

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
(НИУ МЭИ)

На правах рукописи

Позняк Елена Викторовна

**Развитие методов волновой теории сейсмостойкости
строительных конструкций**

Шифр и наименование специальности

05.23.17 Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант
д.т.н. профессор Ю.П. Назаров

Москва – 2018

Содержание

Введение.....	6
Актуальность темы исследования	6
Степень разработанности темы исследования	8
Цели и задачи диссертационной работы	9
Научная новизна	10
Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы	12
Методология и методы исследования	12
Положения, выносимые на защиту.....	14
Степень достоверности и апробация результатов	15
Благодарности.....	17
1. Основы инженерного расчета на сейсмостойкость	19
1.1. Эволюция методологии сейсмических расчетов.....	19
1.2. Направления и перспективы развития современной теории сейсмостойкости	26
1.3. Инженерный подход в теории сейсмостойкости	36
1.4. Предельные состояния строительных конструкций	38
1.5. Концепция двойного расчета и метод трех моделей	41
1.6. Предельные состояния конструкций в зарубежных нормах	44
1.7. Проектирование с заданным уровнем обеспечения сейсмостойкости	48
2. Модели сейсмического воздействия	52
2.1. Типы сейсмических волн.....	52
2.2. Вектор сейсмического воздействия	55
2.3. Интенсивность интегрального сейсмического воздействия.....	58

2.4. Определение доминирующих волн сейсмического воздействия и функция нормированной интенсивности.....	61
2.5. Модели сейсмического движения грунта	62
2.6. Обобщенная волновая модель сейсмического движения Ю.П. Назарова	64
2.7. Расчет сейсмических ротаций грунта	66
2.8. Моделирование волновых полей по заданным акселерограммам	74
2.9. Состоятельная оценка спектральной плотности сейсмического ускорения грунта.....	96
2.10. Пространственная изменчивость сейсмического движения.....	108
2.11. Фильтрующие свойства жестких фундаментов	118
3. Динамика строительных конструкций при интегральной модели воздействия	128
3.1. Переносные сейсмические силы	128
3.2. Уравнения относительного движения	133
3.3. Характеристики демпфирования и связь между ними	152
3.4. Уравнения относительного движения диссипативной системы и решение в пространстве главных координат	153
3.5. Статическое решение.....	157
3.6. Модальные коэффициенты динамичности и спектры ускорений.....	158
3.7. Модальные усилия и перемещения. Коэффициенты формы и участия.....	163
3.8. Коэффициент динамичности формы и опасные направления сейсмического воздействия	165
3.9. Модальный отклик на отдельные компоненты сейсмического движения .	181
3.10. Опорные реакции от сейсмических сил и моментов	182

3.11. Эффективные модальные массы, потенциальная энергия формы и учитываемые формы колебаний	184
3.12. Анализ влияния ротаций на динамическую реакцию	189
4. Динамика строительных конструкций при дифференцированном сейсмическом воздействии	200
4.1. Кинематические параметры и интенсивность пространственного движения грунта в точке.....	200
4.2. Точка привязки полей перемещений и ускорений	206
4.3. Расширенная матрица жесткости. Матрица жесткости системы опорных элементов	208
4.4. Уравнения абсолютного и относительного движения при дифференцированном воздействии. Матрица влияния.	210
4.5. Оценка внутренних усилий от переносного движения.....	215
4.6. Плоская рама под дифференцированным сейсмическим воздействием.....	218
4.7. Плоская модель каркасного здания.....	222
4.8. Упрощение угловых граничных условий	229
4.9. Уравнения движения диссипативной системы	234
4.10. Модальные перемещения и усилия при дифференцированном воздействии	238
4.11. Статическое решение	240
4.12. Модальные коэффициенты динамичности	244
4.13. Модальные усилия и перемещения. Коэффициенты формы и участия....	245
4.14. Опасные направления сейсмического воздействия и коэффициент динамичности формы	247

4.15. Модальный отклик на отдельные компоненты сейсмического движения и опорные реакции.....	250
Заключение	263
Обозначения.....	265
Список литературы	269
Приложение 1.....	280
Приложение 2.....	281

Введение

Актуальность темы исследования

Актуальность настоящей диссертационной работы определяется необходимостью модификации инженерных подходов, методов, нормативных документов, регламентирующих расчет пространственных сооружений (в том числе уникальных, с оригинальными архитектурными решениями) на сейсмостойкость.

Инженерная теория сейсмостойкости начала развиваться с начала прошлого века от простейшей статической теории (Ф. Омори), пройдя этапы динамической теории для одномерных систем (Н. Мононобе, К.С. Завриев), спектральной теории для многомерных систем (М.А. Био, Д. Хадсон, Дж. Алфорд, Г. Хаузнер, Р. Мартел, А.Г. Назаров, И.Л. Корчинский и другие), вероятностной и нелинейной теорий (В.В. Болотин, М.Ф. Барштейн, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, С.В. Поляков, Ш.Г. Напетваридзе, Г.Н. Карцивадзе, А.Ф. Смирнов, А.П. Сеницын, Я.М. Айзенберг, А.В. Перельмуттер, В.И. Сливкер, Э.Е. Хачиян, Ю.П. Назаров, Ю.И. Немчинов, А.М. Уздин, Ю.Т. Чернов и многие другие), волновой теории (Н. Ньюмарк, В. Ли, Дж. Луко, Х.Т. Шибата, Т. Шигета, М. Трифунак, Н.А. Абрахамсон, А. Зерва и В. Зервас, М. Тодоровска, В.Т. Рассказовский, Э.Е. Хачиян, Н.А. Николаенко, А.П. Сеницын, Ю.П. Назаров, А.Г. Тяпин и многие другие).

Несмотря на высокий уровень теоретических исследований, отечественная нормативная база по расчетам на сейсмические воздействия выглядит отсталой: в последних редакциях актуализированных строительных норм (включая СП 14.13330.2014 Строительство в сейсмических районах) все еще приводятся расчетные формулы для внутренних усилий в консольной модели; при этом сейсмическое воздействие поступательное и задано в одной точке - заделке консоли. Консольная модель давно уступила место цифровым пространственным моделям конструкций, генерируемым системами автоматизированного проектирования и инжиниринга (CAD-CAE-системами).

Несмотря на прорыв в моделировании, сейсмическое воздействие при проектных расчетах по-прежнему задается в одной точке. Однако пространственные расчетные модели требуют задания пространственных нагрузок - только в этом случае удастся смоделировать особенности динамического поведения конструкций (Рисунок В.1, фото с Интернет-сайтов), которые фиксируются при сильных землетрясениях и обусловлены прохождением сейсмических волн, но недоступны для анализа при задании сейсмического воздействия в одной точке.



Тайвань, 20.09.1999



Япония, 11.09.2011



Новая Зеландия, 13.11.2016



Непал, 25.04.2015

Рисунок В.1. Разрушения, обусловленные волновыми сейсмическими эффектами

При задании сейсмических нагрузок на пространственные модели конструкций необходимо исходить из основополагающей предпосылки: сейсмическое воздействие есть волновое сейсмическое движение грунта, и оно задается в виде векторного пространственно-временного поля кинематических параметров. Далее, в за-

зависимости от спектрального состава землетрясения, размеров и степени жесткости фундамента могут быть выделены «подвиды» волнового движения – интегральная и дифференцированная модели сейсмического движения грунта. При интегральной модели движение фундамента с примыкающей к нему областью основания происходит подобно абсолютно твердому телу. В зависимости от наличия угловых движений этого тела различают интегральную дилатационную и интегральную дилатационно-ротационную модели. Интегральная модель подходит для задания сейсмического воздействия на здания с очень жесткими фундаментами (например, плитно-свайный с мощной плитой), а также для конструкций на податливых фундаментах при условии, что доминирующие длины сейсмических волн значительно превосходят размеры фундамента. Если фундамент податливый, а доминирующие длины волн короткие (порядка длины фундамента), то движение каждой опорной точки конструкции происходит по индивидуальному закону, отражающему процесс прохождения волны. Такая модель задания сейсмического воздействия называется дифференцированной.

Для прочностного расчета на пространственные нагрузки по интегральной и дифференцированной моделям воздействия необходимы более общие методы расчетов. Как показано в настоящей диссертации, простой и надежный линейно-спектральный метод (ЛСМ) может быть обобщен на случай волнового сейсмического движения как для интегральной дилатационно-ротационной, так и для дифференцированной модели движения грунта.

Таким образом, настоящая диссертационная работа посвящена в основном решению следующих актуальных проблем теории сейсмостойкости: преобразование волновых сейсмических воздействий в расчетные сейсмические нагрузки и анализ динамической реакции пространственных конструкций на эти нагрузки линейно-спектральным методом.

Степень разработанности темы исследования

В диссертации рассмотрен только один аспект волновой теории сейсмостойкости: динамический анализ реакции пространственных конструкций на волновое сей-

сическое воздействие. Вопросы взаимодействия сооружения с грунтовым основанием и инициации сейсмическими волнами волновых процессов в конструкциях не затрагиваются. Поскольку основным инженерным методом сейсмического расчета является ЛСМ, в качестве объектов исследования рассмотрены физически и геометрически-линейные модели конструкций. Эти ограничения не являются слишком жесткими, так как в соответствии с «методом трех моделей», предложенном в [79], ЛСМ в обобщенной форме может применяться и к моделям, уже поврежденным в ходе землетрясения.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью настоящей диссертации является работа над расширением понятий, подходов и методов прикладной теории сейсмостойкости строительных конструкций на область волновых сейсмических воздействий.

