

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

*На правах рукописи*



ЗЕБИЛИЛА МОХАММЕД ДИИН-ХАЛИС

**РАСЧЕТ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ  
ВИБРОИЗОЛЯЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ  
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**Специальность 05.23.17 – «Строительная механика»**

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
**Чернов Юрий Тихонович**

Москва 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ.....	10
1.1. Расчет систем виброизоляции в переходных режимах. Методы расчета нелинейных систем .....	10
1.2 Метод "нормальных форм". Алгоритм расчета нелинейных систем .....	13
1.3 Передаточные (ПФ) и импульсные переходные функции (ИПФ) .....	16
1.4 Виброзащитные системы.....	21
1.4.1 Системы переменной жесткости .....	21
1.4.2 Демпферы вязкого трения .....	26
ГЛАВА 2. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ В ЭКСПЛУАТАЦИОННОМ И ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ.....	30
2.1 Вертикальные колебания виброзащитных систем .....	30
2.1.1 Периодические (гармонические) воздействия .....	30
2.1.2 Импульсная нагрузка .....	34
2.2 Плоские колебания массивных виброизолированных тел при произвольном смещении основания.....	36
2.3 Горизонтальные колебания линейных систем с 3-мя степенями свободы при кинематическом возбуждении. ....	41
ГЛАВА 3. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ В ЭКСПЛУАТАЦИОННОМ И ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ .....	46
3.1 Система с дополнительной связью. Вертикальные колебания .....	46
3.1.1 Периодические (гармонической) нагрузки .....	47
3.1.2 Импульсная нагрузка .....	50
3.2 Система с демпфером вязкого трения.....	52
3.2.1 Периодические (гармонической) нагрузки .....	52
3.2.2 Импульсная нагрузка .....	57

3.3 Горизонтальные колебания нелинейных систем с 3-мя степенями свободы при кинематическом возбуждении .....	58
ГЛАВА 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА И АНАЛИЗ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	61
4.1 Примеры расчета системы с дополнительным блоком и связью.....	61
4.1.1. Расчет грохота .....	61
4.1.2 Расчет фундаментов машин ударного действия .....	71
4.2 Плоские колебания массивных виброизолированных тел при произвольном смещении основания. Пример расчета .....	75
4.3 Расчет систем виброизоляции с демпферами вязкого трения. Пример расчета .	78
ГЛАВА 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	82
5.1 Приближенные методы расчета нелинейных систем с КЧСС. ....	82
5.2 Метод расчета систем с нелинейными элементами, основанный на специальном выборе порождающих систем .....	84
5.2.1 Расчетная схема 1 .....	86
5.2.2 Расчетная схема 2 .....	90
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	94
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	97
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	98
ПРИЛОЖЕНИЯ 1 .....	108

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы.**

Вибрации элементов конструкций зданий и сооружений, возбуждаемые виброактивным оборудованием, могут достигать значительных уровней и приводить к серьезным последствиям: появлению и развитию трещин; дополнительным осадкам; нарушению технологических процессов; дискомфорту и превышению уровней, допускаемых Санитарными нормами. Одним из наиболее распространенных методов снижения уровней колебаний является виброизоляция - активная (снижает нагрузку на основание) и пассивная (снижает уровень колебаний виброчувствительного оборудования).

Наиболее эффективна виброизоляция машин с периодическими нагрузками (насосов, вентиляторов, компрессоров и т.п.).

При определенных соотношениях частот собственных колебаний виброизолированного оборудования с ударными нагрузками (штампов, молотов и т.п.) и опорных конструкций, нагрузка, передающаяся на опорные конструкции, также может значительно снижаться. При оценке эффективности систем виброизоляции машин с периодическими нагрузками обязательным является расчет в переходных режимах (пуска и остановки) при прохождении через резонанс.

При больших перемещениях в этих зонах нарушается контакт с вспомогательным оборудованием, трубопроводами и т. п. Сами виброизоляторы могут разрушаться в результате малоциклового усталости.

Снизить уровни колебаний в этих режимах возможно, вводя дополнительные элементы - связи, диссипативные системы, дополнительные массы.

Характеристики виброзащитных систем становятся нелинейными, а их расчет сводится к расчету нелинейных систем с конечным числом степеней свободы (далее КЧСС).

"Основной метод расчета нелинейных систем, используемый в работе, основан

на применении передаточных (далее ПФ) и импульсных переходных (далее ИПФ) функций" [34].

"Уравнения движения сводятся к системам нелинейных интегральных уравнений, которые решаются шаговым методом по времени с итерациями на каждом шаге" [34]. Как и в линейных задачах, решения записываются сразу относительно обобщенных координат.

Общая теория расчета линейных систем методами, основанными на ПФ и ИПФ и их связи, дана проф. Солодовниковым В.В. [28]. "Применительно к расчету систем с КЧСС и, в частности, систем виброзащиты, метод развит проф. Черновым Ю.Т. [34]. При построении решений в отличие от традиционного метода "нормальных форм" отпадает необходимость в построении собственных форм, записи и решении уравнений в главных координатах и обратном переходе к обобщенным координатам"[18,40] .

**Целью диссертационной работы** является: разработка методов расчета и исследование систем виброизоляции с линейными и нелинейными характеристиками.

**Задачи диссертационной работы:** в соответствии с поставленной целью были сформулированы и решены следующие задачи:

1. запись линейных и нелинейных уравнений движения, вывод необходимых расчетных зависимостей ряда систем виброизоляции как линейных и нелинейных систем с одной и двумя степенями свободы (далее ОСС и ДСС);
2. разработка методов, алгоритмов и программ расчета ряда систем виброизоляции как линейных и нелинейных систем с ОСС и ДСС в эксплуатационных и переходных режимах:
  - линейной системы при произвольных воздействиях;
  - массивного виброизолированного объекта при произвольном смещении основания;

- нелинейной системы с дополнительной опорной связью при гармонических и ударных воздействиях;
- нелинейной системы с демпфером вязкого трения при гармонических и ударных воздействиях;
- построение "амплитудно-частотных характеристик" (далее АЧХ) систем с нелинейным гасителем;

3. анализ эффективности виброзащитных систем на примерах расчета: грохота как системы с ОСС и ДСС при действии гармонической нагрузки; молота - при ударном воздействии;

4. разработка алгоритмов расчета линейных и нелинейных виброзащитных систем как систем с тремя степенями свободы.

**Методы исследования:** при исследовании был выполнен анализ нормативной и научно-технической литературы по теме: виды, конструктивные решения, расчет и анализ систем виброзащиты. В качестве основного был выбран метод, основанный на использовании ПФ и ИПФ линейных систем (нетрадиционный "метод нормальных форм"). При расчете использовались системы компьютерной математики - Matlab.

**Научная новизна:**

- разработан метод расчета, выведены расчетные зависимости и составлены алгоритмы расчета виброзащитных систем с нелинейными характеристиками (с дополнительной опорной связью, демпфером вязкого трения) с использованием ПФ и ИПФ как систем с ОСС и ДСС;
- разработан метод расчета горизонтально-вращательных колебаний массивных тел при произвольных кинематических воздействиях (плоская задача);
- построены АЧХ системы с динамическим гасителем колебаний как систем с 3-мя степенями свободы методом, основанным на специальном выборе порождающих уравнений.

**Достоверность работы** - в работе использовались строгие математические методы. Проводилось сравнение с эталонными примерами.

**Практическая значимость работы** - с помощью формул и алгоритмов расчета, разработанных в работе, можно оценить и получить оптимальные параметры систем виброзащиты на практике.

**Личный вклад автора состоит:**

- 1) в детализации методов расчета, выводе расчетных зависимостей и составлении алгоритмов расчета виброзащитных систем с нелинейными характеристиками с использованием ПФ и ИПФ как систем с ОСС и ДСС;
- 2) в сравнении и анализе перемещений различных типов виброзащитных систем, в частности, при оценке влияния интервалов времени пуска и остановки и зон включения дополнительных элементов на величины перемещений в переходных режимах;
- 3) в составлении алгоритмов и программ расчета систем с демпфером вязкого трения;
- 4) в разработке метода расчета горизонтально-вращательных колебаний массивных тел при произвольных кинематических воздействиях (плоская задача);
- 5) в построении АЧХ системы с динамическим гасителем колебаний как системы с 3-мя степенями свободы методом, основанным на специальном выборе порождающих уравнений;
- 6) в разработке алгоритмов расчета линейных и нелинейных виброзащитных систем как систем с тремя степенями свободы.

**Апробация работы:** отдельные результаты работы докладывались на конференциях:

1. «XIX Международной межвузовской научно-практической конференции студентов, магистров, аспирантов и молодых ученых» (27-29 Апреля 2016 г.,

- Москва);
2. «XX Международной межвузовской научно-практической конференции студентов, магистров, аспирантов и молодых ученых» (26-28 Апреля 2017 г., Москва);
  3. «XXI Международной межвузовской научно-практической конференции студентов, магистров, аспирантов и молодых ученых» (25-27 Апреля 2018 г., Москва).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 8 работ, в том числе 4 в научных журналах, входящих в список ВАК для публикации результатов по кандидатским диссертациям, и 2 статьи проиндексированы в международной базе Scopus.

**На защиту выносятся:**

- разработанные методы, алгоритмы и программы расчета виброзащитных систем, в том числе, с нелинейными характеристиками: с дополнительной связью, с демпфером вязкого трения;
- вычисление и анализ перемещений в пуско-остановочных режимах в линейных и нелинейных системах, в том числе, в зависимости от интервалов времени пуска и остановки;
- оценка влияния размеров зазора (зоны включения дополнительных элементов) на амплитуды колебаний в пуско-остановочных режимах в нелинейных виброзащитных системах;
- результаты анализа эффективности некоторых систем виброзащиты с ограничителем колебаний и демпфером вязкого трения;
- метод, алгоритм, программа расчета плоских колебания виброизолированного массивного тела при произвольном смещении основания;



- результаты расчета нелинейной системы с 3-мя степенями свободы, включая построение АЧХ, методом, основанным на специальном выборе порождающих уравнений.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 83 наименований и 1 приложения. Общий объем диссертации составляет 117 страницы, в текст включены 32 рисунка и 6 таблиц.

## ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ

### 1.1 Расчет систем виброизоляции в переходных режимах. Методы расчета нелинейных систем

Виброизоляция является одним из наиболее эффективных способов снижения уровней колебаний опорных конструкций при установке виброактивного оборудования (активная виброизоляция) или уровней колебаний виброчувствительных объектов по отношению к уровням колебаний оснований (пассивная виброизоляция).

Выбор конструкций, параметров и методов расчета систем виброизоляции в эксплуатационных режимах широко рассмотрен в литературе, нормативных и инструктивных материалах [11, 25, 26, 81-83].

Меньше работ, в которых дается расчет и оценка уровней колебаний в системах виброизоляции в переходных режимах (пуска и остановки). При высоких уровнях колебаний, которые появляются в этих режимах, могут нарушаться связи с дополнительным оборудованием, в т.ч. трубопроводами, и разрушаться виброизоляторы (особенно металлические), вследствие малоциклового усталости. Метод расчета одномассовой системы виброизоляции при переходе через резонанс дан, в частности, в инструкции [9].

Методы расчета и анализ характера колебаний в переходных режимах, в том числе, в зависимости от интервалов времени пуска и остановки, даны в работах И. С. Шейнина [48], А. П. Филиппова [31], Ю. Т. Чернова [34], М. В. Осиповой [19]. В [9] рассмотрен широкий класс задач расчета систем с ОСС и ДСС при различных законах изменения частот вынужденных колебаний в переходных режимах.

Используя "метод вариации произвольных постоянных при решении линейных дифференциальных уравнений", А.В. Дукарт дал методы расчета широкого класса систем виброизоляции и, "в частности, получил формулы для расчета систем виброизоляции с малым количеством степеней свободы при произвольных

периодических нагрузках" [8]; "формулы для перемещений линейных динамических систем с 3-мя степенями свободы (с динамическим или ударным гасителем)" [8]. "При действии произвольной периодической внешней нагрузки решения получены, в частности, в замкнутом виде" в [34].

Достаточно эффективным, применительно к расчету линейных и нелинейных систем с КЧСС, является метод, в основе которого лежат ПФ и ИПФ линейных систем. "Общая теория и основные зависимости методов даны в монографии В.В. Солодовникова [28] и, применительно к расчету систем виброзащиты, развиты Ю.Т. Черновым" [34].

Используя предложенные подходы, в [19,34] был рассмотрен широкий класс задач расчета линейных систем виброизоляции, как систем с КЧСС (2-мя или 3-мя) в эксплуатационных и переходных режимах. Для эксплуатационных режимов расчетные формулы получены в замкнутом виде в "виде разложения по собственным формам линейных систем сразу относительно обобщенных координат" [34]. "По сравнению с традиционным методом "нормальных форм" отпадают несколько этапов расчета: построение и нормирование собственных форм, переход к уравнениям в главных координатах, их решение и обратный переход к обобщенным координатам" [34]. С помощью этого метода (т.н. «нетрадиционного метода нормальных форм») в работах [19] получены расчетные формулы и достаточно простые алгоритмы расчета линейных систем на произвольные воздействия. "ПФ широко используются зарубежными учеными при расчете линейных систем на гармонические нагрузки" [55, 58,73, 78] .

Наиболее распространенные варианты снижения уровней колебаний в переходных режимах - введение дополнительных элементов, которые включаются в работу при больших перемещениях в резонансных зонах в переходных режимах.

Характеристики "виброзащитных систем" становятся нелинейными, а расчет сводится к расчету нелинейных систем с КЧСС.

Нелинейные характеристики "виброзащитных систем" также могут быть связаны со свойствами материала виброизоляторов (например, резины).

Основополагающие методы расчета при исследовании нелинейных систем принадлежат перу крупнейших русских ученых: Н.М. Крылову, Н.Н. Боголюбову, Ю.А. Митропольскому [2, 15] и др.

По существу, эти методы также широко используются при расчете виброзащитных систем. В частности, в работе [2] Ю.А. Митропольский провел исследование нелинейной системы при медленном переходе через резонанс.

"Результаты фундаментальных исследований в этой области получены М.З. Коловским [13], а также совместно с И.И. Вульфсоном"[6].

Целый ряд нелинейных систем был рассмотрен В. А. Ивовичем [9, 10] и др.

"Во многих работах исследуются уравнения движения, содержащие малый параметр. При их решении используются различные схемы линеаризации или асимптотические методы. Для различных режимов колебаний, в частности, в резонансных зонах, вводятся допущения, которые позволяют получать обозримые решения. Во всех случаях эти решения являются приближенными. Для оценки характера колебаний систем, не содержащих малый параметр, применяется метод фазовой плоскости" [40].

"Наиболее распространенными приближенными методами исследования нелинейных систем являются методы: гармонической линеаризации, гармонического баланса, малого параметра"[40].

Полученные, в том числе, приближенными методами АЧХ позволяют оценивать величины амплитудных колебаний при изменении режимов колебаний: частот возмущений или частот собственных колебаний виброизолированных объектов или систем с гасителями.

Общая схема применения этих методов показана в работе на примере расчета нелинейной системы с ОСС методом гармонического баланса.

Решения нелинейных систем в реальном времени были в [34,37] записаны, используя традиционный метод "нормальных форм". Для систем с КЧСС (2-мя - 4-мя) существенно более компактным является нетрадиционный "метод нормальных форм", который и является основным в представленной работе.

## 1.2 Метод "нормальных форм". Алгоритм расчета нелинейных систем

Этот метод хорошо изучен, детально изложен в литературе [34,37] и широко применяется при исследовании линейных динамических систем. В ряде работ [34, 37] этот метод был успешно применен и к расчету нелинейных систем с КЧСС.

Этот метод особенно эффективен при расчете "систем с большим числом степеней свободы". "Один из основных этапов расчета по методу "нормальных форм" - определение собственных форм системы и их нормирование" [34].

"Суть метода заключается в том, что перемещения масс системы в любой момент времени представляются в виде разложения по собственным векторам (главным координатам)"[34]:

$$\bar{y} = \Phi \bar{a}; \quad (1.1)$$

"где  $\Phi$  — матрица нормированных собственных форм;  $\bar{a}$  — вектор главных координат"[34].

"При использовании метода "нормальных форм" связанные уравнения движения системы вида" [34, 37]

$$M\ddot{\bar{y}} + D\dot{\bar{y}} + K\bar{y} = \bar{q}(t); \quad (1.2)$$

где  $M$ ,  $D$  и  $K$  — соответственно матрицы масс, диссипации и жесткости системы.

$\bar{y}$ ,  $\bar{q}(t)$  — векторы перемещений системы и внешней нагрузки, приложенной к массам;

"преобразуются в несвязанные относительно главных координат уравнения движения, аналогичные уравнениям движения системы с ОСС"[37]:

$$\ddot{a}_r + d_r \dot{a}_r + p_r^2 a_r = b_r(t), \quad (r = 1, 2 \dots n), \quad (1.3)$$

"где  $a_r$  - главные координаты,

$r$  - номер собственной формы" [34];

$d_r, p_r$  - диссипативные коэффициенты и частоты собственных колебаний;

" $b_r(t) = \Phi' \bar{q}(t)$  – представление внешней нагрузки в виде разложения по собственным формам ( $\Phi'$  - транспонированная матрица нормированных собственных форм)" [3].

По "гипотезе частотно-независимого трения" следует принять [34]:

$$d_r = p_r \gamma_r, \quad (1.4)$$

где  $\gamma_r$  – коэффициенты неупругого сопротивления системы, все значения которых, как правило, принимают равными.

Решение уравнения (1.3) обычно определяют с помощью "интеграла Дюамеля":

$$a_r(t) = \frac{1}{p_r} \int_0^t b_r(\tau) e^{-n_r(t-\tau)} \sin p_r^*(t-\tau) d\tau, \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (1.5)$$

$$\text{где } n_r = \frac{d_r}{2} = \frac{p_r \gamma_r}{2}; \quad (1.6)$$

$$p_r^* = \sqrt{p_r^2 - n_r^2} = p_r \sqrt{1 - \frac{\gamma_r^2}{4}} - \text{частоты собственных колебаний с учетом затухания.}$$

Перемещения в исходной системе в обобщенных координатах определяются по формуле (1.1).

При учете затухания используется подход, при котором диссипативные коэффициенты  $d_r = p_r \gamma_r$ , которые вводятся в уравнения колебаний в "главных координатах", определяются как диагональные члены матрицы  $\Phi'D\Phi$ ;

например, для системы с ДСС можно записать в виде:

$$D = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \gamma_1 k_1 & -\gamma_1 k_1 \\ -\gamma_1 k_1 & \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

при котором элементы матрицы  $D$  пропорциональны жесткостям системы.

Метод "нормальных форм" в традиционной форме для ряда задач использован для создания эффективных и устойчивых алгоритмов расчета нелинейных систем [20-22, 34, 44].

"В этих случаях уравнения движения систем с нелинейной жесткостной характеристикой сводятся к интегральным уравнениям второго рода, которые решаются шаговым методом по времени с итерациями на каждом шаге" [22, 34].  
Общий подход можно показать на примере системы с ОСС [34, 46]:

$$m\ddot{y} + R_d(y) = q(t), \quad (1.8)$$

"где

$$R_d(y) = \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) R(y) \quad (1.9)$$

- полная реакция системы с учетом диссипативных сил;

$R(y)$  - упругая реакция системы;  $\nu_1$  - диссипативный коэффициент;

$q(t)$  - внешняя нагрузка" [34].

Выделив в левой части некоторый линейный оператор, после преобразований уравнение (1.8) можно записать в виде [34]:

$$\ddot{y} + 2n_1\dot{y} + p_1^2 y = \frac{q(t)}{m} + \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) f(y), \quad (1.10)$$

$$\text{где } f(y) = \frac{1}{m} [k_1 y - R(y)], \quad (1.11)$$

$f(y)$  - "фиктивная нагрузка";

$k_1$  - начальная жесткость системы;

"  $p_1^2 = \frac{k_1}{m}$  - частота свободных колебаний линейной (порождающей) системы;

$2n_1 = \frac{\gamma}{\omega} p_1^2$  и  $2n_1 = \gamma p_1$  - диссипативные коэффициенты соответственно при

вынужденных и свободных колебаниях, принятые по модифицированной гипотезе Фойгта;

$\gamma$  - коэффициент внутреннего трения материала;

$\omega$  - частота внешней нагрузки" [22].

Записав решение уравнения (1.10) в виде "интегралов Дюамеля" [30,34], нелинейные уравнения движения можно привести к системе интегральных уравнений 2-го рода:

$$y(t) = y_{lin}(t) + y_{nonlin}(t) \quad (1.12)$$

где

$$y_{lin}(t) = \frac{1}{m_0} \int_0^t q(\tau) V_1(p_1^*, t-\tau) d\tau + e^{-\frac{\gamma_1}{2} p_1 t} \left( y_{lin0} \cos p_1^* t + \frac{\dot{y}_{lin0} + y_{lin0} N_1}{p_1} \sin p_1^* t \right) \quad (1.13)$$

- перемещение в исходной линейной системе от внешней нагрузки  $q(t)$ ,

$y_{lin0}, \dot{y}_{lin0}$  – начальное смещение и скорость;

$$y_{nonlin}(t) = \int_0^t \left( 1 + 2v_1 \frac{d}{dt} \right) f[y(\tau)] V_1(p_1^*, t-\tau) d\tau \quad (1.14)$$

- "перемещение в исходной линейной системе от «фиктивной» нагрузки, зависящей от нелинейной реакции системы"[34];

$$V_1(p_1^*, t) = \frac{1}{p_1^*} e^{-\frac{\gamma_1}{2} p_1 t} \sin p_1^* t \quad (1.15)$$

- ИПФ линейной (порождающей) системы;

$$p_1^* = p_1 \left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{4} \right)^{1/2} \quad (1.16)$$

- частота свободных колебаний с учетом диссипации.

### 1.3 Передаточные (ПФ) и импульсные переходные функции (ИПФ)

Метод, основанный на связи ПФ и ИПФ линейных динамических систем, был разработан в работах Солодовникова В.В. [28].

"ПФ - реакция системы (в общем случае - обобщенное перемещение) при действии обобщенной силы, представленной единичным гармоническим воздействием:  $\bar{H}_{ij}(\omega)$  - ПФ, равная  $i$ -ому комплексному обобщенному перемещению при действии  $j$ -ой единичной обобщенной силы  $1 \cdot e^{i\omega t}$ . Действительные части выражения  $\bar{H}_{ij}(\omega) e^{i\omega t}$  определяют  $i$ -ые обобщенные перемещения при действии  $j$ -ой единичной обобщенной силы  $1 \cdot \cos \omega t$ , а мнимые - для  $1 \cdot \sin \omega t$ " [34].



ИПФ - реакция системы на действие единичного импульса:  $k_{uij}(t)$  - ИПФ, представляющая собой  $i$ -ое обобщенное перемещение при действии  $j$ -ого единичного импульса.

"Формулы ПФ и ИПФ для различных частных случаев систем с КЧСС (поступательные колебания системы с ДСС, плоские гармонические горизонтально-вращательные колебания массивных виброизолированных тел как систем с ДСС), а также подход к учету диссипативных сил были даны в работах Чернова Ю.Т. и Осиповой М. В.", в частности, в [34-36, 42].

Методы расчета систем с КЧСС на гармоническую и импульсную нагрузки достаточно подробно представлены в [28, 34].

"При использовании этого метода решения также (как и в методе «нормальных форм») строятся в виде разложения по формам собственных колебаний, но, что существенно, сразу относительно обобщенных координат. Как отмечалось выше, в этом случае нет необходимости в построении самих собственных форм и их нормировании"[34].

"Основополагающая идея методов, основанных на применении ИПФ, связана с тем, что любую нагрузку, действующую на линейную систему, можно приближенно представить как последовательность импульсов конечной величины" [34]. Тогда в соответствии со свойством суперпозиции линейных систем реакция (перемещение) системы в любой момент времени равна сумме реакций системы от каждого отдельного импульса, действовавшего на систему до данного момента времени:

$$y_i(n_1\Delta t) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{n_1} q_j(s\Delta t) k_{uij}[(n_1 - s)\Delta t] \Delta t, \quad (1.17)$$

где  $i = 1 \dots n$  - номер обобщенного перемещения;

$j = 1 \dots n$  - номер обобщенного перемещения по направлению действующей обобщенной силы;

$s = 1 \dots n_1$  - счетчик по времени;

$\Delta t$  - шаг по времени;

$q_j(t)$  - обобщенная сила, действующая по направлению  $j$ -ого обобщенного перемещения.

"Интеграл Дюамеля" получают из (1.17), используя предельный переход  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t q_j(\tau) k_{ij}(t-\tau) d\tau, i=1\dots n \quad (1.18)$$

где  $k_{ij}(t)$  - ИПФ.

Отдельные решения для различных типов динамической нагрузки приведены, в частности, в справочнике [3].

Схожий подход был предложен Холмянским М.Л. [32] для расчета стенчатых и массивных фундаментов машин как систем с шестью степенями свободы на произвольные нагрузки.

При решении уравнений движения предлагается воспользоваться численным методом.

Зарубежные ученые активно используют ПФ при расчете линейных динамических систем на гармонические нагрузки [55, 58, 73, 78].

"Расчет нелинейных систем с различными типами конструктивной и физической нелинейности на произвольную нагрузку дан, например", в [44, 45].

Методы, основанные на построении ПФ и ИПФ, эффективны также при расчете отдельных конструктивных элементов ("балочных плит перекрытий, свайных фундаментов, тонких плит на грунте совместно с виброактивным оборудованием" [34]).

Формулы для ПФ линейных динамических систем можно записать непосредственно из решения уравнений движения при нагрузке  $1 \cdot e^{i\omega t} \cdot V(\xi)$ , где  $V(\xi)$  - координаты точки приложения силы. Такой подход позволяет построить простой алгоритм расчета систем на гармонические и импульсные воздействия систем с КЧСС [25].

В [34] показано, что ПФ и ИПФ связаны взаимным преобразованием Фурье и записываются в виде (1.19), (1.20)

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.19)$$

$$\varphi(i\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.20)$$

Связь между ПФ и ИПФ удобно показать на примере системы с ОСС, полагая в уравнении

$$\ddot{y} + \left(1 + 2\nu \frac{d}{dt}\right) p^2 y = \frac{q(t)}{m}; \quad (1.21)$$

$$q(t) = 1 \cdot e^{i\omega t} \text{ и } y = Y e^{i\omega t} = \bar{H}(\omega) e^{i\omega t}.$$

После сокращения на  $e^{i\omega t}$  получаем

$$\bar{H}(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i \cdot 2\nu\omega k} = \frac{1}{m(p^2 - \omega^2 + i \cdot 2\nu\omega p^2)} = \frac{1}{mp^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2} + i \cdot 2\nu\omega\right)}. \quad (1.22)$$

При нагрузке  $q(t) = Q \cos \omega t$  решение уравнения (1.21) можно получить так

$$y(t) = Q \operatorname{Re} \left\{ \bar{H}(\omega) e^{i\omega t} \right\} = \frac{Q}{k} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2} + i \cdot 2\nu\omega} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right\} = \frac{Q}{kA} \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.23)$$

$$\text{где } A = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + (2\nu\omega)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\nu\omega}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}.$$

При использовании частотно-независимого внутреннего трения,  $2\nu\omega = \gamma$ , где  $\gamma$  – коэффициент внутреннего трения. Если принять  $i\omega = s$ ;  $\omega^2 = -s^2$  [28], то

$$H(s) = \frac{1}{m(p^2 + s^2 + 2s\nu p^2)}. \quad (1.24)$$

Корни знаменателя (1.24) вычисляются по формуле

$$s_{1,2} = -vp^2 \pm p\sqrt{vp^2 - 1} = -vp^2 \pm ip^*, \quad (1.25)$$

где  $p^* = p(1 - v^2 p^2)^{1/2}$ .

$$\text{Вычислив производную } D' = m(2s + 2vp^2), \quad (1.26)$$

ИПФ определим так

$$\begin{aligned} k_{\text{и}}(t) &= \sum_{j=1}^2 \frac{e^{s_j t}}{D'(s_j)} = \frac{1}{m} \left[ \frac{e^{-(vp^2 - ip^*)t}}{2ip^*} + \frac{e^{-(vp^2 - ip^*)t}}{-2ip^*} \right] = \\ &= \frac{e^{-vp^2}}{2imp^*} (e^{ip^*t} - e^{-ip^*t}) = \frac{e^{-vp^2}}{mp^*} \sin p^* t. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Из (1.21-1.27) следует, что каждой составляющей ПФ вида (1.24) соответствует ИПФ (1.27).

