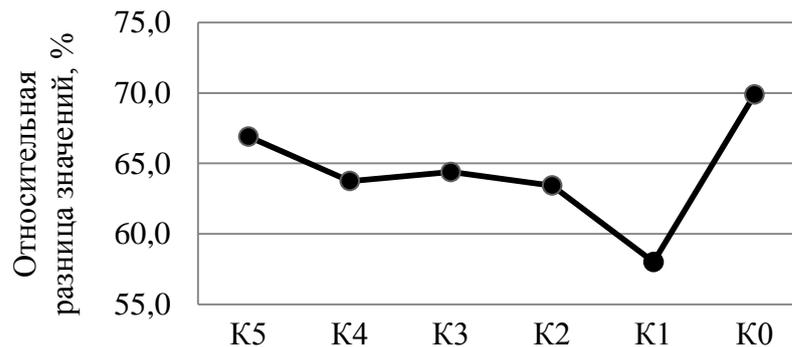


Рис. 4.4.9. Относительная разница, %, между найденными значениями критических сил в линейной и нелинейной постановке для вертикальной сосредоточенной нагрузки.

В среднем, значения критических нагрузок, найденных в геометрически нелинейной постановке, выше ранее определённой в линейной постановке на 64,4%. При этом наибольшая разница составляет для конструкции K0 порядка 69,9%, а наименьшая – для конструкции K1 около 58,0%. Указанное обратно противоположно ситуации с горизонтальной сосредоточенной нагрузкой.

Подводя итог расчётов на вертикальную сосредоточенную нагрузку, приложенную к узлу верхнего основания, выявлена некоторая зависимость устойчивости конструкций. Приведённые данные показывают, что значения критической силы возрастают с приближением образующих гипербол к асимптоте. При этом конструкция K0 с прямолинейными образующими не является наиболее устойчивой в данном случае. Очевидно, что данное обстоятельство вызвано локальным характером нагрузки и потерей устойчивости в прямолинейных стержнях, наиболее приближенных к месту приложения

вертикальной сосредоточенной силы. В то же время, криволинейные образующие конструкций $K1...K5$ распределяют внутренние усилия на нижние части конструкции и потеря устойчивости перестаёт носить местный характер. На рисунках 4.4.4, а, и 4.4.4, б, представлены формы потери устойчивости конструкций $K0$ и $K3$ при вертикальной сосредоточенной нагрузке, приложенной к верхнему основанию в точке схождения образующих. Для конструкций $K1...K5$ формы потери устойчивости почти не различаются.

Завершить изучение общих закономерностей показанных в настоящей части попробуем с помощью расчётов в геометрически нелинейной постановке на нагрузку, распределённую по узлам верхнего основания. Так же, как и при сосредоточенной вертикальной нагрузке, при нахождении кривых равновесных состояний, решение распадается при задании нагружения в виде силы. Связи с этим, был применён способ задания нагрузки перемещениями в узлах верхнего основания. Эквивалент производимого усилия, задаваемого перемещением, найден как суммарная реакция всех шарнирно-неподвижных опор нижнего основания. Расчёт производился методом Ньютона-Рафсона по схеме Крисфилда [159, 160]. В расчётах участвовали лишь конструкции $K0$, $K1$, $K3$ и $K5$.

На рисунке 4.4.10 даны кривые равновесных состояний, определить по которым можно достаточно легко критическую для каждой конструкции распределённую нагрузку. Перемещения на полученных графиках взяты по направлению приложения нагрузки с узлов верхних оснований конструкций. Также были получены иные графики для точек в местах наибольших деформаций. Графики не приводятся, но имеют достаточно сложную форму и отражают резкую изменяемость величины перемещений с пошаговым увеличением нагрузки вокруг одной точки поверхности гиперboloида при потере устойчивости.

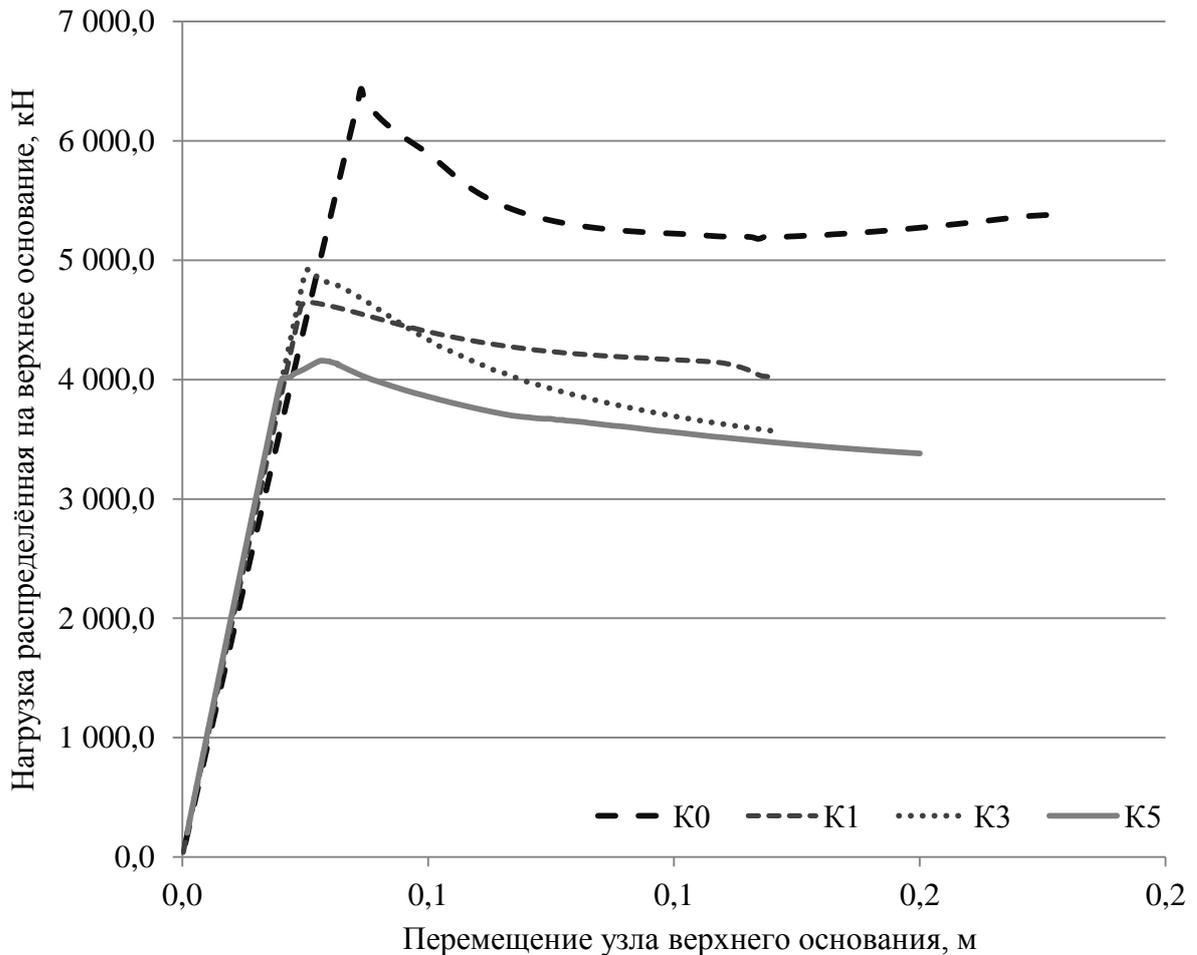


Рис. 4.4.10. Кривые равновесных состояний при действии вертикальной распределённой нагрузки на верхнее основание в виде перемещения узлов

Наибольшее значение усилия, приложенное к конструкции K0, при котором происходит достижение критической нагрузки, соответствует перемещению верхнего основания на 0,0364 м. Для K1 данное значение составляет 0,0258 м. Для конструкции K3 та же величина – 0,0255 м. Надо отметить, что нагрузка, при которой происходит достижение критической силы применительно к K3, превышает значение критической нагрузки для конструкции K1, при этом соответствующее критической силе перемещение наоборот меньше. Наибольшее значение воспринимаемой распределённой нагрузки для каркаса конструкции K5 определяется перемещением верхнего основания на 0,0282 м.

График изменения критических значений распределённой вертикальной нагрузки представлен на рис. 4.4.11.

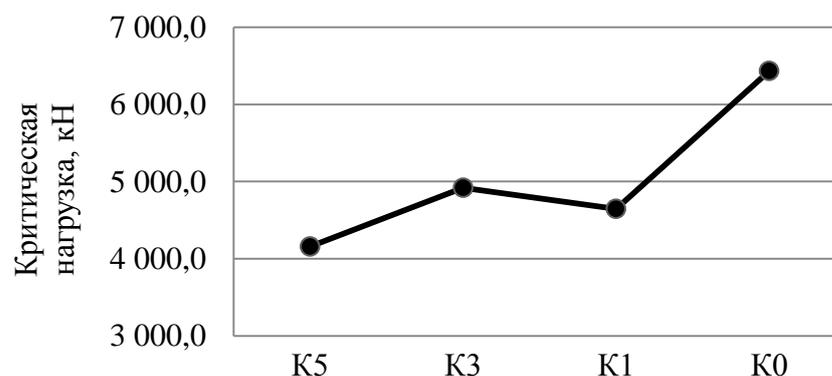


Рис. 4.4.11. График изменения критических нагрузок в виде вертикальной распределённой нагрузки в зависимости от вида конструкции.

Получившаяся зависимость (рисунок 4.4.11) и кривые равновесных состояний (рисунок 4.4.10) также отражают действительное увеличение несущей способности конструкции, при стремлении образующей-гиперболы к асимптоте. Также, как и в предыдущих расчётах, выделяется конструкция K0, величина значения критической распределённой нагрузки для которой превышает те же значения для конструкций с образующими-гиперболы как минимум на 30,8%.

Интересно сравнить по аналогии с сосредоточенными нагрузками различие в значениях критических сил, полученных в различных постановках задачи (таблица 4.4.2).

Таблица 4.4.2. Сравнение значений критических сил, при распределённой вертикальной нагрузке, полученных в линейной и геометрически нелинейной постановках

Конструкция	Критическое значение нагрузки, кН		Относительная разница, %
	в геометрически нелинейной постановке	в линейной постановке	
K5	4158,20	2460,43	69,00
K3	4920,20	3356,21	46,60
K1	4647,00	4007,71	15,95
K0	6436,40	6470,88	-0,53*

* Знак «-» означает, что результат в геометрически нелинейной постановке меньше значения, полученного в линейной постановке, при этом положительные значения показывают обратное.