Задачи диссертационной работы заключаются в разработке и апробации усовершенствованных подходов и методов сейсмического расчета строительных конструкций:

- формулировка методических основ и общего алгоритма современного сейсмического расчета пространственных моделей конструкций и пространственных волновых воздействий, включающая: определение расчетной модели движения грунта; получение расчетных параметров волнового воздействия; составление уравнений относительного движения для интегральной и дифференцированной моделей грунтового движения; решение уравнений движения в частотной и временной областях; анализ динамической реакции строительных конструкций на волновые сейсмические воздействия;
- разработка обобщенной формы линейно-спектрального метода, применимого как для интегрального, так и для дифференцированного сейсмического движения;

а также в исследовании сопутствующих проблем:

- моделирование пространственно-временных волновых полей движения грунта в виде волн Рэлея и Лява, соответствующих заданным акселерограммам и грунтовым условиям; вывод формул для сейсмических ротаций от волн Рэлея и Лява;
- влияние ротационного движения грунта на динамическую реакцию конструкций;
- изменчивость сейсмического движения грунта, анализ спектрального состава пространственного сейсмического воздействия и получение состоятельной оценки спектральной плотности ускорения грунта;
- фильтрация коротких сейсмических волн жесткими фундаментами;
- проблема предельных состояний при сейсмических расчетах.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы состоит в получении автором следующих результатов:

1. Разработана форма линейно-спектрального метода расчета строительных конструкций на сейсмостойкость, обобщенного на случаи интегральной и дифференцированной моделей сейсмического движения грунта. Получены компактные формулы для параметров динамической реакции (модальных перемещений и внутренних сейсмических усилий), подходящие для интегрального и дифференцированного сейсмического движения, для диагональной и недиагональной матрицы инерции, для решения с учетом и без учета угловых движений грунта.
2. Получены формулы для модальных опорных реакций и для модального отклика конструкции на отдельные компоненты сейсмического движения для интегральной и дифференцированной моделей сейсмического движения грунта.
3. Описаны способы формирования сейсмических нагрузок в уравнениях относительного движения систем со многими степенями свободы при наличии

поступательного и углового сейсмического движения грунта для интегральной и дифференцированной моделей.

4. Разработан метод моделирования пространственно-временного поля поверхностных волн Лява и Рэлея, включая ротационные компоненты, по акселерограмме, заданной в одной точке упругого грунтового основания. Представлены алгоритмы и программные коды в ПК Matlab.
5. Исследовано влияние ротационного движения грунта на динамическую реакцию строительных конструкций для интегральной и дифференцированной моделей движения грунта. Приведены результаты численного моделирования в ПК Matlab и ПК STARKON.
6. Описан метод получения состоятельной оценки спектральной плотности сейсмического ускорения грунта, необходимой для анализа изменения спектрального состава сейсмического движения с помощью сглаженной функции пространственной когерентности. Представлены алгоритмы и программные коды в ПК Matlab.
7. Исследовано явление изменчивости сейсмического движения грунта, обусловленное пространственным изменением спектральных свойств воздействия из-за рассеяния в грунте. Приведены оценки экспериментальных данных, полученных на зарубежных полигонах; сделаны практические выводы для прикладных расчетов.
8. Изучена проблема фильтрации коротких сейсмических волн жесткими фундаментами, проанализированы результаты зарубежных натуральных экспериментов.
9. Исследована проблема предельных состояний конструкций при интенсивных землетрясениях; проанализированы отечественные и зарубежные подходы к описанию моделей и уровней предельных состояний.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы

Научные результаты в виде обоснованных расчетных методик могут быть использованы в нормативных документах нового поколения и методических руководствах по сейсмическим расчетам в строительной отрасли.

Результаты диссертационной работы были применены сотрудниками ЛАИПС ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко при научном сопровождении и расчетах уникальных строительных объектов: многофункционального гостиничного комплекса 5 звезд Ойстер Гранд отель энд СПА в станице Благовещенской, г. Анапа (Рисунок В.2); проекта Российского Международного Олимпийского Университета и Мно-



Рисунок В.2. Проект гостиничного комплекса. Расчет на интегральную дилатационно-ротационную модель воздействия выполнен в ЛАИПС ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко
<http://www.youblisher.com/p/1728724-STARKON-PRJ/>

гофункционального гостинично-рекреационного комплекса в г. Сочи, проекта нового терминала Аэропорта в г. Симферополь и других объектов, расположенных в сейсмических зонах.

Результаты диссертационной работы были использованы сотрудниками ООО «Еврософт» (г. Москва) при разработке специализированного отечественного программного обеспечения для расчетов строительных конструкций на волновые сейсмические воздействия – конечно-элементного программного комплекса STARKON и программного модуля Одиссей для определения расчетных

параметров волнового сейсмического воздействия.

Методология и методы исследования

Настоящая диссертация продолжает тему расчетных моделей волновых сейсмических воздействий и методов оценки динамической реакции строительных конструкций научной школы ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко.

За отправную точку при работе над диссертацией были взяты труды Н.А. Николаенко, И.И. Гольденבלата, С.В. Полякова [52-55], Н. Ньюмарка [19, 99], А.Ф. Смирнова [127], А.П. Сеницына [125, 126], В.Т. Рассказовского [118, 119], Р.Клафа, Дж. Пензиена [61], Э.Е. Хачияна [137-138], Ю.П. Назарова [72-76]. В них представлены как общие подходы к решению задач строительной механики (в том числе теории сейсмостойкости), так и затронуты проблемы волнового сейсмического анализа: разработка моделей сейсмического движения грунта, моделирование и анализ сейсмических воздействий, получение расчетных параметров сейсмических воздействий для инженерного расчета, выводы уравнений движения для различных типов конструкций и подходы к их решению и т.д. Эти труды можно рассматривать как базовые по расчетам на сейсмостойкость. Многие затронутые проблемы носят постановочный характер и задают направления для дальнейших научно-исследовательских работ. Так, настоящая диссертационная работа продолжает тему моделирования пространственно-временных волновых полей движения грунта, исследованную Ю.П. Назаровым в [72], описанием способа моделирования полей волн Рэлея и Лява по заданным акселерограммам; традиционный линейно-спектральный метод, описанный в трудах А.Ф. Смирнова [127], Н.А. Николаенко [96], получил компактную форму формул для внутренних усилий, общую для интегральной и дифференцированной моделей, для недиагональной матрицы инерции, и т.д.

Диссертация базируется на трудах по сейсмологии К. Аки, П. Ричардса, Е.Ф. Саваренского [121], В.И. Уломова [126]; по механике деформируемого твердого тела, теории упругости и теории волн - на трудах Ю.П. Работнова [116] и В. Новацкого [98]; по спектральным методам - на работах С.А. Марпла [65], Ю.И. Грибанова [57] и В.Г. Романовского [120]; по статистической динамике – на трудах В.В. Болотина [37-44].

Для определения ротационных компонент сейсмического движения грунта были использованы соотношения Н. Ньюмарка [19, 99] для связи компонент вращательного и поступательного движения грунта. Для получения ротационных аксе-

лерограмм был применен подход, впервые намеченный в трудах В.Т. Рассказовского, развитый и обобщенный в работах Э.Е. Хачияна, Н.А. Николаенко и Ю.П. Назарова. Этот подход базируется на обобщенной волновой модели как способа представления сейсмического воздействия в виде пространственной композиции из любых объемных и поверхностных волн. Ротационные акселерограммы от комбинации S-и P-волн вычислялись по точным аналитическим соотношениям, полученным Ю.П. Назаровым [72] на основе обобщенной волновой модели. Расчеты ротаций от композиции волн Лява и Рэлея был основан на соотношениях Н. Ньюмарка.

При изучении вопросов, связанных с анализом экспериментальных данных, были использованы преимущественно исследования зарубежных специалистов: труды по пространственной изменчивости сейсмического движения Н.А. Абрахамсона [1, 2], А. Зервы и В. Зерваса [32], Т.Д. Анчеты [4], Дж.Ф. Шнайдера [22]; описание эксперимента по оценке динамической реакции поврежденных конструкций М.Д. Трифунака, С.С. Ивановича и М.И. Тодоровской [27]; анализ уровней предельных состояний строительных конструкций был проведен по зарубежным стандартам (Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance. Part 1: General Seismic Actions and Rules for Buildings, Eurocode 8 Part 3. Assessment and retrofitting of buildings, ATC-40, Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings и другие).

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся: обзор основных положений и методов волновой теории сейсмостойкости строительных конструкций, включая описание и выбор расчетных моделей сейсмического движения грунта, задание сейсмического воздействия для интегральной и дифференцированной моделей, метод формирования пространственно-временных полей сейсмического движения, теория обобщенного линейно-спектрального метода.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждена:

- применением базовых основ, гипотез, методов и подходов, принятых в ведущих и мировых научных школах;
- многочисленными проверочными расчетами на простых моделях в ПК MatLab и на многомерных цифровых моделях строительных конструкций с использованием сертифицированного отечественного программного обеспечения STARKON ES;
- публикациями в рецензируемых научных изданиях, в том числе зарубежных, индексируемых в Scopus и Web Of Science;
- обсуждением тематики с ведущими специалистами на профильных конференциях.

Применение новых подходов и методов подкреплено многочисленными примерами; рассмотрены как простые механические системы с 1-6 степенями свободы, так и сложные конструкции, моделирование и расчет которых выполнен в соавторстве с сотрудниками лаборатории автоматизации исследования и проектирования сооружений (ЛАИПС) ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко АО НИЦ «Строительство» и разработчиками специализированного программного обеспечения для строительной отрасли ООО «Еврософт».

Основные результаты диссертационной работы обсуждались на конференциях:

- 1) Назаров Ю.П., Жук Ю.Н., Позняк Е.В., Панасенко Ю.В., Курнавин В.В. Подготовка расчетных параметров интегральной модели сейсмического воздействия с помощью ПО «Еврософт Одиссей». Доклады X Российской национальной конференции по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию. 9-13.09.2013. С.90-92.
- 2) Позняк Е.В. Автоматизация инженерных расчетов на сейсмостойкость. ИНФОРИНО-2014. Международная научно-методическая конференция. Москва, 2014 г. Сборник докладов. С.263-264.