Для системы с КЧСС ПФ, представленной в виде [34]

$$\bar{H}(\omega^2) = \sum_{j=1}^n \frac{M(p_j^2)}{D'(p_j^2)} \frac{1}{p_j^2 - \omega^2}, \quad (1.28)$$

соответствует ИПФ

$$k_{\text{и}}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{M(p_j^2)}{D'(p_j^2)} e^{-\lambda_j t}. \quad (1.29)$$

В частности для системы с ДСС, показанной на рисунке 2.1б, ПФ в [34] записаны в виде

$$\bar{H}_{ij} = N \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{\Phi_{ij}}{p_s^2 - \omega^2 + i2\gamma_r \omega p_r}, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.30)$$

$$\text{где } N = \frac{1}{m_1 m_2 (p_2^2 - p_1^2)}; \Phi_{11} = k_1 + k_2 - m_2 p_1^2; \Phi_{12} = \Phi_{21} = k_1; \Phi_{22} = k_1 - m_1 p_r^2. \quad (1.31)$$

Диссипативные силы учитываются, вводя в знаменатели (1.30) мнимое слагаемое.

При учете диссипативных сил по модифицированной гипотезе Фойгта принимают

$$v_r = \frac{\gamma_r}{2p_r}. \text{ Соответственно, ИПФ равны}$$

$$k_{nij} = N \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{\Phi_{ij}}{p_r^*} e^{-\frac{\gamma}{2} p_r t} \sin p_r^* t, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.32)$$

Методы, алгоритмы и примеры расчета нелинейных систем изложены в главе 3 настоящей работы.

## 1.4 Виброзащитные системы

### 1.4.1 Системы переменной жесткости

#### Активная и полуактивная системы переменной жесткости

Масса, демпфирование и жесткость являются тремя определяющими параметрами системы при действии динамической нагрузки. Изменение любого из этих параметров приводит к изменению отклика системы. Были разработаны различные типы виброзащитных систем для получения благоприятных систем с динамической нагрузкой.

К ним относятся пассивные (инерционные гасители (TMD - tuned mass dampers)), активные [62,64], полуактивные [53,79] и гибридные системы виброзащиты [50]. Устройство с переменной жесткостью (VSD - variable stiffness device) использовалось в качестве активной и полуактивной виброзащитных систем при динамических нагрузках, чтобы изменить собственные частоты (периоды) систем и, таким образом, избежать резонанса [79].

#### Система активной переменной жесткости (AVS - Active Variable Stiffness System)

Принцип работы системы заключается в активном приложении силы, равной и противоположной по направлению к силам, возбуждаемым источником вибрации [54]. Пример конструктивной системы показан на рисунке 1.1 [53].

Активные системы виброзащиты [53,74] предпочтительны пассивным из-за невозможности последних регулировать изменение параметров системы соответствующим образом, и в результате эффективно уменьшать отклик конструкции.

Для этих целей могут использоваться системы переменной жесткости (VSD-variable stiffness device) (гидравлические или электромеханические приводы), которые работают с помощью алгоритмов управления [61, 80].

Однако, недостатком активных систем является более высокая цена по сравнению с пассивными.

Система помогает уменьшить отклик конструкции от динамических нагрузок, таких как ветровые, сейсмические, путем управляемого переключения между включением и выключением устройства переменной жесткости (VSD), установленного между защищаемой конструкцией и резервными элементами [53].

В зависимости от уровней вибрации контроллер (VSD) оптимально выбирает оптимальную жесткость для конструкции, включая или выключая различные связи. Это изменяет собственную частоту конструкции, тем самым устраняя резонанс в конструкции [75].

В [61] предложен алгоритм управления включения-выключения, который определяет, когда конструкция и резервные элементы работают совместно друг с другом или когда отдельно.

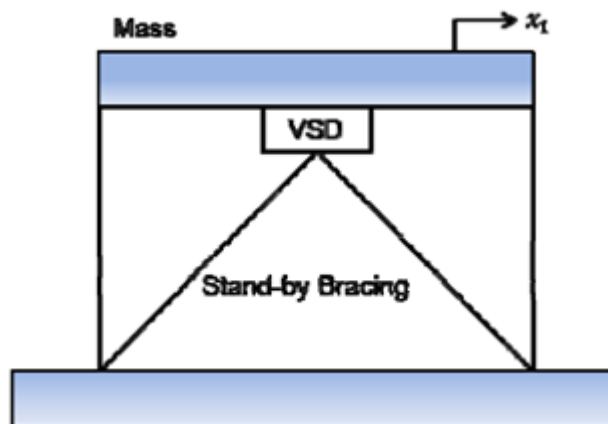


Рисунок 1.1– Система AVS

Они начинают работать совместно, когда масса пересекает нулевую точку равновесия и система остается включенной в работу до тех пор, пока не достигнет

максимального перемещения. Система отключается, как только перемещения массы достигают максимального значения (своего пикового положения), а затем остается выключенной, пока масса не достигнет нулевой точки равновесия [53].

В [80] предложен закон управления - перезагрузки. Он активирует расцепление, когда смещение конструкции достигает максимального значения. После того как истекает период выключения системы, заданный периодом контрольной выборки  $T$  (где  $T = t_{k+1} - t_k$ ), активируется включение системы и поддерживается до тех пор, пока смещение не достигнет своего максимального значения снова [53]. Как только продолжительность разъединения, предопределенная периодом контрольной выборки, закончена, зацепление активируется и поддерживается до тех пор, пока смещение конструкции не достигнет своего пикового положения снова [53].

Численное моделирование для свободных колебаний показало, что закон управления перезапуском способствует более быстрому затуханию колебаний системы AVS, чем алгоритм управления переключением включения-выключения системы [53].

### **Полуактивные переменные системы жесткости**

Полуактивные виброзащитные системы предназначены для того, чтобы снизить стоимость и сложность проектирования активных систем изоляции. Для этих систем масса, жесткость или демпфирование контролируются для обеспечения желаемых уровней виброизоляции.

В [53] изучена полуактивная система виброзащиты аутригеров (рисунок 1.2). Такая система уменьшает отклики в конструкции благодаря активному контролируемому переключению между включением и выключением полуактивных демпферов аутригеров, установленных между опорами и внешними колоннами.

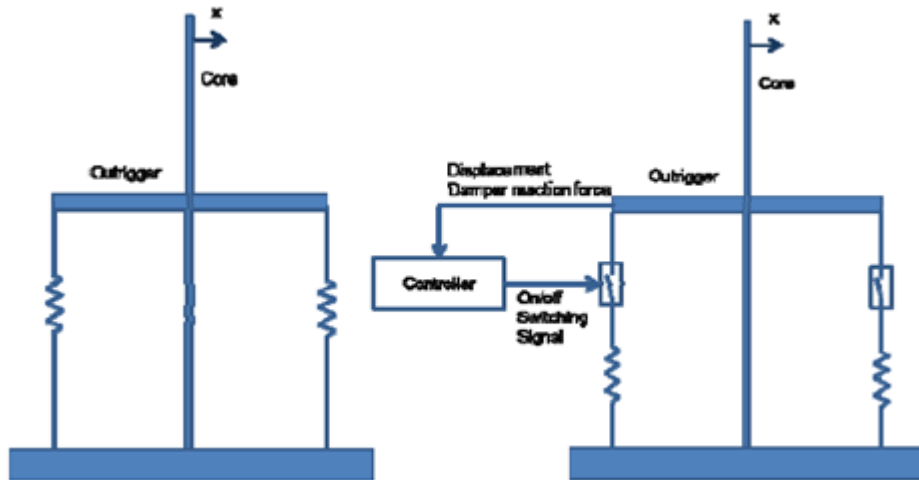


Рисунок 1.2 – Система аутригеров и полуактивных демпферов аутригеров

Ниже приведено уравнение движения полуактивной системы виброзащиты аутригеров с устройством переменной жесткости (VSD) [53];

$$m_0 \ddot{x}_0 + c_0 \dot{x}_0 + k_0 x_0 = -u_{q(t)} \quad q(t) \in \{on\ off\}; \quad (1.33)$$

$$u_{q(t)} = \begin{cases} k_c (x_1(t) - x_{or}(t)) & \text{if } q(t) = on \\ 0 & \text{if } q(t) = off. \end{cases} \quad (1.34)$$

где  $x_0$  - перемещение конструкции,  $m_{ol}$ ,  $c_{ol}$ ,  $k_{ol}$ ,  $k_c$  - масса, затухание, жесткость конструкции и жесткость резервных элементов.  $x_{or}$  - контрольная позиция;  $u_{q(t)}$  - сила во время включения и выключения;  $q(t)$  - сигнал переключения.

Основная теория, математическая модель, расчет конструкции на сейсмические воздействия, расчетный пример каркасной стеновой конструкции и некоторые выводы были даны в [79].

Схема системы рассеивания энергии показана на рисунке 1.3. Система переменной жесткости (VSD) устанавливается на межэтажной конструкции, как показано на рисунке 1.3.



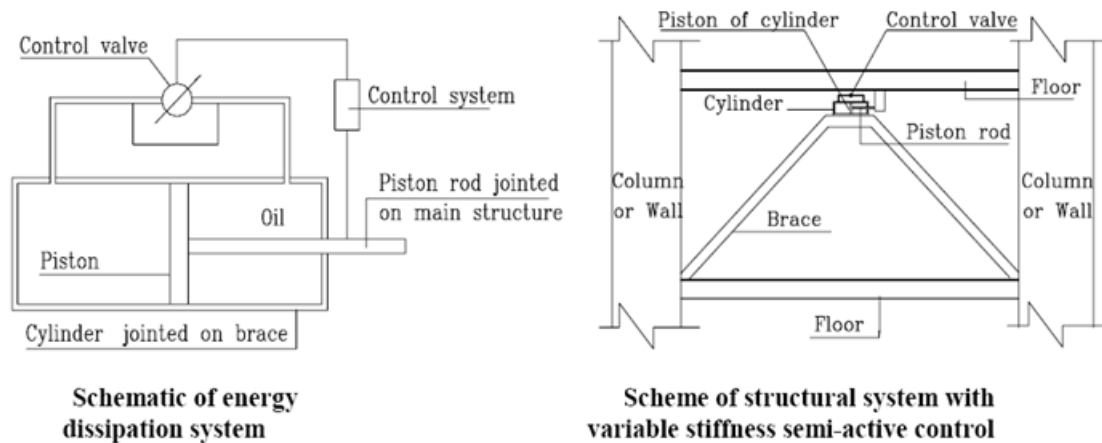


Рисунок 1.3 – Система переменной жесткости (VSD)

Восстанавливающая сила контролируемых связей определяется по формуле:

$$\begin{cases} \Delta x_i \cdot \Delta x_{i+1} < 0, F = 0 \\ \Delta x_i \cdot \Delta x_{i+1} \geq 0, F = K_d (x_i - x_0) \end{cases} \quad (1.35)$$

### Применение активной и полуактивной системы переменной жесткости

Эксперимент с прототипом системы активной переменной жесткости для виброзащиты конструкции, проведенный на виброплощадке в Техническом научно-исследовательском институте Кадзима в Токио, Япония показал ее эффективность для снижения отклика конструкции. Система успешно противостояла реальному землетрясению, наблюдаемому 11 ноября 1991 года [75].

Применение полуактивной системы переменной жесткости показало уменьшение максимального межэтажного сдвига на 51% [79].

Численное и экспериментальное исследование полуактивного аутригера показало, что демпферная система с правильно разработанными алгоритмами управления превосходит обычную систему аутригеров в уменьшении откликов конструкции [53].

Исследование, проведенное в [50], показало эффективность модели здания с установленным полуактивным устройством переменной жесткости (VSD),

пассивным демпфером вязкого трения и их комбинации (гибридной системы). Гибридная система способствовала снижению отклика конструкции [50].

Экспериментальное исследование, проведенное в [64], показало, что виброизолятор переменной жесткости приводит к увеличению жесткости конструкции более чем в 16 раз, а коэффициента демпфирования от 10% до 27%.

#### **1.4.2 Демпферы вязкого трения**

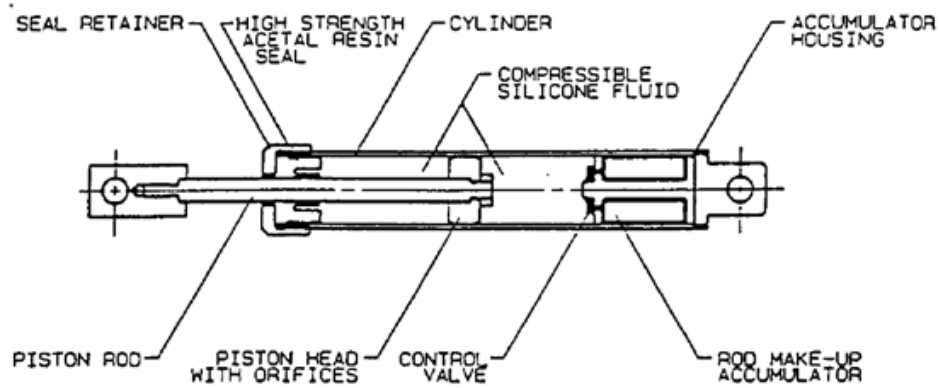
Демпфирующие устройства, основанные на принципе работы высокоскоростного потока текучей среды при прохождении через отверстия, нашли многочисленное применение в ударной виброизоляции и виброизоляции аэрокосмических и оборонных систем.

В последние годы были проведены обширные исследования и разработаны демпферы вязкого трения (VF - viscous fluid damper) для применения в сейсмических районах в конструкциях гражданского строительства. Ученые экспериментировали над тем, как демпферы вязкого трения могут уменьшить повреждения и перемещения конструкции без увеличения напряжений, разработали математические модели, которые будут использоваться при виброизоляции систем [65].

Демпферы вязкого трения демонстрируют поведение, которое является как эластичным, так и вязким, а их механические свойства сильно зависят от частоты. Моделирование работы вязких демпферов является все более важной проблемой в связи с широким распространением этих устройств. Авторы [66] представляют вязкоупругую модель, использующую частные производные, способную описывать частотно-зависимые свойства вязких демпферов.

#### **Свойства демпферов вязкого трения**

Устройство демпфер вязкого трения (рисунок 1.4) [76] состоит из поршня из нержавеющей стали с бронзовым отверстием и аккумулятором и заполнен силиконовым маслом [52] или битумной жидкостью [65]. Устройство работает в температурном диапазоне от  $-40^{\circ}\text{C}$  до  $70^{\circ}\text{C}$  [52].



Construction of Fluid Viscous Damper with Accumulator.

Рисунок 1.4 – Устройство демпфера вязкого трения

Устройство подавляет вклад высокочастотных вибраций путем добавления вязкого затухания к основному режиму конструкции (частота меньше частоты отсечки) и дополнительного затухания и жесткости к более высоким частотам [76].

Демпфирующие силы возникают от сдвигового действия и деформации в жидкости, которая содержится в цилиндрической емкости [56].

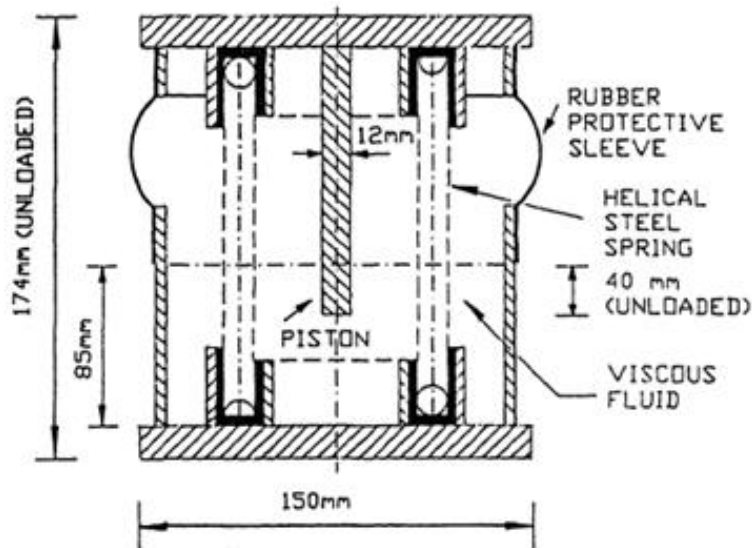
В работе [65] был предложен блок пружинно-вязких демпферных систем (см. рисунок 1.5). Он состоял из четырех пружинных демпферов вязкого трения, заполненных битумной жидкостью и цилиндрического поршня.

Сила демпфирования пропорциональна скорости поршня в вязкой жидкости [71]:

$$F_{VD} = C_{VD} |\dot{u}(t)|^{\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u}(t)) \quad (1.36)$$

где  $F_{VD}$  - сила в устройстве,  $C_{VD}$  - вязкая характеристика устройства,  $u(t)$  - скорость поршня в вязкой среде,  $\alpha$  – коэффициент, равный 0,5 - 2 [64, 71].

Оптимальные характеристики пассивных демпферов вязкого трения, которые будут использоваться в AVDS (active viscous damping system), можно найти в [57].



Construction of Spring-Viscous Damper Unit in Isolated Equipment Tests.

Рисунок 1.5 – Блок пружинно-вязких демпферных систем

В [76] аналитически продемонстрированы преимущества нелинейных демпферов вязкого трения с малыми значениями параметра  $\alpha$ . Было обнаружено, что вязкий демпфер с  $\alpha = 0,5$  рассеивает на 31% больше энергии, чем демпфер с  $\alpha = 2$ .

### Применение и результаты

В последние годы демпферы вязкого трения VF используются в конструкциях гражданского строительства. Эти устройства, установленные на конструкциях и испытанные на виброплощадке, уменьшали межэтажные сдвиги от 30% до 70% и уменьшали горизонтальные инерционные силы от 40% до 70%, тогда как другие поглощающие энергию устройства не могли достичь такого уровня уменьшения. Причиной этой разницы является почти чистое вязкое поведение испытываемых VF демпферов [76].

Было установлено, что VF демпферы с нелинейными характеристиками очень надежны [68]. Медицинский центр округа Сан-Бернардино в Калифорнии - это пятиэтажный комплекс, в котором используются 400 высоконапорных резиновых

подшипников и 233 нелинейных VF демпферов с  $\alpha = 0,5$ . Кроме того, исследования по сейсмической модернизации подвесной части моста «Golden Gate» в Сан-Франциско привели к выводу, что использование VF демпферов с  $\alpha = 0,75$  дает желаемую эффективность [72].

В ряде случаев VF демпферы использовались совместно с системами сейсмической изоляции. Например, VF демпферы были включены в систему виброизоляции пяти зданий нового медицинского центра округа Сан-Бернардино, расположенного близко к двум основным линиям разломов в 1995 году [77].

Демпферы вязкого трения использовались в некоторых высоких инженерных сооружениях, подверженных порывистому ветру, чтобы противостоять динамическим нагрузкам, в Китае, включая Пекинский Интайский центр, здание Йидженюань города Хуайин, здание Пекинского выставочного центра, центральное здание башни Пекинского Интайского центра [59].

Изучение 9-этажного здания с демпферами вязкого трения, установленными на 5-м и 9-м этажах, показало 32% -ное сокращение перемещений и 53% -ное уменьшение ускорений на 5-м этаже. Снижение на 36% и 75% перемещений и ускорений соответственно наблюдалось на 9-м этаже [63].

## ГЛАВА 2. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ В ЭКСПЛУАТАЦИОННОМ И ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

Основные зависимости для ПФ и ИПФ, которые приведены в этой главе и получены при решении линейных задач, также являются основными зависимостями, которые определяют характер алгоритмов расчета нелинейных систем.

Дано решение практически важной задачи о плоских колебаниях массивных тел при произвольном смещении основания.

### 2.1 Вертикальные колебания виброзащитных систем

#### 2.1.1 Периодические (гармонические) воздействия

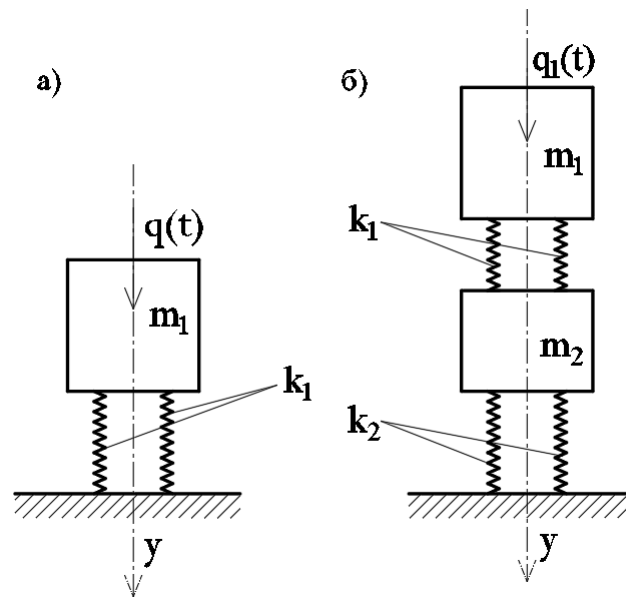


Рисунок 2.1– а) традиционная система с ОСС; б) двухмассовая схема виброзащиты, которую можно рассматривать как систему с гасителем.

Варианты схем виброзащиты, показанные на рисунке 2.1, являются расчетными для одномассовой и двухмассовой систем. Вторая схема может быть расчетной для двухзвенной виброизоляции и системы с динамическим гасителем, причем в качестве гасителя могут рассматриваться обе массы.

**Система с ОСС (рисунок 2.1а)**

Решение уравнения движения системы с ОСС

$$m_1 \ddot{y} + \left(1 + 2\nu \frac{d}{dt}\right) k_1 y = q(t); \quad (2.1)$$

"записывается в виде интеграла Дюамеля" [34]

$$y_n = \frac{1}{p_1^* m} \int_0^t q(\tau) e^{-n_1(t-\tau)} \sin p_1^*(t-\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Для простоты вычисления интегралов (3.23) ИПФ разделяют на части, зависящие исключительно от  $t$  или  $\tau$ .

Окончательно можно записать

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{p_1^* m} \int_0^t q(\tau) e^{-n_1(t-\tau)} (\sin p_1^* t \cos p_1^* \tau - \cos p_1^* t \sin p_1^* \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{mp_1} [d_1(t) F_2(t) - d_2(t) F_1(t)]; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{где } 2n_1 = \nu p_1^2, p_1^* = \sqrt{p_1^2 - n_1^2}; \quad (2.4)$$

$$d_1 = e^{-n_1 t} \sin p_1 t; d_2 = e^{-n_1 t} \cos p_1 t; \quad (2.5)$$

$$F_1(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot e^{n_1 \tau} \sin p_1^* \tau d\tau; F_2(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau; \quad (2.6)$$

Для модифицированной гипотезы Фойгта принимают  $n_1 = \frac{\gamma}{2} p_1$  [34]

**Система с ДСС (рисунок 2.1б)**

Уравнения движения системы имеет вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (y_1 - y_2) &= q_1(t); \\ m_2 \ddot{y}_2 - \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (y_1 - y_2) + \left(1 + 2\nu_2 \frac{d}{dt}\right) k_2 (y_2) y_2 &= q_2(t); \end{aligned} \quad (2.7)$$

"Где  $m_i, \nu_i, k_i$  ( $i = 1, 2$ ) - соответственно характеристики масс, диссипации и жесткости системы;  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) - перемещения масс системы;

$q_i(t)$  - внешняя нагрузка, действующая на массы" [34].

Для расчета системы в переходных режимах следует воспользоваться ИПФ, приведенными, в частности, в [34] и первой главе работы:

$$k_{и21} = k_{и12} = N_1 \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{k_1}{p_r^*} e^{-n_r t} \sin p_r^* t ; \quad (2.8)$$

$$k_{и11} = N_1 \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{k_1 + k_2 - m_2 p_r^2}{p_r^*} e^{-n_r t} \sin p_r^* t ; \quad (2.9)$$

$$k_{и22} = N_1 \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{k_1 - m_1 p_r^2}{p_r^*} e^{-n_r t} \sin p_r^* t ; \quad (2.10)$$

где  $k_{и12} = k_{и21}$  - перемещение массы  $m_1$  при действии единичного импульса на массу  $m_2$  или перемещение массы  $m_2$  при действии импульса на массу  $m_1$  ;

$k_{и11}$ - перемещение массы  $m_1$  при действии импульса на массу  $m_1$ ;

$k_{и22}$  - перемещение массы  $m_2$  при действии импульса на массу  $m_2$ ;

$$N_1 = \frac{1}{m_1 m_2 (p_2^2 - p_1^2)} = \frac{p_{01}^2 \cdot 1}{m_2 2 H_1 p_{01}^2} = \frac{1}{2 m_2 H_1 (h_1 s_1)} ; \quad (2.11)$$

$$H_1 = \left( \frac{\varphi_1^2}{4} - h_1 s_1 \right)^{1/2} ; \varphi_1 = h_1 + h_1 s_1 + 1 ; s_1 = \frac{k_2}{k_1} ; h_1 = \frac{m_1}{m_2} .$$

$$2n_r = \gamma p_r, p_r^* = \sqrt{p_r^2 - n_r^2} \quad (2.12)$$

$p_r$  - круговые частоты собственных колебаний системы с ДСС, вычисляемые из уравнения:

$$p^4 - \varphi_1 p_{01}^2 p^2 + p_{01}^2 p_{02}^2 = 0 \text{ по формуле} \quad (2.13)$$

$$p_{1(2)}^2 = \left( \frac{\varphi_1}{2} \mp H_1 \right) p_{01}^2, \quad (2.14)$$

Перемещения системы вычисляются из зависимости

$$y_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_0^t q_j(\tau) k_{иij}(t - \tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.15)$$

где  $k_{иij}$  - ИПФ (2.8) - (2.10).



Перемещения  $y_{11}$  и  $y_{21}$  и  $y_{22}$  вычислим по (2.15) с учетом зависимостей для ИПФ (2.8) - (2.10):

$$y_{11} = \sum_{r=1}^2 \int_0^t q_j(\tau) k_{n11}(t-\tau) d\tau; \quad (2.16)$$

$$y_{12} = y_{21} = \sum_{r=1}^2 \int_0^t q_j(\tau) k_{n21}(t-\tau) d\tau; \quad (2.17)$$

$$y_{22} = \sum_{r=1}^2 \int_0^t q_j(\tau) k_{n22}(t-\tau) d\tau; \quad (2.18)$$

( $j=1$  или  $2$ )

где  $y_{11}$  - перемещения массы  $m_1$  при действии нагрузки  $q_1$  на  $m_1$ ;  $y_{12}$  - перемещения массы  $m_1$  при действии нагрузки  $q_2$  на  $m_2$ ;  $y_{21}$  - перемещения массы  $m_2$  при действии нагрузки  $q_1$  на  $m_1$ ;  $y_{22}$  - перемещения массы  $m_2$  при действии нагрузки  $q_2$  на  $m_2$ .