Графически разница, указанная в таблице 4.4.4 показывается на рисунке 4.4.12, из которого определяется, что критическая сила, полученная в геометрически нелинейной постановке, для конструкций с образующими-гиперболами выше значений, полученных при решении задач в линейной постановке и изменяется от конструкций, наиболее приближенных к асимптоте, к менее приближенным.

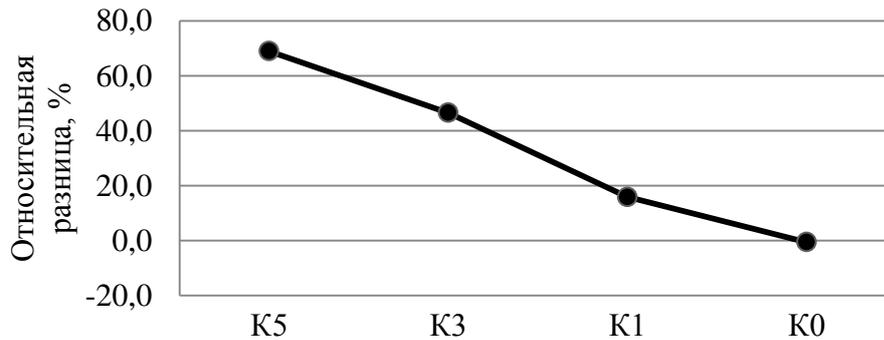


Рис. 4.4.12. Относительная разница, %, между найденными критическими значениями вертикальных распределённых нагрузок в линейной и геометрически нелинейной постановке.

Конструкция K0 показывает, что значения критических сил, найденные в различных постановках, практически совпадают между собой.

Проявление свойства конструкций, когда значения критических сил в линейной постановке ниже, чем в геометрически нелинейной, также как и при вертикальных сосредоточенных нагрузках для конструкций с образующими-гиперболами, показывает важность решения задачи в нелинейной постановке. То есть для определения верных данных, характеризующих устойчивость конструкции, решение задач в линейной постановке недостаточно.

Выше было сказано, что нахождение кривых равновесных состояний сопряжено с некоторыми сложностями, которые связаны с вариантносью решений, в зависимости от исходных параметров, определяющих дальнейшее построение решения задачи. Так, при увеличении количества шагов итерации для построения кривых возможно нахождение отличной от ранее полученной кривой. Данные случаи можно обнаружить на рисунке 4.4.13. Полученная кривая для

конструкции К1 первоначально имела значение экстремума большее, чем в дальнейшем полученная кривая при большем количестве шагов нагружения. Можно видеть, что в первом случае, по всей видимости, в точке бифуркации кривая «ушла» выше, но при определённом значении нагружения вновь «вернулась» на кривую, которая также была получена при увеличении количества шагов более чем в два раза.

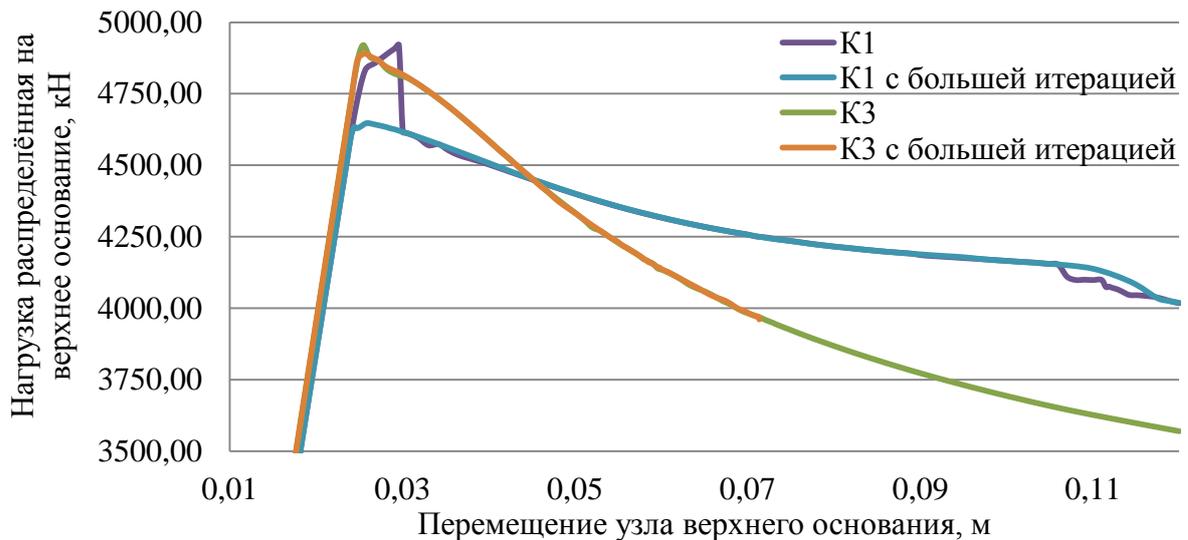


Рис. 4.4.13. Кривые равновесных состояний, построенные с различным количеством шагов итерации для конструкций К1 и К3.

Так же как и для К1, сходное поведение можно видеть у конструкции К3. Но в отличие от первой погрешность в критической силе не столь велика.

Изучив поведение конструкции при геометрически нелинейной постановке задачи, были получены результаты, во многом подтверждающие ранее найденные зависимости. Конструкции, обладающие каркасами, сформированными образующими-гиперболами, имеют характеристики в задачах устойчивости на сосредоточенные горизонтальную и вертикальную, а также распределённую нагрузки тем лучше, чем ближе к асимптотам образующие-гиперболы. Конструкция К0 в единственном случае, а именно с вертикальной сосредоточенной нагрузкой, уступает по несущей способности конструкциям с образующими-гиперболами. В общем случае, на устойчивость в геометрически нелинейной постановке большое влияние оказывает структура каркаса.

Сравнение искомым критических сил с ранее найденными в линейной постановке выявило, что с учётом геометрической нелинейности критические силы при вертикальных нагрузках превышают ранее найденные до 70%. При этом для горизонтальной нагрузки характерно обратное: значения критической силы гораздо ниже ранее определённых.

Лишь в некоторых случаях нагрузка, получаемая в линейной постановке, сходна со значениями, получаемыми в геометрически нелинейной постановке задачи устойчивости, а именно в случае с распределённой по верхнему основанию вертикальной нагрузкой для конструкции с прямолинейными образующими, где разница в значениях не превышает 1%.

4.5. Влияние физической нелинейности на устойчивость сетчатого гиперболоида

Расчёты конструкций на внешние воздействия, проводимые до настоящего момента, выполнялись лишь для материала стали, обладающего идеально упругими характеристиками. Реальная работа конструкции и её предельные несущие характеристики имеют значения, которые существенно могут отличаться от ранее найденных. Поэтому также как и учёт геометрической нелинейности, особое внимание при изучении работы конструкции требуется уделить физической нелинейности.

В целях упрощения расчетных предпосылок при работе конструкций в упругопластической области диаграмму работы стали без большой погрешности с некоторым запасом можно заменить идеализированной диаграммой упругопластического тела. При описании работы сталей с выраженной площадкой текучести используют диаграмму Прандтля, рассматривая материал совершенно упругим до предела текучести и совершенно пластичным после него. При отсутствии площадки текучести можно использовать диаграмму с линейным упрочнением (рисунок 4.5.1). В этом случае до предела текучести сталь работает с

начальным модулем упругости $E = \operatorname{tg} \alpha$, а при напряжениях $\sigma > \sigma_y$ – с модулем $E_1 = \operatorname{tg} \varphi$.

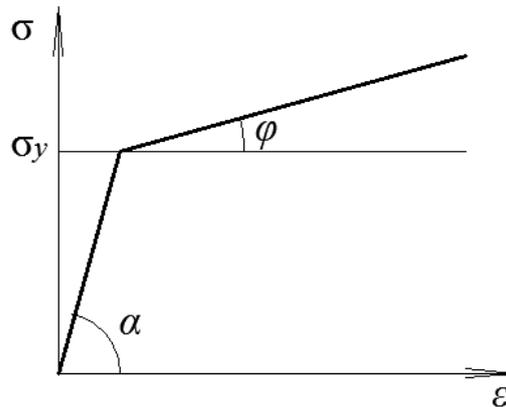


Рис. 4.5.1. Идеализированная диаграмма работы стали с линейным упрочнением.

Диаграмма деформирования пластического материала чаще всего в расчетах схематизируется кусочно-линейной зависимостью без площадки текучести с линейным упрочнением. Опираясь также на реальную работу стали, характеризующуюся неким упрочнением после достижения предела текучести, нами выбрана идеализированная диаграмма работы стали с линейным упрочнением. Предел пропорциональности в таких диаграммах принимается равным пределу текучести, что также достаточно удобно для практического применения.

Геометрические характеристики элементов рассчитываемых каркасов приняты прежними, трубчатого сечения с наружным диаметром трубы $d = 83$ мм и толщиной стенки $\delta = 3$ мм [36]. Материал элементов – сталь, с начальным модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, плотностью $\rho = 7850$ кг/м³, пределом текучести $R_{ny} = 250,0$ МПа. Модуль упрочнения материала определён как $E_1 = 2 \cdot 10^3$ МПа, который составляет 1% от начального модуля упругости материала.

Расчёт производился для конструкций К0, К1, К3 и К5 в геометрически нелинейной постановке с учётом параметров физической нелинейности материала на распределённую нагрузку, которая также, как и в части 4.4 настоящей главы, задавалась в виде заданного перемещения по всем узлам верхнего основания.

Таким образом, отличие от ранее выполненных расчётов будет заключаться в введении в состав расчёта параметров нелинейности материала каркасов.

Результирующие кривые равновесных состояний показаны на рисунке 4.5.2. Характерны для всех конструкций похожие на «площадки текучести» участки кривых, которые возникают после «прохождения» критического значения нагрузки. Внешнее различие выявленных форм кривых с ранее полученными для идеально упругого материала определено именно введёнными билинейными характеристиками. Сравнивая формы потери устойчивости (рис. 4.5.2), полученные при данном расчёте, и полученные ранее (рис. 4.4.10), можно увидеть реальное проявление пластичности в элементах верхних частей каркасов.