- 3) Назаров Ю.П., Жук Ю.Н., Позняк Е.В., Панасенко Ю.В., Курнавин В.В. Теория и практика расчета строительных сооружений по акселерограммам. XI Российская национальная конференция по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию. С.131-132.
- 4) Позняк Е.В., Новикова О.В. ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СЕЙСМИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ ГРУНТА ПО ПРИРОДНЫМ АКСЕЛЕРОГРАММАМ. Труды Международной научно-практической конференции «Информатизация инженерного образования» — ИНФОРИНО-2016 (Москва, 12—13 апреля 2016 г.). — М.: Издательский дом МЭИ, 2016. — 706 с.: С. 403-406
- 5) Позняк Е.В., Новикова О.В. Модели сейсмического движения грунта в инженерных расчетах на сейсмостойкость, с.186-189. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию В.И. Феодосьева: сборник тезисов / Российская академия наук, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. -М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. -364 с.
- 6) Ю.П. Назаров, Е.В. Позняк. Интегральная модель сейсмического движения грунта в современной теории сейсмостойкости. Доклад на XII Всероссийской научно-практической и учебно-методической конференции «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ», 31 марта 2015 года, МГСУ.
- 7) Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Обобщение линейно-спектрального метода теории сейсмостойкости. Тезисы докладов XII Российской национальной конференции по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию. 12-16.09.2017. С.102-104.
- 8) Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Развитие линейно-спектрального метода для решения задач теории сейсмостойкости. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИ-

КЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ: тезисы докладов международной научной конференции, посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского / Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», Москва, 24-27 октября 2017 г.: М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2017. – 222 с. ISBN 978-5-7038-4800-5. С. 126.

- 9) Ю.П. Назаров, Е.В. Позняк. РАСЧЕТЫ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ВОЛНОВЫЕ СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ STARKON. Цифровые средства производства инженерного анализа: Сб. материалов Первой всерос. конф. с междунар. участием [Электронный ресурс]. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. ISBN 978-5-6040223-6-8. С.179-185.

По теме диссертации Е.В. Позняк опубликовано 30 печатных работ (с публикациями до-кладов на конференциях), включая 10 статей в журналах, входящих в перечень ВАК РФ; 5 статей в научных изданиях, проиндексированных в базах данных Scopus и Web Of Science, 1 учебное пособие.

Благодарности

Выражаю благодарность и глубокую признательность руководителю секцией «Сейсмостойкость сооружений» АО НИЦ «Строительство», члену Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, д.т.н. профессору Юрию Павловичу Назарову за правильные ориентиры, советы и обсуждения многих аспектов настоящей работы.

Благодарю заведующего лабораторией автоматизации исследования и проектирования сооружений (ЛАИПС) ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко АО НИЦ «Строительство» Юрия Николаевича Жука, привлекавшего меня к работе над многими интересными живыми проектами.

Сердечно благодарю за поддержку и участие д.т.н. Виктора Петровича Чиркова, профессора кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин имени В.В. Болотина Национального исследовательского уни-

верситета МЭИ, члена Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике.

Благодарю д.т.н. Александра Георгиевича Тяпина, главного научного сотрудника БКП-2 ОАО «Атомэнергопроект», за новые интересные направления и плодотворное обсуждение многих проблем, затронутых в диссертации.

Выражаю признательность сотрудникам ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко и кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин имени В.В. Болотина НИУ МЭИ за теплое дружеское отношение и поддержку при работе над диссертацией.

1. Основы инженерного расчета на сейсмостойкость

1.1. Эволюция методологии сейсмических расчетов

Этапы развития теории сейсмостойкости можно проследить по изменению формулы для расчета сейсмических сил. Первая попытка сформулировать основы расчета на сейсмические нагрузки, описанная К.С. Завриевым в [59], принадлежала, по-видимому, японскому профессору Ф. Омори¹ (1900 г.). Омори рассматривал сооружение как абсолютно твердое тело под действием постоянных горизонтальных сейсмических сил и, таким образом, допускал, что и грунт, и сооружение колеблются с одинаковым ускорением. При ускорении грунта a сила инерции, действующая на сооружение весом Q , определяется по формуле

$$S = \frac{Q}{g} a = QA, \quad (1.1)$$

где g - ускорение свободного падения, $A = a/g$ - сейсмический коэффициент. Эта теория была названа статической.

Следующий шаг был сделан японским ученым Н. Мононобе² в 20-е годы прошлого века [13]. Он допустил, что сооружение является одномерным упругим телом, а грунт в его основании совершает горизонтальные гармонические колебания. Сейсмическая сила (1.1) прикладывалась к упругому телу с жесткостью K статически; соответствующее статическое перемещение u_{cm} определялось при решении задачи

$$Ku_{cm} = -QA. \quad (1.2)$$

Чтобы получить амплитудное значение установившегося динамического перемещения u , Н. Мононобе умножал статическое перемещение на коэффициент динамичности

$$u = \beta u_{cm}. \quad (1.3)$$

¹ F. Omori. Seismic Experiments on the fracturing and overturning of columns. Publications of the Earthquake Investigations Comitee in Foreign Languages, vol. 4, p.69-141, Tokyo, 1900.

² N. Mononobe. Vibration of Loaded Structure and Its Seismic Stability. Journal of Civil Eng. Society. Tokyo, 1920.

Если обозначить за T период свободных колебаний упругого тела, а за T_0 период гармонической вынуждающей сейсмической силы (период колебаний основания), то коэффициент динамичности определяется по формуле [46]:

$$\beta = \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right)^{-1}.$$

Тот же результат можно получить, умножив в формуле (1.2) левую и правую части на коэффициент динамичности β и решая задачу статики в виде

$$Ku = -\beta QA.$$

Таким образом, инерционная сейсмическая сила Н. Мононобе равна

$$S = \beta QA. \quad (1.4)$$

Аналогичное выражение для сейсмической силы было получено К.С. Завриевым [59, 60] в 1927 г. независимо от Мононобе. Так к задаче сейсмостойкости был применен статический подход, когда сейсмические силы (1.4) прикладывают к упругой системе статически и решают задачу статики. Благодаря коэффициенту динамичности полученная реакция в виде перемещений и внутренних усилий соответствует задаче динамики. Изложенная теория получила название динамической.

Следующее качественное изменение касалось систем со многими степенями свободы. В 1932 г. М.А. Био предложил спектральный метод решения [5, 28, 29], который и поныне остается базовым методом решения линейных задач теории сейсмостойкости. В конечном счете, этот метод дал возможность заменить интеграл Дюамеля значительно более простым решением, выраженным через спектральные ускорения. В сороковые годы прошлого столетия начала развиваться сейсмометрия, происходило постепенное накопление сейсмологических данных, развивались инструменты и техника сбора, обработки и преобразования сейсмологической информации в спектры реакций для различных землетрясений (зависимости между ускорениями одномассовых осцилляторов и их собственными периодами),

см. работы А.Г. Назарова [71], Д. Хадсона [7], Дж. Алфорда, Г. Хаузнера, Р. Марте́ла [3] и других. Величины спектральных ускорений βA_g (или βa) для одномассовых осцилляторов с различными собственными периодами определялись экспериментально, с помощью аналоговых устройств. На основе экспериментальных данных были получены вошедшие в первые нормы стандартные спектральные кривые, отвечающие реальным землетрясениям.

Динамическая теория получила дальнейшее развитие в 30-50-е годы в трудах И.Л. Корчинского [62-64]. Он предложил рассматривать сейсмическое ускорение грунта в виде суммы затухающих гармоник и получил расчетную сейсмическую нагрузку для многомерной консольной модели. Формулы И.Л. Корчинского стали базовыми для расчета сейсмической нагрузки в СП-8-57 «Нормы и правила строительства в сейсмических районах», введенных в действие в 1957 году. В качестве расчетной схемы в этом СП была предложена плоская консольная модель с n сосредоточенными массами (Рисунок 1.1). Расчет сейсмических сил был основан на следующих предположениях И.Л. Корчинского, изложенных И.И. Гольденблатом и Н.А. Николаенко в [53]:

- 1) процесс движения грунта рассматривается как стационарный за исключением небольших интервалов по времени в начале и конце землетрясения;
- 2) сооружение реагирует только на одну гармонику из всего спектра Фурье сейсмического движения грунта, наиболее близкую к его первой собственной частоте;
- 3) коэффициент динамичности β определяют по диаграмме на Рисунке 1.2 по собственному периоду конструкции;
- 4) в последнем пункте приведем дословно мнение авторов [53] относительно степени доверия к результатам расчета: «... при перечисленных выше ограничениях расчет становится несколько *условным*, однако в настоящий момент ввиду ограниченности знаний законов движения почвы лучшего предположить не представляется возможным.»

Расчетная сейсмическая нагрузка в точке, где сосредоточена масса элемента конструкции весом Q_k , принималась равной

$$S_k = Q_k A \beta \eta_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

Здесь η_k - коэффициент формы колебаний, введенный И.Л. Корчинским в виде

$$\eta_k = \frac{X_k \sum_{i=1}^n Q_i X_i}{\sum_{i=1}^n Q_i X_i^2}, \quad (1.6)$$

где $X_k = X(x_k)$, $X_i = X(x_i)$ - отклонения по первой собственной форме колебаний в точках с координатами x_k и x_i (Рисунок 1.1). Значения сейсмического коэффициента A определялись по таблице 1.1.

Благодаря работам советских ученых были исследованы вопросы рассеяния энергии, влияния переходных процессов в конструкции и свойств грунта на сейсмические силы, впервые была поставлена и качественно описана проблема взаимодействия конструкции с грунтовым основанием [47].

Таблица 1.1.

Значения сейсмического коэффициента в СП-8-57

Расчетная сейсмичность в баллах	7	8	9
Значения сейсмического коэффициента A	1/40 (0,025)	1/20 (0,05)	1/10 (0,1)

В 1981 году был принят новый нормативный документ, регламентирующий сейсмические расчеты в строительной отрасли СНиП II-7-81* Строительство в сейсмических районах, разработанный специалистами ведущих научных и проектных организаций под руководством С.В. Полякова. Расчет предусматривал учет не одной, а нескольких форм колебаний; сейсмические силы, действующие на элемент конструкции с весом Q_k , определяются для каждой j -той собственной формы в соответствии с формулой

$$S_{jk} = K_1 K_2 K_\psi Q_k A \beta_j \eta_{jk}, \quad k=1, \dots, n, j=1, \dots, p, \quad (1.7)$$

где p - число удерживаемых форм колебаний. Сейсмические силы (1.7) получили название модальных или спектральных сил, поскольку они соответствуют формам (или модам) спектра собственных колебаний.