При преобразованиях, изложенных ранее подобно в (2.2), можно записать, в частности,

$$y_{11} = \sum_{r=1}^2 \int_0^t q_j(\tau) k_{n11}(t-\tau) d\tau = N_1 \int_0^t q_j(\tau) \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{k_1 + k_2 - m_2 p_r^2}{p_r^*} e^{-n_r(t-\tau)} \sin p_r^*(t-\tau) d\tau \quad (2.19)$$

Для простоты вычисления интегралов (2.19) ИПФ разделяют на части, зависящие исключительно от  $t$  или  $\tau$ . Тогда получается:

$$y_{11} = N_1 \int_0^t q_j(\tau) \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{k_1 + k_2 - m_2 p_r^2}{p_r^*} e^{-n_r(t-\tau)} \left( \sin p_1^* t \cos p_1^* \tau - \cos p_1^* t \sin p_1^* \tau \right) d\tau;$$

также по аналогии с (2.2) можно записать

$$y_{11} = N_1 \left[ T_{111} I_1 + T_{112} I_2 \right]; \quad (2.20)$$

$y_{21}$  и  $y_{22}$  соответственно могут быть представлены так

$$y_{21} = N_1 \left[ T_{211} I_1 + T_{212} I_2 \right]; \quad (2.21)$$

$$y_{22} = N_1 \left[ T_{221} I_1 + T_{222} I_2 \right]; \quad (2.22)$$

$$\text{где } I_1 = d_1 F_2 - d_2 F_1; I_2 = d_3 F_2 - d_4 F_1; \quad (2.23)$$

$$d_1 = e^{-n_1 t} \sin p_1 t; d_2 = e^{-n_1 t} \cos p_1 t; \quad (2.24)$$

$$d_3 = e^{-n_2 t} \sin p_2 t; d_4 = e^{-n_2 t} \cos p_2 t; \quad (2.25)$$

$$F_1(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot e^{n_1 \tau} \sin p_1^* \tau d\tau; F_2(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau; \quad (2.26)$$

$$F_3(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot e^{n_2 \tau} \sin p_2^* \tau d\tau; F_4(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot e^{n_2 \tau} \cos p_2^* \tau d\tau; \quad (2.27)$$

$$T_{11_1} = \frac{k_1 + k_2 - m_2 p_1^2}{p_1^*}; T_{11_2} = \frac{k_1 + k_2 - m_2 p_2^2}{p_2^*}; \quad (2.28)$$

$$T_{21_1} = \frac{k_1}{p_1^*}; T_{21_2} = \frac{k_1}{p_2^*}; \quad (2.29)$$

$$T_{22_1} = \frac{k_1 - m_1 p_1^2}{p_1^*}; T_{22_2} = \frac{k_1 - m_1 p_2^2}{p_2^*}. \quad (2.30)$$

### 2.1.2 Импульсная нагрузка

Двухзвенная виброизоляция под машины ударного действия позволяет существенно снизить нагрузки, передающиеся на опорные конструкции. Представляется полезным оценить влияние промежуточного блока (соотношение масс  $m_1$  и  $m_2$  и жесткостей  $k_1, k_2$ ) на величину нагрузки на основание и перемещение самого оборудования.

#### *Система с ОСС (рисунок 2.2а)*

"Уравнение движения" системы дано в (2.1)

ИПФ линейной системы (2.1)

$$k_{и}(t) = \frac{S \cdot F_1(t)}{m p_1} \quad (2.31)$$

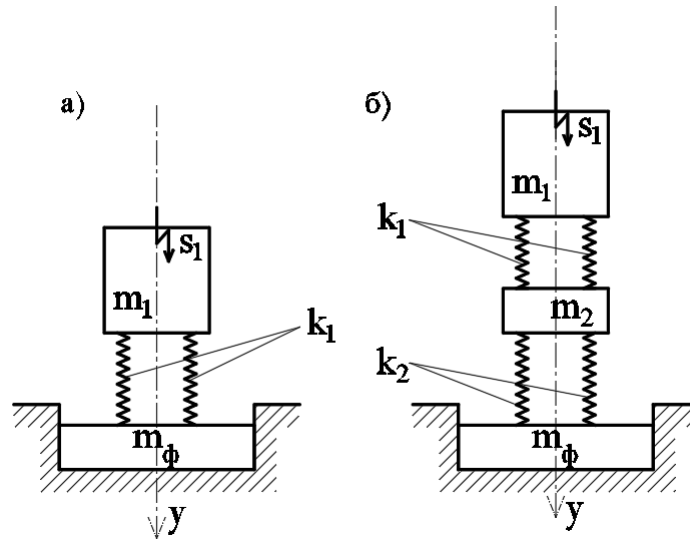


Рисунок 2.2 – Варианты виброизоляции фундаментов под оборудование с импульсной нагрузкой (штамповочные молоты) а) традиционная б) с инерционным блоком.

где  $S$  - "единичный импульс";

$$F_1(t) = e^{-n_1 t} \sin p_1^* \tau d\tau \quad (2.32)$$

Перемещения системы от действия внешнего импульса определяются по формуле:

$$y_n = S_1 \cdot k_n(t), \quad (2.33)$$

где  $k_n(t)$  – по формуле (2.31).

### **Система с ДСС (рисунок 2.2б)**

Для уравнений движения системы (2.6) ИПФ определяются по формулам (2.8) - (2.10).

Перемещения системы вычисляются по формуле:

$$y_{li}(t) = S_j \cdot k_{nij}(t), \quad (2.34)$$

где  $j$  – номер массы, к которой приложен импульс;

$k_{nij}(t)$  – импульсные переходные функции по формулам (2.8) - (2.10).

## 2.2 Плоские колебания массивных виброизолированных тел при произвольном смещении основания

"Решения построены для конструктивной схемы, в которой плоскость, проходящая через центр масс перпендикулярно оси вращения, является плоскостью симметрии реакции основания и при расчете которой разделяются вертикальные и горизонтально-вращательные колебания" [39,43]. В примере расчета строятся решения для переходных и эксплуатационных режимов колебаний при внезапно приложенном гармоническом воздействии.

Приведенный ниже метод расчета, использующий ПФ и ИПФ линейных систем, может быть достаточно просто распространен на задачи расчета плоских колебаний массивных тел в общем случае [43], и, в частности, жестких, ограниченных по высоте, сооружений. Подобная схема может использоваться также при расчетах стендов для тарировки различных типов виброизмерительной аппаратуры.

При принятом допущении коэффициент  $k_{zx} = 0$  (см. систему (2.35)) и система трех уравнений движения плоских колебаний при горизонтальном смещении основания

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{s}_z + k_z s_z - k_{zx} v_y &= 0; \\ m_0 \rho_y^2 \ddot{v}_y + k_{zx} s_z + k_v v_y - k_{xz} s_x &= 0; \\ m_0 \ddot{s}_x - k_{xz} v_y + k_x s_x &= -m_0 \ddot{\xi}_0; \end{aligned} \quad (2.35)$$

распадается на уравнения:

вертикальных колебаний

$$m_0 \ddot{s}_z + k_z s_z = 0; \quad (2.36)$$

и систему уравнений горизонтально-вращательных колебаний

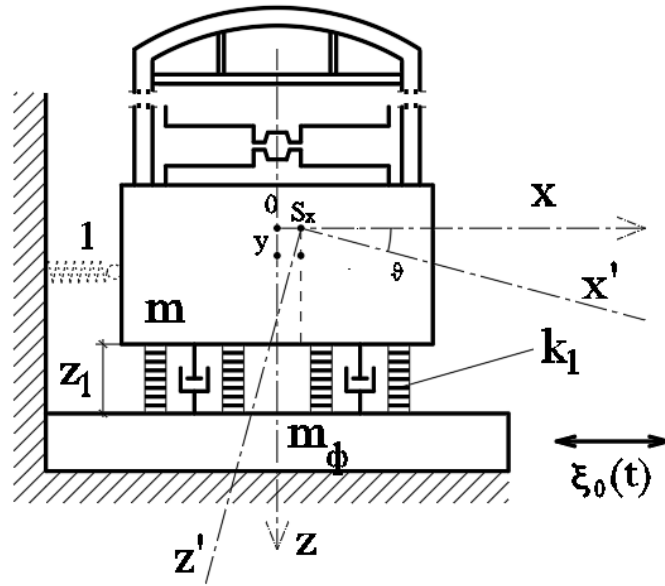


Рисунок 2.3 – Возможная конструктивная схема массивного виброизолированного объекта

$$\begin{aligned} m_0 \rho_y^2 \ddot{\nu}_y + k_\nu \nu_y - k_{xz} s_x &= 0; \\ m_0 \ddot{s}_x - k_{xz} \nu_y + k_x s_x &= -m_0 E \ddot{\xi}_x(t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Уравнения записаны в подвижной системе координат, совмещенной с основанием.

В (2.37)  $m_0$  – масса объекта;  $\rho_x$  – радиус инерции относительно оси  $\theta y$ ,  $s_x, s_z, \nu_y$  – обобщенные перемещения: соответственно вертикальное и горизонтальное смещение центра масс и угол поворота относительно оси  $y$ ;

$$k_x = \sum_{i=1}^n k_{xi}; k_{xz} = \sum_{i=1}^n k_{xi} z_i; k_\nu = \sum_{i=1}^n k_{zi} x_i^2 + \sum_{i=1}^n k_{xi} z_i^2; \quad (2.38)$$

$k_{zi}, k_{xi}$  – вертикальная и горизонтальная жесткости отдельного упругого элемента.

$k_\nu$  – жесткость системы при вращательных колебаниях.

Регулируя шарнирную связь 1 (см. рисунок 2.3) по высоте и изменяя таким образом горизонтальную жесткость, можно изменять соотношение уровней горизонтальных и вращательных колебаний.

Решение системы (2.37) удобно записать, воспользовавшись ПФ и ИПФ системы (2.37).

Подставив  $\xi_0 = Ee^{i\omega t}$ ;  $s_x = S_x e^{i\omega t}$ ;  $v_y = \Theta_y e^{i\omega t}$  в (2.37)

и сократив на  $e^{i\omega t}$ , после некоторых преобразований запишем уравнение форм

$$\begin{aligned} (k_v - \omega^2 m_0 \rho_y^2) \Theta_y - k_{xz} S_x &= 0; \\ -k_{xz} \Theta_y + (k_x - \omega^2 m_0) S_x &= E m_0 \omega^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

"При использовании ПФ и ИПФ естественно и в этом случае, отпадает, по сравнению с традиционным методом "нормальных форм", ряд процедур и решение получается в виде разложения по собственным формам сразу относительно обобщенных координат"[18].

Приравняв нулю определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} k_v - \omega^2 m_0 \rho_y^2 & -k_{xz} \\ -k_{xz} & k_x - \omega^2 m_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.40)$$

заменяв  $\omega^2$  на  $p^2$ , и также несколько преобразовав частотное уравнение, запишем его в виде

$$m_0 \rho_y^2 \left[ p^4 - (\lambda_x + \lambda_v) p^2 + \lambda_x \lambda_v - \lambda_{xzm} \cdot \lambda_{xzp} \right] = 0; \quad (2.41)$$

$$\lambda_x = \frac{k_x}{m_0}; \lambda_v = \frac{k_v}{m_0 \rho_y^2}; \lambda_{xzm} = \frac{k_{xz}}{m_0}; \lambda_{xzp} = \frac{k_{xz}}{m_0 \rho_y^2}; \lambda_{xz}^2 = \lambda_{xzm} \cdot \lambda_{xzp}. \quad (2.42)$$

ПФ без учета диссипативных сил определяют из системы (2.39)

$$H_\Theta = \frac{E k_{xz} m_0 \omega^2}{D}; H_S^* = \frac{E m_0 \omega^2 (k_v - m_0 \omega^2 \rho_y^2)}{D}; \quad (2.43)$$

где  $H_S^*$  – ПФ, записанная относительно подвижной системы координат;

$D$  – определитель системы (2.39), корни которого вычисляются из уравнения (2.41) при  $p^2 = \omega^2$ .

ПФ, определяющая горизонтальное смещение центра масс относительно положения статического равновесия, записывается так

$$H_S = E(1 + H_S^*) = E \frac{D + m_0 \omega^2 (k_v - m_0 \omega^2 \rho_y^2)}{D} = E \frac{k_v k_x - k_{xz}^2 - k_x m_0 \omega^2 \rho_y^2}{D}. \quad (2.44)$$

Далее, воспользовавшись общей формулой для ПФ [34], преобразуем (2.44) к виду:

$$H(\omega^2) = \frac{M(\omega^2)}{D(\omega^2)} = \sum_{r=1}^2 \frac{M(p_r^2)}{D'(p_r^2)} \cdot \frac{1}{\omega^2 - p_r^2}. \quad (2.45)$$

Записав определитель системы (2.41) в виде

$$D = m_0^2 \rho_y^2 (\omega^2 - p_1^2)(\omega^2 - p_2^2); \quad (2.46)$$

где  $p_1^2, p_2^2$  – корни уравнения (2.46), и следуя общей схеме записи ПФ и ИПФ [34], вычислим:

$$\frac{dD}{d\omega^2} = m_0^2 \rho_y^2 [(\omega^2 - p_1^2) + (\omega^2 - p_2^2)]. \quad (2.47)$$

Воспользуемся зависимостями (2.41), (2.42), (2.43), учтем диссипативные силы и введем в знаменатели функций слагаемые  $ip_r^2 \gamma_r$  согласно модифицированной гипотезе Фойгта.

Тогда

$$\begin{aligned} H_\Theta &= \frac{Em_0 k_{xz}}{m_0^2 \rho_y^2} \sum_{r=1}^2 (-1)^r \frac{p_r^2}{(p_2^2 - p_1^2)(\omega^2 - p_r^2)} = \\ &= \frac{E \lambda_{xz \rho}}{p_2^2 - p_1^2} \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{p_r^2}{p_r^2 - \omega^2 + ip_r^2 \gamma_r}; \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$H_S = \frac{k_v k_x - k_{xz}^2 - k_x m_0 \rho_y^2 \omega^2}{m_0^2 \rho_y^2 (\omega^2 - p_1^2)(\omega^2 - p_2^2)} = \frac{E}{p_2^2 - p_1^2} \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{N_r(\lambda, p_r^2)}{p_r^2 - \omega^2 + ip_r^2 \gamma_r} \quad (2.49)$$

$$N_r(\lambda, p_r^2) = \lambda_x \lambda_v \lambda_{xz}^2 - \lambda_x p_r^2; \quad (2.50)$$

В системах, ПФ которых определяются зависимостями

$$H(\omega) = L \sum_{r=1}^2 \frac{M(p_r^2)}{D'(p_r^2)} \cdot \frac{1}{p_r^2 - \omega^2 + ip_r^2 \gamma_r}, \quad (2.51)$$

ИПФ записываются так [34]:

$$k_{и} = \sum_{r=1}^2 \frac{M(p_r^2)}{D'(p_r^2)} \cdot \frac{1}{p_r} e^{-\frac{\gamma_r}{2} p_r t} \sin p_r^* t. \quad (2.52)$$

В этом случае ИПФ следуют из (2.48), (2.49)

$$k_{и\text{в}} = \frac{E \lambda_{x\text{зр}}}{p_2^2 - p_1^2} \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \cdot p_r e^{-\frac{\gamma_r}{2} p_r t} \sin p_r^* t; \quad (2.53)$$

$$k_{и\text{с}} = \frac{E}{p_2^2 - p_1^2} \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{N(\lambda_x p_r^2)}{p_r^*} \cdot e^{-\frac{\gamma_r}{2} p_r t} \sin p_r^* t; \quad (2.54)$$

$$\text{где } p_r^* = \left[ p_r^2 \left( 1 - \frac{\gamma_r^2}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Формулы для гармонических колебаний можно получить из зависимостей (2.51), (2.52). В частности, при  $\xi_0(t) = E_0 \sin \omega t$  горизонтальное смещение центра масс определим так

$$\begin{aligned} s_x(t) &= \frac{E}{p_2^2 - p_1^2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{N(\lambda, p_r^2)}{p_r^2 \left( 1 - \frac{\omega^2}{p_r^2} \right) + i \gamma_r} e^{i \omega t} \right\} = \\ &= \frac{E}{p_2^2 - p_1^2} \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{N(\lambda, p_r^2)}{p_r^2 A_r} \cos(\omega t - \varphi); \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\text{где } A_r = \left( 1 - \frac{\omega^2}{p_r^2} \right)^{1/2}; \quad tg \varphi = \frac{\gamma_r}{1 - \frac{\omega^2}{p_r^2}}. \quad (2.56)$$

Формулы для вычисления горизонтального смещения центра масс  $s_x$  и угла поворота  $\psi_y$  при произвольном смещении основания  $E \xi_0(t)$  запишем, воспользовавшись ИПФ (2.53), (2.54):



$$s_x(t) = \xi_0(\tau) k_{\text{ис}}(t-\tau) d\tau = \frac{E}{p_2^2 - p_1^2} \int_0^t \xi_0(\tau) \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{N(\lambda, p_r^2)}{p_r^*} e^{-\frac{\gamma}{2} p_r(t-\tau)} \sin p_r^*(t-\tau) d\tau; \quad (2.57)$$

$$v_y(t) = \xi_0(\tau) k_{\text{ив}}(t-\tau) d\tau = \frac{E\lambda_{\text{зр}}}{p_2^2 - p_1^2} \int_0^t \xi_0(\tau) \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} e^{-\frac{\gamma}{2} p_r(t-\tau)} \sin p_r^*(t-\tau) d\tau. \quad (2.58)$$

При вычислении интегралов (2.57), (2.58) ИПФ также разделяют на части, зависящие исключительно от  $t$  или  $\tau$  по, схеме, приведенной в п. 2.1.1.

В частности, (2.57) можно записать в виде:

$$s_x(t) = \frac{E}{p_2^2 - p_1^2} [d_1(t) F_2(t) - d_2(t) F_1(t)]; \quad (2.59)$$

$$d_1 = e^{-n_1 t} \sin p_1 t; d_2 = e^{-n_1 t} \cos p_1 t; \quad (2.60)$$

$$F_1(t) = \int_0^t \xi_0(\tau) \cdot e^{n_1 \tau} \sin p_1^* \tau d\tau; F_2(t) = \int_0^t \xi_0(\tau) \cdot e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau; \quad (2.61)$$

где  $2n_1$  определяется из (2.3).

### 2.3 Горизонтальные колебания линейных систем с 3-мя степенями свободы при кинематическом возбуждении.

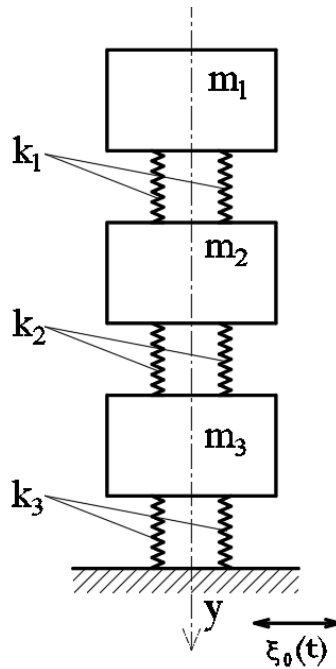


Рисунок 2.4 – Трехмассовая схема системы виброзащиты

Уравнения движения системы

$$\begin{aligned}
 m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{\xi}_0(t)) + \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1(x_1 - x_2) &= 0; \\
 m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{\xi}_0(t)) + \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1(x_1 - x_2) + \left(1 + 2\nu_2 \frac{d}{dt}\right) k_2(x_2 - x_3) &= 0; \\
 m_3(\ddot{x}_3 + \ddot{\xi}_0(t)) + \left(1 + 2\nu_2 \frac{d}{dt}\right) k_2(x_2 - x_3) + \left(1 + 2\nu_3 \frac{d}{dt}\right) k_3 x_3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

приводят к виду

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) &= -m_1 \ddot{\xi}_0(t); \\
 m_2 \ddot{x}_2 + k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_2 - x_3) &= -m_2 \ddot{\xi}_0(t); \\
 m_3 \ddot{x}_3 + k_2(x_2 - x_3) + k_3 x_3 &= -m_3 \ddot{\xi}_0(t),
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Правую часть уравнений (2.63) рассматриваем как внешнюю нагрузку:

$$q_{1...3(t)} = -m_{1...3} \ddot{\xi}_0(t) e^{i\omega t}, \tag{2.64}$$

неизвестные перемещения  $X_i$  также представляем в виде

$$X_{(1..3)} = X_{(1..3)} e^{i\omega t}. \tag{2.65}$$

Подставив (2.64) в (2.63) и сократив на  $e^{i\omega t}$ , запишем уравнение относительно амплитудных значений перемещений.

Сокращая на  $e^{i\omega t}$ , получаем

$$\begin{cases}
 [k_1 - m_1 \omega^2] X_1 - k_1 X_2 = -m_1 \ddot{\xi}_0(t); \\
 -k_1 X_1 + [k_1 + k_2 - m_2 \omega^2] X_2 - k_2 X_3 = -m_2 \ddot{\xi}_0(t); \\
 -k_2 X_2 + [k_2 + k_3 - m_3 \omega^2] X_3 = -m_3 \ddot{\xi}_0(t),
 \end{cases} \tag{2.66}$$

"Получим решение, используя метод Крамера. Тогда

$$X_1 = \Delta_1 / \Delta; X_2 = \Delta_2 / \Delta; X_3 = \Delta_3 / \Delta; \tag{2.67}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - m_2 \omega^2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 - m_3 \omega^2 \end{vmatrix} \tag{2.68}$$

где  $\Delta$  - определитель системы,  $\Delta_{(1..3)}$  - определитель системы, в котором  $i$ -ый столбец заменен на вектор нагрузки" [18];

$$D(\omega) = \Delta = (k_1 - m_1\omega^2)(k_1 + k_2 - m_2\omega^2)(k_2 + k_3 - m_3\omega^2) - k_1^2(k_2 + k_3 - m_3\omega^2) - k_2^2(k_1 - m_1\omega^2). \quad (2.69)$$

Представим  $X_i$  в виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^3 H_{ij}(\omega) \cdot m_i \ddot{\xi}_0; \quad (2.70)$$

где  $H_{ij}(\omega)$  - ПФ.

В частности,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -m_1 \ddot{\xi}_0 & -k_1 & 0 \\ -m_2 \ddot{\xi}_0 & k_1 + k_2 - m_2 \omega^2 & -k_2 \\ -m_3 \ddot{\xi}_0 & -k_2 & k_2 + k_3 - m_3 \omega^2 \end{vmatrix} \\ = \ddot{\xi}_0 \left[ -(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2)(k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) - k_1 k_2 m_3 + k_2^2 m_1 - k_1 m_2 (k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) \right]. \quad (2.71)$$

Запишем ПФ  $H_{11}$  без учета диссипативных членов

$$H_{11}(\omega) = \frac{\ddot{\xi}_0}{D(\omega)} \left[ -(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2)(k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) - k_1 k_2 m_3 + k_2^2 m_1 - k_1 m_2 (k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) \right] \quad (2.72)$$

По аналогии можно записать

$$H_{21}(\omega) = \frac{\ddot{\xi}_0}{D(\omega)} \left[ -m_2 (k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) - k_2 m_3 (k_1 - m_1 \omega^2) - k_1 m_1 (k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) \right] \quad (2.73)$$

$$H_{31}(\omega) = \frac{\ddot{\xi}_0}{D(\omega)} \left[ -m_3 (k_1 - m_1 \omega^2)(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) - k_1 k_2 m_1 - k_2 m_2 (k_1 - m_1 \omega^2) + k_1^2 m_3 \right] \quad (2.74)$$

Чтобы определить собственные частоты системы с 3-мя степенями свободы, подставим  $\omega = p$  в  $D(\omega)$  и приравняем к нулю [16].

После преобразований представим  $D(\omega)$  в виде  $D(\omega) = m_1 m_2 m_3 (\omega^2 - p_1^2)(\omega^2 - p_2^2)(\omega^2 - p_3^2)$  и запишем ПФ (2.72) - (2.74) как сумму простых дробей.

Можно записать, в частности, для  $H_{11}$ :

$$\bar{H}_{11}(\omega) = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{r=1}^3 \frac{[-J_2 J_3 - k_1 k_2 m_3 + k_2^2 m_1 - k_1 m_2 J_3]}{p_r^2 - \omega^2}; \quad (2.75)$$

$$\text{где } B = m_1 m_2 m_3 (p_3^2 - p_2^2)(p_3^2 - p_1^2)(p_2^2 - p_1^2); R(r) = p_{1+rem(r,3)} - p_{1+rem(r,3)}^2; \quad (2.76)$$

$rem(r,3)$  - остаток от деления номера собственных форм  $r$  на 3 [19].

Введем в знаменатель диссипативные члены и запишем:

$$\bar{H}_{11}(\omega) = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{r=1}^3 \frac{[-J_2 J_3 - k_1 k_2 m_3 + k_2^2 m_1 - k_1 m_2 J_3]}{p_r^2 - \omega^2 + i\gamma_r p_r^2}; \quad (2.77)$$

По такой же схеме можно записать формулы и для других ПФ

$$\bar{H}_{21}(\omega) = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{r=1}^3 \frac{[-m_2 J_1 J_3 - k_2 m_3 J_1 - k_1 m_1 J_3]}{p_r^2 - \omega^2 + i\gamma_r p_r^2}; \quad (2.78)$$

$$\bar{H}_{31}(\omega) = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{r=1}^3 \frac{[-m_3 J_1 J_2 - k_1 k_2 m_1 - k_2 m_2 J_1 + k_1^2 m_3]}{p_r^2 - \omega^2 + i\gamma_r p_r^2}; \quad (2.79)$$

$$\text{где } J_1 = k_1 - m_1 p_r^2; J_2 = k_1 + k_2 - m_2 p_r^2; J_3 = k_2 + k_3 - m_3 p_r^2. \quad (2.80)$$

Как пример, запишем формулу для перемещений массы  $m_1$  при действии на неё гармонической силы  $\ddot{\xi}_0 \cos \omega t$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \ddot{\xi}_0 \operatorname{Re} [\bar{H}_{11}(\omega) e^{i\omega t}] = \\ &= \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{r=1}^3 \frac{[-J_2 J_3 - k_1 k_2 m_3 + k_2^2 m_1 - k_1 m_2 J_3]}{p_r^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi_r); \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\text{где } A_r = \sqrt{(1 - \omega^2/p_r^2)^2 + \gamma_r^2}; \operatorname{tg} \varphi_r = \gamma_r / (1 - \omega^2/p_r^2). \quad (2.82)$$

Мнимая часть (2.81) - перемещение массы  $m_1$  при кинематической воздействию  $\ddot{\xi}_0 \sin \omega t$ .

Используя зависимости между ПФ и ИПФ, можем записать

$$k_{\text{илл}}(t) = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{r=1}^3 \frac{[-J_2 J_3 - k_1 k_2 m_3 + k_2^2 m_1 - k_1 m_2 J_3]}{p_r^*} \cdot R(r) \cdot e^{-\nu_r p_r^* t} \sin p_r^* t; \quad (2.83)$$

$$k_{и21}(t) = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{r=1}^3 \frac{[-m_2 J_1 J_3 - k_2 m_3 J_1 - k_1 m_1 J_3]}{p_r^*} \cdot R(r) \cdot e^{-\nu_r p_r^2 t} \sin p_r^* t; \quad (2.84)$$

$$k_{и31}(t) = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{r=1}^3 \frac{[-m_3 J_1 J_2 - k_1 k_2 m_1 - k_2 m_2 J_1 + k_1^2 m_3]}{p_r^*} \cdot R(r) \cdot e^{-\nu_r p_r^2 t} \sin p_r^* t. \quad (2.85)$$

Перемещения в линейной системе вычисляются по ф. (1.18)

## ГЛАВА 3. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ В ЭКСПЛУАТАЦИОННОМ И ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

При проектировании систем виброизоляции во многих случаях возникает необходимость существенно снижать уровни колебаний конструкций в переходных режимах. Это достигается, в том числе, путем введения в систему виброизоляции дополнительных элементов: дополнительных связей, демпферов вязкого или сухого трения, которые включаются в работу при больших перемещениях в зоне прохождения через резонанс.

При этом значительно снижается пиковое значение перемещений и снижается вероятность нарушения целостности всей системы, включая дополнительное оборудование и трубопроводы.

### 3.1 Система с дополнительной связью. Вертикальные колебания

"Характер нелинейности дан для систем: рисунка 3.2а  $k_a = k_1; k_b = k_2$  и рисунка 3.2б:  $k_a = k_2; k_b = k_3$  (см. рисунок 3.1)" [40].