Критические значения распределённой вертикальной нагрузки для конструкций, учитывающих физическую нелинейность, изменяются в обратной зависимости, представленной на графике (рис. 4.5.3), в отличие от тех, что были показаны ранее (рис. 4.4.11).

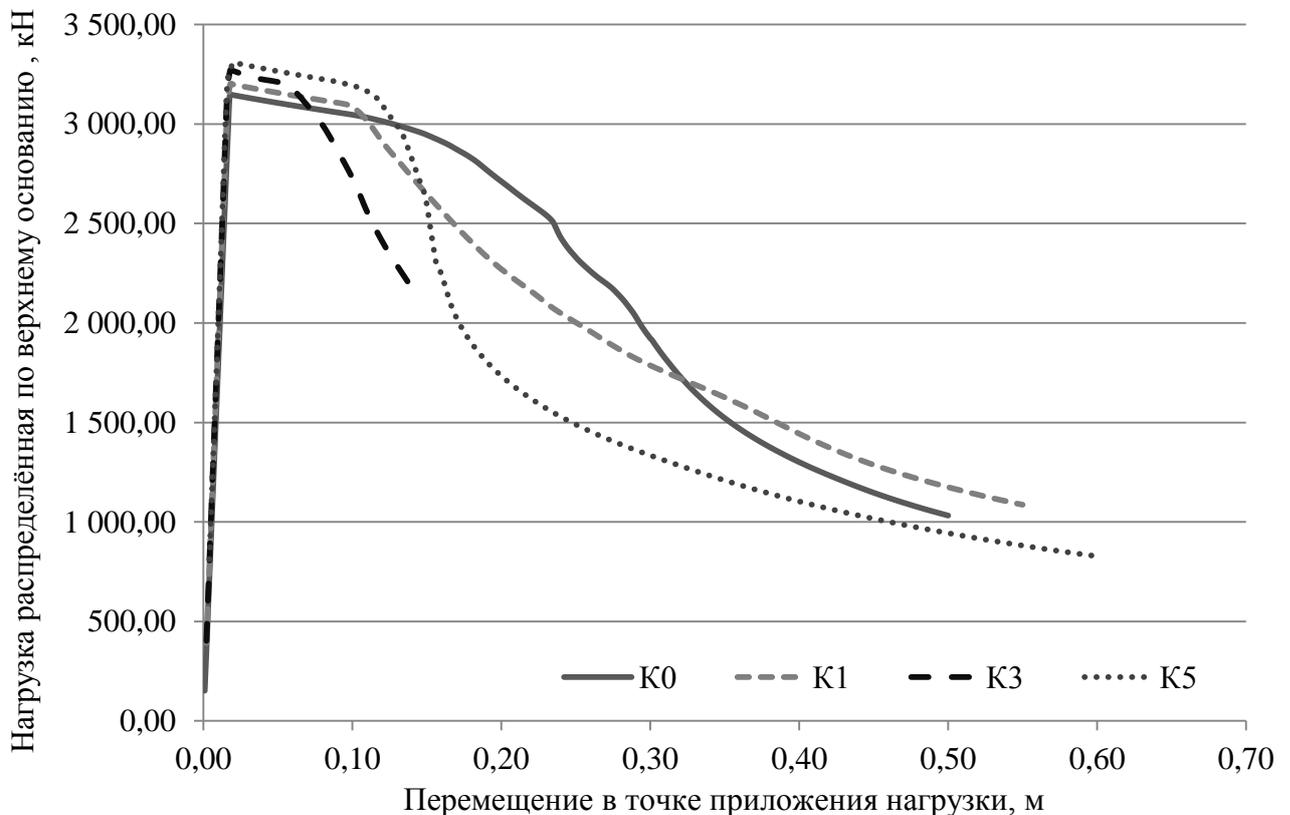


Рис. 4.5.2. Кривые равновесных состояний, построенные с учётом физической нелинейности, для конструкций K1, K3 и K5.

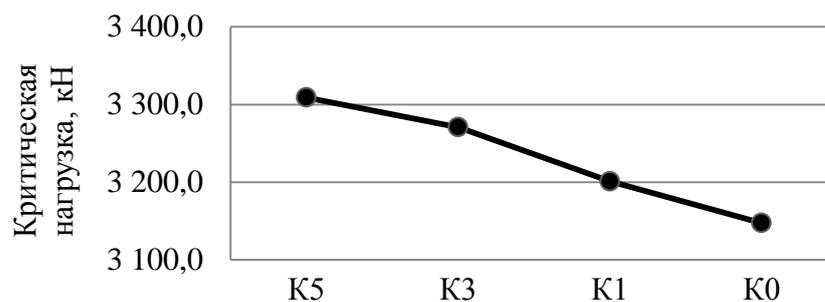


Рис. 4.5.3. График изменения критических сил в виде вертикальной распределённой нагрузки в зависимости от вида конструкции с учётом физической нелинейности материала

Данные критических значений, полученных с учётом физической нелинейности, а также ранее найденные значения, полученные в геометрически нелинейной постановке, для линейно упругого материала, представлены в таблице 4.5.1.

Таблица 4.5.1. Сравнение значений критических сил, при распределённой вертикальной нагрузке, полученных для упруго-пластического и идеально упругого материала

Конструкция	Критическое значение нагрузки в геометрически нелинейной постановке, кН		Относительная разница между значениями, %
	для упруго-пластического материала	для идеально упругого материала	
K5	3309,00	4158,20	20,42
K3	3270,70	4920,20	33,53
K1	3201,20	4647,00	31,11
K0	3147,60	6470,88	51,36

Примечательно, что общая разница в полученных с учётом физической и геометрической нелинейностей значениях критической нагрузки, распределённой по верхнему основанию, для всех четырёх конструкций в пределах 5,1%. При

этом получается, что конструкция К0 является наименее устойчивой, а конструкции с образующими-гиперболами тем более устойчивы, чем больше удаление образующей каркаса от асимптоты. Полученный результат во многом меняет картину влияния образующей на несущие характеристики каркаса.

Общую закономерность получаемых различий в критических силах за счёт введения физической нелинейности можно просмотреть на рисунке 4.5.4, где показаны превышение, %, критического значения нагрузки для упругого материала, надо теми же значениями для физически-нелинейного материала.

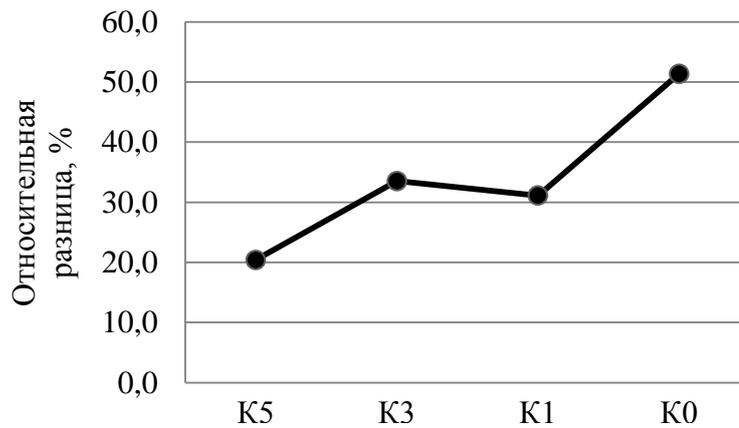


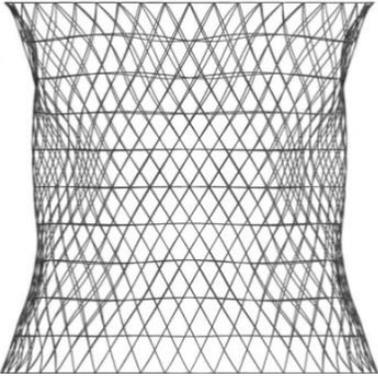
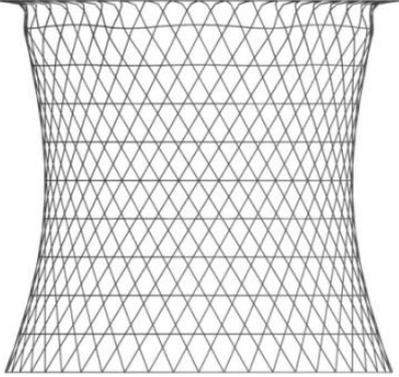
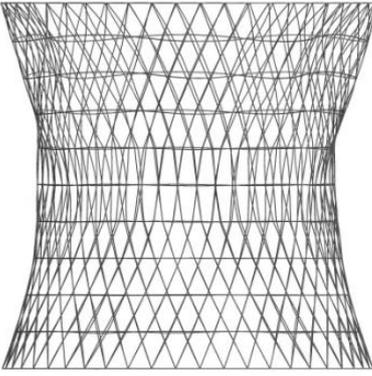
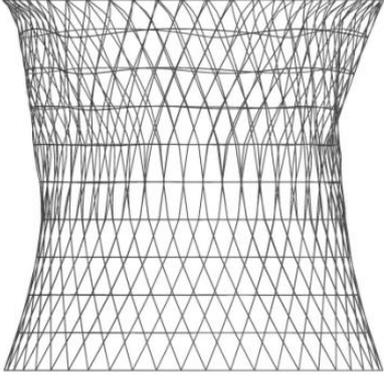
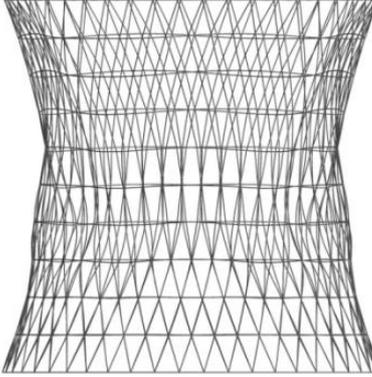
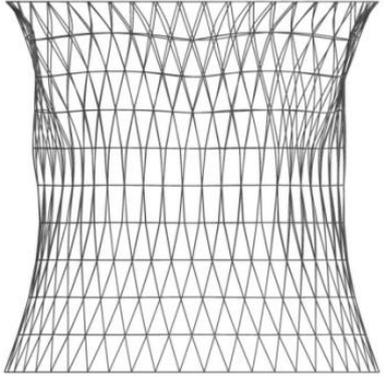
Рис. 4.5.4. Относительная разница, %, между критическими значениями распределённых нагрузок для конструкций из упругого и физически нелинейного материала

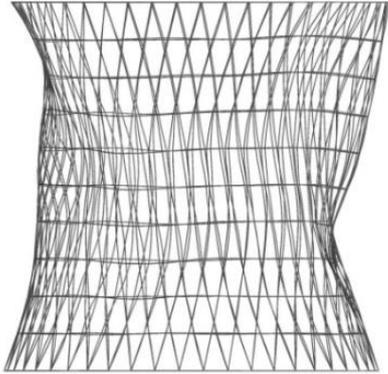
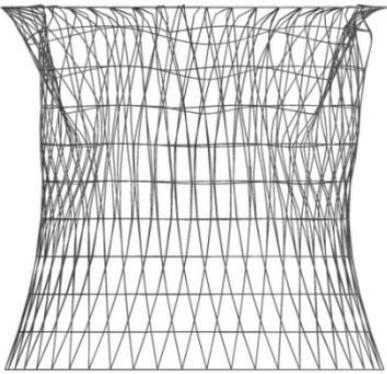
График на рисунке 4.5.4 показывает что физическая нелинейность материала больше влияет на устойчивость конструкции К0 и меньшим образом, на конструкцию К5.

В таблице 4.5.2 даны деформированные формы конструкций, получаемые под воздействием распределённой по верхнему основанию нагрузки в двух рассматриваемых постановках, в геометрически нелинейной и с учётом физической нелинейности. Перемещения в конструкциях (таблица 4.5.2) с целью наглядности показаны с множителем 1,9. Отметим то, что общий вид деформирования в геометрически нелинейной постановке для всех конструкций имеет сходный характер с образованием «волн» в оболочке. Так, для К0 их шесть, для К1 – пять, для К3 – четыре, а для К5 – три. С введением характеристик

физической нелинейности в расчёт, формы деформирования отличаются от ранее полученных. Образуются новые «волны» и заломы оболочек, переходящие от верхних частей конструкции вниз с отдалением гиперболы-образующей от асимптоты, то есть от К1 к К5.

Таблица 4.5.2. Формы деформирования конструкций под воздействием вертикальной распределённой по узлам верхнего основания нагрузки при расчётах в геометрически- и физически нелинейной постановках

Каркас	Деформированная схема конструкции при геометрически нелинейной постановке расчёта	Деформированная схема конструкции при физически-нелинейной постановке расчёта
1	2	3
К0		
К1		
К3		

Каркас	Деформированная схема конструкции при геометрически нелинейной постановке расчёта	Деформированная схема конструкции при физически-нелинейной постановке расчёта
1	2	3
К5		

Полученный с учётом физической нелинейности результат во многом меняет картину влияния образующей на несущие характеристики каркаса. Здесь возникает обратное явление, когда наиболее жёсткая структура каркаса раньше достигает критического значения нагрузки. Обусловлено это тем, что перенапряженные элементы в верхней части конструкции вследствие достижения текучести раньше теряют несущую способность, чем происходит потеря устойчивости в нижних элементах сетчатой оболочки. При этом, чем менее жёсткая структура у каркаса, например К5, тем ниже будет смещаться в конструкции места местной складчатости.

Практический вывод полученного результата следующий. Для полноценного использования возможностей структурного каркаса с образующими, приближенными или переходящими в прямую-асимптоту, необходимо уйти от появления пластических деформаций в наиболее нагруженных элементах. Таким образом, увеличивая жёсткость стержней лишь в верхних частях оболочки (относительного данного вида нагрузок), можно существенно повысить общую несущую способность несущего каркаса.

4.6. Анализ структурной устойчивости сетчатой оболочки в виде однополостного гиперboloида вращения

С недавнего времени изучение структурной устойчивости конструкции стало обязательным при проектировании уникальных зданий и сооружений. Расчёты подобного характера носят цель изучения возможности внезапного обрушения конструкций, причиной которого может стать выведение из строя его отдельных элементов.

Анализ структурной устойчивости для каркасов сетчатых оболочек в виде однополостного гиперboloида вращения проводится относительно конструкций К0, К1, К3 и К5. Исследовать данную задачу представляется возможным посредством удаления из расчётной модели отдельного элемента. Выбор удаляемого стержня производится на основании деформированной, под воздействием аналогичных приложенным в расчёте нагрузок, формы конструкции. Так, при изучении деформаций, полученных от распределённой нагрузки, был выбран наиболее деформированный элемент в каждой конструкции. Места расположения таких элементов выбраны также с учётом их позиции в общей структуре ориентировочно в одной области для всех конструкций (первое пересечение образующих под верхним основанием). Каркасы с удалёнными элементами вновь подвергаются расчёту на распределённую нагрузку. Полученные при геометрически нелинейном расчёте кривые равновесных состояний представлены на рисунке 4.6.1.

Численные показатели устойчивости конструкций, обнаруженные на основании полученных кривых, содержащие найденные значения, а также значения критических нагрузок для конструкций с исходной структурой каркаса для сравнения, показаны в таблице 4.6.1.

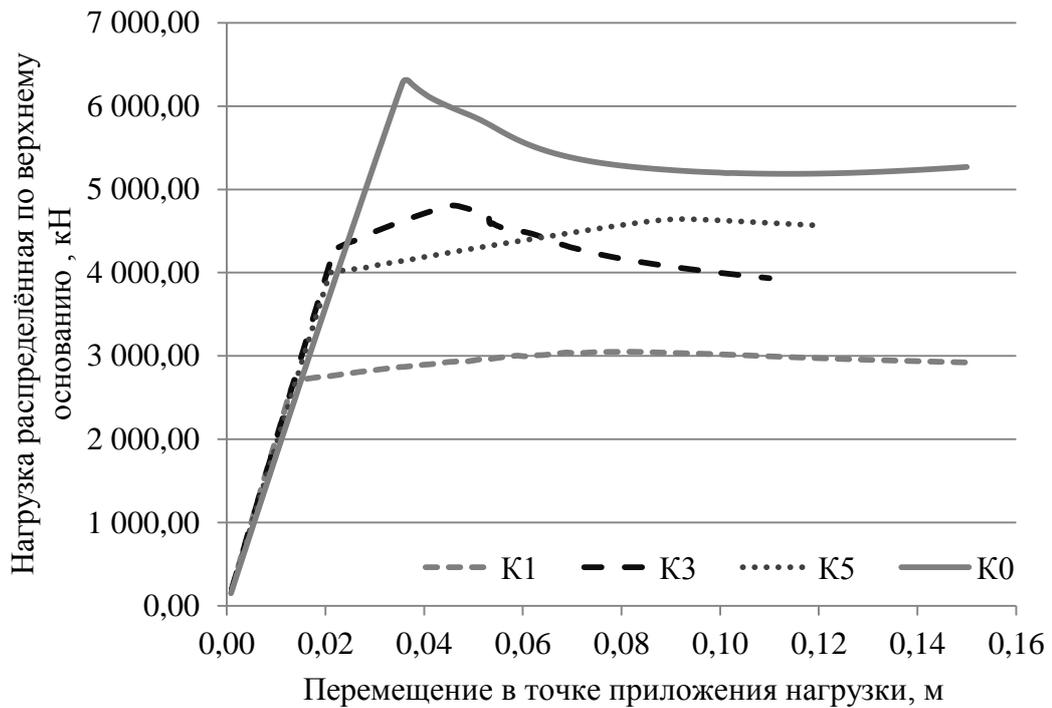


Рис. 4.6.1. Кривые равновесных состояний, построенные с учётом нарушения структуры каркаса для конструкций K0, K1, K3 и K5.

Таблица 4.6.1. Сравнение значений критических сил, при распределённой вертикальной нагрузке, полученных для каркасов с исходной структурой и нарушенной.

Конструкция	Критическое значение нагрузки в геометрически нелинейной постановке, кН		Относительная разница, %
	с учётом нарушения структуры каркаса	для исходной структуры каркаса конструкции	
1	2	3	4
K5	3051,20	4158,20	26,62
K3	4806,80	4920,20	2,30
K1	4643,5	4647,00	0,08
K0	6309,70	6436,4	1,97

Значения табличных данных в форме графиков показаны на рисунках 4.6.2 и 4.6.3.

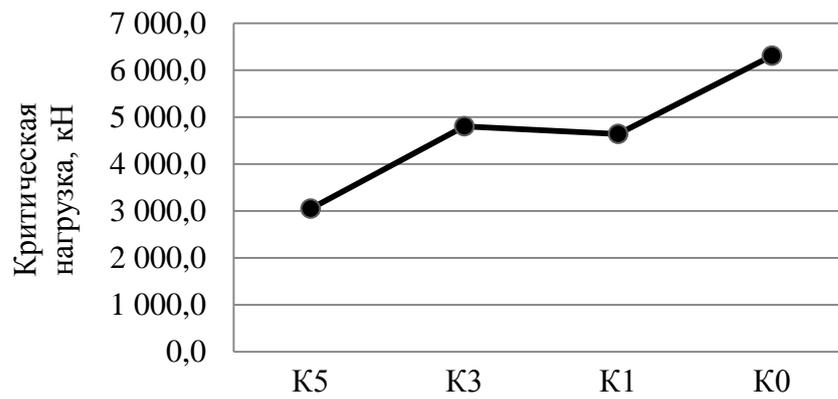


Рис. 4.6.2. График изменения критических сил в виде вертикальной распределённой нагрузки в зависимости от вида конструкции с учётом нарушения структуры каркаса

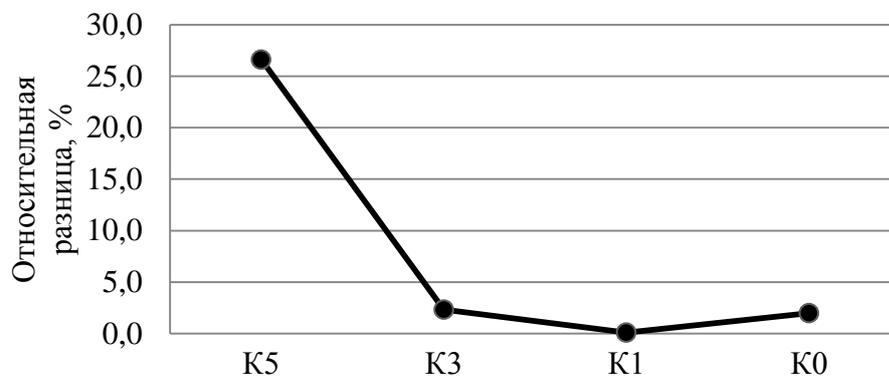


Рис. 4.6.3. Относительная разница, %, между найденными критическими значениями вертикальных распределённых нагрузок для конструкций с нарушением структуры каркаса и конструкций с исходной структурой

Из представленных на рисунках 4.6.2 и 4.6.3 графиков можно сделать вывод, что в результате удаления наиболее напряжённого элемента из расчётной схемы каркаса общая несущая способность, выражающаяся в критической нагрузке, распределённой по верхнему основанию, снижается с уменьшением густоты сетки оболочки. Чем ближе образующая гипербола каркаса к асимптоте (прямолинейной образующей), тем меньшее влияние производит на устойчивость каркаса отсутствие нагруженного элемента.