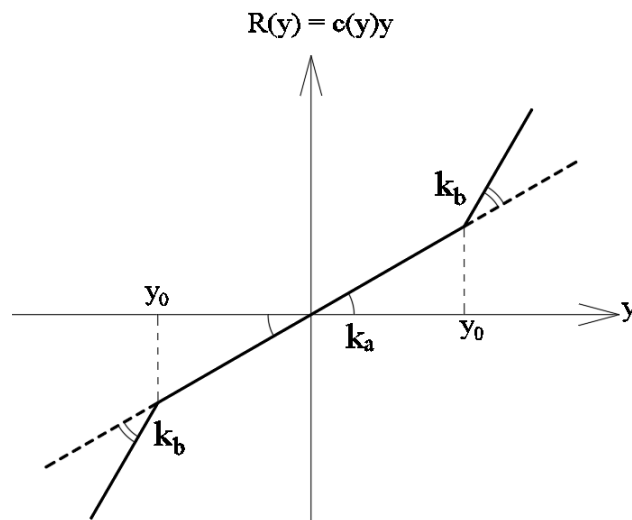


Рисунок 3.1 – Нелинейная зависимость "перемещения – усилия"

### 3.1.1 Периодические (гармонические) нагрузки

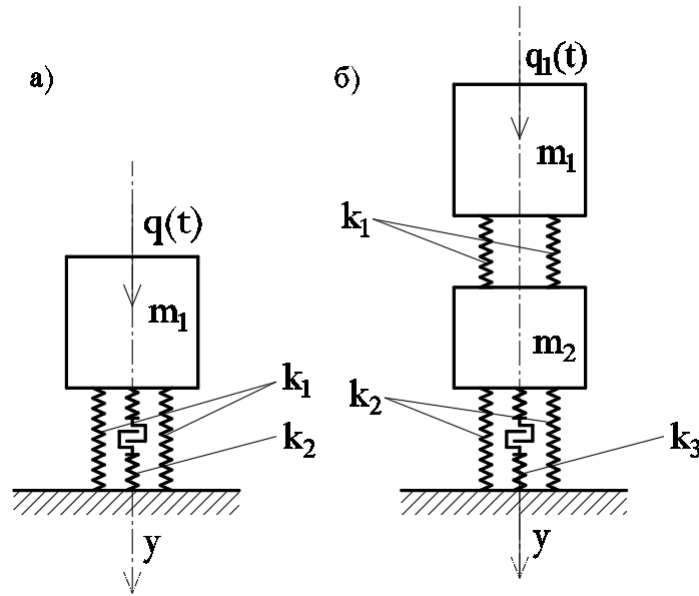


Рисунок 3.2 – а) система с ОСС с ограничителем перемещений; б) система с ограничителем перемещений нижней массы ( $m_2$ );

#### Система с ОСС (рисунок 3.2а)

Уравнение движения нелинейной системы имеет вид:

$$m\ddot{y} + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) c(y)y = q(t). \quad (3.1)$$

"Для принятого типа нелинейности зависимость "реакции – перемещения""[40]:

$$c(y)y = k_1 y \text{ при } y \leq y_0;$$

$$c(y)y = k_1 y_0 + (k_1 + k_2)(y - y_0) \text{ при } |y| > y_0. \quad (3.2)$$

При построении алгоритма уравнение (3.1) следует преобразовать: а именно, перенести нелинейные составляющие в правую часть и добавить к обеим частям

уравнения  $\left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) p_1^2 y$  :

$$\ddot{y} + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) p_1^2 y = \frac{q(t)}{m} + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) p_1^2 y - \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) \frac{c(y)y}{m}; \quad (3.3)$$

где  $p_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ .

Для зависимости вида (3.2) уравнение движения системы с ОСС с нелинейной связью (3.3) примет вид:

$$\ddot{y} + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) p_1^2 y = \frac{q(t)}{m} - \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) \frac{k_2(y - y_0)}{m}. \quad (3.4)$$

при  $|y| \geq y_0$

"Решение уравнения (3.4) представляется в виде двух решений: перемещения линейной системы от действия внешней нагрузки ( $y_n$ ) и от т.н. фиктивной нагрузки, которая зависит от вида нелинейности ( $y_{нл}$ )" [40]:

$$y = y_n - y_{нл}. \quad (3.5)$$

"Решение уравнения от внешней нагрузки определяется зависимостью (2.3). Нелинейная составляющая решения определяется из интегрального уравнения" [40]

$$y_{нл} = \frac{1}{mp_1^*} \int_{t_0}^t \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) k_2(y - y_0) e^{-n_1(t-\tau)} \sin p_1^*(t-\tau) d\tau; \quad (3.6)$$

"где  $t_0$  – время первого включения дополнительной связи в процессе колебаний" [40].

Следуя (2.3), (3.6) можно записать:

$$\begin{aligned} y_{нл} &= \frac{k_2}{mp_1^*} \int_{t_0}^t (y - y_0) e^{-n_1(t-\tau)} (\sin p_1^* t \cos p_1^* \tau - \cos p_1^* t \sin p_1^* \tau) d\tau \\ &= \frac{k_2}{mp_1^*} [d_1(t) F_2(t_0, t) - d_2(t) F_1(t_0, t)]; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{где } F_2(t_0, t) = \int_{t_0}^t \lambda_1(y \mp y_0) \cdot e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau; \quad F_1(t_0, t) = \int_{t_0}^t \lambda_1(y \mp y_0) \cdot e^{n_1 \tau} \sin p_1^* \tau d\tau. \quad (3.8)$$

Полное перемещение вычисляется по формуле (3.5)

"Знак «+» в (3.8) при  $y(t) \leq 0$ .  $\lambda_1$  – прерывистая функция, равная 0 при  $|y| \leq |y_0|$  и 1 при  $|y| > |y_0|$ " [41].

"Уравнение (3.5) решается пошагово по времени с итерациями на каждом шаге" [22]

### **Система с ДСС (рисунок 3.2б)**

Уравнения движения системы имеют вид:



$$\begin{aligned}
m\ddot{y}_1 + \left(1 + 2v_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (y_1 - y_2) &= q_1(t); \\
m\ddot{y}_2 - \left(1 + 2v_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (y_1 - y_2) + \left(1 + 2v_2 \frac{d}{dt}\right) c_2 (y_2) y_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Второе уравнение системы (3.9) перепишем в виде:

$$m\ddot{y}_2 - \left(1 + 2v_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (y_1 - y_2) + \left(1 + 2v_2 \frac{d}{dt}\right) k_2 y_2 = \left(1 + 2v_2 \frac{d}{dt}\right) [k_2 - c(y_2)] y_2. \tag{3.10}$$

"Для принятого типа нелинейности зависимость "реакции – перемещения""[40]:

$$c(y_2) y_2 = R(y) = k_2 y_2 \text{ при } |y| \leq y_0; \tag{3.11}$$

$$c(y_2) y_2 = R(y) = k_2 y_0 + (k_2 + k_3)(y_2 - y_0) \text{ при } |y| > y_0. \tag{3.12}$$

Обозначим

$$f_2 = [k_2 - c_2(y_2)] y_2 = k_2 y_2 - k_2 y_0 - (k_2 + k_3)(y_2 - y_0) = k_3 (y_2 - y_0). \tag{3.13}$$

$$\text{С учетом диссипативных сил } f_2 = \left(1 + 2v_2 \frac{d}{dt}\right) k_3 (y_2 - y_0). \tag{3.14}$$

При решении систем (3.10) следует воспользоваться ИПФ для линейной системы [34] (2.8) - (2.10) и с помощью выражения (2.15) - (2.30) можно записать, в частности:

$$y_{нл12} = y_{нл21} = \sum_{r=1}^2 \int_0^t f(\tau) k_{нл2} e^{n_r(t-\tau)} \sin p_r^*(t-\tau) d\tau; \tag{3.15}$$

где  $f(\tau)$  - фиктивная нагрузка;  $k_{нл2}$  - ИПФ по (2.8)

$$= N_1 \sum_{r=1}^n \int_0^t \lambda_1 k_3 (y_2 \mp y_0) (-1)^{r+1} \frac{k_1}{p_r} e^{n_r(t-\tau)} \sin p_r^*(t-\tau) d\tau; \tag{3.16}$$

$$= N_1 \sum_{r=1}^2 \int_0^t \lambda_1 k_3 (y_2 \mp y_0) (-1)^{r+1} \frac{k_1}{p_r} e^{n_r t} e^{-n_r \tau} [\sin p_r^* t \cos p_r^* \tau - \cos p_r^* t \sin p_r^* \tau] d\tau; \tag{3.17}$$

$$= N_1 \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} \frac{k_1}{p_r} \left[ \int_0^t \lambda_1 k_3 (y_2 \mp y_0) e^{-n_r \tau} \cos p_r^* \tau \right] e^{n_r t} \sin p_r^* t -$$

$$- \left[ \int_0^t \lambda_1 k_3 (y_2 \mp y_0) e^{-n_r \tau} \sin p_r^* \tau \right] e^{n_r t} \cos p_r^* t d\tau$$

$$y_{нл12} = N_1 \sum_{r=1}^2 \left[ (-1)^{r+1} \frac{k_1}{p_r^*} (H_{2r}(t) d_{1r} - H_{1r}(t) d_{2r}) \right]; \quad (3.18)$$

также по аналогии с (3.18) можно записать  $y_{нл11}$  и  $y_{нл22}$  так

$$y_{нл22} = N_1 \sum_{r=1}^2 (-1)^{r+1} T_{22r} [d_{1r} H_{2r}(t) - d_{2r} H_{1r}(t)]; \quad (3.19)$$

$$y_{11} = N_1 \sum_{r=1}^2 \left\{ (-1)^{r+1} T_{11r} [d_{1r} F_{2r}(t) - d_{2r} F_{1r}(t)] \right\}; \quad (3.20)$$

$$T_{22r} = \frac{k_1 - m_1 p_r^2}{p_r^*}; T_{11r} = \frac{k_1 + k_2 - m_2 p_r^2}{p_r^*}; \quad (3.21)$$

$$d_{1r} = e^{-n_r t} \sin p_r t; d_{2r} = e^{-n_r t} \cos p_r t; \quad (3.22)$$

$$F_{1r}(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot e^{n_r \tau} \sin p_r^* \tau d\tau; F_{2r}(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot e^{n_r \tau} \cos p_r^* \tau d\tau; \quad (3.23)$$

В формулах (3.18, 3.19) подынтегральные функции  $H_{ir}$  определяют фиктивную нагрузку, связанную с нелинейностью.

$$H_{1r} = \int_0^t \lambda_1 k_3 (y_2 \mp y_0) e^{n_r \tau} \sin p_r^* \tau d\tau; \quad (3.24)$$

$$H_{2r} = \int_0^t \lambda_1 k_3 (y_2 \mp y_0) e^{n_r \tau} \cos p_r^* \tau d\tau; \quad (3.25)$$

$$\text{где } 2n_r = v_r p_r^2, p_r^* = \sqrt{p_r^2 - n_r^2}. \quad (3.26)$$

### 3.1.2 Импульсная нагрузка

#### *Система с ОСС (рисунок 3.3а)*

Линейную составляющую перемещения от действия внешней нагрузки следует определять по формуле (2.33).

Нелинейную составляющую перемещения от фиктивной нагрузки вычисляют из уравнений (3.6 - 3.8)

#### *Система с ДСС (рисунок 3.3б).*

Расчетные формулы для ИПФ подобных систем приведены во втором разделе, формулы (2.8 - 2.10)

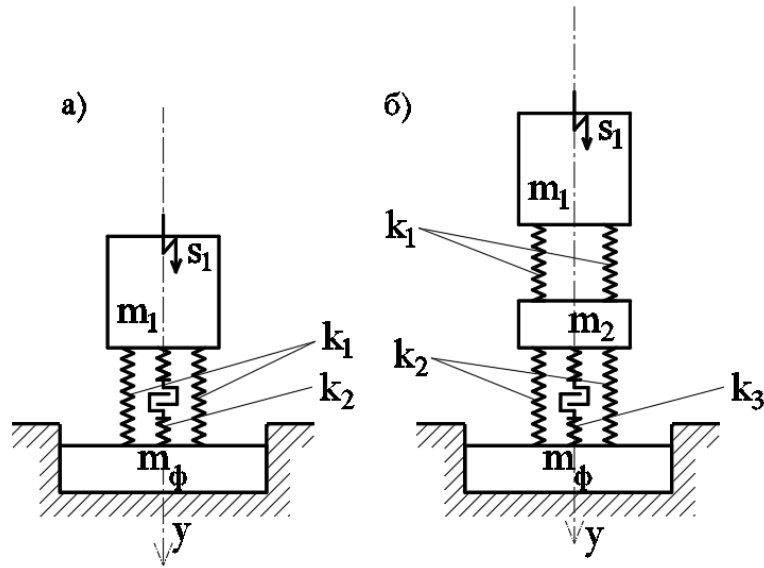


Рисунок 3.3 – Варианты виброизоляции фундаментов под штамповочные молоты а) с дополнительной связью, б) с инерционным блоком и дополнительной нижней связью.

Линейные составляющие перемещений следует определять по формуле (2.34). Используя зависимости для ИПФ (2.8)-(2.10), и после некоторых преобразований получаем:

$$y_{нл} = k_{и21} = N_1 \sum_{r=1}^2 \left\{ (-1)^{r+1} [F_{1r}(t) + d_{1r}H_{2r}(t) - d_{2r}H_{1r}(t)] / p_r^* \right\}; \quad (3.27)$$

$d_{1r}; d_{2r}$  - по (3.22)

$$F_{1r}(t) = S \cdot e^{-n_r \tau} \sin p_r^* \tau; \quad (3.28)$$

где  $N_1$  - по (2.11).

"В формуле (3.27) подынтегральные функции в  $H_{ir}$  определяют фиктивную нагрузку, связанную с нелинейностью" [40].

$$H_{1r} = \int_{t_0}^t \lambda_1 k_3 (y_2 \mp y_0) e^{n_r \tau} \sin p_r^* \tau d\tau; \quad (3.29)$$

$$H_{2r} = \int_{t_0}^t \lambda_1 k_3 (y_2 \mp y_0) e^{n_r \tau} \cos p_r^* \tau d\tau; \quad (3.30)$$

Знак «+» в формулах (3.29, 3.30) соответствует значению  $y(t) \leq 0$ .

При одностороннем включении дополнительной связи (рисунок 3.4), реакция которой направлена вверх, принимаем:

" $\lambda_1$  – прерывистая функция, равная 0 при  $y \geq (-y_0)$  и 1 при  $y < (-y_0)$ " [40].

Вычисление полного перемещения выполняется по ф. (3.5).

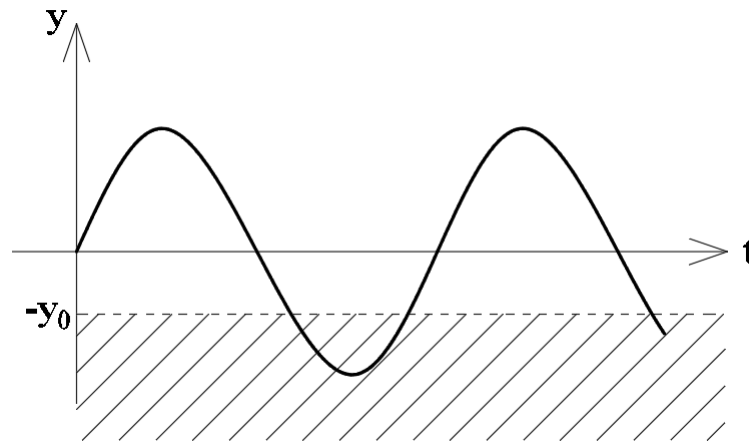


Рисунок 3.4 – Нижняя зона включения односторонней дополнительной связи

### 3.2 Система с демпфером вязкого трения

При необходимости существенно снижать уровни колебаний конструкций в переходных режимах можно воспользоваться также одним из наиболее эффективных способов - включением в систему виброизоляции элементов с повышенным уровнем диссипативных сил - демпферов вязкого или сухого трения, что также значительно снижает уровни колебаний в околорезонансных режимах и сохраняет целостность системы.

#### 3.2.1 Периодические (гармонические) нагрузки

Одна из возможных систем виброизоляции, которая позволяет использовать демпферы, механизм которых достаточно прост, показана на рисунке 3.5а [24].

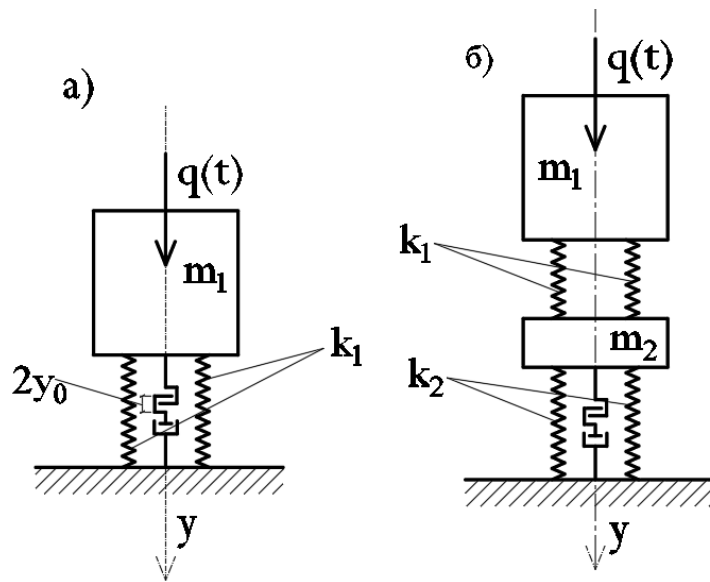


Рисунок 3.5 – Система: а) с ОСС с демпфером вязкого трения б) с ДСС с демпфером вязкого трения

Расчетная характеристика для демпферов вязкого трения – относительное демпфирование, определяемое по формуле:  $D = \frac{\varphi}{p_k}$ , где  $\varphi$  – коэффициент демпфирования - постоянная величина для различных типов демпферов, которая равна отношению диссипативной силы к обобщенной скорости и поделенная на удвоенную массу;  $p_1$  - собственная угловая частота виброизолированной системы. Параметр  $\varphi$ , как правило, определяют экспериментально. Коэффициент  $D$  связан с коэффициентом потерь  $\gamma$  зависимостью [24].

$$D = \frac{\gamma}{\sqrt{4 + \gamma^2}} \approx \frac{\gamma}{2}. \quad (\text{a})$$

После задания коэффициента потерь (не меньше 2), величина  $D$ , в зависимости от конструктивного решения демпфера, регулируется, в частности, путем изменения количества отверстий в поршне, кольцевого зазора между корпусом демпфера (статором) и поршнем, размеров и числа пластин и т.п.

Диссипативную силу, возникающую при движении поршня, следует определять в соответствии с формулой (319) [24].

$$P_{gk} = h_k v_k \quad (б)$$

где  $h_k = 2p_r m D$  - коэффициент демпфирования;  $m$  - масса движущегося тела.

Из (б), в том числе, следует, что в уравнении движения (см. рисунок 3.5), при включении в виброизолированную систему демпфера, диссипативные силы по форме могут учитываться как и для модифицированной гипотезы Фойгта

### **Система с ОСС (рисунок 3.5а)**

Уравнение

$$m_1 \ddot{y} + \bar{h}(y) \cdot p_1 m \gamma_d \dot{y} + \left(1 + 2v_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 y = q(t)$$

удобно переписать в виде:

$$\ddot{y} + \bar{h}(y) \Phi_d \dot{y} + \left(1 + \frac{\gamma_1}{p_1} \frac{1}{dt}\right) p_1^2 y = \frac{q(t)}{m}; \quad (3.31)$$

где  $\Phi_d = p_1 \gamma_d$  - модуль затухания, который был принят, в частности, в соответствии с [24],  $\gamma_d$  - условный коэффициент потерь (неупругого сопротивления);

$\gamma_1$  - коэффициент неупругого сопротивления для виброизоляторов, который был принят по модифицированной гипотезе Фойгта;  $p_1 = \left(\frac{k_1}{m}\right)^{1/2}$  - собственная круговая

частота системы;  $\bar{h}(y)$  - прерывистая функция, равная 1 при  $|y| \geq y_0$ ; 0 при  $|y| < y_0$ .

Остальные обозначения приведены на рисунке 3.5.

Далее воспользуемся расчетной схемой, приведенной, в частности, в [34], и сведем уравнение (3.31) к нелинейному интегральному уравнению. Для этого перенесем нелинейный член в правую часть и запишем общее решение в виде "интеграла Дюамеля":

$$y = \int_0^t q(\tau) V_0(p_1, t - \tau) d\tau - \bar{h} \Phi_d \int_0^t \frac{dy}{d\tau} y(\tau) V_0(p_1, t - \tau) d\tau; \quad (3.32)$$

$$\text{где } V_0 = \frac{1}{m_1 p_1} e^{-m t} \sin p t - \text{ИПФ линейной системы}; \quad (3.33)$$

$$n = \frac{\gamma}{2} p_1.$$

Второй интеграл в (3.32) вычислим по частям

$$y_H = J_d = \bar{h}(y) \Phi_d \left[ y(t) V_0(p_1, t - \tau) \Big|_{(y_0)t_s}^{(y_0)t_{s+1}} - \int_0^t y(\tau) V_1(p_1, t - \tau) d\tau \right]; \quad (3.34)$$

$$\text{где } V_1 = \frac{d}{pd\tau} \left[ e^{-n_1(t-\tau)} \sin(p_1, t - \tau) \right]; \quad (3.35)$$

и представим  $\sin(p_1, t - \tau)$  и  $\cos(p_1, t - \tau)$  в виде функции разности двух углов.

Алгоритм вычисления интеграла (3.34) запишем так

$$y_H = J_d = \bar{h}(y) \Phi_d \left[ \left( d_1 + \frac{n_1}{p_1} d_2 \right) F_{1d}(t) + \left( d_2 - \frac{n_1}{p} d_1 \right) F_{2d}(t) \right]; \quad (3.36)$$

где  $d_1 = e^{-n_1 t} \sin p_1 t$ ;  $d_2 = e^{-n_1 t} \cos p_1 t$ ;

$$F_{1d}(t) = \int_0^t y(\tau) \cdot e^{n_1 \tau} \sin p_1^* \tau d\tau; F_{2d}(t) = \int_0^t y(\tau) \cdot e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau \quad (3.37)$$

Перемещения системы - сумма перемещений от внешней и фиктивной нагрузки  $y = y_n + y_n(J_d)$ .

Вычисления линейной составляющей перемещений выполняют с помощью уравнения (2.2).

Решение следует строить по шагам по времени. При малом шаге  $\Delta t < \frac{T}{30} = \frac{2\pi}{30p_1}$

при вычислении (3.37) достаточную точность можно получить, заменяя подынтегральные функции их средними значениями.

Интеграл в (3.36) следует уточнять итерациями. Интегралы  $F_{1d}$  и  $F_{2d}$  при включении демпфера в интервале по времени  $(n+1)\Delta t$ , в котором

$$|(s+1)\Delta t| = y_0, \quad (3.38)$$

вычисляются по формулам:

$$F_{1d}^{n+1} = \sum_{s=1}^n \int_{s\Delta t}^{s_n\Delta t} y(\tau) f_1(\tau) d\tau + \int_{(s+1)\Delta t}^t y(\tau) f_1(\tau) d\tau; \quad (3.39)$$

$$F_{2d}^{n+1} = \sum_{s=1}^n \int_{s\Delta t}^{s_n\Delta t} y(\tau) f_2(\tau) d\tau + \int_{(s+1)\Delta t}^t y(\tau) f_2(\tau) d\tau;$$

$$\text{где } f_1(\tau) = e^{n\tau} \sin p_1\tau; f_2(\tau) = e^{n\tau} \cos p_1\tau; \quad (3.40)$$

$t$  - текущее время.

$$\text{В интервале } s_n\Delta t \leq t < s_{n+1}\Delta t; |y| \leq y_0, \quad (3.41)$$

в формулах (3.39) последние слагаемые равны нулю.

Принятая модель учета диссипативных сил при работе демпфера может быть, очевидно, распространена на системы с КЧСС.

### **Система с ДСС(рисунок 3.5б)**

В частности, уравнения движения системы с ДСС с демпфером вязкого трения (рисунок 3.5б) удобно записать так:

$$m_1 \ddot{y}_1 + \left(1 + 2n_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (y_1 - y_2) = \frac{q(t)}{m}; \quad (3.42)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \left(1 + 2n_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (y_1 - y_2) + \left(1 + 2n_2 \frac{d}{dt}\right) k_2 y_2 = \bar{h}(y_2) \Phi_d \dot{y}_2.$$

При решении системы (3.42) воспользуемся ранее полученными [34] зависимостями для ПФ и ИПФ. В частности, ИПФ системы удобно записать в виде:

$$k_{uij} = N(m, p_i) \sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} \frac{\Phi_{ij}}{p_s} F_s(p_s, \gamma_s); \quad (3.43)$$

$$N = \frac{p_0^2}{m_2(p_2^2 - p_1^2)}; \Phi_{11} = \frac{1 + s + \frac{s}{2} p_s^2}{p_s}; \Phi_{12} = \Phi_{21} = 1; \Phi_{22} = \frac{1 - \frac{p_s^2}{p_0^2}}{p_s}; \quad (3.44)$$

$$F_s = e^{-n_s} \sin p_s t; s = \frac{k_2}{k_1}; h_1 = \frac{m_1}{m_2}; n_s = \frac{\gamma_s}{2} p_s.$$

Частоты собственных колебаний системы следует вычислять по формуле (2.14).



Уровни воздействий на опорную конструкцию можно определять по величине перемещений  $y_2(t)$ , которые можно вычислить, воспользовавшись ИПФ  $k_{12}(t)$  (от внешней нагрузки) и  $k_{22}(t)$  - от фиктивной нагрузки ( $\bar{h}(y_2)\Phi_d\dot{y}_2$ ):

$$y_2 = \int_0^t q(\tau) \sum_{s=1}^2 \frac{F_s(p_s, \gamma, t-\tau)}{p_s} d\tau + \bar{h}(y_2)\Phi_d \int_0^t \sum_{s=1}^2 \frac{d}{d\tau} [y(\tau)] \frac{1 - \frac{p_s^2}{p_0^2}}{p_s} F_s(p_s, \gamma, t-\tau) d\tau. \quad (3.45)$$

Второй интеграл в (3.45) следует вычислять по частям, воспользовавшись зависимостями (3.34) - (3.37).

Для оценки величины диссипативной силы при включении демпфера можно ограничиться только одной (первой) формой колебаний. Знаки суммирования в (3.48) и (3.50), естественно, пропадают.

Решения линейной части получают с помощью (2.15-2.17)

### 3.2.2 Импульсная нагрузка

#### *Система с ОСС (рисунок 3.6а)*

Линейную составляющую перемещения от действия внешней нагрузки следует определять по формуле (2.33).

Нелинейная составляющая решения определяется из интегрального уравнения:

$$y_{\text{нл}} = \bar{h}\Phi_d \int_0^t \frac{dy}{d\tau} y(\tau) V_0(p_1, t-\tau) d\tau, \quad (3.46)$$

где  $V_0 = \frac{1}{m_1 p_1} e^{-nt} \sin pt$  - импульсная переходная функция линейной системы.

При вычислении интегралов (3.46), ИПФ также разделяют на части, зависящие исключительно от  $t$  или  $\tau$ , по схеме, приведенной в п. 2.1.1.

Вычисление полного перемещения выполняется по ф. (3.5).

#### *Система с ДСС (рисунок 3.6б).*

Расчетные формулы для импульсных переходных функций (ИПФ) подобных систем приведены в формулах (2.8 - 2.10).

Линейные составляющие перемещений следует определять по формуле (2.34).

Нелинейную составляющую перемещений можно определить по формуле:

$$y_{нл\ 2} = \bar{h}(y_2) \Phi_d \int_0^t \sum_{s=1}^2 \frac{d}{d\tau} [y(\tau)] \frac{1 - \frac{p_s^2}{p_0^2}}{p_s} F_s(p_s, \gamma, t - \tau) d\tau. \quad (3.47)$$

Нелинейная составляющая решения уточняется с помощью итераций на каждом шаге по времени.

Вычисление полного перемещения выполняется по ф. (3.5).

### 3.3 Горизонтальные колебания нелинейных систем с 3-мя степенями свободы при кинематическом возбуждении

Нелинейная характеристика относится к верхней связи ( $k_1$ ) (см. рисунок 3.6)

Уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1 (\ddot{x}_1 + \ddot{\xi}_0(t)) + \left(1 + 2v_1 \frac{d}{dt}\right) c_1 (\Delta x) (x_1 - x_2) &= 0; \\ m_2 (\ddot{x}_2 + \ddot{\xi}_0(t)) + \left(1 + 2v_1 \frac{d}{dt}\right) c_1 (\Delta x) (x_1 - x_2) + \left(1 + 2v_2 \frac{d}{dt}\right) c_2 (\Delta x) (x_2 - x_3) &= 0; \\ m_3 (\ddot{x}_3 + \ddot{\xi}_0(t)) + \left(1 + 2v_2 \frac{d}{dt}\right) k_2 (x_2 - x_3) + \left(1 + 2v_3 \frac{d}{dt}\right) k_3 x_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

также преобразуем к виду

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\Delta x) (x_1 - x_2) &= -m_1 \ddot{\xi}_0(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_1 (\Delta x) (x_1 - x_2) + c_2 (\Delta x) (x_2 - x_3) &= -m_2 \ddot{\xi}_0(t); \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_2 (x_2 - x_3) + k_3 x_3 &= -m_3 \ddot{\xi}_0(t). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Определим перемещения масс  $m_1$  и  $m_2$  в виде сумм перемещений линейной и нелинейной систем (от фиктивной нагрузки, учитывающей нелинейность).

Нелинейную составляющую перемещений определим по формуле:

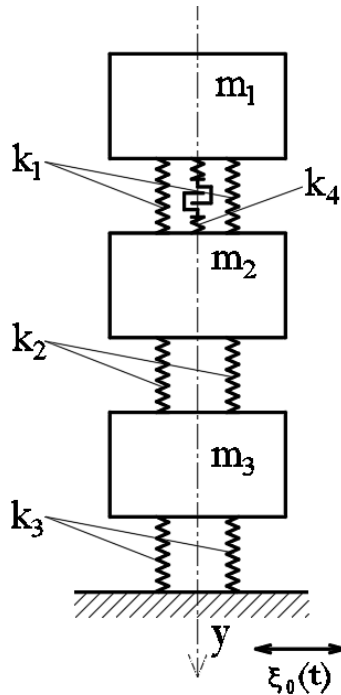


Рисунок 3.6 – Трехмассовая схема системы виброзащиты с нелинейной верхней СВЯЗЬЮ

$$y_{\text{нл11}} = \sum_{i=1}^n [f(\tau)] k_{\text{нл11}}(t-\tau) d\tau = \quad (3.50)$$

$$= \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{i=1}^3 \frac{[-J_2 J_3 - k_1 k_2 m_3 + k_2^2 m_1 - k_1 m_2 J_3]}{p_r^*} R(r) [H_{2r} d_{1r} - H_{1r} d_{2r}]; \quad (3.51)$$

где  $f(\tau) = \lambda_1 k_4 (y_1 \mp y_0)$  - фиктивная нагрузка (3.52)

По аналогии с (3.51) нелинейную составляющую перемещений  $y_{\text{нл21}}$  и  $y_{\text{нл31}}$  определим так:

$$y_{\text{нл21}} = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{i=1}^3 \frac{[-m_2 J_1 J_3 - k_2 m_3 J_1 - k_1 m_1 J_3]}{p_r^*} R(r) [H_{2r} d_{1r} - H_{1r} d_{2r}]; \quad (3.53)$$

$$y_{\text{нл31}} = \frac{\ddot{\xi}_0}{B} \sum_{i=1}^3 \frac{[-m_3 J_1 J_2 - k_1 k_2 m_1 - k_2 m_2 J_1 + k_1^2 m_3]}{p_r^*} R(r) [H_{2r} d_{1r} - H_{1r} d_{2r}]; \quad (3.54)$$

$$\text{где } H_{1r} = \int_{t_0}^t \lambda_1 k_4 (y_1 \mp y_0) e^{n_r \tau} \sin p_r^* \tau d\tau ; \quad (3.55)$$

$$H_{2r} = \int_{t_0}^t \lambda_1 k_4 (y_1 \mp y_0) e^{n_r \tau} \cos p_r^* \tau d\tau . \quad (3.56)$$

$$d_{1r} = e^{-n_r t} \sin p_r t ; d_{2r} = e^{-n_r t} \cos p_r t ; \quad (3.57)$$

Вычисление полного перемещения выполняется по ф. (3.5)

## ГЛАВА 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА И АНАЛИЗ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

### 4.1 Примеры расчета систем с дополнительным блоком и связью

#### 4.1.1. Расчет грохота

"Проанализируем поведение грохота (ГИСТ 72) в переходных режимах (режимы пуска и остановки), в частности, при прохождении через резонанс при 4 вариантах виброизоляции - вариант 1 - традиционная система с ОСС (рисунок 2.1а)"; "вариант 2 - с ограничителем перемещений как система с ОСС (рисунок 3.1а); вариант 3 - с дополнительной массой как система с ДСС (рисунок 2.1б); вариант 4 - с ограничителем перемещений нижней массы ( $m_2$ ) (рисунок 3.1б)" [40].

Исследуем также влияние интервала времени на перемещения при пуске и остановке.

"При работе этого грохота возбуждается также горизонтальная составляющая воздействия. Однако поскольку величина ее мала по сравнению с вертикальной, при общей оценке колебаний грохотов ее, чаще всего, не учитывают. Основное требование при работе грохота – перемещение сита должно составлять примерно 6мм в эксплуатационном режиме" [40].

Нагрузка от грохота принималась в виде:

$$\text{в эксплуатационном режиме - } q(t) = Q_o \sin \omega t ; \quad (4.1)$$

$$\text{в пусковом режиме - } q(t) = Q_o \left( \frac{at}{\omega} \right)^2 \sin \left( \frac{at^2}{2} \right); \quad (4.2)$$

$$\text{в остановочном режиме - } q(t) = Q_o \frac{[\omega - b(t - t_2)]^2}{\omega^2} \sin \left[ \omega t - \frac{b(t - t_2)^2}{2} \right]; \quad (4.3)$$

$$a = \frac{\omega}{t_1}; \quad b = \frac{\omega}{t_3 - t_2} \quad (4.4)$$

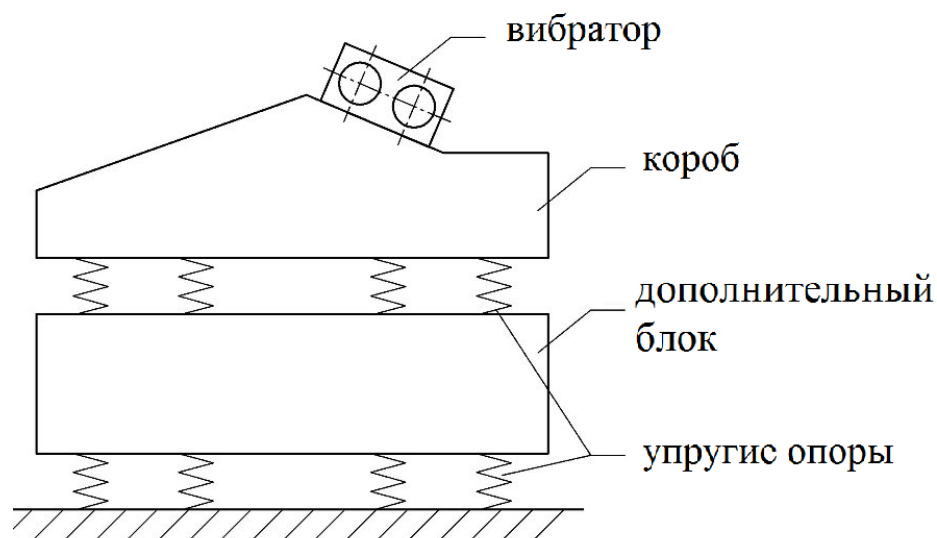


Рисунок 4.1 – Общая схема грохота

" $t_1$  – время перехода к эксплуатационному режиму,  $t_2$  – время начала остановки,  $t_3$  – время полной остановки;  $a$ ,  $b$  (рад/с) – скорости нарастания и убывания числа оборотов оборудования" [40].

"Максимальные значения усилий, передающиеся на опорные конструкции, вычислялись по формуле" [40]:

$$Q_{опор} = Ak_i \quad (4.5)$$

где  $A$  – амплитуда перемещения;  $k_i$  – жесткость опоры.

Были приняты следующие параметры систем:

масса грохота ( $m_1$ ) – 10 т; амплитуда возмущающей силы ( $Q_0$ ) – 350 кН; частота возмущающей силы ( $\omega$ ) – 78 рад/с и для:

Варианта 1: жесткость системы  $k_1$  – 4200 кН/м;

Варианта 2: жесткость исходной системы ( $k_1$ ) – 4200 кН/м; значение зазора –  $y_0 = 0.015$  м; жесткость дополнительной связи ( $k_2$ ) – 1500, 2000, 2500 и 3000, 3500 кН/м;

Варианта 3: жесткости системы  $k_1$  – 3500 кН/м;  $k_2$  – 4200 кН/м; масса дополнительного блока ( $m_2$ ) – 2, 3, 4, 5 и 6 т;

Варианта 4: жесткости системы  $k_1 - 3500$  кН/м;  $k_2 - 4200$  кН/м; значение зазора –  $y_0 = 0.015$  м; масса дополнительного блока ( $m_2$ ) – 6 т; жесткость дополнительной связи ( $k_3$ ) – 1500, 2000, 2500 и 3000, 3500 кН/м.

Коэффициенты затухания ( $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ) были приняты равными 0.1.

Уравнения движения для системы с ОСС даны в разделе 2.1.1 (формула (2.1)) и с ДСС даны в разделе 2.1.1 (формулы (2.7)).

Уравнения движения для системы с дополнительной массой как системы с ДСС даны в разделе 3.1.1 (формула (3.1)) и для системы с ограничителем перемещений нижней массы ( $m_2$ ) – формула (3.9).

Решения системы уравнений движения определялись с использованием ИПФ (формулы (2.8) - (2.10) в форме "интегралов Дюамеля" (1.18) по п. 1.3):

- применялись линейные зависимости (2.2)-(2.5) при расчете варианта 1 и линейной части варианта 2; (3.5)-(3.8) для нелинейной части варианта 2;
- выражения (2.7) - (2.17) для варианта 3 и линейной части варианта 4; (3.15) - (3.26) для нелинейной системы.

### **Результаты расчета**

"Амплитуды перемещений в системах и максимальные значения усилий, передающиеся на опорные конструкции, приведены в таблицах 4.1 и 4.2" [40].

Оценка влияния длительности времени пуска и остановки на амплитуды перемещений показана в таблице 4.3. Дано влияние значения зазора  $y_0$  на усилия, передающиеся на опорные конструкции дано в таблице 4.4.

Перемещения в системах показаны на рисунках 4.2 - 4.4.

Таблица 4.1 Амплитуды перемещений в системах при 4 вариантах виброизоляции

Вариант виброизоляции	Постоянный параметр	измененный параметр	амплитуда перемещений (м)		
			при пуске	при остановке	при эксплуатации
1. Традиционная система	$m_1 = 10\text{т}; k_1 = 4200\text{кН/м}$	-	0.0598	0.0893	0.0061
2. Система с дополнительной связью	$m_1 = 10\text{т}; k_1 = 4200\text{кН/м}$	$k_2$ (кН/м)			
		500	0.0629	0.0856	0.0061
		1000	0.0644	0.0796	0.0061
		1500	0.0591	0.0696	0.0061
		2000	0.0728	0.0514	0.0061
		2500	0.0704	0.0289	0.0061
3. Система с дополнительным блоком	$m_1 = 10\text{т}; k_1 = 3500\text{кН/м}; k_2 = 4200\text{кН/м}$	$m_2$ (т)			
		2	0.0338	0.0316	0.0047
		3	0.039	0.037	0.002
		4	0.0368	0.0403	0.0012
		5	0.0413	0.0424	0.00093
		6	0.0409	0.0435	0.00076
4. Система с дополнительным блоком и связью	$m_1 = 10\text{т}; m_2 = 6\text{т}; k_1 = 3500\text{кН/м}; k_2 = 4200\text{кН/м}$	$k_3$ (кН/м)			
		500	0.0273	0.0256	0.00076
		1000	0.0276	0.0256	0.00076
		1500	0.0278	0.0259	0.00076
		2000	0.028	0.0261	0.00076
		2500	0.0282	0.0263	0.00076



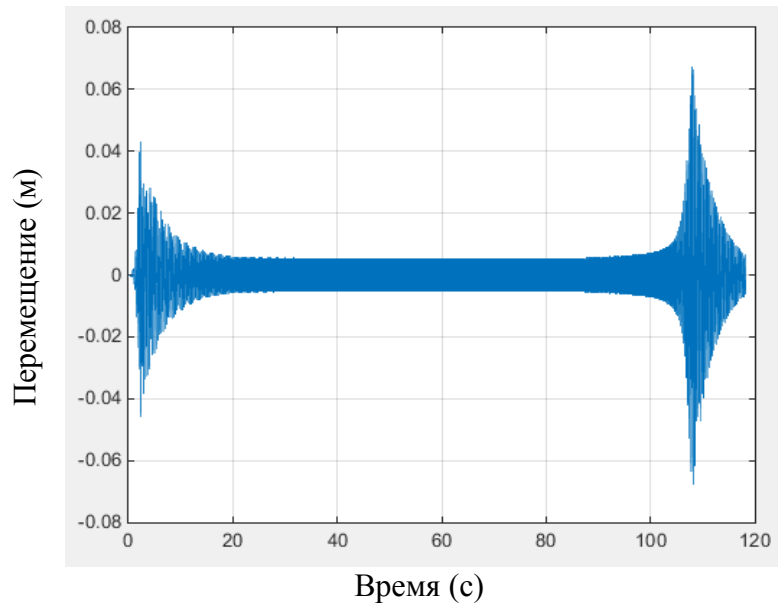


Рисунок 4.2 – Перемещения в системе 1

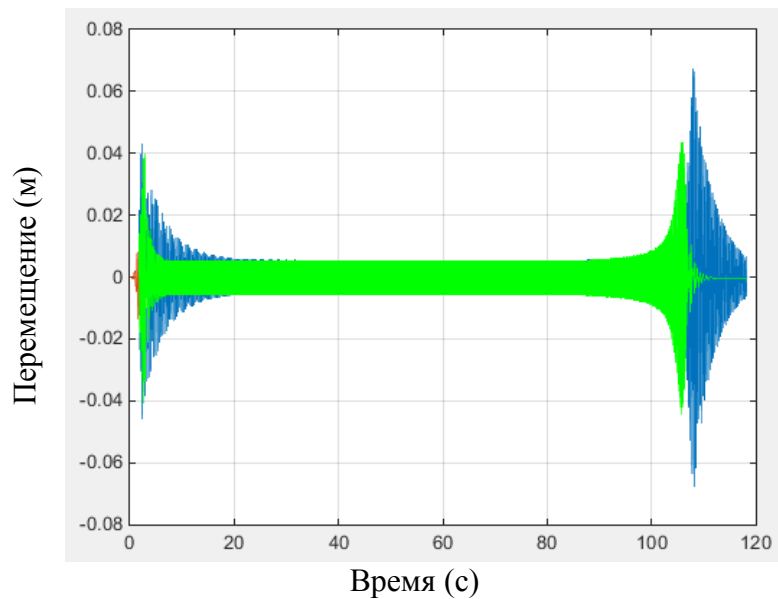


Рисунок 4.3 – Перемещения в традиционной системе (вариант 1) (синее) и с дополнительной связью (вариант 3) (зеленое)

Была сделана оценка 4 вариантов виброзащитных систем; традиционная система, система с дополнительной связью; система с дополнительной массой; и система с комбинацией дополнительной массы и связи.

Максимальные значения перемещений при традиционной системе виброизоляции были 0,0598; 0,0893 и 0,0061м при пуске, остановке и эксплуатации соответственно.

Для варианта 2 - системы с дополнительной связью, наибольший эффект при включении связи при пуске был при  $k_2=1500$ кН/м. Остальные значения жесткости дали неблагоприятные результаты, перемещения увеличивались.

При остановке оптимальное значение жесткости  $k_2$  было 2500 кН/м.

В эксплуатационном режиме, естественно, дополнительные связи не влияли на уровни перемещений.

Для варианта 3 - системы с дополнительным блоком, оптимальное значение массы  $m_2$  при пуске и остановке было 2т.

Для варианта 4 - значение  $k_2 = 500$  кН/м дало наибольший эффект уменьшения перемещений при пуске и остановке.

Определены также максимальные реакции, передаваемые на опорные конструкции. Вариант 1 принимался в качестве контрольного для сравнения с остальными значениями реакций при других вариантах виброизоляции.

Для варианта 2 оптимальное значение жесткости было  $k_2 = 2500$ кН/м, при котором значение реакции увеличилось на 47% при пуске и уменьшилось на 48% при остановке.

Для варианта 3 оптимальное значение массы  $m_2$  было 4т. При этом, значение реакции уменьшилось в 5 раз, на 38%, и на 55% соответственно при эксплуатации, пуске и остановке.

"Для варианта 4 благоприятное значение –  $k_3 = 500$  кН/м, при котором наблюдалось существенное уменьшение реакции на опорные конструкции: в 5 раз при эксплуатации, 2 и 3 раза при пуске и остановке" [40].

Таблица 4.2 Максимальные значения усилий, передающихся на опорные конструкции при 4 вариантах виброизоляции

Вариант виброизоляции	Постоянный параметр	измененный параметр	Максимальное усилие на опорные конструкции (кН)		
			при пуске	при остановке	при эксплуатации
1. Традиционная система	$m_1 = 10\text{т}; k_1 = 4200\text{кН/м}$	-	251.16	375.06	25.62
2. Система с дополнительной связью	$m_1 = 10\text{т}; k_1 = 4200\text{кН/м}$	$k_2$ (кН/м)			
		500	295.63	402.32	25.62
		1000	334.88	413.92	25.62
		1500	336.87	396.72	25.62
		2000	451.36	318.68	25.62
		2500	471.68	193.63	25.62
3. Система с дополнительным блоком	$m_1 = 10\text{т}; k_1 = 3500\text{кН/м}; k_2 = 4200\text{кН/м}$	$m_2$ (т)			
		2	141.96	132.72	19.74
		3	163.8	155.4	8.4
		4	154.56	169.26	5.04
		5	173.46	178.08	3.906
		6	171.78	182.7	3.192
4. Система с дополнительным блоком и связью	$m_1 = 10\text{т}; m_2 = 6\text{т}; k_1 = 3500\text{кН/м}; k_2 = 4200\text{кН/м}$	$k_3$ (кН/м)			
		500	128.31	120.32	3.192
		1000	143.52	133.12	3.192
		1500	158.46	147.63	3.192
		2000	173.60	161.82	3.192
		2500	188.94	176.21	3.192

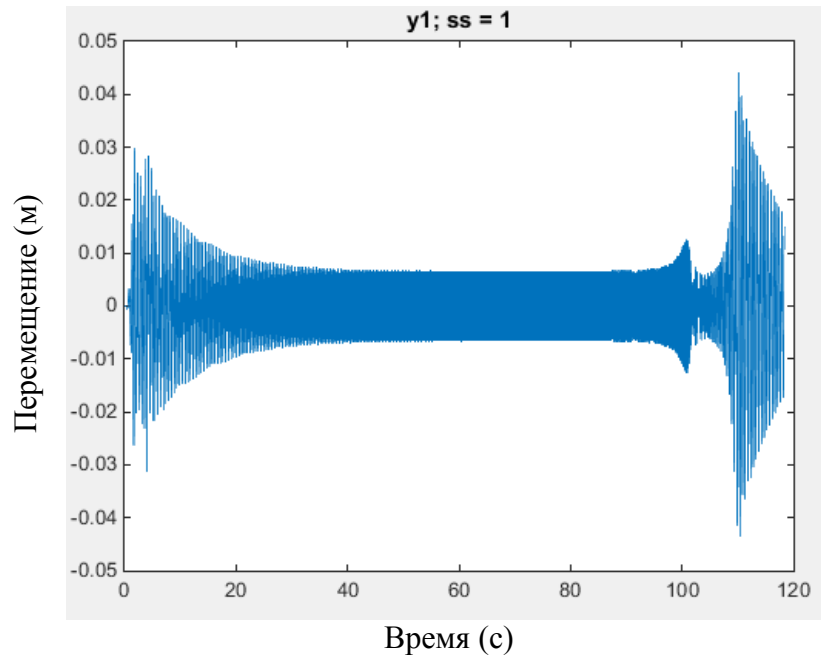
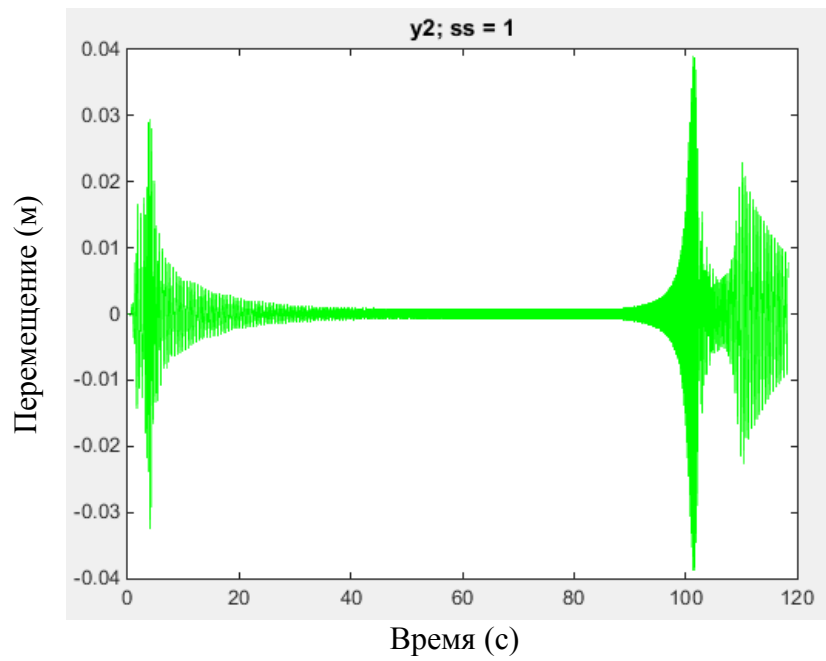
Рисунок 4.4 – Перемещения массы  $m_1$  системы 3Рисунок 4.5 – Перемещения дополнительной массы  $m_2$  системы 3

Таблица 4.3 Влияние длительности времени пуска и остановки на амплитуды перемещений

	Время пуска (с)		увеличение перемещений в %	Время остановки(с)		увеличение перемещений в %
	8	12		15	45	
вариант 1	0.0509	0.0598	15	0.0573	0.0893	36
вариант 2	0.0534	0.0591	10	0.0439	0.0696	37
вариант 3 (m <sub>1</sub> )	0.0311	0.0368	15	0.0338	0.0571	41
вариант 3 (m <sub>2</sub> )	0.0374	0.0409	9	0.0344	0.0435	21
вариант 4 (m <sub>1</sub> )	0.0223	0.0210	-6	0.0337	0.0578	42
вариант 4 (m <sub>2</sub> )	0.0232	0.0278	17	0.0208	0.0259	20

Было исследовано влияние длительности переходных режимов на амплитуды перемещений (таблица 4.3) [40].

"Увеличение интервалов времени в переходных режимах, дало разные эффекты. Увеличение интервала времени на 33% приводило к увеличению перемещению на 9-17% для всех вариантов виброизоляции. Однако, перемещение массы m<sub>1</sub> уменьшилось на 6% при пуске в системе 4" [40].

"При остановке, увеличение времени на 67% дало увеличению амплитуды перемещений на 20%-42%"[40].

Таблица 4.4 Влияние значения зазора  $y_0$  на усилия, передающиеся на опорные конструкции

$k_1$ (кН/м)	$k_2$ (кН/м)	$y_0$ (м)	амплитуда перемещений (м)		усилие на опорные конструкции (кН)	
			при пуске	при остановке	при пуске	при остановке
3500	500	0.015	0.0596	0.0804	238.40	321.60
		0.025	0.0579	0.0745	231.60	298.00
		0.035	0.0563	0.0723	225.20	289.20
	1000	0.015	0.0604	0.0704	271.80	316.80
		0.025	0.0583	0.0609	262.35	274.05
		0.035	0.0561	0.0676	252.45	304.20
	1500	0.015	0.0548	0.0545	274.00	272.50
		0.025	0.0573	0.0512	286.50	256.00
		0.035	0.0558	0.0930	279.00	465.00

Увеличение значения зазора привело к уменьшению перемещения и усилия, передающегося на опорные конструкции, при  $k_2 = 500, 1000$ кН/м; а при  $k_2 = 1500$ кН/м увеличивались перемещения и усилия.

По результатам выполненных расчетов можно дать общую оценку эффективности 4 вариантов виброизоляции грохота: как системы с ОСС - традиционной системы виброизоляции, с дополнительной связью; как системы с ДСС - с дополнительной массой, и системы с дополнительной массой и связью.

Можно отметить, что самый оптимальный вариант виброизоляции – система с дополнительной массой и связью. При этом, значение реакции уменьшилось в 5 раз при эксплуатации, 2 и 3 раза при пуске и остановке соответственно. Увеличение интервала времени приводило к увеличению амплитуды перемещений для всех вариантов.

#### 4.1.2 Расчет фундаментов машин ударного действия

"В качестве примера, дан расчет молота М4138 [23] с параметрами: общая масса (молота и шабота) - 22т; масса падающих частей - 0,63т; импульс вертикальной силы - 5,2кН.с. При расчетах рассматривались 4 типа виброизоляции"[41].

"При традиционной виброизоляции (рисунок 2.2а) с использованием резиновых виброизоляторов собственная частота виброизолированного оборудования, как правило, не ниже 5-7 Гц. При частоте 7 Гц (44 рад/с) жесткость виброизоляторов составляет  $k = p_{01}^2 \cdot m_1 = (7 \cdot 2\pi)^2 \cdot 22,63 = 4,4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}$ " [41].

Для однозвенной виброизоляции с односторонней дополнительной связью (рисунок 3.2а) принимаем  $m_1 = 22,63\text{т}$ ;  $k_1 = 4,4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}$ ; жесткость дополнительной связи  $k_2 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}$ ; величина зазора  $z_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

Для двухзвенной виброизоляции (рисунок 2.2б) соотношение масс ( $h_1$ ) и жесткостей ( $s_1$ ) соответственно равны 6 и 0,8. Тогда при  $m_1 = 22,63\text{т}$ ;  $k_1 = 4,4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}$ ,  $m_2 = 3,77\text{т}$ ;  $k_2 = 3,5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}$ .

Для двухзвенной виброизоляции с нижней односторонней дополнительной связью (рисунок 3.2б) принимаем такие же значение  $h_1$  и  $s_1$ ; жесткость дополнительной связи  $k_3 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}$ , величина зазора  $z_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

Размеры фундамента - 4м x 4м, высота 2м; удельный вес железобетона  $\gamma_{\sigma} = 2,4\text{т/м}^3$ .  
Значение коэффициента демпфирования по гипотезе частотно-независимого трения  $\gamma = 0,1$ .

"Коэффициент упругого равномерного сжатия грунта принят равным" [41]

$$C_z = b_0 \cdot E \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{A_{10}}{A}} \right) = 7,1 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^3; \text{ где } b_0 = 1,4; E = 28 \cdot 10^3 \text{ кПа}; A_{10} = 10\text{м}^2; A = 4\text{м} \times 4\text{м}.$$

Уравнения движения для системы с ОСС даны в разделе 2.1.1 (формула (2.1)) и с ДСС даны в разделе 2.1.1 (формулы (2.7)).

Уравнения движения для системы с дополнительной массой как системы с ДСС даны в разделе 2.1.1- формула (2.7) и для системы с ограничителем перемещений нижней массы ( $m_2$ ) - формула (3.9).

Решения системы построены с использованием ИПФ (2.8) - (2.10) в форме "интегралов Дюамеля" (1.18) по п. 1.3:

- и зависимости (2.33) для варианта 1 и линейной части варианта 2; (3.6)-(3.8) для нелинейной части варианта 2;

- и (2.7)-(2.17) для варианта 3 и линейной части варианта 4; (3.27)-(3.30) для нелинейной части варианта 4.

### Результаты расчета

Результаты расчета приведены в таблице 4.5 и на рисунках 4.6, 4.7.

Таблица 4.5 Результаты расчета виброизолированных систем

Вариант виброизоляции	$p_i$ , рад/с	$y_{i \max}$ , мм	$Q_R$ , кН	$A$ , мм	$w_{\max}$ , см/с <sup>2</sup>
Традиционная система	44,0	4,7	206,80	0,21	41
С дополнительной связью	44,0	4,0	196,00	0,20	39
С дополнительным инерционным блоком	28,5	4,1	180,40	0,17	14
С дополнительным инерционным блоком и связью	28,5	3,2	156,80	0,14	12

"где  $p_i$  - частота собственных колебаний массы для системы с ОСС или, приближенно, первая частота собственных колебаний системы с ДСС;  $y_{i \max}$  -



максимальное перемещение системы с ОСС или нижней массы в системе с ДСС;  $Q_R$  - реакция, передающаяся на основание;  $A$ ,  $w_{max}$  - соответственно амплитуда и максимальное значение ускорения фундамента" [41].

Как следует из таблицы 4.4, по сравнению с традиционной системой виброизоляции снижение максимального значения перемещения незначительно для системы с дополнительной связью.