Примечательно, что деформирование конструкций под равномерно распределённой нагрузкой без нарушения структуры каркаса, в целом, имеет схожий характер с образованием «волн». После удаление элементов, характер деформирования в результате распределённой нагрузки оставался прежним, но при этом «волна» смещалась от удалённого элемента и, таким образом, область вокруг удаленного элемента переставала быть наиболее деформированной. То есть формы деформирования, полученные для каркасов с нарушенной структурой, имеют вид, в котором области вокруг удалённого элемента имеют наименьшее деформирование. Это значит, что внутренние усилия, приходящиеся на отсутствующий элемент, перераспределяются на другие элементы и, таким образом, наибольшие деформации наблюдаются в других частях конструкции.

4.7. Модальный анализ конструкций с определением собственных частот и форм колебаний

Собственные частоты и формы колебаний конструкций найдены с помощью модального анализа. На рисунке 4.7.1, а, приведён график изменения собственных частот для конструкции с шарнирным закреплением каждого узла с основанием. Также для сравнения показан график изменения собственных частот для тех же конструкций, но с подвижно-шарнирным закреплением узлов низа каркаса, т.е. случай свободно опёртой конструкции на фундамент. Дополнительно с этим, на рисунке 4.7.1, б, отдельно показан график собственных частот колебаний только для свободно-опёртой конструкции.

Можно отметить, что для обоих графиков качественная картина изменения частот колебаний напоминает график изменения критических сил в линейной постановке в случае действия распределённых нагрузок. По представленным результатам также выделяется конструкция с прямолинейными образующими, которая характеризуется наибольшей жесткостью из всех рассмотренных вариантов оболочек.

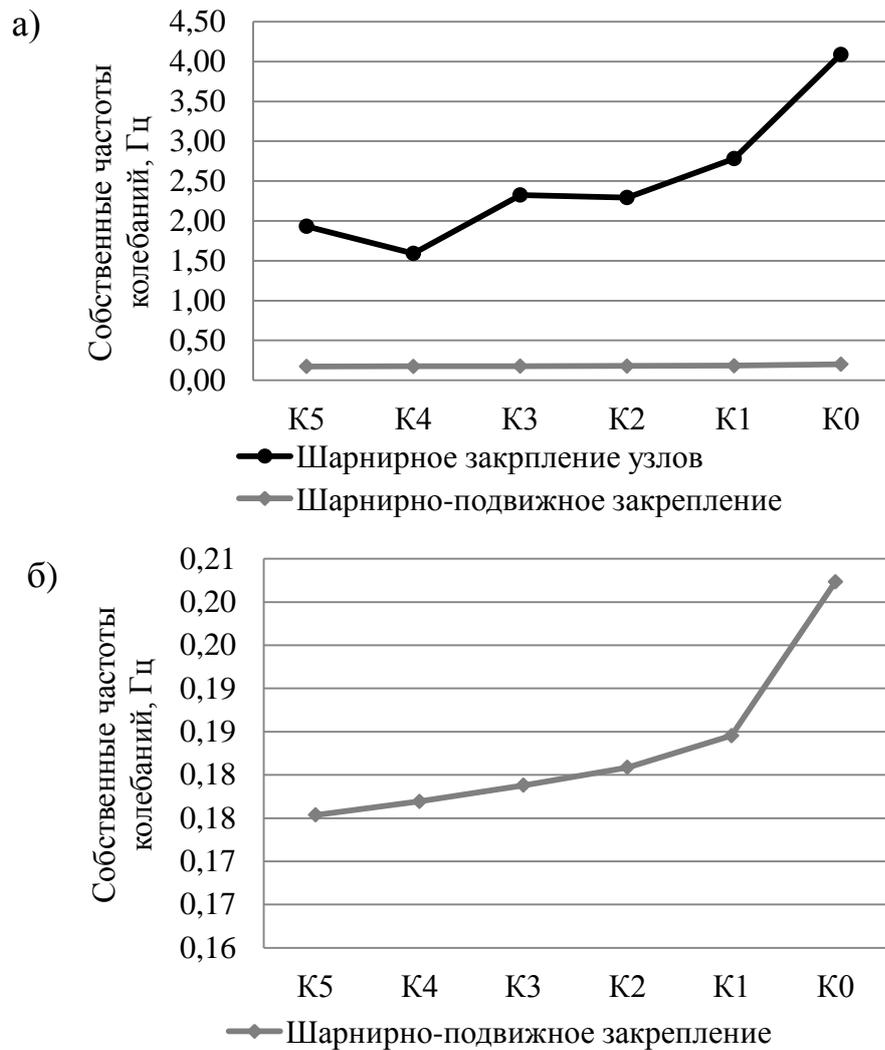


Рис. 4.7.1. График собственных частот колебаний для конструкций:
 а) с шарнирным закреплением узлов с основанием; б) с шарнирно-подвижным
 закреплением узлов нижнего основания

Результаты сравнения собственных частот колебаний при различном закреплении конструкции (таблица 4.7.1) выявляют большую разницу в частотах собственных колебаний конструкции. Как видно из таблицы, частоты колебаний в 9,1- 20,2 раз выше при шарнирном закреплении каждого узла основания, чем для той же конструкции, но свободно стоящей на фундаменте. Дополнительно отметим, что не только по форме, но и по соотношению в численном значении, графики на рисунках 4.7.1 и 4.3.3 (для критических сил при распределённой нагрузке) сходны между собой. Напомним, что значения критических сил в линейной постановке для шарнирно-закреплённой конструкции на фундаменте

выше в 6,5-14,9 раз, чем те же конструкции, но со свободным опиранием при распределённой нагрузке на верхнее основание.

Таблица 4.7.1. Сравнение значений собственных частот для конструкций с различными граничными условиями и с нарушением структуры каркаса

Наименование конструкции	Собственные частоты конструкций, Гц		
	Свободное опирание конструкции на основание	Шарнирное закрепление узлов основания	Шарнирное закрепление с нарушением структуры каркаса
1	2	3	
К5	0,17537	1,9328	1,9297
К4	0,17694	1,5935	—
К3	0,1788	2,3249	2,3229
К2	0,18087	2,2942	—
К1	0,18454	2,7821	2,7789
К0	0,20235	4,0909	—

Представленные в таблице данные также показывают практически отсутствующую разницу в значениях собственных частот конструкции при удалении элемента в соответствии с ранее проводимым анализом структурной устойчивости.

При модальном анализе были найдены собственные частоты и формы колебаний оболочек. Деформированные формы конструкций с шарнирным закреплением в узлах нижнего основания представлены на рисунке 4.7.2 (даны виды сбоку и сверху). Примечательно, что для конструкций с гиперболическими образующими они не имеют ярко выраженных различий, но отличается лишь для каркаса К0.

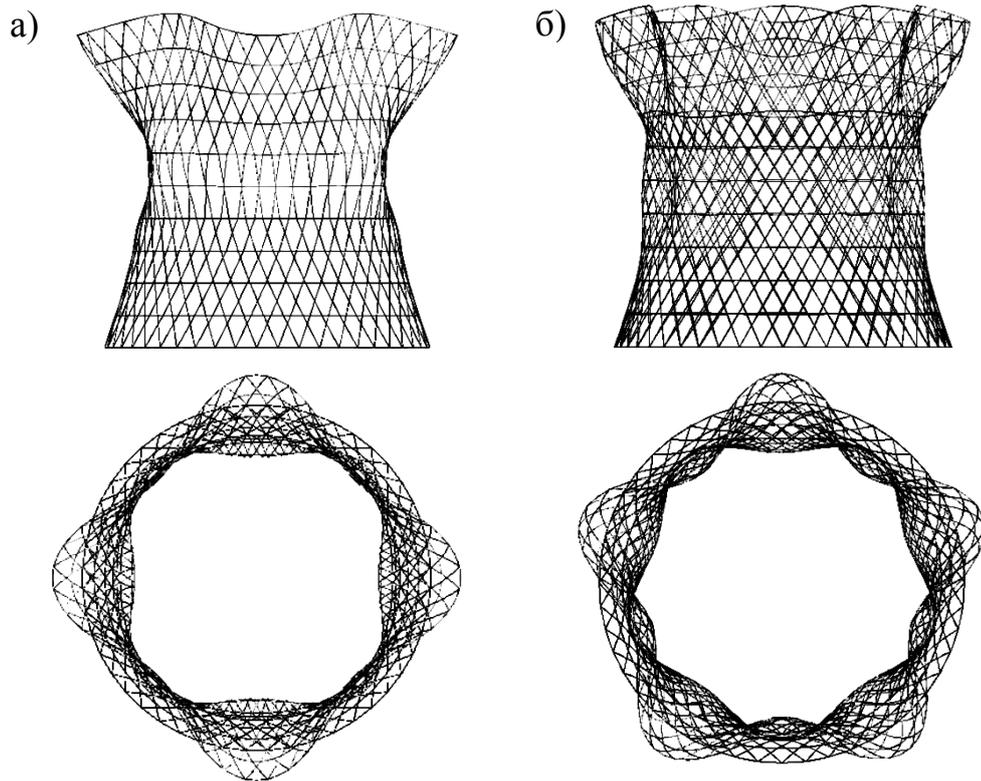


Рис. 4.7.2. Формы деформирования конструкций при собственных колебаниях:

а) для конструкции К1; б) для конструкции К0.

4.8. Выводы по главе 4.

В главе изучается влияние формы образующей дискретной сетчатой оболочки в виде однополостного гиперboloида вращения на его НДС, устойчивость, собственные частоты колебаний. На примере трёх каркасов рассматривается влияние угла наклона образующей, изменяющей форму сетчатой оболочки, на её НДС, при приближенных к реальным нагрузках. Кроме того исследования строятся на расчётах сетчатого гиперboloида, представленного пятью видами каркасов, формирующихся из образующих-гипербол, имеющих одну асимптоту. Для сравнения дополнительно взят каркас с прямолинейными образующими, являющимися асимптотами образующих-гипербол, отличающийся по своим свойствам от оболочек с криволинейной сеткой стержней. Изложены результаты численного анализа сетчатой оболочки, проведённого с помощью метода конечных элементов, в геометрически и физически нелинейной

постановках. В работе также представлены кривые равновесных состояний оболочки при различных нагрузках. Выполнены расчёты на структурную устойчивость дискретных оболочек указанной формы. По полученным данным можно сделать нижеследующие выводы:

1. Наклон прямолинейной образующей однополостного гиперболоида вращения вместе с формированием густоты сетки заданной оболочки влияет также на её НДС. С уменьшением угла наклона прямолинейной образующей к основанию возрастает жёсткость конструкции и уменьшаются значения внутренних усилий.

2. Меньшие внутренние усилия проявляются в конструкциях с образующими гиперболами, более приближенными к их асимптотам. С той же зависимостью уменьшаются максимальные перемещения конструкций под воздействием сосредоточенных сил, за исключением распределённой нагрузки, где они вызваны растяжением кольца верхнего основания.

3. Критические значения нагрузок, найденные в линейной постановке, возрастают с увеличением густоты сетки, то есть также с приближением образующей-гиперболы к своей прямолинейной асимптоте. Примечательно при этом, что анализ изменения массы конструкции не выявляет при сосредоточенной вертикальной нагрузке конструкцию с прямыми образующими как наилучшую.

4. Различия в граничных условиях наибольшим образом влияют на критические значения нагрузки, при этом почти не влияют на внутренние усилия. При шарнирном закреплении конструкции в основании, критическая сила, найденная в линейной постановке, в ряде случаев до 15 раз превышает полученную при свободном опирании.

5. Значения критических сил, найденных в геометрически нелинейной постановке, существенно отличаются от найденных ранее в линейной, кроме случая с распределённой нагрузкой для конструкции с прямолинейными образующими.

6. Учёт физической нелинейности выявил обратную зависимость в несущей способности конструкции, определяемую её криволинейной

образующей. Разница в значениях критических сил для всех каркасов при распределённой нагрузке не превышает 5,1%.

7. Анализ структурной устойчивости при выключении из работы наиболее деформированных элементов из структурного каркаса в заданных сценариях практически не влияет на значения критических распределённых по верхнему контуру нагрузок.

8. Изменение собственных частот колебаний при изменении параметров криволинейной образующей показывают те же зависимости, что и найденные при определении критических значений распределённой нагрузки в линейной постановке. Собственные частоты конструкций при нарушении структуры каркаса по заданным сценариям практически не изменяются.

Заключение

В качестве основных теоретических и практических результатов данной диссертационной работы можно отметить следующие:

1. Подробно изучена форма исследуемых оболочек методом плоских сечений, а также рассмотрены уравнения образующих в поверхностях гиперболического параболоида и однополостного гиперболоида вращения. Показаны основные свойства указанных оболочек, а также их образующих.

2. Построен вариант функционала Лагранжа теории пологих сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны в виде гиперболического параболоида с учетом геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига на основе континуальной расчетной модели.

3. Получены основные физические соотношения теории сетчатых оболочек с различной структурой сетки на основе континуальной расчетной модели.

4. Разработан алгоритм расчета пологих сетчатых оболочек в геометрически нелинейной постановке с использованием вариационно-разностного метода и метода продолжения решения по параметру.

5. Разработано программное обеспечение и выполнены расчеты гибких сетчатых пологих оболочек в форме гиперболического параболоида при различных граничных условиях. Предлагаемая методика и разработанное программное обеспечение позволяют эффективно, с малыми затратами машинного времени и с достаточной степенью точности оценить напряженно-деформированное состояние элементов сетчатой оболочки, устойчивость форм равновесия и определить предельные и бифуркационные критические нагрузки.

6. Изучено влияние угла наклона и формы образующей дискретной сетчатой оболочки в виде однополостного гиперболоида вращения на её НДС, жёсткость и устойчивость, а также влияние на данные характеристики граничных условий.

7. Изложены результаты численного анализа сетчатых оболочек в форме однополостного гиперболоида вращения, включая расчет на устойчивость и

модальный анализ, выполненного с помощью метода конечных элементов с учётом геометрической нелинейности.

8. Выполнены расчеты на устойчивость с определением верхних критических нагрузок гибких сетчатых оболочек в форме однополостного гиперboloида вращения из упругопластического материала.

9. Исследовано поведение сетчатых оболочек при выключении из работы отдельных стержневых элементов в составе конструкции. По заданным сценариям выполнен анализ структурной устойчивости рассчитываемых сетчатых гиперboloидов вращения.

Список литературы

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. - М.: Наука, 1978. – 288 с.
2. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. - М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
3. Алямовский А.А. Solidworks/CosmosWorks: инженерный анализ методом конечных элементов. - М.: ДМК, 2004. – 432 с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
5. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
6. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно–деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек // Прикладная механика, 1998, №4, с.3-22.
7. Амосов А.А. Приближенная трехмерная теория толстостенных пластин и оболочек // Строительная механика и расчёт сооружений, 1987, №5, с. 37-42
8. Андронов В.А. Применение метода дискретных конечных элементов к решению задач статики динамики сложных стержневых систем регулярной и квазирегулярной структуры: Дисс. канд. техн. наук. – Волгоград, 1986. – 240 с.
9. Андронов В.А., Гуров О.В. Решение задач устойчивости сетчатых оболочек вращения методом дискретных конечных элементов // Проблемы теории пластин, оболочек и стержневых систем: Межвузовский научный сборник СГТУ, 1998, с. 26-31.
10. Байтуреев К. Расчет гибких сетчатых оболочек вращения: Дисс. канд. физ.-мат. наук; копия отчета о НИР. – Москва, 1986. – 113 с.
11. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. – М.: Наука, 1986. – 302 с.

12. Басов К.А. Графический интерфейс комплекса Ansys. – М: ДМК, 2006. – 247 с.
13. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
14. Беликов Г.И. Расчет сетчатых оболочек вращения: Дисс. канд. техн. наук. – М., 1974. – 150 с.
15. Беликов Г.И. Статика, динамика и устойчивость сетчатых и подкрепленных оболочек с учетом поперечного сдвига. – Волгоград: ВолгГАСА, 2003. – 298 с.
16. Беликов Г. И. Оптимизация топологии гиперболоида вращения по условиям прочности и жесткости // Вестник Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Стр-во и архит., 2012, № 29 (48), с. 110-114.
17. Беликов Г. И. Осесимметричные задачи прочности, устойчивости и колебаний сетчатого гиперболоида вращения //Сборник трудов МИСИ, 1974, с. 110-114 .
18. Белоусов П.С. Несущая способность композитных сетчатых цилиндрических оболочек при неоднородном напряженном состоянии: Дисс. канд. техн. наук. – М., 1996. – 203 с.
19. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
20. Бернштейн С. А. Очерки по истории строительной механики – М.: Госстройиздат (Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре), 1957. – 237 с.
21. Бунаков В.А. Оптимальное проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек // Механика конструкций из композиционных материалов, 1992, №21. – с. 100-103.
22. Вайнберг Д.В., Синявский А.Л. Дискретный анализ в теории пластин и оболочек // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966, с. 209-214.

23. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.
24. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
25. Виноградова Т.П., Авдеев С.Н. Нижегородские открытия. Код Шухова. – Нижний Новгород: ООО «Издательство «Покровка 7», 2013. – 144 с.
26. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. – М.–Л.: Гос. изд. технико–теоретической литературы, 1949. – 784 с.
27. Волченко В.И. Расчет сетчатых пластин как конструктивно–анизотропных систем. – Дисс. канд. техн. наук. – М., 1979. – 191 с.
28. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гос. изд. технико–теоретической литературы, 1956. – 420 с.
29. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
30. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Физматгиз, 1967. – 984 с.
31. Ворович И.И., Зипалова В.Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // ПММ, 1965, т.29, №5, с. 894-901.
32. Габбасов Р.Ф. Об интегральной и дифференциальной формах численного метода последовательных аппроксимаций // Строительная механика и расчет сооружений, 1978, №3, с. 26-30.
33. Габбасов Р.Ф. Расчет плит с использованием разностных уравнений метода последовательных приближений // Строительная механика и расчет сооружений, 1980, №3, с. 27-30.
34. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: Изд-во КГУ, 1975. – 325 с.
35. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. - М.: Мир, 1984. – 428 с.

36. ГОСТ 10704–91 Трубы стальные электросварные прямошовные. Сортамент (с Изменениями N 1, 2). – М.: Стандартиформ, 2007.
37. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Гостехиздат, 1953. – 544 с.
38. Городецкий А.С., Барабаш М.С., Сидоров В.Н. Компьютерное моделирование в задачах строительной механики. – М.: Издательство АСВ, 2016. – 338 с.
39. Графе Р., Гаппоева М.М., Перчи О. Владимир Григорьевич Шухов (1853–1939). Искусство конструкции. – М.: Мир, 1994. – 192 с.
40. Грачев О.А., Игнатюк В.И. Об устойчивости трансверсально–изотропных ребристых оболочек вращения // Строительная механика и расчет сооружений, 1986, №3, с. 61-64.
41. Гребенюк Г.И., Роев В.И. Влияние деформации сдвига и продольных сил на динамические характеристики стержневых систем // Известия вузов: Строительство, 1998, №6, с.40-45.
42. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек – М.: Наука, 1978. – 360 с.
43. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
44. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
45. Григорьев А.С. Большие прогибы прямоугольных мембран // Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, №3, с. 105-113.
46. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.И. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями: В 5 т, Т.1, – Киев: Наукова думка, 1980. – 635 с.
47. Гуров О.В. Решение статических задач устойчивости сетчатых пластин и оболочек с использованием метода дискретных конечных элементов: Дисс. канд. техн. наук. – Череповец, 1997. – 178 с.