Уменьшение амплитуды перемещений и реакции, передаваемой на опорные конструкции, при использовании системы с дополнительным блоком, и системы с дополнительным блоком и связью соответственно составили: 14%, 29% и 13%, 24%.

Системы с дополнительным блоком и с дополнительным блоком и связью удовлетворяют требованиям СНиП [83] и [23].

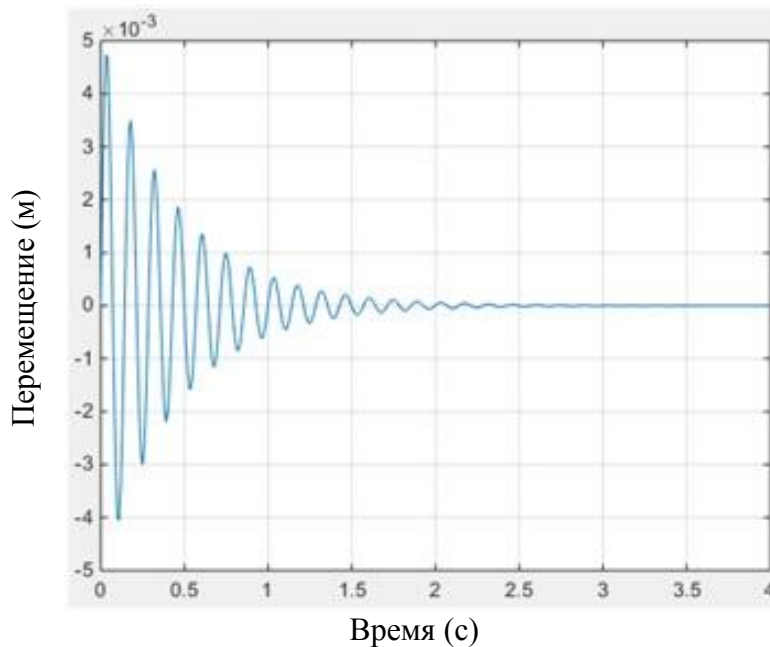


Рисунок 4.6 – График вертикальных колебаний оборудования (вариант 1) с импульсными нагрузками

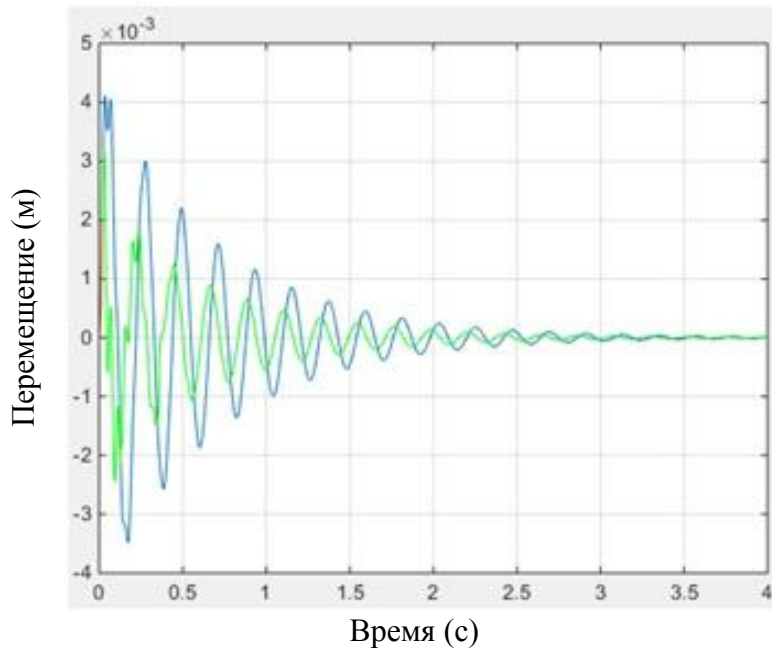


Рисунок 4.7– График вертикальных колебаний массы  $m_2$  при импульсных нагрузках (вариант 1 - синий; вариант 4 - зеленый)

"Как показали примеры расчета, для снижения уровней колебаний наиболее эффективны варианты с дополнительным блоком, что, естественно, совпадает с результатами, приведенными в работе [35]"[41].

"При снижении первой частоты систем в 1,5 раза амплитудные значения ускорений снижаются в 2,7-3 раза, что позволяет во многих случаях удовлетворять рекомендациям по нормированию уровней колебаний фундамента и ограничивать возможность развития дополнительных осадок"[41]. "Введение дополнительных связей позволяет несколько (на 15-30%) снижать уровни амплитудных перемещений и ускорений и сократить время затухания колебания (увеличивает декремент колебаний)" [41].

## 4.2 Плоские колебания массивных виброизолированных тел при произвольном смещении основания. Пример расчета

Рассмотрим колебания фундамента (стенда - рисунок 4.8) с установленным на нем оборудованием (в частности, при тарировке датчиков для регистрации вибраций).

Основные расчетные формулы и алгоритм даны в разделе 2.2.

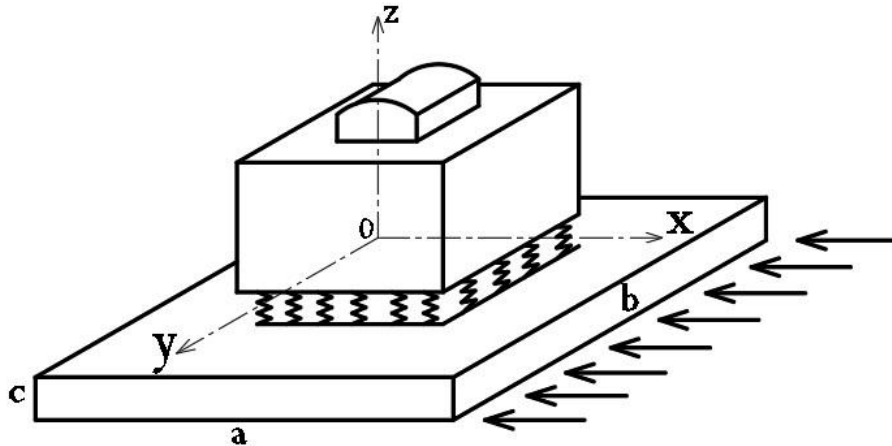


Рисунок 4.8 – Оборудование с фундаментом

### 1) Размеры и масса фундамента

$$a = 2\text{м}, b = 1,5\text{м}, c = 0,6\text{м}, m_{\text{ф}} = 3\text{т}, m = 2 \times 1,5 \times 0,6 \times 2,2\text{т/м}^3 = 4\text{т}, m_0 (\text{суммарная масса}) = 5,2\text{т};$$

### 2) Момент инерции фундамента (суммарный)

$$J_{\phi} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2) = \frac{4}{12}(1,5^2 + 0,6^2) = 0,87\text{м}^2; J_{\text{сум}} = 1,1\text{тм}^2; \rho_y^2 = \frac{1,1}{2,2} = 0,21\text{м}^3$$

### 3) Положение центра масс по (оси z)

$$h_0 = 0,4; l_0 = 1\text{м};$$

### 4) Горизонтальная и вращательная жесткости виброизоляции

$$k_S = \rho_{\text{гор}}^2 \cdot m_0 = (3 \cdot 2\pi)^2 \cdot 5,2 = 18,96 \cdot 10^2 \text{кН/м}; k_v = 15,2 \cdot 10^2 \text{кН/м}^2; k_{xz} = 13,10^2 \text{кН};$$

### 5) Парциальные частоты

$$n_{\text{гор}} = 3\text{Гц}; n_{\text{верт}} = 3,7\text{Гц};$$

### 6) Приведенные коэффициенты

$$\lambda_s = \frac{k_x}{m_0} = \frac{18,96 \cdot 10^2}{5,2} = 3,36 \cdot 10^2 \text{ (рад/с)}^2;$$

$$\lambda_v = \frac{k_v}{m_0 \rho_y^2} = \frac{15,2 \cdot 10^2}{5,2 \cdot 0,21} = 13,9 \cdot 10^2 \text{ (рад/с)}^2;$$

$$\lambda_{xz}^2 = \frac{(13,1 \cdot 10^2)^2}{5,2^2 \cdot 0,21} = 30,22 \cdot 10^4 \text{ (рад/с)}^4.$$

7. Уравнение частот (см. 8)

$$p^4 - (3,36 + 13,9) \cdot 10^2 p^2 + 3,36 \cdot 13,9 \cdot 10^4 - 30,22 \cdot 10^4 = 0;$$

8. Частоты собственных колебаний системы

$$p_{1(2)}^2 = \frac{17,26 \cdot 10^2 \mp \sqrt{(17,26 \cdot 10^2)^2 - 4 \cdot 16,484 \cdot 10^4}}{2} = \frac{17,26 \cdot 10^2 \mp 15,23 \cdot 10^2}{2} \text{ рад}^2/\text{с}^2$$

$$p_1^2 = 101,5 \text{ рад}^2/\text{с}^2; p_1 = 10,07; n_1 = 1,60 \text{ Гц};$$

$$p_2^2 = 1624,53 \text{ рад}^2/\text{с}^2; p_2 = 40,31; n_1 = 6,42 \text{ Гц};$$

9. Закон смещения основания  $\xi_0(t) = E_0 \sin(\omega t)$  реализуется в начальный момент времени

Алгоритм вычислений основан на формулах (2.53) - (2.61).

На рисунках 4.9 и 4.10 показаны соответственно горизонтальные смещения центра масс и угла поворота относительно оси у в переходном и эксплуатационном режимах.

На примере проиллюстрирован метод и алгоритм расчета плоских колебаний массивных тел при произвольном смещении основания. Этот метод расчета также можно определить как нетрадиционный метод "нормальных форм". "С помощью ПФ и ИПФ линейных динамических систем решения строятся в виде разложения по формам собственных колебаний сразу относительно обобщенных перемещений" [34].

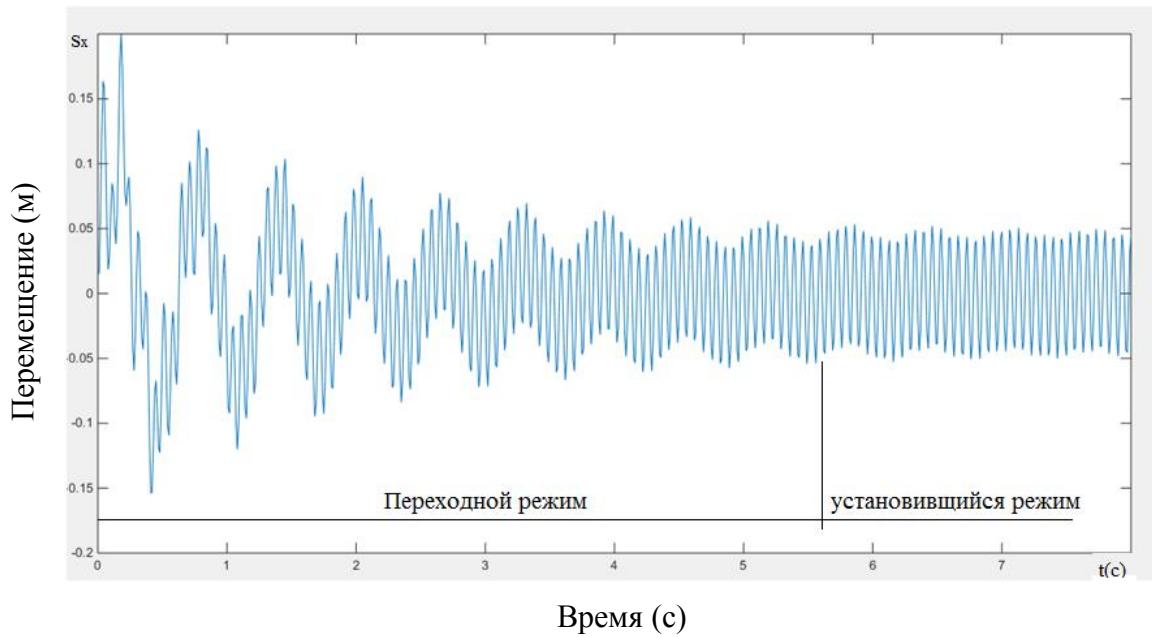


Рисунок 4.9 – Горизонтальное смещение центра масс  $s_x$

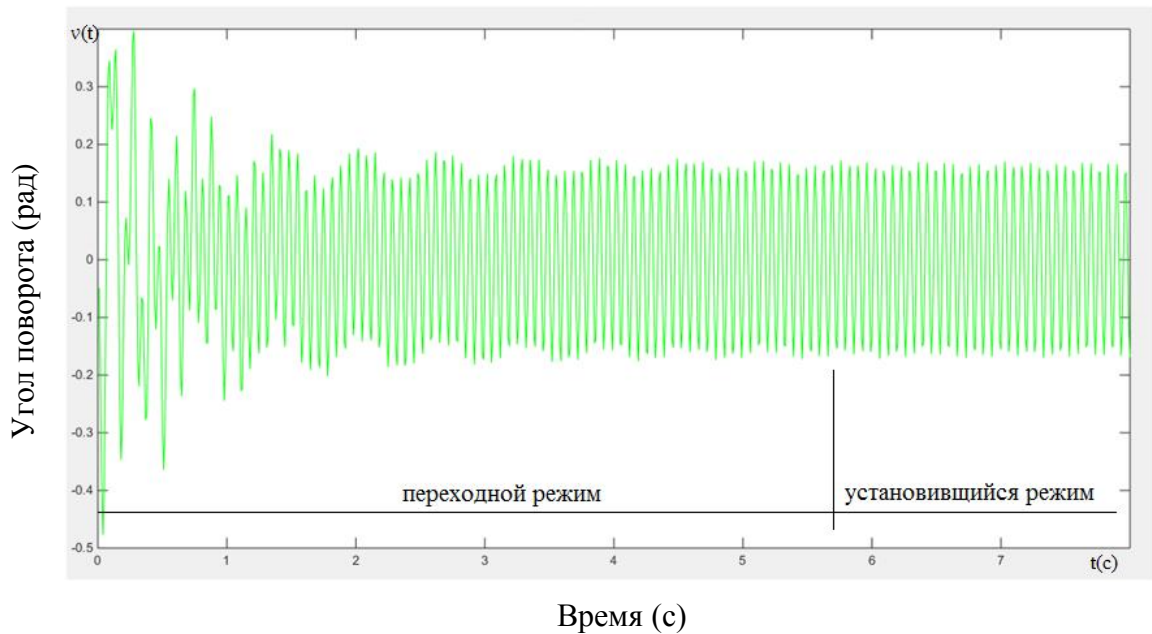


Рисунок 4.10 – Угол поворота  $v_y(t)$  относительно оси  $Oy$

Подобный подход может быть легко распространен на расчет плоских колебаний массивных виброизолированных тел в общем случае для гармонических и свободных колебаний в замкнутом виде и алгоритм расчета при произвольном смещении основания в форме "интеграла Дюамеля".

### 4.3 Расчет систем виброизоляции с демпферами вязкого трения. Пример расчета

Расчет системы виброизоляции с демпфером вязкого трения рассмотрим на примере нелинейной системы с ОСС (рисунок 3.5а) при таких параметрах:

$m = 10\text{т}$  - масса оборудования с гармоническим воздействием (грохота);

$k_1 = 3,5 \cdot 10^3 \text{ кН/м}$  - жесткость упругих элементов;

$Q_0 = 350\text{кН}$  - амплитуда возмущающей силы;

$\omega = 78,5 \text{ рад/с}$  ( $12,5\text{Гц}$ ) - частота возмущения в режиме работы;

$\gamma = 1$  - коэффициент неупругого сопротивления в элементах виброизоляции;

$\gamma_d = 0,21; 0,3$  - условные коэффициенты в демпферах вязкого трения.

Характер изменения нагрузки дан в (4.1)-(4.4);

величина перемещения  $y_0$ , определяющая время включения демпфера, принималась равной  $y_0 = 0,015\text{м}$ .

Уравнения движения для системы с ОСС даны в разделе 3.2.1 (формулы (3.31)).

Решения системы уравнений движения определялись с использованием ИПФ (формулы (3.23) - (3.28) в форме "интегралов Дюамеля" (1.18) по п. 1.3) и, учитывая зависимости (2.2)-(2.6) для варианта 1 и линейной части варианта 2 и (3.32)-(3.37) для нелинейной части варианта 2.

Перемещения массы  $m_1$  в переходных и рабочих режимах для систем без демпфера и с демпферами при значениях  $\gamma_d = 0,21; 0,3$  показаны на рисунках 4.12 и 4.13.

Максимальные значения амплитуд колебаний при различных интервалах времени переходных режимов даны в таблице 4.6.

Табл. 4.6 Максимальные значения амплитуд колебаний в переходных режимах

Тип виброизоляции	режим пуска (с)		режим остановки (с)	
	8	12	15	45
	Амплитуды колебания (м)			
без демпфера	0.0452	0.0556	0.0536	0.085
с демпфером вязкого трения	$\gamma_d = 0.21$			
	0.0345	0.0345	0.0332	0.0331
	$\gamma_d = 0.3$			
	0.0317	0.0329	0.03	0.0327

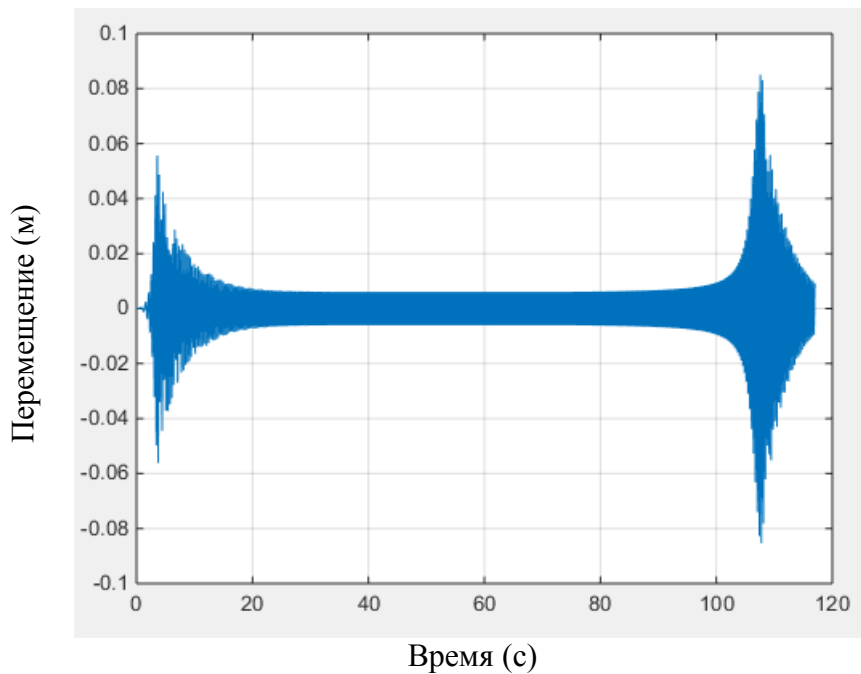


Рисунок 4.11– Линейная система (без демпфера)

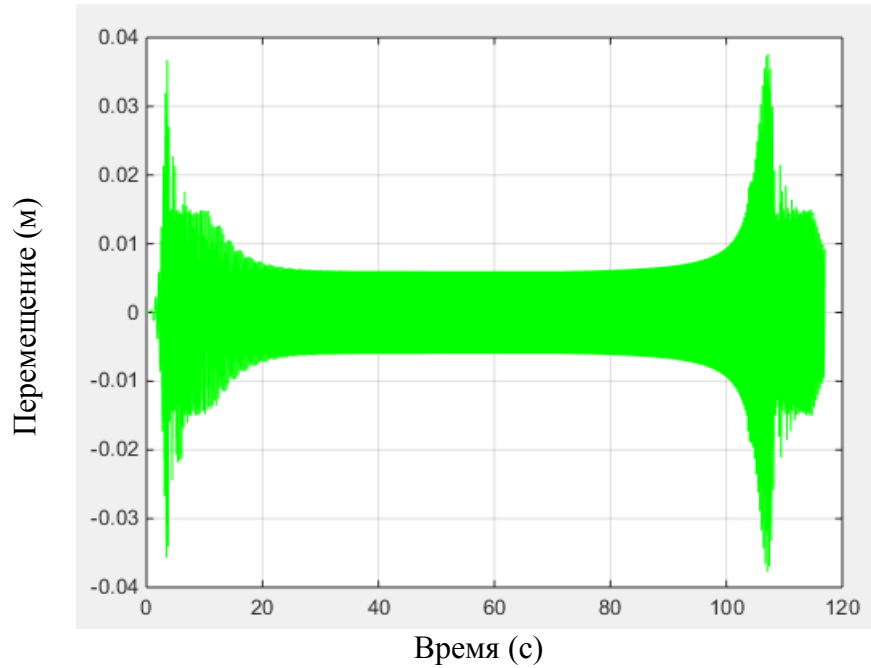


Рисунок 4.12 – Система с демпфером вязкого трения с  $\gamma_d = 0,21$

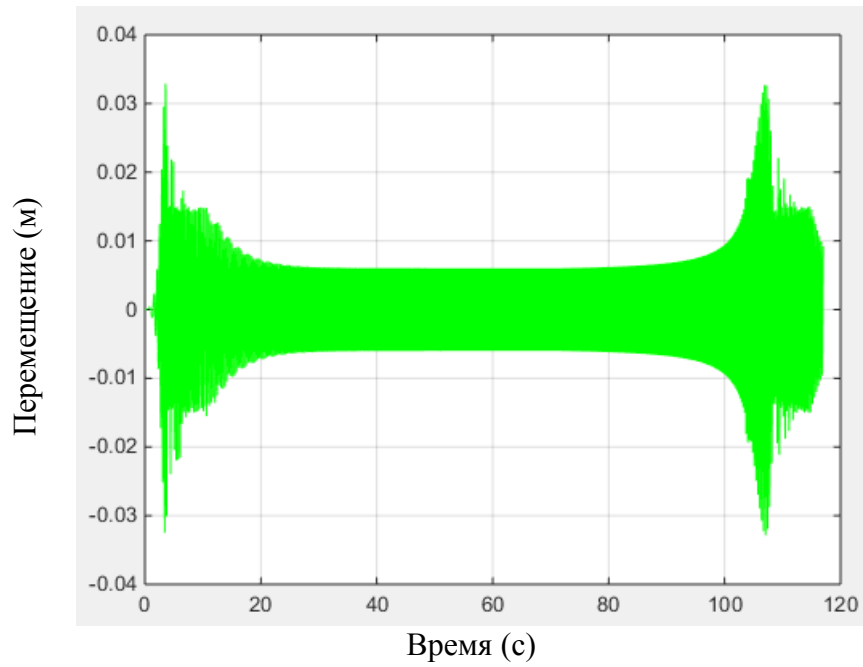


Рисунок 4.13 – Система с демпфером вязкого трения с  $\gamma_d = 0,3$



Как краткие выводы можно отметить:

- "приведенный метод, алгоритмы расчета и расчетные зависимости позволяют количественно оценивать эффективность включения демпферов вязкого трения в системы виброизоляции в переходных режимах"[38];;
- "включение в работу системы демпферов вязкого трения в переходных режимах позволяет существенно снижать уровни колебаний в резонансных зонах"[38];;
- "в системах виброизоляции с демпферами вязкого трения амплитуды перемещений в зоне резонанса практически не зависят от длительности пускового и остановочного режимов"[38];
- "при отключении демпфера происходит "срыв" колебаний, что характерно для нелинейных систем (рисунки 4.11 и 4.13)" [38]

## ГЛАВА 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

### 5.1 Приближенные методы расчета нелинейных систем с КЧСС.

При расчете нелинейных систем широко используются как численные, так и аналитические методы, которые значительно отличаются по подходам и структуре полученных результатов.

Метод, который использовался в работе, может быть отнесен к численно-аналитическому. Конечные результаты получены с помощью численного вычисления интегралов, однако существует возможность при анализе системы воспользоваться понятием "нормальных форм" на первых этапах расчета.

Для расчета систем с определенным характером воздействий (чаще гармонических) широко используются приближенные методы, которые позволяют получить наряду с решением и общие характеристики систем и, в частности, АЧХ.

"Одним из приближенных аналитических методов, используемых при расчете нелинейных систем, является метод гармонического баланса" [15]. Метод основан на замене нелинейных членов специальным образом выбранными линейными членами, так чтобы можно было использовать линейные дифференциальные уравнения для решения нелинейных систем.

Решение нелинейной системы с периодической функцией, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{u} + f(u, \dot{u}) = q(\omega t), \quad (5.1)$$

представляется в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \psi_n t + B_n \sin \psi_n t) \\ \dot{u} &= \psi_n \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n \sin \psi_n t + B_n \cos \psi_n t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Эти решения представляют собой суммы основной и других гармоник. Определяют неизвестные и подставляют в уравнение (5.1). Выражение  $f(u, \dot{u}) = q(\omega t)$  разлагают в ряды Фурье.

Формулы для определения параметров  $A_0, A_n, B_n$  получают, приравнявая в левой и правой частях равенства коэффициенты при  $\cos \psi_n t, \sin \psi_n t$ .

Для увеличения точности расчета учитывают, по возможности, большее число гармоник. Так как число гармоник ограничено, метод считается приближенным.

Не менее известным приближенным аналитическим методом является метод гармонической линеаризации [5, 49].

Рассмотрим нелинейность вида

$$F(u, \dot{u}) = \varepsilon f(u, \dot{u}) \quad (5.3)$$

где  $\xi$  - малый параметр.

Решение дифференциального уравнения

$$m\ddot{x} + kx + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0 \quad (5.4)$$

записывается так

$$x = a \cos(\omega t + \theta). \quad (5.5)$$

Заменяем нелинейную функцию линейной  $F(x, \dot{x})$

$$F_1(x, \dot{x}) = kx + \bar{\lambda}\dot{x}, \quad (5.6)$$

где

$$\bar{k} = k + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (5.7)$$

$$\bar{\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (5.8)$$

$$\psi = \omega t + \theta$$

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение примет вид

$$m\ddot{x} + \bar{\lambda}\dot{x} + \bar{k}x = 0. \quad (5.9)$$

Очевидно, что решения методом гармонической линеаризации и гармонического баланса совпадают в тех случаях, когда функция  $f^*(u, \dot{u})$  может быть представлена так:

$$f^*(u, \dot{u}) = qu + r\dot{u} + s \quad (5.10)$$

Метод гармонического баланса был развит, в частности, в работах [34, 47].

## 5.2 Метод расчета систем с нелинейными элементами, основанный на специальном выборе порождающих систем

В работе при построении приближенных решений и, в том числе, АЧХ, был использован метод, предложенный Ю. Т. Черновым и основанный на специальном выборе порождающих уравнений.

"Порождающее уравнение выбирается из условия минимума погрешности нулевого приближения по отношению к первому и последующим приближениям. Такой подход при построении периодических решений в нелинейных системах с затуханием позволяет избежать, в ряде случаев, решения уравнений относительно фазовых углов"[34].

Проиллюстрируем метод на примере нелинейной системы с ОСС, уравнение движения которой имеет вид:

$$m\ddot{u} + 2v_1\dot{u} + c_1(u)u = q(t), \quad (5.11)$$

где  $f_1(u) = c_1(u)u$  - определяет нелинейную зависимость.

Преобразуя, можно записать

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + p_o^2 u = \frac{q(t)}{m} - f_1(u) \quad (5.12)$$

$$n = \frac{v_1}{m}; f_1 = \frac{c_1(u)}{m} - p_o^2; p_o^2 = \frac{k_o}{m} \quad (5.13)$$

$k_o$  - жесткость порождающей системы.

Решения уравнения (5.12) запишем с помощью "интеграла Дюамеля"

$$u(t) = u_o(t) - \int_0^t f_1[u(\tau)]V(p_o^*, t - \tau) d\tau; \quad (5.14)$$

$$\text{где } u_o(t) = \frac{1}{m_0} \int_0^t q(\tau)V(p_o^*, t - \tau) d\tau; \quad (5.15)$$

- перемещение в линейной системе с нулевыми начальными параметрами;

$$V(t) = \frac{e^{-nt}}{p_o^*} \sin p_o^* t \quad (5.16)$$

-ИПФ линейной системы.

Уравнение (5.14) можно преобразовать в нелинейное интегральное уравнение второго порядка

$$u(t) + \int_0^t f_1[u(\tau)]V(p_o^*, t - \tau) d\tau = u_o(t). \quad (5.17)$$

Для нелинейной связи принимаем кубическую зависимость

$$c_1(u)u = k_H(1 + \alpha_1 u^2)u; \quad (5.18)$$

и нагрузку  $q(t) = Q \cos \omega t$ .

Тогда решение в первом приближении без учета затухания можно записать так

$$q(t) = u_o(t) - h(t); \quad (5.19)$$

$$\text{где } u_o(t) = A_{1(0)} \cos(\omega t + \varphi_1). \quad (5.20)$$

- нулевое приближение с нулевыми начальными параметрами

$$A_{1(0)} = \frac{Q}{mT_1} \cos(\omega t + \varphi_1); T_1 = \left[ (p^2 - p_o^2)^2 - 4\omega^2 n^2 \right]^{1/2}; \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\omega n}{p_o^2 - \omega^2}; \quad (5.21)$$

$$h(t) = \int_0^t \left[ (p^2 - p_o^2)u_o(\tau) + p^2 \alpha_1 u_o^3(\tau) \right] V_1(p_o^*, t - \tau) d\tau; p^2 = \frac{k_H}{m}. \quad (5.22)$$

В соответствии с методом, основанным на специальном выборе порождающих функций, приравняем к нулю выражение в квадратных скобках под интегралом (5.22).

$$(p^2 - p_o^2)u_o(\tau) + p^2 \alpha_1 u_o^3(\tau) = 0 \quad (5.23)$$

После преобразований и с учетом (13.20) получим следующее уравнение:

$$\lambda^3 - (p^2 - 2\omega^2)\lambda^2 + (\omega^2 + 2p^2 - 4n^2)\omega^2\lambda - p^2(\omega^2 + 4n^2)\omega^2 - \frac{3}{4}\alpha_1 p^2 \frac{Q^2}{m} = 0 \quad (5.24)$$

где  $\lambda = p_0^2$

Алгоритм построения АЧХ следующий. Для каждого значения  $\omega$  и  $Q$  внешней нагрузки вычисляют соответствующую оптимальную жесткость порождающей системы  $k_o$  (из уравнения (5.24), решение которой дает наименьшую погрешность по отношению к исходной нелинейной системе). Далее определяются амплитуды колебаний масс системы с учетом затухания по формуле (5.21) [18, 34]:

Были решены две задачи систем с нелинейным гасителем.

### 5.2.1 Расчетная схема 1

Рассмотрим систему с 3-мя степенями свободы, представляющую собой этажерку (масса  $m_2$ ) с установленным на ней динамическим оборудованием (масса  $m_1$ ). Масса  $m_3$  в этой системе – нелинейный гаситель (см. рисунок 5.1).

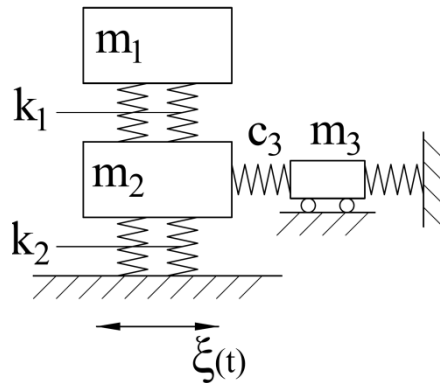


Рисунок 5.1 – Расчетная схема системы с ДСС с дополнительным гасителем

Система уравнений движения такой системы имеет вид:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (x_1 - x_2) = -m_1 \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2}; \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (x_1 - x_2) + \left(1 + 2\nu_2 \frac{d}{dt}\right) k_2 x_2 + \left(1 + 2\nu_3 \frac{d}{dt}\right) c_3 (x_2 - x_3) = -m_2 \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2}; \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} - \left(1 + 2\nu_3 \frac{d}{dt}\right) c_3 (x_2 - x_3) = 0, \end{cases} \quad (5.25)$$

где  $m_1, m_2, m_3$  – массы элементов системы;

$k_1, k_2, c_3$  – жесткости элементов системы;

$x_1, x_2, x_3$  – горизонтальные перемещения элементов системы;

$\nu_1, \nu_2, \nu_3$  – коэффициенты демпфирования системы;

$\xi(t)$  – закон перемещения основания.

Реакция в связи, присоединяющей гаситель, определяется в соответствии с зависимостью:

$$c_3 (x_2 - x_3) = k_n \left(1 + \alpha (x_2 - x_3)^2\right) (x_2 - x_3). \quad (5.26)$$

В соответствии с методом, заключающемся в специальном выборе порождающей линейной системы [34], обозначим  $k_d$  жесткость гасителя в порождающей системе.

Тогда уравнения движения порождающей линейной системы примут вид:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (x_1 - x_2) = -m_1 \frac{d^2 \xi}{dt^2}; \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (x_1 - x_2) + \left(1 + 2\nu_2 \frac{d}{dt}\right) k_2 x_2 + \left(1 + 2\nu_3 \frac{d}{dt}\right) k_d (x_2 - x_3) = -m_2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}; \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} - \left(1 + 2\nu_3 \frac{d}{dt}\right) k_d (x_2 - x_3) = 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

В первом приближении перемещения масс определяем по формулам:

$$x_{i,1}(t) = x_{i,0}(t) - h_i(t), \quad (5.28)$$

$$\text{где } h_i(t) = \sum_{j=1}^3 \int_0^t f_j(t) V_{ij}(t-\tau) d\tau, \quad (5.29)$$

где, отбросив затухающие составляющие, запишем

$$f_1(t) = 0; f_2(t) = c_3(x_2 - x_3) - k_d(x_2 - x_3) = (k_n - k_d)(x_2 - x_3) + k_n \alpha (x_2 - x_3)^3; \quad (5.30)$$

$$f_3(t) = -f_2(t). \quad (5.31)$$

При нулевых начальных условиях и при перемещении основания  $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi_0 \sin \omega t$

перемещения в линейной порождающей системе  $z_{i,0}(t)$  принимают вид:

$$x_{i,0}(t) = X_{i,0} \sin \omega t. \quad (5.32)$$

Тогда уравнения движения (5.27) можно представить в виде:

$$AX_0 = B,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_d - m_2 \omega^2 & -k_d \\ 0 & -k_d & k_d - m_3 \omega^2 \end{pmatrix}; X_0 = \begin{pmatrix} X_{1,0} \\ X_{2,0} \\ X_{3,0} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -m_1 \xi_0 \\ -m_2 \xi_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Решая линейную систему, получим следующие выражения для перемещений масс  $x_{i,0}(t)$  без учета затухания:

$$x_{i,0}(t) = X_{i,0} \sin \omega t = -\frac{\xi_0 C_i(\omega)}{D(\omega)} \sin \omega t; \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.34)$$

$$\text{где } C_1(\omega) = m_1 \left[ (k_1 + k_2 + k_d - m_2 \omega^2)(k_d - m_3 \omega^2) - k_d^2 \right] + m_2 k_1 (k_d - m_3 \omega^2); \quad (5.35)$$

$$C_2(\omega) = (k_d - m_3 \omega^2) [m_1 k_1 + m_2 (k_1 - m_1 \omega^2)]; \quad (5.36)$$

$$C_3(\omega) = k_d [m_1 k_1 + m_2 (k_1 - m_1 \omega^2)]; \quad (5.37)$$

$D(\omega)$  – определитель системы (5.27), равный

$$D(\omega) = D_1 k_d + D_0, \quad (5.38)$$

$$\text{где } D_1 = (k_1 - m_1 \omega^2)(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2 - m_3 \omega^2) - k_1^2; \quad (5.39)$$

$$D_0 = -[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) - k_1^2] m_3 \omega^2. \quad (5.40)$$

Функция  $f_2(t)$  принимает вид:



$$f_2(t) = -(k_n - k_d) \frac{\xi_0 \Delta C(\omega)}{D(\omega)} \sin \omega t - k_n \alpha \frac{\xi_0^3 \Delta C^3(\omega)}{D^3(\omega)} \cdot \frac{3 \sin \omega t - \sin 3\omega t}{4}, \quad (5.41)$$

$$\text{где } \Delta C(\omega) = C_2(\omega) - C_3(\omega) = -m_3 \omega^2 [m_1 k_1 + m_2 (k_1 - m_1 \omega^2)]. \quad (5.42)$$

В соответствии с принятым методом, приравняем к нулю коэффициенты при основной гармонике  $\sin \omega t$  в  $f_2(t)$ . После преобразований получим следующее уравнение:

$$4D_1^2 k_d^3 + 4D_1 (2D_0 - D_1 k_n) k_d^2 + 4D_0 (D_0 - 2D_1 k_n) k_d - 4D_0^2 k_n - 3k_n \alpha \xi_0^2 \Delta C^2(\omega) = 0. \quad (5.43)$$

Алгоритм построения АЧХ следующий. Для каждого значения  $\omega$  и  $\xi_0$  внешней нагрузки вычисляют соответствующую оптимальную жесткость порождающей системы  $k_d$  (из уравнения (5.43), решение которой дает наименьшую погрешность по отношению к исходной нелинейной системе). Далее определяются амплитуды колебаний масс системы с учетом затухания по формуле [18,34]:

$$X_{i,0} = -\frac{\xi_0}{B} \sum_{s=1}^3 \frac{C_i(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 A_s} \quad (i = 3), \quad (5.44)$$

$$\text{где } B = m_1 m_2 m_3 (p_3^2 - p_2^2)(p_3^2 - p_1^2)(p_2^2 - p_1^2);$$

$$C_i(p_s) - \text{по формулам (5.35)–(5.37);}$$

$$p_s - \text{собственные частоты системы (5.33);}$$

$$R(s) - \text{по формуле (2.76);}$$

$$A_s = \sqrt{(1 - \omega^2 / p_s^2)^2 + \gamma_s^2};$$

$\gamma_s$  – коэффициенты демпфирования, соответствующие собственным формам.

### Пример расчета

Характеристики рассматриваемой системы приняты следующие:  $m_1 = 1$  т,  $m_2 = 10$  т,  $m_3 = 1$  т;  $k_1 = 30 \cdot 10^3$  кН/м;  $k_2 = 58 \cdot 10^3$  кН/м;  $k_n = 5000$  кН/м;  $\alpha = 10^4$ .

Амплитуда ускорений основания  $\xi_0 = 1$  м/с<sup>2</sup>.

Полученные амплитуды перемещений массы  $m_2$  представлены на рисунке 5.2. Также построена АЧХ для системы без гасителя колебаний.

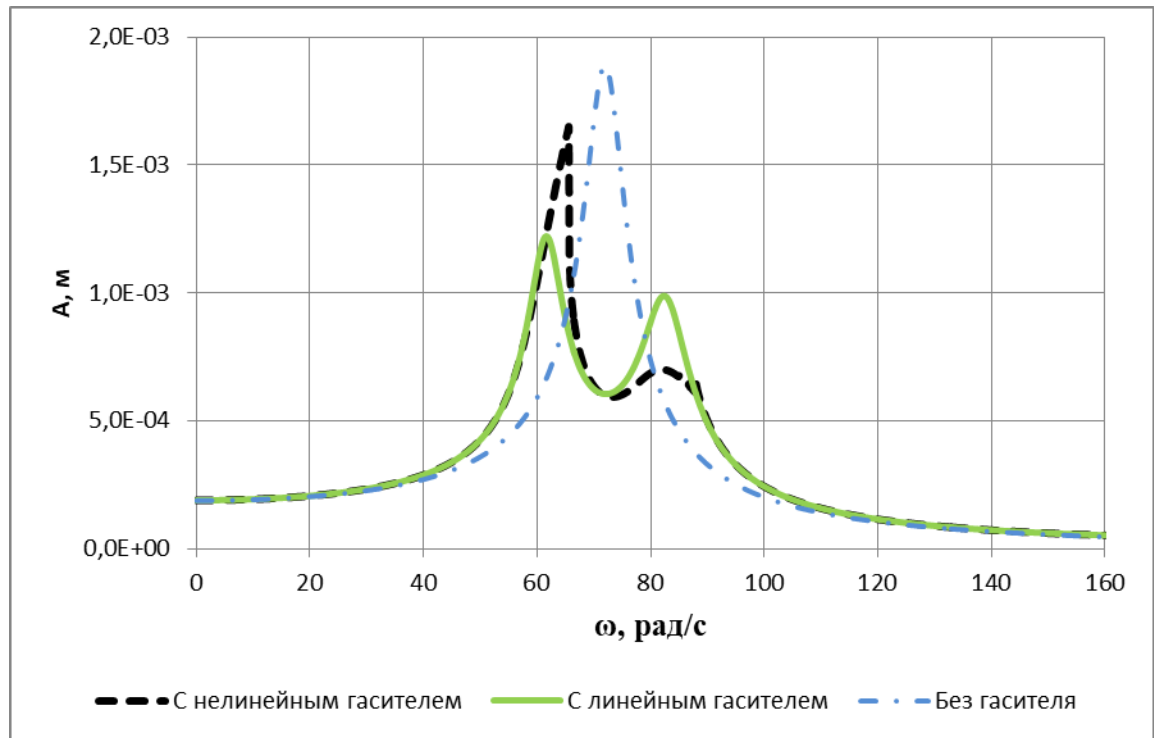


Рисунок 5.2 – АЧХ для нижних масс систем: с нелинейным гасителем (черная пунктирная линия); с линейным гасителем (зеленая сплошная линия); без гасителя (синяя штрихпунктирная линия)

Т.к. согласно существующей практике, гасители колебаний обычно настраивают на первую частоту системы без гасителя, то будем оценивать их эффективность, сравнивая амплитуды перемещений нижней массы системы с гасителем и без. Для рассматриваемой системы эта частота равна 71,9 рад/с.

При использовании нелинейного гасителя колебаний амплитуда перемещений нижней массы на этой частоте уменьшается в 3,1 раза. Нелинейный гаситель позволяет увеличить зону эффективного гашения.

### 5.2.2 Расчетная схема 2

Рассмотрим систему с 3-мя степенями свободы, расчетная схема которой приведена на рисунке 5.3. Система представляет собой этажерку (масса  $m_3$ ), на

которой установлено оборудование (масса  $m_2$ ) с нелинейным гасителем  $m_1$  (см. рисунок 5.3).

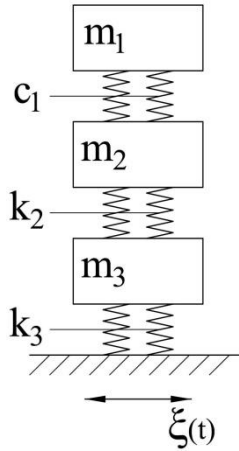


Рисунок 5.3 – Расчетная схема системы с 3-мя степенями свободы

Реакция в связи, присоединяющей динамический гаситель, определяется по формуле:

$$c_1(x_1 - x_2) = k_n \left(1 + \alpha(x_1 - x_2)^2\right)(x_1 - x_2). \quad (5.45)$$

Ход решения аналогичен решению в первом расчетном примере.

Обозначим  $k_d$  жесткость гасителя в порождающей системе. Уравнения движения порождающей линейной системы будут иметь вид:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_d (x_1 - x_2) = -m_1 \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2}; \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 (x_1 - x_2) + \left(1 + 2\nu_2 \frac{d}{dt}\right) k_2 (x_2 - x_3) = -m_2 \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2}. \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} - \left(1 + 2\nu_2 \frac{d}{dt}\right) k_2 (x_2 - x_3) + \left(1 + 2\nu_3 \frac{d}{dt}\right) k_3 x_3 = -m_3 \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2}, \end{cases} \quad (5.46)$$

В первом приближении перемещения масс определяем по формулам (5.28).

Функции  $f_i(t)$  имеют вид:

$$f_1(t) = c_1(x_1 - x_2) - k_d(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(k_n - k_d) + k_n \alpha(x_1 - x_2)^3; \quad f_2(t) = -f_1(t); \quad (5.47)$$

$$f_3(t) = 0. \quad (5.48)$$

Перемещения в системе при гармоническом внешнем воздействии определяются по формуле (5.34), где, в соответствии с формулами, полученными Осиповой М.В. в [19], формулы для  $C_i(\omega)$  имеют следующий вид:

$$C_1(\omega) = m_1 \left[ (k_d + k_2 - m_2 \omega^2)(k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) - k_2^2 \right] + m_2 k_d (k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) + m_3 k_d k_2; \quad (5.49)$$

$$C_2(\omega) = (k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) (m_1 k_d + m_2 (k_d - m_1 \omega^2)) + m_3 k_2 (k_d - m_1 \omega^2); \quad (5.50)$$

$$C_3(\omega) = k_2 (m_1 k_d + m_2 (k_d - m_1 \omega^2)) + m_3 \left[ (k_1 - m_1 \omega^2) (k_d + k_2 - m_2 \omega^2) - k_d^2 \right]; \quad (5.51)$$

$D(\omega)$  – определяется по формуле (5.38), в которой

$$D_1 = (k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) (k_2 - (m_1 + m_2) \omega^2) - k_2^2; \quad (5.52)$$

$$D_0 = -m_1 \omega^2 \left[ (k_2 + k_3 - m_3 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 \right]. \quad (5.53)$$

Функция  $f_1(t)$  принимает вид (5.41), где

$$\Delta C(\omega) = C_1(\omega) - C_2(\omega) = m_1 k_2 k_3. \quad (5.54)$$

Оптимальная жесткость гасителя в линейной порождающей системе определяется для каждого значения угловой частоты  $\omega$  по уравнению (5.43), где  $\Delta C(\omega)$  определяется по формуле (5.54).

Амплитуды колебаний масс системы определяются по (5.44), где  $C_i(p_s)$  вычисляются по (5.49) – (5.51); формулы для остальных переменных как в расшифровке формулы (5.44).

### Пример расчета

Характеристики системы следующие:  $m_1 = 1,5 \text{ т}$  ,  $m_2 = 8 \text{ т}$  ,  $m_3 = 15 \text{ т}$  ;  
 $k_2 = 20 \cdot 10^3 \text{ кН / м}$  ;  $k_3 = 90 \cdot 10^4 \text{ кН / м}$  ;  $k_n = 10 \cdot 10^3 \text{ кН / м}$  ;  $\alpha = 10^4$  .

Амплитуда ускорений основания принята равной  $\xi_0 = 1 \text{ м / с}^2$  .

Для рассматриваемой системы первая частота собственных колебаний системы без гасителя равна 77,5 рад/с.

Полученные амплитуды перемещений массы  $m_3$  представлены на рисунке 5.4.

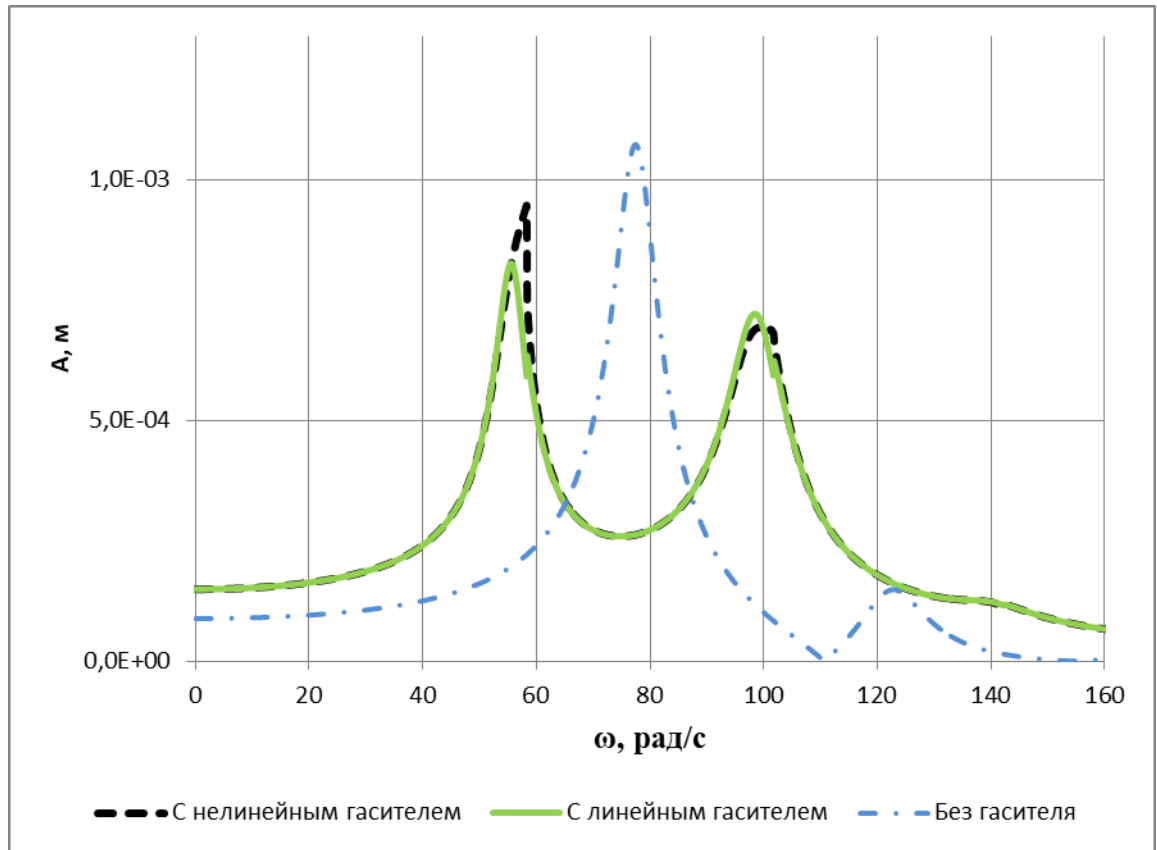


Рисунок 5.4 – АЧХ для нижних масс систем: с нелинейным гасителем (черная пунктирная линия); с линейным гасителем (зеленая сплошная линия); без гасителя (синяя штрихпунктирная линия)

При использовании нелинейного гасителя колебаний амплитуда перемещений нижней массы на этой частоте уменьшается в 4,1 раза. Зона эффективного гашения при принятых параметрах гасителя увеличивается незначительно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Основной метод, который был принят в работе, основан на ПФ и ИПФ линейных динамических систем и их взаимной связи.
2. Этот метод, общие положения которого даны в работе Солодовникова В. В. и который был развит применительно к расчету систем с КЧСС Черновым Ю. Т., позволил получить достаточно просто необходимые зависимости и алгоритмы расчета линейных динамических систем с КЧСС, а также систем с дополнительными элементами, цель которых – снижать уровни колебаний в переходных режимах при прохождении через резонанс. Расчетные схемы таких систем - системы с нелинейными характеристиками.
3. По существу, этот метод можно определить как модифицированный метод "нормальных форм", в котором, по сравнению с традиционным методом, сокращается целый ряд процедур.
4. Подходы и методы расчета основаны на общих положениях теории ПФ и ИПФ и позволили рассмотреть и проиллюстрировать на конкретных примерах расчета широкий класс линейных и нелинейных систем виброзащиты.
5. При расчете нелинейных систем виброизоляции основное внимание уделялось методам расчета и алгоритмам, связанным с расчетами в переходных режимах, и, в том числе, оценке влияния дополнительных элементов (блоков) на снижение уровней колебаний в эксплуатационных и переходных режимах и, в частности:
  - при расчете грохота с промежуточным блоком, что позволяет значительно снижать нагрузку на основание.
  - при расчете машин ударного действия, также с дополнительными блоками, которые влияют на характер колебаний и на величину нагрузки на основание при импульсных воздействиях.

6. Был предложен метод и алгоритм расчета достаточно общей задачи о плоских колебаниях виброизолированных массивных тел при произвольном смещении основания. Дан пример расчета.
7. Удобные и компактные выражения и расчетные формулы, полученные для линейных систем, позволили построить достаточно удобные и хорошо сходящиеся алгоритмы расчета нелинейных систем, а именно, систем с дополнительными элементами.
8. Были рассмотрены нелинейные задачи расчета систем виброизоляции как систем с КЧСС с дополнительными элементами, которые включаются в систему виброизоляции при больших перемещениях (в зонах повышенных уровней), которые связаны с режимом прохождения через резонанс.
9. Рассматривалась и оценивалась эффективность виброизоляции нелинейных систем:
  - показано, что введение дополнительных связей при прохождении через резонанс машин с вращающимися частями позволяет снижать уровень колебаний в переходных режимах в системе с ОСС на 50 %; для системы с ДСС основное снижение было связано с включением дополнительного блока;
  - при виброизоляции машин ударного действия также наибольший эффект связан с введением дополнительного блока.
10. Рассматривались системы виброизоляции, где в качестве дополнительного элемента применялся демпфер вязкого трения. Влияние демпфера вязкого трения оценивалось по форме близко к модифицированной гипотезе Фойгта, однако при значительно больших значениях коэффициента  $\gamma_{\text{пр}}$ .
  - Как показали результаты расчета, при периодических нагрузках как для системы с одной, так и для системы с ДСС при включении демпфера

вязкого трения значительно, на 30%-70%, снижаются перемещения в переходных режимах.

11. При использовании для расчета нелинейных систем приближенных методов, в частности при построении АЧХ для систем с дополнительными нелинейными связями, достаточно удачным оказался способ, предложенный Ю. Т. Черновым, основанный на специальном выборе порождающей системы. С помощью этого метода рассмотрены две системы с нелинейными гасителями, получены решения и построены АЧХ.



## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АЧХ - амплитудно-частотные характеристики

ДСС - две степени свободы

ИПФ - импульсная переходная функция

КЧСС - конечное число степеней свободы

ОСС - одна степень свободы

ПФ - передаточная функция

AVDS - active viscous damping system (активная вязкая демпфирующая система)

AVS - active variable stiffness system (система активной переменной жесткости)

TMD - tuned mass damper (инерционный гаситель)

VF - viscous fluid damper (демпфер вязкого трения)

VSD- variable stiffness device (устройство с переменной жесткостью)

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Баркан Д.Д. Динамика оснований и фундаментов / Д.Д. Баркан – М.: Стройвоенмориздат, 1948. – 412 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский – 2-е изд., перераб. и испр. – М.: Физматгиз, 1981. – 918 с.
3. Болотина В.В., редактор. Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем. 1978 / В.В. Болотина – М.: Машиностроение. – 352 с.
4. Вейнер Д., Цейтлин А.И. Вибрационные повреждения в промышленном строительстве. Москва - Стокгольм, Шведский совет по исследованиям в строительстве / Д. Вейнер, А.И. Цейтлин – Научно-технический центр «Защита сооружений», 1994. – 336 с.
5. Виноградов И.М., редактор. Математическая энциклопедия / И.М. Виноградов – М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1152 с.
6. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин/ И.И. Вульфсон, М.З. Коловский – Ленинград: Машиностроение. 1968. – 284 с.
7. Дукарт А.В. Об установившихся колебаниях двухмассовой системы с демпфированием при произвольной периодической возмущающей нагрузке/ А.В. Дукарт // Известия вузов. Строительство. – 2009. – № 3-4. – С. 3-13.
8. Дукарт А.В. Способ построения периодических режимов движения многомассовых виброударных систем и его приложение к расчету ударного гасителя колебаний с демпфированием/ А.В. Дукарт // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1993. – № 3. – С. 16-22.
9. Ивович В.А. Виброизолированные системы с нелинейными характеристиками. Динамический расчет зданий и сооружений, раздел 15/ В.А. Ивович – М.: Стройиздат, 1984.

- 10.Ивович В.А., Онищенко В.Я. Защита от вибраций в машиностроение/ В.А. Ивович, В.Я. Онищенко – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.
- 11.Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки. –2-е изд. – М.: НИЦ Строительство, 2011. – 288 с.
- 12.Климов И.В., Кошелев В.П., Носов В.С. Виброизоляция штамповочных молотов/ И.В. Климов, В.П. Кошелев, В.С. Носов – М.: Машиностроение, 1979. – 132 с.
- 13.Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем/ М.З. Коловский – Москва: НАУКА, 1966. –320 с.
- 14.Коренева Б.Г., Рабиновича И.М., редакторы. Динамический расчет зданий и сооружений: Справочник проектировщика. 2-е изд./ Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича, редакторы – М.: Стройиздат, 1984. – 303 с.
- 15.Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. Репринтное издание (оригинальное издание: Киев: Издательство Академии наук УССР, 1937 г.) / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов – Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. – 352 с.
- 16.Новацкий В. Динамика сооружений/ В. М. Новацкий – М.: Стройиздат, 1963. – 377 с.
- 17.Осипова М.В. Оценка эффективности некоторых схем виброзащиты оборудования с гармоническими и импульсными нагрузками/ М.В. Осипова // Вестник МГСУ. – 2012. – № 11. – С. 88-96.
- 18.Осипова М.В. Расчет виброизолированных систем на динамические нагрузки с использованием передаточных функций/ М.В. Осипова // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2013. – № 4. – С. 18-20.

- 19.Осипова М.В. Метод расчета виброзащитных систем как систем с тремя степенями свободы в переходных режимах/ М.В. Осипова // Сейсмостойкое строительство. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений.– 2014.– № 1. – С. 31 - 34.
- 20.Петров И.А. Расчет двухпролетной неразрезной балки с выключающейся связью/ И.А. Петров // Вестник МГСУ. – 2012. – № 9. – С. 148–155.
- 21.Петров И.А. Расчет трехпролетной рамы с выключающейся связью/ И.А. Петров // Сборник научных трудов ИСА МГСУ (выпуск 4): научные труды Международной молодежной конференции "Оценка рисков и безопасность в строительстве. Новое качество и надежность строительных материалов и конструкций на основе высоких технологий". Москва. – 2012. – С. 151–154.
- 22.Петров И.А., Осипова М.В. О двух методах расчета нелинейных систем с одной степенью свободы/ И.А. Петров, М.В. Осипова // Интернет-вестник ВолгГАСУ. –2012. – № 3(23). – С. 1-10.
- 23.Пятецкий В.М., Александров Б.К., Савинов О.А. Современные фундаменты машин и их автоматизированное проектирование/ В.М. Пятецкий, Б.К. Александров, О.А. Савинов – М.: Стройиздат, 1993. – 415 с.
- 24.Рекомендации по виброзащите несущих конструкций производственных зданий. М.: ЦНИИСК им. Кучеренко, 1998. – 151 с.
- 25.Руководство по проектированию фундаментов машин с динамическими нагрузками. 1982. – 207 с.
- 26.Савинов О.А. Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. 2-е изд/ О.А. Савинов – Л.: Стройиздат, 1979. – 200 с.
- 27.Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений/ А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.

28. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления/ В.В. Солодовников – М.: Физматгиз, 1960. 470 с.
29. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий/ Сорокин Е.С. – М.: Госстройиздат, 1956. – 340 с.
30. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле/ С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
31. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем/ А.П. Филиппов – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
32. Холмянский М.Л. Использование матриц и преобразований координат для расчета колебаний массивных и стенчатых фундаментов машин несимметричной формы/ М.Л. Холмянский // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2012. – № 3. – С. 6-9.
33. Цейтлин А.И., Кедрова Г.Л. Нормирование расчетов сооружений на динамические нагрузки в СССР и за рубежом/ А.И. Цейтлин, Г.Л. Кедрова. – М.: ВНИИИС, 1987. – 68 с.
34. Чернов Ю.Т. Вибрации строительных конструкций. (Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям). Научное издание. – 2-е изд., испр. и доп.-е изд/ Ю.Т. Чернов – М.: Изд-во АСВ, 2011. – 384 с.
35. Чернов Ю.Т. К оценке эффективности виброизоляции машин ударного действия с инерционным блоком/ Ю.Т. Чернов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. – № 1. – С. 68-71.
36. Чернов Ю.Т. Передаточные и импульсные переходные функции в задачах динамического расчета конструкций/ Ю.Т. Чернов // Экспериментальная механика и расчет сооружений. Костинские чтения. – 2004. – С. 137-143.

- 37.Чернов Ю.Т. Прикладные методы динамики сооружений (Метод «нормальных форм» и его приложение)/ Ю.Т. Чернов– М.: Изд-во АСВ, 2001. – 80 с.
- 38.Чернов Ю.Т., Зебилина М.Д.Х. К расчету систем виброизоляции с демпферами вязкого трения/ Ю.Т. Чернов, М.Д.Х. Зебилина // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2018. – №2. – С. 34-38.
- 39.Чернов Ю.Т., Зебилина М.Д.Х. Плоские колебания массивного тела при смещении основания/ Ю.Т. Чернов, М.Д.Х. Зебилина // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2018. – № 3. – С. 18-22.
- 40.Чернов Ю.Т., Зебилина М.Д.Х. Расчет систем виброизоляции оборудования, в том числе, с нелинейными характеристиками/ Ю.Т. Чернов, М.Д.Х. Зебилина // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – № 4. – С. 47-54.
- 41.Чернов Ю.Т., Зебилина М.Д.Х. Виброизоляция машин ударного действия с нелинейными элементами/ Ю.Т. Чернов, М.Д.Х. Зебилина // Бюллетень Строительной Техники. – 2018. – № 1 (1001), – С. 46-48.
- 42.Чернов Ю.Т., Новожилов А.И. Передаточные и импульсные переходные функции в задачах динамического расчета массивных фундаментов и систем виброизоляции/ Ю.Т. Чернов, А.И. Новожилов // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2006. – № 1. – С. 55-59.
- 43.Чернов Ю.Т., Осипова М.В. Общий случай плоских колебаний массивных тел на упругих опорах/ Ю.Т. Чернов, М.В. Осипова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 4 (261). – С. 58-63.
- 44.Чернов Ю.Т., Петров И.А. О некоторых методах и алгоритмах расчета систем с выключающимися связями/ Ю.Т. Чернов, И.А. Петров // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 2. – С. 61-66.
- 45.Чернов Ю.Т., Петров И.А., Осипова М.В. Методы и примеры динамического расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы/ Ю.Т.

- Чернов, И.А. Петров, М.В. Осипова // X Российская национальная конференция по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию (с международным участием). г. Сочи, Краснодарский край, Россия. – 2013. – С. 99–101.
46. Чернов Ю.Т., Романенко А.Б. К расчету нелинейных систем виброизоляции/ Ю.Т. Чернов, А.Б. Романенко // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2002. – № 4. – С. 34-38.
47. Чернов ЮТ. О выборе порождающих систем при исследовании нелинейных колебаний/ Ю.Т. Чернов // Динамика строительных конструкций: Сб. научных трудов ЦНИИСК им. Кучеренко. - М. –1985. – С. 22-23.
48. Шейнин И.С. О пусковых резонансах в линейных системах: Исследования по динамике сооружений и расчету конструкций на упругом основании/ И.С. Шейнин – М.: Госстройиздат, 1961.
49. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. Методы качественной теории в нелинейной динамике/ Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 428 с.
50. Cabaltica A.D., Hoa P.N., and Thang C.Q. Structural Control of Benchmark Buildings Equipped with Variable Stiffness Devices and Viscous Fluid Dampers/ A.D. Cabaltica, P.N. Hoa, and C.Q. Thang // ARPN Journal of Science and Technology. – May 2014. – No. 5 Vol. 4. – pp. 295-305
51. Chopra A.K. Dynamics of Structures, Theory and Application to Earthquake Engineering/ A.K. Chopra A.K.– Berkley; Pearson Education Asia Ltd and Tsinghua University Press, 2004. – 846p.
52. Constantinou M.C., Symans M.D. Experimental and analytical investigation of seismic response of structures with supplemental fluid viscous dampers/ M.C.

- Constantinou, M.D. Symans – Buffalo, NY. National Center for Earthquake Engineering Research. Report No. NCEER-92-0032. 1992 – 206p.
53. Dae-Young K., JinWook J. Experimental and Numerical Studies of a Newly Developed Semi-Active Outrigger Damper System/ K. Dae-Young, J. JinWook // Council on Tall Buildings and Urban Habitat (CTBUH). Seoul. 2011. – Assesed at: [members.ctbuh.org/paper/844](http://members.ctbuh.org/paper/844).
54. Diala U.H., Ezeh G.N. Nonlinear damping for vibration isolation and control using semi active methods/ U.H. Diala, G.N. Ezeh // Savap Internation. – 2012. – Vol. 3 No. 3. – pp. 141 -152
55. Fujita K., Takewaki I. Property of Critical Excitation for Moment-Resisting Frames Subjected to Horizontal and Vertical Simultaneous Ground Motion/ K. Fujita, I. Takewaki // Journal of Zhejiang University – Science A. –2009. – No. 10(11). – pp. 1561-1572.
56. GERB Vibration Control. 1982. Pipework dampers. Technical report.
57. Gluck N., Reinhorn A. M., Gluck J., Levy R. Design of supplemental dampers for control of structures/ N. Gluck, A. M. Reinhorn, J. Gluck, R. Levy // ASCE Journal of Structural Engineering. – 1996. – No. 3. Vol. 122 – pp. 1394-1399.
58. He S., Rock T. and Singh R. Construction of Semianalytical Solutions to Spur Gear Dynamics Given Periodic Mesh Stiffness and Sliding Friction Functions/ S. He, T. Rock and R. Singh // Journal of Mechanical Design. – December 2008. – No. 130. – pp. 122601-9.
59. Hongnan L., Linsheng H. Review Article. Advances in Structural Control in Civil Engineering in China/ L. Hongnan, H. Linsheng// Mathematical Problems in Engineering. – March, 2010. – Assesed at: <http://dx.doi.org/10.1155/2010/936081>



60. Joungh J.W., Smyth A.W., and Chung L. Comparison of switching control algorithms effective in restricting the switching in the neighborhood of the origin/ J.W. Joungh, A.W. Smyth, and L. Chung // *Smart Materials and Structures*. – 2010. –Vol. 19.
61. Kamagata S. and Kobori T. Autonomous adaptive control of active variable stiffness systems for seismic ground motion/S. Kamagata and T. Kobori // *Proceedings of the 1st World Conference on Structural Control, Los Angeles, U. S. A.* – 1994. –Vol. 2.
62. Kareem A., Kijewski T., and Tamura Y. Mitigation of Motions of Tall Buildings with Specific Examples of Recent Applications/ A. Kareem, T. Kijewski, and Y. Tamura // *Wind and Structures*. –1999. – No. 3. Vol.2. – pp. 201-251.
63. Khan W., Akhtar S., and Hussain A. Non-linear time history analysis of tall structure for seismic load using damper/ W. Khan, S. Akhtar, and A. Hussain // *International Journal of Scientific and Research Publications*. – 2014. –Vol. 4, No. Issue 4.
64. Li Y., Li J. Base isolator with variable stiffness and damping: design, experimental testing and modelling/ Y. Li, J. Li // *Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials (ACMSM23)*. Byron Bay, Australia. – 2014.–Vol. II. – pp. 913-918.
65. Makris N., Constantinou M.C. Experimental study and analytical prediction of response of spring-viscous damper isolation system/ N. Makris, M.C. Constantinou // *Earthquake Engineering, Tenth World Conference*. Balkema, Rotterdam. – 1992.
66. Makris N., Constantinou M. C. Fractional derivative Maxwell model for viscous dampers/ N. Makris, M. C. Constantinou // *J. of Structural Engineering*. ASCE. –1991. –Vol. 117. – pp. 2708-2724 .
67. Makris N., Constantinou M. C. Spring-viscous damper systems for combined seismic and vibration isolation/ N. Makris, M. C. Constantinou // *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. –1992. –Vol 21. Issue 8. –pp. 649-664.

68. Martinez-Rodrigo M., Romero M.L. An optimum retrofit strategy for moment resisting frames with nonlinear viscous dampers for seismic applications/ M. Martinez-Rodrigo, M.L. Romero // *Engineering structures*. – 2003. –No. 25. – pp. 913–925.
69. Nagarajaiah S., Ertan S. Structures with Semiactive Variable Stiffness/ S. Nagarajaiah, S. Ertan // *Journal of Structural Engineering*. – 2007. –Vol. 33. No. 1. – pp. 67-77.
70. Nagarajaiah S., Sahasrabudhe S. Seismic response control of smart sliding isolated buildings using variable stiffness systems: Experimental and numerical study/ S. Nagarajaiah, S. Sahasrabudhe // *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. – 2006. – Vol. 35. No. 2. – pp. 177-197.
71. Ribakov Y., Gluck J., and Reinhorn A.M., Active viscous damping system for control of MDOF structures/ Y. Ribakov, J. Gluck, and A.M. Reinhorn // *Earthquake engineering and structural dynamics*. – 2001. –Vol. 30. Issue 2. –pp. 195-212.
72. Rodriquez S., Seim C. and Ingham, T. Earthquake protective systems for the seismic upgrade of the Golden Gate bridge/ S. Rodriquez, C. Seim and T. Ingham // *Proc. 3rd U.S. Japan Workshop on Protective Systems for Bridge*. – Berkeley, CA. –1994.
73. Royston T.J., Singh R. Periodic Response of Mechanical Systems with Local Non-Linearities Using an Enhanced Galerkin Technique/ T.J. Royston, R. Singh // *Journal of Sound and Vibration*. – 1996. – No. 194 (2). –pp. 243-263.
74. Sakamoto, M. and Kobori, T. Applications of Structural Response Control (Reviews from the Past and Issues Toward the Future)/ M. Sakamoto and T. Kobori // *Proceedings of the Second International Workshop on Structural Control, Hong Kong*. – Dec. 1996.
75. Sakamoto M. Practical Applications of Active Structural Response Control and Earthquake & Strong Wind Observation Systems/ M. Sakamoto // *Planning*

Workshop for the Hong Kong International Full-Scale Control Test Facility, Hong Kong University of Science & Technology. – 9-10 Dec. 1993

76. Soong T.T., Constantinou M.C. Passive and active structural vibration control in civil engineering/ T.T. Soong, M.C. Constantinou – New York: Department of Civil Engineering State University of New York at Buffalo, 1994. –pp. 373
77. Soong T.T., Dargush G.F. Passive Energy Dissipation and Active Control. Structural Engineering Handbook/ T.T. Soong, G.F. Dargush – Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.– 28p..
78. Takewaki I., Fujita K., Yamamoto K., and Takabatake H. Smart Passive Damper Control for Greater Building Earthquake Resilience in Sustainable Cities/ I. Takewaki, K. Fujita, K. Yamamoto, and H. Takabatake // Sustainable Cities and Society. – 2011. – No. 1(1). – pp. 3-15.
79. Xinghia Y. Model and analysis of variable stiffness semi-active control system/ Y. Xinghia // In Proceedings of the Twelfth World Conference on Earthquake Engineering (WCEE). Auckland, New Zealand. – 2000. – paper No. 1516
80. Yang J. N., Kim J. H., and Agrawal A. K. Resetting semi-active stiffness damper for seismic response control/ J. N. Yang, J. H. Kim, and A. K. Agrawal //Journal of Structural Engineering. –2000. – Vol. 126, Issue 12 –pp. 1427-1433.

#### **Нормативные документы**

81. ГОСТ 12.1.012-90 «Вибрационная безопасность. Общие требования».
82. СН. 2.24/ 2.1.8.566-96 «Производственная вибрация, вибрация в помещениях жилых и общественных зданий».
83. СП 26.13330.2012 «СНиП 2.02.05-87 Фундаменты машин с динамическими нагрузками».

## ПРИЛОЖЕНИЯ 1

### Программа расчета нелинейной системы с ДСС

tic

clc %clears the command window

clear %clears old variable defn from the workspace

close all%closes all figure windows

% % Данные

m1 = 10; m2 = 6; k1 = 3500; k2 = 4200; k3 = 3500;

w = 78.64; q0 = 350; g1 = 0.1; g2 = 0.1; z0 = 0.015;

%%\*\*

p01 = (k1/m1)^0.5; T1 = 2\*pi/w; ts = T1/5;

%%Нагрузка приложена на:

ss = 1;

%%Число степеней свободы

df = 2;

%%\*\*

s1 = k2/k1; h1 = m1/m2;

e1 = h1 + h1\*s1 + 1;

H1 = ((e1^2)/4 - h1\*s1)^0.5; %/4 or /2

N1 = 1/(2\*m2\*H1);

%%\*\*

p1 = ((e1/2-H1)\*p01^2)^0.5; p2 = ((e1/2+H1)\*p01^2)^0.5;

%% диссип коэф соотв формам собств колеб

A1 = (m1\*(k1\*g1 + k2\*g2) + m2\*k1\*g1)/(m1\*m2\*(p2.^2-p1.^2));

B1 = (g1 + g2)/(p2.^2-p1.^2);

G1 = -A1 + p2.^2\*B1; G2 = A1 - p1.^2\*B1;

```

n1 = (p1^2*G1)/(2*w); n2 = (p2^2*G2)/(2*w);
pp1 = (p1^2 - n1^2)^0.5; pp2 = (p2^2 - n2^2)^0.5;
%%**
t0 = 8; %время пуска
t_ost1 = 15;%время остановки
t_eks1 = 60;%время эксплуатации
t_eks = t0 + t_eks1;
t_ost = t_eks + t_ost1;
a = w/t0;
%%**
ti = round(t0/ts,0)*ts;
t1 = round(t0/ts,0);
tii = round(t_eks/ts,0)*ts;
t2 = round(t_eks/ts,0);
tiii = round(t_ost/ts,0)*ts;
t3 = round(t_ost/ts,0);
t_kon = t_ost + 5; %0.01..5
tiv = round(t_kon/ts)*ts;
t4 = round(t_kon/ts);
b = w/(tiii - tii);
%%**
t_st = 1:t1-1; t_wkn = t1:t2; t_stp = t2-1:t3; t = ts:ts:tiii;
for i1 = 1:t3
if i1 < t1
t = ts*i1;
qta(i1) = q0*((a*t/w).^2).*sin(a*(t.^2)/2);
elseif i1 >= t1 & i1 <= t2

```

```

    t = ts*i1;
qtb(i1) = q0*sin(w*t);
elseif i1 > t2 & i1 <= t3
    t = ts*i1;
qtc(i1) = q0/(w.^2)*((w-b*(t-tii)).^2).*sin(w*t-b/2*(t-tii).^2);
end
end

qts = [qta,qtb,qtc];
i4 = t3+1:t4;
qtd = zeros(1,numel(i4));%%creates zero array because qt1 = 0 for 't3 to t4'
qtr = [qts(qts~=0),0];%%complete array of qt1 covering 'ts:ts:tiii' and '0'
%%**
tr = ts:ts:ts*numel(qtr);
for i1 = 1:numel(tr) %t3..t4
    t = tr(i1);
    qt1 = qtr(i1);
    F1(i1) = ts*qt1.*sin(pp1*t).*exp(n1*t);    F2(i1) = ts*qt1.*cos(pp1*t).*exp(n1*t);
    F3(i1) = ts*qt1.*sin(pp2*t).*exp(n2*t);    F4(i1) = ts*qt1.*cos(pp2*t).*exp(n2*t);
end
t=tr;
FF1 = cumsum(F1);FF2 = cumsum(F2);FF3 = cumsum(F3); FF4 = cumsum(F4);
    ta = t+0.5*ts;
%    ta = t;
d1 = exp(-n1*ta).*sin(pp1*ta); d2 = exp(-n1*ta).*cos(pp1*ta);
d3 = exp(-n2*ta).*sin(pp2*ta); d4 = exp(-n2*ta).*cos(pp2*ta);
I_1 = (d1.*FF2 - d2.*FF1)/pp1; I_2 = (d3.*FF4 - d4.*FF3)/pp2;
pp = [pp1,pp2];p = [p1,p2]; n = [n1,n2];

```

```

for i = 1:df
for r = 1:2
if i*ss == 1

$$T(i,r) = (1 + s1 - (p(r))^2/(h1*p01^2))*(-1)^(r+1);$$

elseif i*ss == 2

$$T(i,r) = (-1)^(r+1);$$

elseif i*ss == 4

$$T(i,r) = (1 - (p(r)/p01)^2)*(-1)^(r+1);$$

end
end
for i1 = 1:numel(t)
ys(i,i1) = N1*(T(i,1)*I_1(1,i1) + T(i,2)*I_2(1,i1));
end
end
T22_1 = T(i,1); T22_2 = T(i,2);
if ss == 1
y1 = ys(1,:); y2 = ys(2,:);
% plot(t,y1);title('y1; ss = 1');figure
% plot(t,y2,'g');title('y2; ss = 1');
elseif ss == 2
y1 = ys(1,:); y2 = ys(2,:);
% plot(t,y1);title('y1; ss = 2');figure
% plot(t,y2,'g');title('y2; ss = 2');
end
% %Линейное перемещение m1
zlin_a = y2; %Линейное перемещение m2
%нелинейный расчет

```

```

zz = find(abs(zlin_a) >= z0); % values of zlin_a > z0
sj = zz(1,1)-1;%first position(-1) of values > z0
zlin_b = zlin_a(1,sj:end); %linear values for non-lin calculation
z_sj = numel(zlin_a) - numel(zlin_b);
tj = t(sj);
tzlin_b = tr(sj:end);%% time of NL analysis, check
qr = qtr(sj:end);%
I_a = I_1(sj:end); I_b = I_2(sj:end);
%% linear part of nonlinear graph
tw = tr(1:sj);
lin = zlin_a(1:sj);
% plot(tw,lin);
FFa(1,1) = 0;FFb(1,1) = 0; FFa(2,1) = 0;FFb(2,1) = 0; zful(1) = zlin_a(sj+1);
for r = 1:2
for i1 = 2:numel(zlin_b)
    t2 = ts*i1;
    t2a = ts*i1+0.5*ts;
%    t2a = t2;
    i2 = 1; % счетчик итераций
    if zlin_b(i1) >= 0; z01 = z0;
    elseif zlin_b(i1)< 0; b=2; z01 = -z0;
    end
    if i1 == 2;
        A=1;
        fz(1) = k3*(zlin_b(2) - z01);
    elseif i1 > 2;
        B = 2;

```



```

zlin_b(i1);
zn = [0,znl2(znl2~=0)];
zn(1,end);
%   znl2(1,end)% ok
zful2 = zlin_b(i1) - zn(1,end);
fz(i1-1) = k3*(zful2 - z01);
end
%%**
Fa(r,i1) = ts*qr(i1-1).*sin(pp(r)*(t2)).*exp(n(r)*(t2));%
FFa(r,i1) = FFa(r,i1-1)+Fa(r,i1);
Fb(r,i1) = ts*qr(i1-1).*cos(pp(r)*(t2)).*exp(n(r)*(t2));
FFb(r,i1) = FFb(r,i1-1)+Fb(r,i1);
%%**
hHa_1(r,i1) = ts*fz(i1-1).*sin(pp(r)*(t2)).*exp(n(r)*(t2));
Ha_1(r,i1) = hHa_1(r,i1-1)+hHa_1(r,i1);
hHb_1(r,i1) = ts*fz(i1-1).*cos(pp(r)*(t2)).*exp(n(r)*(t2));
Hb_1(r,i1) = hHb_1(r,i1-1)+ hHb_1(r,i1); aa1 = size(Hb_1);
d1(r,i1) = exp(-n(r)*t2a).*sin(pp(r)*t2a);
d2(r,i1) = exp(-n(r)*t2a).*cos(pp(r)*t2a);
%%**
sw1(r,i1) = (d1(r,i1).*FFb(r,i1) - d2(r,i1).*FFa(r,i1));
sw2(r,i1) = (d1(r,i1).*Hb_1(r,i1) - d2(r,i1).*Ha_1(r,i1));
zlin_b(1,i1);
if abs(zlin_b(1,i1)) >= z0;
    aa = 1;
L1(r,i1) = (sw1(r,i1)+ sw2(r,i1))/pp(r); %like I_1 & I_2
elseif abs(zlin_b(1,i1)) < z0;

```

```

    bb = 2;
    L1(r,i1)= sw1(r,i1)/pp(r);
    end
    La(i1) = L1(1,i1);
    Lb = L1(end,:);
for i = 1:df
if i*ss == 1
T(i,r) = (1 + s1 - (p(r))^2/(h1*p01^2))*(-1)^(r+1);
elseif i*ss == 2
T(i,r) = (-1)^(r+1);
elseif i*ss == 4
T(i,r) = (1 - (p(r)/p01)^2)*(-1)^(r+1);
end
ys(i,i1) = N1*(T(i,1)*La(1,i1) + T(i,2)*Lb(1,i1));
end
if ss == 1
y1 = ys(1,:); y2 = ys(2,:);
elseif ss == 2
y1 = ys(1,:); y2 = ys(2,:);
end
znl = y2;
zful(i1)= zlin_b(i1) - znl(i1);
z(i1) = zful(i1);
%%end here for first iteration values
% plot(t,y2,'g');title('y2; 1st iteration');figure
    err = 1;
while err > 0.03;

```

```

    itr = 4;
    i2 = i2 + 1;
if i2==2
    zful(1,end); fz = k3*(zful(1,end)- z01);
elseif i2 > 2
    zful(i2-1); fz = k3*(zful(i2-1)- z01);
end
Fa(r,i1) = ts*qr(i1-1).*sin(pp(r)*(t2)).*exp(n(r)*(t2));%
FFa(r,i1) = FFa(r,i1-1)+Fa(r,i1);
Fb(r,i1) = ts*qr(i1-1).*cos(pp(r)*(t2)).*exp(n(r)*(t2));
FFb(r,i1) = FFb(r,i1-1)+Fb(r,i1);
hHa_1(r,i1) = ts*fz.*sin(pp(r)*(t2)).*exp(n(r)*(t2));
Ha_1(r,i1) = hHa_1(r,i1-1)+hHa_1(r,i1);
hHb_1(r,i1) = ts*fz.*cos(pp(r)*(t2)).*exp(n(r)*(t2));
Hb_1(r,i1) = hHb_1(r,i1-1)+ hHb_1(r,i1);
d1(r,i1) = exp(-n(r)*t2a).*sin(pp(r)*t2a);
d2(r,i1) = exp(-n(r)*t2a).*cos(pp(r)*t2a);
sw1(r,i1) = (d1(r,i1).*FFb(r,i1) - d2(r,i1).*FFa(r,i1));
sw2(r,i1) = (d1(r,i1).*Hb_1(r,i1) - d2(r,i1).*Ha_1(r,i1));
%%**
if abs(zlin_b(1,i1)) >= z0;
L1(r,i1) = (sw1(r,i1)+ sw2(r,i1))/pp(r);
elseif abs(zlin_b(1,i1)) < z0;
L1(r,i1) = sw1(r,i1)/pp(r);
end
La(i1) = L1(1,i1); %like I_1
Lb = L1(end,:); %like I_1

```

```

for i = 1:df
if i*ss == 1
    T(i,r) = (1 + s1 - (p(r))^2/(h1*p01^2))*(-1)^(r+1);
elseif i*ss == 2
    T(i,r) = (-1)^(r+1);
elseif i*ss == 4
    T(i,r) = (1 - (p(r)/p01)^2)*(-1)^(r+1);
end
ys(i,i2) = N1*(T(i,1)*La(1,i1) + T(i,2)*Lb(1,i1));
end
if ss == 1
    y1 = ys(1,:);    y2 = ys(2,:);
elseif ss == 2
    y1 = ys(1,:);    y2 = ys(2,:);
end
    znl2(i2) = y2(i2);
    zful(i2) = (zlin_b(i1) - znl2(i2)); % for finding fz of iterative steps i2 > 2
% err = abs(znl2(i2) - znl2(1,end))/znl2(i2);
    err(r) = 0.035 - 0.001*i2 ;
    znl(i2) = znl2(i2); %for calculating error;
    zful2(i2) = zful(i2); %final value, sending to z for print out.
end
% Итоговые значения перемещений
    znl2(i1) = znl2(i2); %for finding fz of time steps i1>2
    znl3(i1) = znl2(i2);
    z(i1) = zful2(i2);
    ya(i1) = y1(i1);

```

```

end
end
%
tg = t(1,sj:end);z1 = [lin,z];
if ss == 1
% plot(tr,yy1), title('y1lin; ss = 1'),grid on;figure %лин перемещение m1
plot(tr,zlin_a), title('y2lin; ss = 1'),grid on;figure %лин перемещение m2
plot(tg,ya,'y');title('y1; ss = 1'),grid on;figure
plot(tw,lin),grid on; hold on
plot(tg,z,'g');title('y2; ss = 1'),grid on; hold off;% figure
elseif ss == 2
plot(tr,zlin_a), title('y2lin; ss = 2'),grid on;figure %лин перемещение m2
plot(tg,ya,'y');title('y1; ss = 2'),grid on;figure
plot(tw,lin),grid on; hold on
plot(tg,z,'g');title('y2; ss = 2'),grid on; hold off
end
%%**
z1 = [lin,z]; z2 = zlin_a; yy = [lin,ya];
z_pusk1 = max(abs(yy(t_st)));
z_ost1 = max(abs(yy(t_stp)));
z_pusk2 = max(abs(z1(t_st)));
z_ost2 = max(abs(z1(t_stp)));
toc

```