48. Доренбаум И.В. Расчёт полой оболочки, описанной по поверхности гиперболического параболоида // Строительное проектирование промышленных предприятий, 1965, №5, с. 31-39.
49. Дубков С.В. Равновесие упругопластических трансверсально–изотропных пластин и оболочек: Дисс. канд. техн. наук. – М., 1996. – 203 с.
50. Егорова Т.П., Поверенный Н.А., Егорова А.Ю. Расчет образующих однополостного гипербоида вращения // Сборник научных статей III Международной научно–практической конференции «Научные чтения имени профессора Н.Е. Жуковского» 18–19 декабря 2012 года, 2013, 266 с.
51. Енджиевский Л.Н. Нелинейные деформации ребристых оболочек. – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1982. – 295 с.
52. Ефреушин С.В., Флавианов В.М. Расчетная модель башенной градирни и ее комплексный анализ с помощью метода конечных элементов // Строительная механика и конструкции. Изд-во Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, 2010, 53 с.
53. Заруцкий В.А., Сюсаренко Ю.В. О влиянии деформаций поперечного сдвига на собственные колебания цилиндрических оболочек, усиленных концевыми ребрами // Прикладная механика, 1991, №2, с.54-61.
54. Заруцкий В.А., Сюсаренко Ю.В. О влиянии деформаций поперечного сдвига на устойчивость многослойных ортотропных ребристых цилиндрических оболочек // Прикладная механика, 1994, №4 (30), с.91-96.
55. Заруцкий В.А. Приближенные нелинейные уравнения движения цилиндрических оболочек из композитных материалов // Прикладная механика, 1998, №10, с.55-59.
56. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
57. Золотов А.Б., Сидоров В.Н. Алгоритмизация решения краевых задач строительной механики на ЭВМ // Строительная механика и расчет сооружений, 1975, №5, с.36-42.

58. Зылев В. Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций – М.: НИЦ Инженер, 1999. – 144 с.
59. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы. – М.: РУДН, 2010. – 542 с.
60. Иванов А.С., Смирнов В.А., Трушин С.И., Чентемиров Г.М., Черниченко В.А. Вариационно–разностный метод расчета и экспериментальные исследования оболочек и пластин, выполненных из композиционного материала с низкой сдвиговой жесткостью // Методы расчета и оптимизации строительных конструкций на ЭВМ. Труды ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко, 1990, с. 165-175.
61. Иванов А.С., Трушин С.И. Разработка и оценка вычислительных алгоритмов исследования устойчивости нелинейно деформируемых оболочек // Строительная механика и расчет сооружений, 1991, №5, с.53-58.
62. Иванов А.С., Трушин С.И. Расчет несущей способности нелинейно деформируемых пологих оболочек с учетом начальных несовершенств // Пространственные конструкции зданий и сооружений: Исследование, расчет, проектирование. Вып.7. – М.: Изд-во ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко, 1992, с.24-29.
63. Игнатьев В.А. Расчет стержневых пластинок и оболочек. Метод дискретных конечных элементов. – Саратов: Изд-во СГУ, 1988. – 156 с.
64. Игнатьев В.А., Соколов О.Л., Альтенбах И., Киссинг В. Расчет тонкостенных пространственных конструкций пластинчатой и пластинчато–стержневой структуры. – М.: Стройиздат, 1996. – 560 с.
65. Игнатьев В.А. Редукционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем. – Саратов: Изд-во СГУ, 1992. – 144 с.
66. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Учеб.: для вузов. – 5-е изд. – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 224 с.
67. Ильин В.П., Карпов В.В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. – Л.: Стройиздат, 1986. – 168 с.
68. Исаханов Г.В., Кепплер Х., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Исследование алгоритмов решения нелинейных задач теории упругости методом

конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1975, вып. XXVII, с.3-10.

69. Ишаков В.И. К расчёту пологих оболочек типа гиперболического параболоида // Строительная механика и расчёт сооружений, 1974, №1, с. 6-9.

70. Карпов В.В., Квасников Ю.Е. Влияние деформаций поперечного сдвига на устойчивость ребристых оболочек // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Межвузовский тематический сборник трудов, Санкт–Петербург, 1989, с.10-12.

71. Карпов В.В., Игнатьев О.В. Конструктивно–ортотропная схема ребристой оболочки, учитывающая сдвиговую и крутильную жесткость перекрестной системы ребер. – Волгоград: ВолгИСИ, 1992. – 7с.

72. Карпов В.В., Игнатьев О.В. Устойчивость пологих оболочек с изломами срединной поверхности и подкрепленных перекрестной системы ребер. – Волгоград: ВолгИСИ, 1992. – 8с.

73. Касумов А.К. К вопросу о расчете сетчатых конструкций // Труды института математики и механики. АН Азербайджана, 1998, №9, с. 236-240.

74. Касумов А.К. О модификации метода конечных элементов к расчету многослойных сетчатых оболочек // Труды 18 Международной конференции по теории оболочек и пластин, Саратов, 1997, с.88-91.

75. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. – М.: Высшая школа, 1963. – 278 с.

76. Коннор Дж. и Морин Р. Метод возмущений в расчете геометрически нелинейных оболочек // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ, Ленинград, 1974, т.2, с.186-202.

77. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – М.: Наука, 1964. – 192 с.

78. Корнишин М.С., Столяров Н.Н. Большие прогибы прямоугольной в плане полой цилиндрической панели с неподвижными краями // Исследования по теории пластин и оболочек, Казань, 1970, вып.6-7, с. 165-186.

79. Корсаков А.Б., Щуров А.С. Расчет ветровых нагрузок на внешнюю поверхность вытяжной башни градирни методами вычислительной аэродинамики // Автоматизация и ИТ в энергетике, Москва, 2015, № 8 (73), с. 10-12
80. Косицын С.Б., Чан С.Л. Анализ напряженно–деформированного состояния пересекающихся цилиндрических оболочек при упругопластических деформациях с учетом геометрической нелинейности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2013, № 1, с. 3-9.
81. Косицын С.Б., Чан С.Л. Численный анализ напряженно–деформированных состояний пересекающихся цилиндрических оболочек обделок тоннелей, взаимодействующих с окружающим массивом грунта, с учетом последовательности их возведения // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2015, т. 10, №2, с. 101-106.
82. Кривошапко С.Н. Стержневые, сетчатые структуры и цельнометаллические оболочки зданий второй половины XX века – начала XXI века // Архитектура и строительство России, 2014, № 12 (204), с. 10-17.
83. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности и оболочки: Справочник - М.: Издательство УДН, 1991. – 287 с.
84. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.
85. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Стержневые системы в форме однополостного гиперboloида вращения // Монтажные и специальные работы в строительстве, 2011, № 11, с. 19-23.
86. Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1976. – 216с.
87. Кузнецов В.В. Расчет пологих сетчатых оболочек прямоугольных в плане: – Дисс. канд. техн. наук. – М., 1976. – 164 с.
88. Лаптев А.Г., Ведьгаева И.А. Устройство и расчет промышленных градирен: Монография. – Казань: КГЭУ, 2004. – 180 с.
89. Лоза Л.В. Расчет сетчатых и подкрепленных оболочек вращения с учетом поперечного сдвига: – Дисс. канд. техн. наук. – Волгоград, 2001. – 150 с.

90. Лурье А.И. Общие уравнения оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. – Санкт-Петербург, 1948. – 28 с.

91. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955

92. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. Исследования устойчивости упругих пластин и оболочек при помощи конечно–элементного моделирования // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2011, № 1, с. 58-65.

93. Мануйлов Г.А., Бегичев М.М. О начальном послекритическом равновесии продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки и минимальном энергетическом барьере // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2017, №1, с. 58-69.

94. Матевосян Р.Р. Метод решения и анализа систем нелинейных уравнений // Труды ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко, 1974, вып.35, с.22-33.

95. Меланич В.М. Применение метода дискретных конечных элементов к расчету сложных шарнирно–стержневых систем типа структурных плит и оболочек: Дисс. канд. техн. наук. – Волгоград, 1986. – 182 с.

96. Милейковский И.Е., Сидоров В.Н., Трушин С.И., Булгакова М.В., Кислов В.В. Численные методы расчета оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности и деформаций поперечного сдвига // Теория и экспериментальные исследования пространственных конструкций. Применение оболочек в инженерных сооружениях. Труды Международного Конгресса ИАСС, М., 1985, т.1, с.580-594.

97. Милейковский И.Е., Трушин С.И. Расчет тонкостенных конструкций. – М.: Стройиздат, 1989. – 200 с.

98. Милейковский И.Е., Райзер В.Д. Некоторые практические методы расчёта складок и оболочек покрытий. – В кн.: Большепролётные оболочки, т. I, Стройиздат, М. 1969 г. с. 427-439.

99. Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

100. Муханов К.К., Медовиков А.И., Демидов Н.Н. К расчету структурных конструкций как континуальных систем с учетом поперечного сдвига // Строительная механика и расчет сооружений, 1976, №6, с.32-35.
101. Муштари Х.М., Терегулов И.Г. К теории оболочек средней толщины // ДАН СССР, 1959, т.128, №6.
102. Ништ М.И., Подобедов В.А., Мичкин А.И., Иродов Е.Ю. Перспективы применения решетчатых несущих поверхностей // Самолетостроение. Техника воздушного флота, Казань, 1990, вып. 57, с.17-23.
103. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. - Л.-М.: Гостехтеориздат, 1948. -212с.
104. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
105. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
106. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки – М.: Наука, Главная редакция физико–математической литературы, 1987. – 352 с.
107. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
108. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
109. Петренко Ф.И. Анализ устойчивости сетчатого гиперboloида при решении задачи в линейной и нелинейной постановках // Сборник материалов XIX Международной межвузовской научно–практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Строительство – формирование среды жизнедеятельности», Москва, МГСУ, 2016, с. 373-376.
110. Петренко Ф.И. Влияние геометрии структурного каркаса на НДС конструкции // Сборник тезисов III всероссийской научно–практической конференции «Устойчивость, безопасность и энергоресурсосбережение в

современных архитектурных, конструктивных, технологических решениях и инженерных системах зданий и сооружений», Москва, МГСУ, 2012, с. 224-228.

111. Петренко Ф.И. Влияние морфологии сетчатого гиперboloида на его напряженно–деформированное состояние и устойчивость // Труды Семнадцатой Международной межвузовская научно–практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Строительство – формирование среды жизнедеятельности», Москва, МГСУ, 2014, с. 292-296.

112. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. – 119 с.

113. Петропавловская И.А. Металлические конструкции академика В.Г. Шухова – М.: Наука, 1990. – 112 с.

114. Петухов Н.П. Гибкие пластины и пологие оболочки, области в плане которых составлены из прямоугольников // Исследования по теории оболочек, 1976, вып.7.

115. Пономарев В.В. Расчет сетчатых оболочек вращения как конструктивно анизотропных систем: Дисс. канд. техн. наук. – М., 1984. – 174 с.

116. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 342 с.

117. Пушкин Б.А. Расчет перекрестных систем на поперечный изгиб с учетом сдвига // Строительная механика и расчет сооружений, 1969, №3, с. 52-54.

118. Пшеничнов Г.И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. – М.: Наука. Главная редакция физико–математической литературы, 1982. – 352 с.

119. Раскин Н.М. Рукописные материалы И.П. Кулибина в архиве АН СССР. Научное описание с приложением чертежей. – М.-Л.: Издательство АН СССР, 1953. – 747 с.

120. Ржаницын А.Р. Новые уравнения теории оболочек // Международная конференция по облегченным пространственным конструкциям покрытий для строительства в обычных и сейсмических районах, Москва, 1977, с. 126-139.

121. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
122. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. – Л.: Энергия, 1971. – 214 с.
123. Рюле Г. Пространственные покрытия т. 1,2. – М.: Стройиздат, 1973.
124. Савинов В.И., Сидоров И.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния многослойных композитных стержневых конструкций // Актуал. пробл. мех. оболочек. Тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина, Казань, 2000, с. 66-67.
125. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
126. Сидоров В.Н., Вершинин В.В. Метод конечных элементов в расчете сооружений. Теория, алгоритм, примеры расчетов в программном комплексе SIMULA Abaqus. – М.: Издательство АСВ, 2015. – 288 с.
127. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Изд-во ФСИ, 2005. – 736 с.
128. СП 20.13330.2011. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07–85*. – М.: ОАО «ЦПП», 2011.
129. Стренг Г., Фикс Д. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
130. Стриклин, Хейслер, Риземан. Оценка методов решения задач строительной механики, нелинейность которых связана со свойствами материала и (или) геометрией // Ракетная техника и космонавтика, 1973, т.11, №3, с.46-56.
131. Сытник И.Ф. Динамика пластин и оболочек под действием ударных нагрузок с учетом поперечных сдвигов и инерции вращения: Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Саратов, 1994. – 155 с.
132. Тарасов А.А. Расчет ребристых оболочек вращения: Дисс. канд. техн. наук. – М., 1985. – 233 с.

133. Тимашев С.А. Устойчивость подкреплённых оболочек – М.: Стройиздат, 1974. – 256 с.
134. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М: Физматгиз, 1959. – 439 с.
135. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластины и оболочки. Пер. с англ.; под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1963. – 635 с.
136. Трушин С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи – М.: Изд-во АСВ, 2008 – 256 с.
137. Трушин С.И. Строительная механика. Метод конечных элементов: учебное пособие. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 305 с.
138. Трушин С.И., Кислов В.В. Устойчивость пологих оболочек из упругопластического материала с учетом геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Тезисы докладов II Всесоюзного симпозиума, Калинин, 1986, с. 80-81.
139. Трушин С.И., Петренко Ф.И. Анализ устойчивости гибких сетчатых оболочек в форме гиперboloида вращения // Научное обозрение, № 6, 2016, с. 95-99.
140. Трушин С.И., Петренко Ф.И. Влияние морфологии сетчатого гиперboloида на его напряженно–деформированное состояние, устойчивость и собственные частоты колебаний // Строительная механика и расчет сооружений, №4, 2014, с. 59-64.
141. Трушин С.И., Петренко Ф.И. Применение оболочек отрицательной гауссовой кривизны в гражданском строительстве на примере «Спортивного комплекса игровых видов спорта в г. Рязани» // Сборник трудов научно–практической конференции «Повышение эффективности строительного производства на основе новых материалов и инновационных технологий», Рязань, 2013, с. 81-91.
142. Трушин С.И., Сысоева Е.В., Петренко Ф.И. Расчет конструкций в форме пологих сетчатых гипаров с учетом геометрической нелинейности //

Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, № 3, 2016, с. 74-80.

143. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Изд. 2-е, доп. и перераб. – Л.: Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1975. – 256 с.

144. Франц Г. Исследования на малогабаритных моделях оболочек положительной и отрицательной кривизны. В кн.: Большепролётные оболочки, т. I. – М.: Стройиздат, 1969. – 685-695 с.

145. Хан-Магомедов С.О. Архитектура советского авангарда, Кн. 1. Проблемы формообразования. Мастера и течения. – М.: Стройиздат, 1996. – 715 с.

146. Хечумов Р.А., Кепплер Х, Прокопьев В.И. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 1994. – 353 с.

147. Шапошников Н.Н., Дарков А.В. Строительная механика: Учебник. 12-е изд., стер. – СПб: Издательство «Лань», 2010. – 656 с.

148. Шимкович Д.Г. «Расчет конструкций в MSC/Nastran for Windows» – М.: ДМК Пресс, 2004. – 704 с.

149. Шмит, Богнер, Фокс. Расчет конструкций при конечных прогибах с использованием конечных элементов пластин и оболочек // Ракетная техника и космонавтика, 1968, т.6, №5, с.17-29.

150. Шнобрих В.С., Мелин Дж., Мороз Б. Численный метод расчёта конструкций оболочек разделением на систему дискретных элементов. В кн.: Большепролётные оболочки, т. I. – М.: Стройиздат, 1969. – 509-522 с.

151. Энгель Х. Несущие системы; пер. с нем. Андреевой Л.А. – М.: АСТ, 2007. – 344 с.

152. Argyris J.H., Kelsey G. Energy theorem and structural analysis. – London: Butterworth, 1960.

153. Batoz J.L. and Dhatt G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems // Int. J. Num. Meth. Eng., 1979, v.14, pp. 1262-1266.

154. Candela F. F. Candela: arquitecto (exh. cat.). – Madrid, 1994.

155. Charleson Andrew W. Structure as architecture. A source book for architects and structural engineers. – Amsterdam: Elsevier, 2005.
156. Chen-Hong-Ji, Tsai Stephen W. Analysis and optimum desing of composite grid structures // J. Compos. Mater, 1996, №4 (30), pp. 503-534.
157. Clough R.W. The finite element method in plane stress analysis // Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburg, 1960, pp. 345-378.
158. Courant R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Variations // Bull. Amer. Math. Soc., 1943, vol.49, No1, pp.1-23.
159. Crisfield M.A. A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap–Through” // Computers & Structures, 1981, Vol.13, N1, pp.55-62.
160. Crisfield M.A. An Arc–Length Method Including Line Searches and Accelerations // Int. J. Num. Meth. Engng., 1983, vol.19, pp.1269-1289.
161. Der T.J. The buckling behavior of the hyperboloidal cooling towers under sateral loading // IASS symposium, Madrid, 1970.
162. Der T.J., Fidler R.A. A modal stady of the buckling behavior of giperbolic shells // Prac. inst. Civ engrs, vol. 48, 1968.
163. Faber C. Candela: the shell builder. – N. Y.: Reinhold Pub. Corp, 1963. – 240 p.
164. Foster N., Fernández–Galiano L. Norman Foster in the 21st Century. AV Monografias 163–164. – S.L: Artes Gráficas Palermo, 2013.
165. Hans A.M. Design of thin concrete shells negative curvature index, vol. 2. – New York: John Wiley & Sons, Ins., 1967.
166. Hrennikoff A. Solution of problems in elasticity by the framework method // J. Appl. Mech., 1941, 6, pp. 169-175.
167. Gallager R.H. Finite element representations for thin shell instability analysis // Buckling Struct. - Berlin e.a., 1976, pp.40-51.
168. Gallager R.H., Gellatly R.A., Pedlog J., Mallet R.H. A discrete element procedure for thin shell instability analysis // AIAA Journal, 1967, 1.
169. Grimshaw N. Grimshaw Architecture: The First 30 Years. – London: Prestel, 2010. – 160 p.

170. Loy C.T., Lam K.Y., Hua Li. Vibration of antisymmetric angle-ply laminated cylindrical panels with different boundary conditions // *Quart. J. Mech. And Appl. Math.*, 1999, №1 (52), pp.55-71
171. Macdonald Angus J. *Structural Design for Architecture*. – Woburn: Architectural Press, 1997.
172. McHenry D.A. A lattice analogy for the solutions of plane stress problems // *J. Inst. Civ. Eng.*, 1943, 21, pp. 59-82.
173. Meek J.L., Loganathan S. Geometrically non-linear behaviour of space frame structures // *Computers & Structures*, Vol.31, 1989, pp. 35-45.
174. Parme A. Elementary analysis of hyperbolic paraboloid shells // *IASS – Bulletin*, 1960, №4.
175. Krivoshapko S.N. Static, vibration and buckling analysis and applications to one-sheet hyperboloidal shells of revolution // *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 55, №3, 2002, pp. 241-270.
176. Ralston A. On the problem of buckling of a hyperbolic paraboloidal shell by its own weight // *Journal of mathematics and physics*, Vol. XXXV, №1, 1956, pp. 53-59.
177. Ricks E. The Application of Newton's Method to the Problems of Elastic Stability // *J. Appl. Mech.*, 1972, 39, pp.1060-1066.
178. Sidorov V.N., Trushin S.I. An efficient method for algorithmization of boundary problem solution and its application in elastoplastic analysis // *Innovative Num. Anal. Eng. Sci. Proc. 2nd Int. Symp.*, Montreal, 1980, pp. 625-631.
179. Smith C. B. *Builders in the sun; five Mexican architects*. – N. Y., 1967.
180. Starzewski J. A. F. *Candela: the structure and form of reinforced concrete shells*. – Ann Arbor, 2002.
181. Turner M.J. Design of minimum mass structures with specified natural frequencies // *AIAA Journal*, 1967, 13.
182. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures // *J. Aero. Sci.*, 23, 1956, pp. 805-823.

183. Turner M.J., Dill E.H., Martin H.C. and Melosh R.J. Large Deflections of Structural Subjected to Heating and External Loads // Journal of the Aerospace Sciences, vol.27, No.2, 1960, pp. 97-106.

184. Wempner G.A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids // Int. J. Solids Structures, 1971, Vol.7, pp.1581-1599.

185. Zum Werk von F. Candela: die Kunst der leichten Schalen. – Köln, 1992.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015663623

Программа решения нелинейных задач теории пологих
гипаров вариационно-разностным методом

Правообладатель: *Петренко Филипп Игоревич (RU)*

Авторы: *Трушин Сергей Иванович (RU),
Петренко Филипп Игоревич (RU)*

Заявка № **2015660251**

Дата поступления **23 октября 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **25 декабря 2015 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев