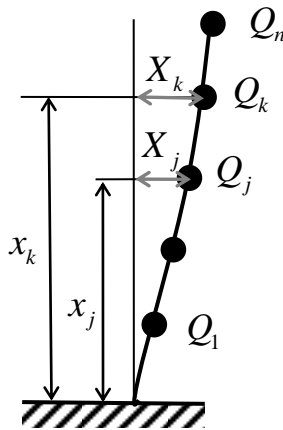


Рисунок 1.1.
Консольная модель

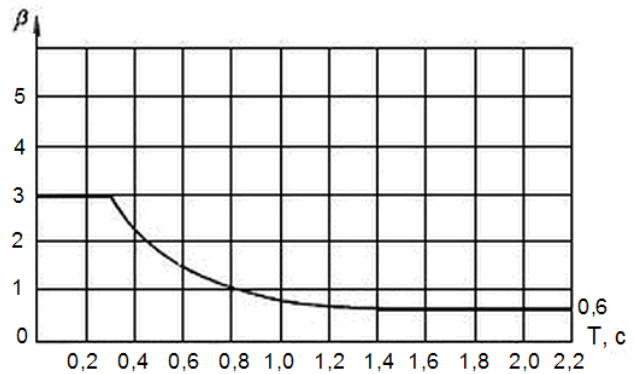


Рисунок 1.2. Коэффициент динамичности, принятый в СП-8-57

Коэффициент сейсмичности A в новых нормах увеличился сразу в 4 раза (см. Таблицу 1.2).

Таблица 1.2.

Значения сейсмического коэффициента в СНиП II-7-81*

Расчетная сейсмичность в баллах	7	8	9
Значения сейсмического коэффициента A	0,1	0,2	0,4

Причиной стало появление новой сейсмической шкалы MSK-64³ [66, 116], в которой интенсивностям в баллах были приписаны уточненные значения ускорений, скоростей и перемещений. Значения сейсмического коэффициента оказались примерно вчетверо выше предполагаемых ранее (см. Таблица 1.3).

Как отмечалось в [93], если проводить расчет по уточненным значениям A (Таблица 1.2), то сейсмические силы получаются такими, что сооружение гарантированно разрушалось уже при 7 баллах. Тем не менее, опыт показывает, что здания выдерживают 7-балльные землетрясения, хотя в них и могут появиться трещины.

³ Сейсмическая шкала С.В. Медведева, В. Шпонхойера, В. Карника

Интенсивность сейсмического воздействия по шкале MSK-64

Интенсивность в баллах	Интервалы ам- плитуд ускоре- ний грунта, см/с ²	Интервалы ам- плитуд скоро- стей грунта см/с	Интервалы ам- плитуд смеще- ний центра тя- жести маятника на сейсмометре СБМ, см
6	30-60	3,0-6,0	1,5-3,0
7	61-120	6,1-12,0	3,1-6,0
8	121-240	12,1-24,0	6,1-12,0
9	241-480	24,1-48,0	12,1-24

Это обстоятельство навело на мысль о снижении сейсмических сил за счет работы конструкций за пределами упругости, умножив их на коэффициент допускаемых повреждений K_1 . Для коэффициента K_1 были приняты следующие значения: $K_1 = 1$ – для сооружений, в которых локальные повреждения и остаточные деформации не допускаются, $K_1 = 0,25$ для сооружений, в которых допускаются остаточные деформации и локальные повреждения, затрудняющие нормальную эксплуатацию, $K_1 = 0,12$ - если допускаются значительные остаточные деформации, трещины, повреждения, приостанавливающие нормальную эксплуатацию.

Коэффициент K_2 учитывал особенности конструктивного решения здания или сооружения (здания каркасные, панельные, этажность и т.д.) и принимает значения от 0,5 до 1,5.

Коэффициент K_ψ был введен для учета малого демпфирования некоторых конструкций (башни, дымовые трубы, мачты и т.д.) и меняется от 1 до 1,5.

Таким образом, упрощенное линейное решение (1.7) корректировалось набором коэффициентов.

Избирательное возбуждение колебаний по разным формам учитывается коэффициентом динамичности β_j , своим для каждой собственной формы с номером j .

Кроме того, величина коэффициента динамичности зависит от типа грунта. Известно, что мягкие грунты усиливают сейсмический эффект. В [66] приведены

данные по приращению сейсмической балльности грунтов разных типов. Так, если брать за эталонный грунт гранит, то по сравнению с ним скальные грунты (известняки, песчаники, сланцы) усиливают сейсмичность площадки на 0,2 - 1,1 балла; полускальные (гипсы, мергели) – на 0,6 - 1,2 балла; песчаные – на 1,2 - 1,8 балла; глинистые (глины, суглинки, супеси) – на 1,2 - 2,1 балла; насыпные и почвенные – на 2,3 - 3 балла; обводненные насыпные и почвенные – до 3,9 баллов. Поэтому на диаграмме на Рисунке 1.3 более слабые грунты (2 и 3 категории) имеют повышенные значения коэффициента динамичности.

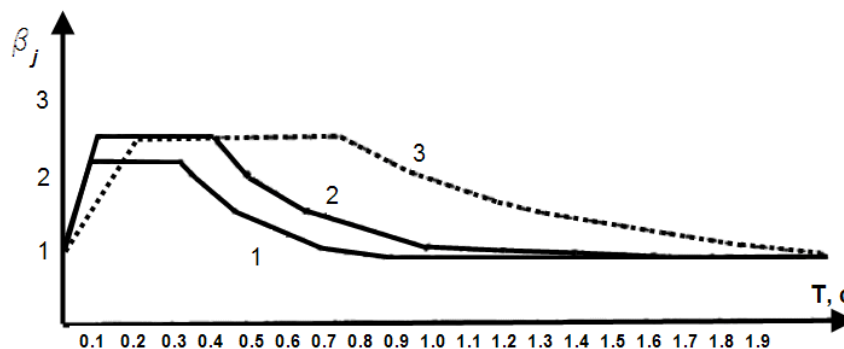


Рисунок 1.3. Коэффициенты динамичности по СНиП II-7-81*

(1 – скальные грунты; 2 - скальные выветрелые; 3 - рыхлые пески и глины).

Коэффициент формы колебаний так же, как и коэффициент динамичности, рассчитывается для каждой собственной формы

$$\eta_{jk} = \frac{X_{jk} \sum_{i=1}^n Q_i X_{ji}}{\sum_{i=1}^n Q_i X_{ji}^2},$$

где $X_{jk} = X_j(x_k)$, $X_{ji} = X_j(x_i)$ - отклонения по j -ой собственной форме колебаний в точках с координатами x_k и x_i (Рисунок 1.1).

Таким образом, по формуле (1.7) рассчитывают спектр сейсмических сил, соответствующий спектру собственных частот и форм колебаний конструкции; по этой причине теория, заложенная в СНиП II-7-81*, называется спектральной.

Модальные сейсмические силы (1.7) прикладывают к расчетной модели статически и определяют соответствующие модальные отклики конструкции: внутренние усилия N_{jk} и перемещения. Так как сейсмические силы соответствуют разным формам, они не могут действовать одновременно⁴. В [36] доказано, что наиболее вероятное значение полного расчетного усилия вычисляется по формуле средне-квадратического осреднения (правило ККСК: расчетное усилие, приложенное к k -той массе, равно квадратному корню из суммы квадратов модальных усилий, приложенных к этой массе):

$$S_k = \sqrt{\sum_{j=1}^p S_{jk}^2}$$

Полученные усилия добавляют к прочим усилиям в расчетное сочетание нагрузок и оценивают сейсмостойкость сооружения по методу предельных состояний.

1.2. Направления и перспективы развития современной теории сейсмостойкости

С усложнением конструкций зданий развитие теории сейсмостойкости сопровождалось углублением в различные аспекты сейсмических явлений. К настоящему моменту она превратилась в многогранную отрасль строительной механики, привлекающую к решению своих задач теории вероятностей, надежности, случайных процессов, пластичности, случайных и нелинейных колебаний, волновую механику и вычислительные методы решения задач динамики. На Рисунке 1.5 схематично показаны этапы развития теории, первые три из которых обсуждались выше. Сегодня основные работы направлены на учет пространственного характера расчетной динамической модели и сейсмического воздействия и продвигаются по трем основным направлениям: волновая теория сейсмостойкости, развитие мето-

⁴ Сейсмическое движение грунта можно представить в виде суммы гармонических составляющих (разложение в ряд Фурье). Отдельные гармоники будут возбуждать формы, близкие к ним по частоте. Если, например, начало землетрясения было высокочастотным, первыми прореагируют высокочастотные формы, в то время как реакция со стороны низкочастотных форм будет запаздывать.

дов и вычислительных возможностей нелинейного анализа и применение вероятностного подхода.

Вероятностная теория сейсмостойкости

С 50-х годов прошлого века стал активно развиваться вероятностный подход к решению задач сейсмостойкости. Казалось, он больше соответствует характеру проблемы в силу случайного характера сейсмического воздействия и физических свойств материалов. Благодаря работам В.В. Болотина [37-43], М.Ф. Барштейна [34-124], И.И. Гольденבלата [50-55], Н.А. Николаенко [95-97], Ш.Г. Напетваридзе [93-94] и других ученых задачи сейсмостойкости сооружений начали решать методами теории случайных процессов. Смысл вероятностной постановки состоит в том, что случайная нагрузка представляется в виде случайного процесса с заданными вероятностными параметрами (Рисунок 1.6) [40, 42]. Этот процесс подается на вход линейной стационарной системы – конструкции, динамические свойства которой заданы уравнениями движения. Система трансформирует случайный процесс на входе в случайный процесс на выходе. Выходной случайный процесс полностью определяется частотными характеристиками самой системы и вероятностными характеристиками процесса на входе, такими, например, как математическое ожидание и стандарт.

В рамках корреляционной теории по системе корреляционных функций, описывающих движение грунта, находится система корреляционных функций для внутренних усилий в конструкции, и эти функции ограничиваются данными о распределении прочностных свойств материалов [53-55].

Методы теории вероятностей, статистической динамики и случайных процессов подходили не только для вероятностной оценки динамической реакции конструкции, но и для учета случайного характера её механических и прочностных свойств, для спектрального и корреляционного анализа записей землетрясений и моделирования синтетических акселерограмм, для оценки наступления землетря-

сения определенной интенсивности, для оценки сейсмического риска и резерва несущей способности конструкций.

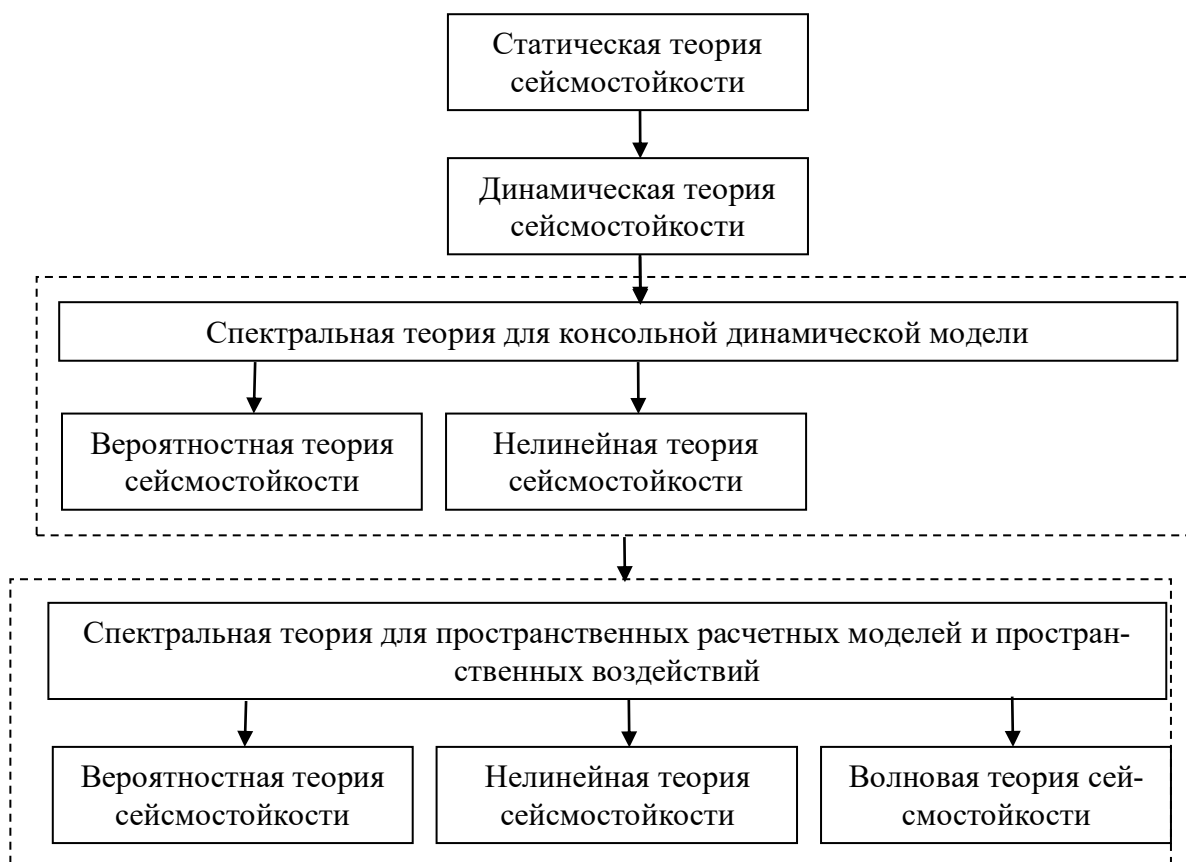


Рисунок 1.5. Этапы развития теории сейсмостойкости

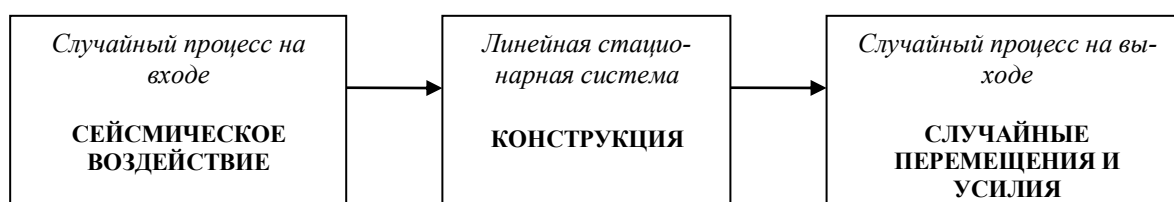


Рисунок 1.6. Применение вероятностного подхода

Но ученым и инженерам тех лет пришлось на практике убедиться, что вероятностный подход имеет существенные недостатки. В основном они связаны со сложной нестационарной природой физических процессов зарождения сейсмического возмущения в недрах и распространением его в виде сейсмических волн до земной поверхности. По этой причине каждое сильное землетрясение – событие

довольно редкое с уникальными вероятностными характеристиками. В предисловии Я.А. Айзенберга к работе [93] отмечается, что, поскольку отсутствует ансамбль реализаций соответствующего случайного процесса, вряд ли когда-нибудь появятся надежные исходные данные для расчетов в виде обоснованных вероятностных распределений, а это означает, что чисто вероятностные подходы и включение этих подходов в строительные нормы встретили бы принципиальные затруднения. Вместе с тем при разумном сочетании с инженерным анализом они могут стать полезным инструментом исследования. Однако надо учитывать, что вероятностные расчеты нелинейных систем связаны с применением метода статистического моделирования, что часто приводит к исключительно трудоемким вычислениям.

Интересные работы последних лет связаны с вероятностным описанием процесса поверхностного распространения сейсмических волн в малых масштабах. В 80-х годах прошлого века началось создание специальных полигонов – полей (или массивов) с плотным размещением сейсмодатчиков (*dense instrument arrays*), разделенных между собой достаточно малыми расстояниями, порядка десятка метров. Сегодня во многих сейсмически активных зонах мира (США, Тайвань, Япония, Италия, Греция, Финляндия) работают десятки таких полигонов [1, 2, 32]. Их основная цель - сбор, накопление и анализ сейсмологических данных для изучения сейсмических движений в малых масштабах. Результаты обработки данных представляются в виде функции когерентности - меры согласованности спектрального состава сейсмического воздействия в различных точках поверхности грунта. Вопросы практического применения функции когерентности в инженерных расчетах исследованы в [82] и связаны с оценкой рассеяния сейсмических волн в грунте при анализе протяженных конструкций.

Волновая теория сейсмостойкости

Начиная с 70-х годов прошлого века благодаря работам ученым СССР и СНГ (научные школы К.С. Завриева в Грузии [60, 93], В.Т. Рассказовского в Узбекистане [118, 119], Э.Е. Хачияна в Армении [137, 138], ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко

[72, 75, 96], работы А.П. Синицына [125, 126] и многих других замечательных ученых) стало развиваться волновое направление теории сейсмостойкости. Волновая теория сейсмостойкости решает три основные задачи: анализ влияния волнового сейсмического воздействия на пространственные сооружения, взаимодействие конструкции с грунтовым основанием и инициация сейсмическими волнами волновых процессов в конструкциях. Для решения перечисленных задач применяется аппарат волновой механики. Коротко поясним их содержание.

Энергия, высвобождаемая в очаге землетрясения, передается к поверхности земли сейсмическими волнами. Объемные и поперечные волны движутся к поверхности с разными скоростями. Существенные изменения волны претерпевают при переходе из скального основания в осадочный слой; в более мягком осадочном слое скорость распространения волн снижается. Если среда, по которой проходят эти волны, слоистая, возникают отражения и преломления на границах, а само волновое движение происходит с частичным рассеиванием. Кроме того, осадочный слой обладает упругопластическими свойствами [47], поэтому, если напряжения в грунте будут превышать предел упругости, возникнут и упругие, и пластические волны. Таким образом, описание близкой к реальной волновой картины у поверхности земли становится самостоятельной сложной задачей.

Продвижение бегущей сейсмической волны под фундаментом может привести к раскачиванию и крутильным колебаниям (трехмерным ротациям) сооружения [72, 75, 84, 86, 89]. В этом случае даже при малых углах ротаций происходит перераспределение и рост внутренних усилий в конструкции [89], а при больших углах задача становится геометрически нелинейной [72, 75]. Для учета волнового движения под фундаментом и ввода в расчет ротаций применяются интегральная дилатационно-ротационная и дифференцированная модели сейсмического движения грунта. В интегральной дилатационно-ротационной модели объем грунта под фундаментом движется как твердое тело с тремя угловыми и тремя линейными степенями свободы. Дифференцированная модель сейсмического грунтового движения задается векторным полем кинематических параметров, определенным

в каждой точке грунта. Инженерный анализ, учитывающий волновые эффекты, должен предусматривать выбор подходящей модели сейсмического движения и определение расчетных параметров сейсмического воздействия [89].

Раскачивание конструкции может привести к отрыву фундамента от грунтового основания [47], вследствие чего изменится общая жесткость системы, центры масс и жесткости сместятся относительно друг друга, в грунтовом основании могут появиться пластические области со сниженным модулем деформации. Дифференциальные уравнения движения системы с частичным исключением связей становятся нелинейными или с переменными коэффициентами; возможна полная потеря устойчивости.

Волны, подходящие к фундаменту сооружения, проходят по нему так же, как и по грунту. Амплитуды колебаний по высоте здания нарастают, а на верхних этажах удваиваются за счет отражения от верхнего перекрытия [47]. Этим объясняют разрушение верхних этажей при некоторых эпицентральных землетрясениях.

На сейсмический эффект влияет глубина заложения фундамента и его жесткость. При анализе повреждений после землетрясения в г. Ниигата (Япония) было установлено [47], что здания, имеющие глубокие подвальные этажи на мощных плитных фундаментах, были повреждены меньше, чем здания на ленточных и свайных фундаментах.

Сооружения, особенно если они массивные, с жесткими фундаментами и расположены на мягких грунтах, могут и сами влиять на сейсмичность окружающего их грунтового основания, передавая ему свое собственное колебательное движение. Так сейсмическое движение накладывается на колебания грунта, вызванные конструкцией, и в результате сейсмичность площадки может измениться (изменения могут достигать 1,5 баллов [47]). Этот эффект становится более ощутимым для фундаментов глубокого заложения. Кроме того, следует учитывать, что собственные частоты сооружения на податливом основании снижаются, а часть сейсмической энергии отражается от подземной части фундамента и рассеивается.

Методы инженерного анализа сооружений с учетом взаимодействия конструкции с грунтовым основанием изложены в [36, 68, 132]. В инженерных расчетах грунт моделируется линейной вязкоупругой слоистой средой на подстилающем скальном основании, в такой постановке задача хорошо изучена и решается. Сложности математического и вычислительного характера начинаются, когда необходимо ввести в расчет нелинейные пластические свойства грунта.

В настоящей работе изложены вопросы, связанные с инженерными расчетами пространственных строительных конструкций на волновое сейсмическое воздействие. Инженерная теория сейсмостойкости была разработана в середине прошлого века для консольной динамической модели при поступательном сейсмическом воздействии. Однако современные программные комплексы позволяют спроектировать пространственную модель сооружения любой сложности, так что консольная модель уже практически не применяется. Кроме того, волновое сейсмическое движение имеет пространственный характер. Если фундамент достаточно жесткий, воздействие, создаваемое полем волновых сейсмических перемещений под фундаментом здания, в осредненном виде представляет собой вектор сейсмического воздействия. Этот вектор в общем случае содержит и поступательные, и ротационные компоненты. Если фундамент податливый, а длины доминирующих сейсмических волн соизмеримы с размерами конструкции в плане, движение каждой опорной точки происходит независимо, по индивидуальному закону, отражающему процесс прохождения волны, также в результате приводящий к угловым движениям основания и конструкции. Поэтому необходимо, чтобы обе модели были пространственными – и модель сооружения, и модель воздействия. В этом случае они будут соответствовать друг другу и позволят обнаружить качественно новые особенности движения динамических систем.

Методика учета волнового движения грунта к настоящему времени включает (подчеркнуты базовые понятия волновой теории сейсмостойкости, смысл которых раскрывается в гл. 2-4):

1) определение длин доминирующих сейсмических волн по значениям функции нормированной интенсивности (χ_1 -функция);

2) определение модели сейсмического движения грунта (одна из трех - интегральная дилатационная, интегральная ротационная либо дифференцированная) в зависимости от длин доминирующих сейсмических волн;

Если установлено, что для заданного воздействия и РДМ приемлема интегральная модель сейсмического движения грунта, то

3) моделирование ротационных компонент сейсмического движения на основе обобщенной волновой модели и заданных трехкомпонентных акселерограмм поступательного движения (обобщенная волновая модель задает волновое движение по объему грунта и применяется для осреднения этого движения по объему и для расчета ротационных компонент);

4) учет фильтрующих свойств жесткого фундамента [85]. Абсолютно-жесткий фундамент не пропускает коротковолновую часть сейсмического воздействия, и за счет этого сейсмическая интенсивность может быть несколько снижена. Для расчетов во временной области проводят фильтрацию акселерограмм, то есть удаляют волны с длинами, не превышающими минимальный размер жесткого фундамента B . Для расчетов в частотной области операция фильтрации эквивалентна умножению сейсмической интенсивности на редуцирующие коэффициенты (χ -коэффициенты), полученные как значения функции нормированной интенсивности (χ_1 -функция) при аргументе B ;

5) определение спектральных коэффициентов динамичности по поступательным и ротационным акселерограммам;

6) обобщение линейно-спектрального метода на общий случай сейсмического воздействия, включающий и поступательное, и угловое движение грунта (см. гл. 3).

Если установлено, что для заданного воздействия и расчетной модели необходимо применять дифференцированную модель сейсмического движения грунта, то п.3)-б) изменятся на:

- 3) моделирование поля кинематических параметров сейсмического движения на основе сейсмологической информации о возможных типах волн и заданных трехкомпонентных акселерограмм поступательного движения;
- 4) формирование вектора сейсмического воздействия в опорных точках конструкции с помощью функции пространственного распределения ускорений;
- 5) определение спектральных коэффициентов динамичности для дифференцированного воздействия;
- б) обобщение линейно-спектрального метода на случай дифференцированного сейсмического воздействия (см. гл. 4).

Нелинейная теория сейсмостойкости

Известно, что сопротивление конструкции сейсмическим воздействиям сопровождается множеством нелинейных эффектов, усиливающихся с увеличением интенсивности. При сильных землетрясениях происходит развитие пластических зон, рост трещин, частичное или полное нарушение некоторых связей, что приводит к перестройке структуры конструкции и снижению её жесткости. При больших угловых перемещениях из-за изменившейся геометрии происходит перераспределение внутренних усилий. Нелинейности такого рода характерны и для статического, и для динамического нагружения. Но в динамике нелинейные системы проявляют и другие специфические качества. Вследствие нелинейных перекрестных связей между обобщенными координатами и невыполнения принципа суперпозиции появляются дробные, кратные и комбинационные резонансы, когда рост амплитуды колебаний происходит при различных соотношениях собственных частот и частот возбуждения [42]. Решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях становится неоднозначным и зависит от истории нагружения.

Возникает явление «перекачки энергии»⁵ внешнего воздействия от одних обобщенных координат к другим [52, 72]. Все перечисленные эффекты отсекаются при линейной постановке задачи, принятой в спектральной теории, когда модель сооружения предполагается физически и геометрически линейной⁶.

Осознание ограниченных возможностей линейно-спектрального метода подтолкнуло ученых, с одной стороны, к развитию новых подходов нелинейной механики, а с другой – к поиску и внедрению более простых инженерных решений для практического применения в проектных организациях.

В самом общем виде математическая постановка задачи нелинейной теории сейсмостойкости включает систему следующих уравнений:

- 1) уравнения состояния (связь между напряжениями и деформациями), нелинейные при учете упрочнения, текучести, ползучести;
- 2) геометрические уравнения (соотношения между перемещениями и деформациями), нелинейные при больших перемещениях;
- 3) нестационарные уравнения динамического равновесия (уравнения движения), их нелинейность следует из уравнений 1) и 2); дополнительные источники нелинейности появляются при изменении структуры конструкции (выключение имеющихся или возникновение новых внутренних связей) и при наличии нелинейных демпферов.
- 4) краевые условия, нелинейные, если опоры односторонние, включающиеся или выключающиеся в процессе деформирования, или если они обладают физической нелинейностью.

⁵ Хорошая иллюстрация возникновения нелинейных колебаний по перекрестно связанным обобщенным координатам приведена в работе И.И. Гольденבלата [34] в примере с пружинным маятником. Пружина с сосредоточенной массой на конце может совершать вертикальные и крутильные колебания, не связанные между собой в линейном приближении. Однако при больших начальных отклонениях вертикальные колебания маятника постепенно затухают, переходя в крутильные. Когда крутильные колебания достигают максимальной амплитуды, начинают вновь возбуждаться и нарастают вертикальные, и т.д. Колебательный процесс выглядит как чередование колебаний по двум формам и не имеет объяснения в рамках линейной теории.

⁶ Физическая и геометрическая линейность означают соответственно линейную упругость системы и малость перемещений.

Решать нелинейные задачи численными методами очень непросто. Проблема расчета нелинейных динамических систем большой размерности сложна как математической, так и с вычислительной точки зрения, особенно в отношении динамики систем со структурными изменениями. В классическом методе конечных элементов существуют ограничения, не позволяющие решать существенно нелинейные задачи строительной механики с большими угловыми перемещениями, выключающимися связями, с кинематически изменяемыми схемами. Здесь требуются принципиально новые расчетные алгоритмы и программное обеспечение [58, 69, 70]. В [72] предполагается, что возможно, далее будут развиваться новые модификации метода конечных элементов, в которых наряду с деформируемыми конечными элементами (ДКЭ) начнут применять твердые конечные элементы (ТКЭ). Идея родилась и обсуждалась в научной школе ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, её авторы⁷ исходили из следующих соображений. Сооружение состоит из элементов, существенно отличающихся по жесткости, иногда на несколько порядков. Потенциальная энергия деформации в основном накапливается в менее жестких элементах, они первыми начнут испытывать пластические изменения и с них начнется разрушение конструкции. Такие элементы надо моделировать как ДКЭ. Более жесткие элементы ведут себя как твердые тела с 6 степенями свободы и могут моделироваться как ТКЭ; их движение описывается уравнениями динамики твердого тела. Решение задачи формирования глобальных матриц жесткости ансамбля ДКЭ и ТКЭ получено Ю.П. Назаровым в [72]. Введение твердых элементов в расчетную модель не только существенно снижает размерность системы, но и решает проблему действительно больших угловых перемещений. Этот подход открывает перспективы для корректного моделирования процесса разрушения конструкций в расчетах на сейсмостойкость, с анализом живучести и устойчивости к прогрессирующему обрушению.

1.3. Инженерный подход в теории сейсмостойкости

⁷ Н.А.Николаенко, Ю.П.Назаров и другие.

По итогам трех предыдущих параграфов понятно, как может быть сложна исходная физическая модель конструкции (Рисунок 1.7). Если учитывать все особенности работы сооружения, провести расчет не удастся из-за непреодолимых математических и вычислительных затруднений. Инженеры обходят эти сложности, применяя упрощенные и вместе с тем надежные приемы расчета – инженерные методы. Смысл инженерного подхода состоит в переходе к простой математической постановке задачи и соответствующей ей расчетной схеме, вычленив самые важные факторы, формирующие динамический отклик и заменив сложные математические методы упрощенными. П.А.М. Дирак⁸ писал о сущности инженерного подхода так: «Инженеру нужно получить результаты, а в стоящих перед ним проблемах имеется такое множество фактов, что большинством из них он вынужден пренебречь. У него нет времени подвергать все серьезному изучению, и он вырабатывает своего рода чувство, чем можно пренебречь, а чем нельзя».

Перечислим основные принципы создания расчетных схем конструкций, предложенные Н.М. Герсевановым [54]:

1. Расчеты должны предохранять конструкции от форм разрушений, подтвержденных опытом строительной практики. Если воздействия не приводят к разрушению, то расчеты на них не нужны.
2. Поскольку некоторые факторы учесть не удастся, расчетная схема должна соответствовать менее благоприятным условиям, чем это есть в действительности.
3. Система исходных гипотез должна обеспечивать не только прочность и устойчивость, но и экономичность конструкции.

⁸ П.А.М. Дирак. Лекции по квантовой теории поля. М.: Мир. 1969.

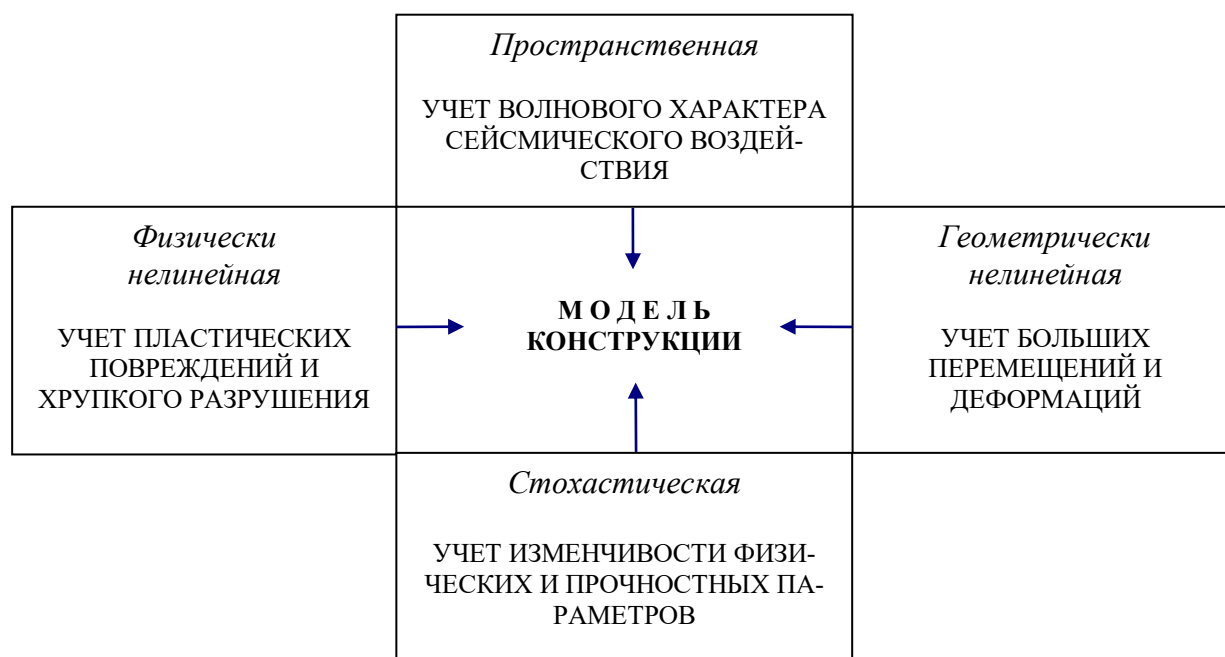


Рисунок 1.7. Идеальная модель конструкции для расчета на сейсмостойкость

В то же время все упрощения должны быть осторожными и продуманными, особенно в отношении отбрасывания нелинейных членов определяющих уравнений ввиду их малости.

1.4. Предельные состояния строительных конструкций

Расчет конструкций на сейсмические воздействия проводится методом предельных состояний. В соответствии с ним считают, что конструкция сопротивляется внешним нагрузкам до тех пор, пока внутренние усилия (или деформации) в расчетном сечении меньше предельного значения. Предельное значение усилий (деформаций) соответствует принятому расчетному предельному состоянию. В ГОСТ Р 54257-2010 "Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения и требования" предельные состояния подразделяются на три группы:

- первая группа - состояния строительных объектов, превышение которых ведет к потере несущей способности строительных конструкций и возникновению аварийной расчетной ситуации;

- вторая группа - состояния, при превышении которых нарушается нормальная эксплуатация строительных конструкций, исчерпывается ресурс их долговечности или нарушаются условия комфортности;
- особые предельные состояния - состояния, возникающие при особых воздействиях и ситуациях и превышение которых приводит к разрушению сооружений с катастрофическими последствиями.

В ГОСТ Р 54257-2010 указано, что перечень предельных состояний и соответствующих критериев, которые необходимо учитывать при проектировании строительного объекта, устанавливаются в нормах проектирования и (или) в задании на проектирование. Унифицированного перечня предельных состояний для расчета на сейсмостойкость в российских нормах пока нет.

Следует отметить, что при расчете по предельным состояниям первой группы имеется в виду локальная несущая способность расчетного сечения. Но понятие «несущая способность» имеет и более широкий смысл, если говорить о конструкции в целом. Потеря несущей способности конструкции равнозначна её полному разрушению или превращению в механизм с последующей потерей устойчивости. Невыполнение условия прочности в сечении далеко не всегда приводит к катастрофическим последствиям. Например, достижение предельного состояния в сечении статически неопределимой стальной балки и появление в нем пластического шарнира не приведет к её кинематической изменяемости, для этого таких шарниров нужно несколько. Если растянутая арматура железобетонной балки достигнет предельного состояния, при котором напряжения равны пределу текучести, балка покроется трещинами, сильно деформируется, но разрушения не произойдет. Таким образом, достижение предельного состояния сечения не обязательно влечет за собой потерю несущей способности конструкции в целом.

Сформулировать критерий достижения предельного состояния конструкции значительно сложнее, чем для отдельного сечения. Для каждой конструкции это будет свое индивидуальное предельное состояние, возможно, не единственное. Оно

должно быть увязано с механизмом разрушения при заданном воздействии, то есть с очередностью и видом нарушения связей между элементами: по хрупкому сценарию или с образованием пластических шарниров.

Кроме того, предельное усилие для сечения или связи должно соответствовать динамическому характеру нагружения, то есть учитывать, что при циклических нагрузках за пределом пропорциональности прочностные показатели упругопластических сред снижаются, а внутреннее демпфирование за счет накопления повреждений растет.

Таким образом, начиная расчет, следует понимать, от какого предельного состояния он предохранит конструкцию, и что случится, если условие прочности будет нарушено. Проблема состоит в том, что классический набор предельных состояний не совсем подходит для задач теории сейсмостойкости по следующим причинам:

- 1) Расчет проводится по одному или нескольким расчетным сечениям с максимальными усилиями, фактически обеспечивая упругую работу всех остальных элементов.
- 2) Предельное состояние относится только к сечению, а не к связям между элементами конструкции. Другими словами, если выключение какой-то связи приведет к возникновению кинематически изменяемой системы, с точки зрения метода предельных состояний в его настоящем виде прочность конструкции будет все же обеспечена. Это означает, что расчеты на прочность динамических систем с выключающимися связями, расчеты на прогрессирующее разрушение и на живучесть пока не попадают в область применения метода предельных состояний. Для таких задач должно быть сформулировано особое определение предельного состояния связей, обеспечивающих несущую способность.
- 3) Предельные усилия в расчетах на сейсмостойкость соответствуют статическому нагружению.

Другими словами, предельное состояние конструкции должно быть связано с сохранностью элементов и связей, обеспечивающих несущую способность. Поэтому предельное состояние будет индивидуальным для каждого сооружения. Расчет на сейсмостойкость должен гарантировать сохранность несущего ядра конструкции. Таким образом, надо совершить переход от предельного состояния в сечении к предельному состоянию всей конструкции. Перед расчетом должен быть сформулирован набор требований к сечениям несущих элементов и связям между ними, обеспечивающий упругую работу несущего ядра. Такое предельное состояние не должно быть связано с повреждениями элементов, не важных с точки зрения обеспечения несущей способности. Предельные усилия должны быть рассчитаны с учетом динамического быстро меняющегося характера воздействия.

1.5. Концепция двойного расчета и метод трех моделей

И.И. Гольденблат, понимая, что задача сейсмостойкости в нелинейной постановке вряд ли когда-нибудь будет решена силами инженеров проектных учреждений, предложил значительно более простой путь – концепцию двойного расчета [54]. Он рассуждал так: землетрясения можно разделить на частые слабые с интервалом повторяемости в десятки лет и редкие сильные, повторяемость которых значительно превышает срок службы сооружения. Расчет на частые слабые толчки можно проводить по упругой стадии классическим методом предельных состояний, так, чтобы уберечь здание от повреждений. Это первая расчетная ситуация, известная как расчет на проектное землетрясение (ПЗ), то есть то, которое может произойти на данной площадке хотя бы один раз за срок службы сооружения.

Второй расчет проводится для случая редкого сильного воздействия – на максимальное расчетное землетрясение (МРЗ), потенциально возможное на данной площадке по данным сейсмологических исследований. В случае сильных землетрясений удержание конструкции в упругой стадии нецелесообразно. И.И. Гольденблат и С.В.Поляков по этому поводу писали так [55]: «Мы не можем требовать, чтобы сооружения, возводимые в районах восьми-, а тем более девятибалльных землетрясений, полностью сохранялись без всяких повреждений после про-

шедших землетрясений. ... В зданиях могут появиться трещины и местные повреждения, которые вызовут потом необходимость ремонта, иногда даже капитального, но, если жизнь людей и наиболее ценное оборудование сохранены, можно считать подобные здания и сооружения сейсмостойкими. Мы приходим, таким образом, к несколько отличному от принятого определению предельного состояния. Как известно, под предельным состоянием понимается такое, при котором невозможна дальнейшая эксплуатация объекта. В данном случае нужно отказаться от этого определения. ... В сущности, задачей теории сейсмостойкости является обеспечение сооружений от больших повреждений; в отдельных объектах местные дефекты и разрушения могут считаться допустимыми».

В расчете на сильные воздействия учитываются все внутренние резервы конструкции, такие как пластические деформации, трещинообразование, перестройку внутренней структуры, увеличение демпфирования и т.д.

Поскольку комплексные нелинейные расчеты исключительно трудоемки, И.И. Гольденблат предложил сразу рассматривать расчетную схему поврежденного объекта и линейным расчетом обеспечивать его упругую работу. Расчетная схема поврежденного объекта выбирается после предварительного анализа наиболее вероятного при заданном воздействии процесса перехода конструкции в состояние, близкое к предельному, на протяжении всего времени действия землетрясения. Выбирается оптимальный вариант поврежденной расчетной схемы, который, во-первых, может быть спроектирован так, что будет работать упруго вплоть до конца землетрясения, во-вторых, это не потребует больших материальных затрат. Цель расчета - усиление выбранной схемы поврежденного сооружения таким образом, чтобы оно сохранило несущую способность при максимальных сейсмических нагрузках вплоть до конца землетрясения.

Понятно, что основная сложность - в правильном выборе расчетной схемы поврежденного объекта. Здесь поможет детальный научный анализ механизмов разрушения похожих конструкций после прошедших землетрясений, хорошие знания в области строительной механики, инженерный опыт и интуиция.

В научной школе ЦНИИСК им.В.А.Кучеренко идея И.И. Гольденבלата нашла свое продолжение в виде метода «трех моделей», отражающего три стадии, через которые проходит конструкция в процессе землетрясения [79, 80]:

А – упругая стадия для расчета на ПЗ. Конструкция работает упруго в течение всего воздействия, внутренние усилия не превышают предельных. Физико-механические характеристики системы постоянны и такие же, как до землетрясения. Расчет проводится линейно-спектральным методом. Интенсивность воздействия задается коэффициентом сейсмичности. Коэффициент K_1 равен единице, так как землетрясение слабое и модель работает упруго. Цель расчета – не допустить повреждений при слабых землетрясениях.

В – упругопластическая стадия для расчета на МРЗ. Внутренние усилия в некоторых элементах превышают предельные, они подвергаются пластическому деформированию, возможно выключение связей. Физико-механические характеристики изменяются от цикла к циклу, происходит деградация жесткости во времени. Воздействие задается в виде экстремальных сценарных акселерограмм. Расчет проводится интегрированием нелинейных уравнений движения во временной области. Коэффициент K_1 равен единице, так как пластическое деформирование учитывается в расчете. Цель расчета – уточнение процесса локализации и накопления повреждений для выбора расчетной схемы поврежденного объекта. Расчет настолько сложен, что в настоящее время может быть реализован только в упрощенном приближенном виде.

С – упругая стадия несущего ядра для расчета на МРЗ. Предполагается, что некоторые из периферийных элементов повреждены или разрушены, но основные несущие элементы не достигли предельного состояния и деформируются упруго. Физико-механические характеристики конструкции изменены, но постоянны во времени; жесткость снижена, демпфирующие свойства возросли. Может быть нарушена симметрия объемно-планировочных решений, что приведет к изгибно-крутильным колебаниям. Расчет проводится линейно-спектральным методом. Ин-

тенсивность воздействия задается коэффициентом сейсмичности. Коэффициент K_1 равен единице, так как механические параметры уже соответствуют поврежденной модели. Цель расчета – проверка способности поврежденного сооружения выдержать эксплуатационные нагрузки и сопротивляться возможным афтершокам.

В [79] сформулирован *общий критерий сейсмостойкости*: сооружение считается сейсмостойким, если его конструкция при заданной схеме повреждений (достижении заданного предельного состояния) сохраняет при расчетном сейсмическом воздействии свою несущую способность.

1.6. Предельные состояния конструкций в зарубежных нормах

В зарубежных нормах вопрос о допускаемых предельных состояниях зданий проработан более детально⁹. В руководствах американского Федерального агентства по чрезвычайным ситуациям (Federal Emergency Management Agency, FEMA)¹⁰ содержатся таблицы соответствия уровней эксплуатационных характеристик (Building Performance Level) и уровней сейсмической опасности (Seismic Hazard)¹¹. В FEMA-273 введены 4 проектных уровня состояния конструкции:

- Operational Level (OL) - Эксплуатационный уровень. Все функции здания поддерживаются коммунальными службами, повреждений практически нет.
- Immediate Occupancy Level (IOL) - Уровень полной пригодности для жизни, но может потребоваться минимальный ремонт.

⁹ Прежде всего в европейских и американских строительных нормах: Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance. Part 1: General Seismic Actions and Rules for Buildings, Eurocode 8 Part3. Assessment and retrofitting of buildings, ATC-40, Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings, Report of the Applied Technology Council, Redwood City, California, 1996.

¹⁰ Агентство FEMA занимается реализацией Национальной программы США по снижению сейсмической опасности (National Earthquake Hazards Reduction Program, NEHRP, <http://www.nehrp.gov>) совместно с Федеральным агентством по чрезвычайным ситуациям (Federal Emergency Management Agency, FEMA), Национальным институтом стандартов и технологии (National Institute of Standards and Technology, NIST), Национальным научным фондом (National Science Foundation, NSF) и Геологической службой США (U.S. Geological Survey, USGS). Агентство FEMA координирует работу по созданию актуальных строительных норм, стандартов, методических руководств для проектировщиков и строителей.

¹¹ См. FEMA 273. NEHRP GUIDELINES FOR THE SEISMIC REHABILITATION OF BUILDINGS. Prepared for the BUILDING SEISMIC SAFETY COUNCIL Washington, D.C. By the APPLIED TECHNOLOGY COUNCIL (ATC-33 Project). Redwood City, California, October 1997.

- Life Safety Level (LSL) - Уровень безопасности для жизни. Конструкция остается устойчивой и имеет значительный резерв несущей способности; опасные неконструктивные повреждения контролируются.
- Collapse Prevention Level (CPL) - Уровень предотвращения обрушения. Возможны любые повреждения, но полного обрушения пока нет.

Уровень эксплуатационных характеристик здания (или уровень обеспечения сейсмостойкости) задают в виде допускаемых повреждений конструктивных и неконструктивных элементов здания. Конструктивные элементы отвечают за прочность и жесткость конструкции. К неконструктивным относятся архитектурные элементы, инженерно-технические системы, оборудование. В таблицах FEMA-273 достаточно подробно описаны повреждения определенных групп конструктивных и неконструктивных элементов, соответствующие каждому уровню сейсмостойкости. Рассмотрены вертикальные элементы железобетонного каркаса, стальные рамы и балки, бетонные стены, сборные бетонные элементы, армированная и неармированная каменная кладка, деревянные стены, фундамент. В Таблице 1.4 для примера приведены повреждения вертикальных элементов железобетонного каркаса, допускаемые для определенных уровней эксплуатационных характеристик.

Таблица 1.4.

Повреждения конструктивных элементов железобетонного каркасного здания, соответствующие уровням эксплуатационных характеристик

Элементы	Collapse Prevention Level	Life Safety Level	Immediate Occupancy Level
Первичные элементы (напрямую связанные с обеспечением несущей способности)	Обширные трещины и формирование пластических шарниров. Ограниченное растрескивание и/или разрыв стыков в некоторых колоннах. Серьезно повреждены короткие колонны.	Значительные повреждения балок. Поверхностные сколы и поперечные трещины (ширина $<1/8''$) в колоннах, перешедших в пластическое состояние. Незначительные сколы в остальных колоннах. Ширина трещин в соединениях $<1/8''$.	Тонкие волосяные трещины. Кое-где возможны зоны пластических изменений. Нет дробления (деформации до 0.003).

Вторичные элементы (элементы, жесткость которых незначительно влияет на несущую способность и должна быть учтена только в нелинейных расчетах)	Обширные сколы в колоннах (вследствие их сжатия) и в балках. Серьезные повреждения стыковых соединений. Локальное выпирание арматуры.	Обширное растрескивание и образование пластических шарниров в элементах, работающих в пластическом режиме. Локальное растрескивание и/или сколы в некоторых колоннах, частично затронутых пластическими изменениями. Серьезные повреждения коротких колонн.	Незначительные локальные сколы в колоннах и балках. Трещины в балках и колоннах, появившиеся вследствие их изгиба. Трещины сдвига в соединениях <math>< 1/16''</math> по ширине.
--	---	---	--

В США приняты два расчетных уровня сейсмического воздействия: основное расчетное землетрясение 1 (Basic Safety Earthquake 1, BSE-1, в отечественной терминологии Проектное землетрясение, ПЗ) и основное расчетное землетрясение 2 (Basic Safety Earthquake 2, BSE-2, оно же Максимальное расчетное землетрясение МРЗ, Maximum Considered Earthquake, MCE). В большинстве сейсмически опасных регионах США ПЗ может произойти с вероятностью 10% в течение 50 лет, МРЗ - с вероятностью 2% в течение 50 лет. Параметры ПЗ и МРЗ задаются в виде соответствующих спектров реакции. *Цель проектирования* – обеспечить уровень эксплуатационных характеристик Life Safety для землетрясения BSE-1 и уровень Collapse Prevention для BSE-2.

В европейских нормах Eurocode 8 Part 3. Assessment and retrofitting of buildings допускаются три возможных предельных состояния конструкции (Limit State, LS) после землетрясения:

- LS of Near Collapse (NC) – состояние, близкое к обрушению. Конструкция сильно повреждена, сопротивляемость поперечным силам очень мала, хотя вертикальные элементы все еще держат вертикальную нагрузку. Большая часть неконструктивных элементов разрушена. Имеются большие необратимые перемещения. Конструкция близка к коллапсу, возможно не переживет еще одно землетрясение, даже слабое.

- LS of Significant Damage (SD) – состояние с сильными повреждениями. Конструкция значительно повреждена, но имеет некоторый остаточный запас прочности и жесткости, а вертикальные элементы способны выдерживать вертикальные нагрузки. Неконструктивные элементы повреждены, но ограждения и заполнения остаются плоскими. Небольшие необратимые перемещения. Конструкция может выдержать слабое землетрясение. Ремонт и восстановление, возможно, будут экономически нецелесообразными.
- LS of Damage Limitation (DL) – состояние с ограниченными повреждениями. Конструкция имеет небольшие повреждения, конструктивные элементы почти не затронуты пластическими изменениями и сохранили прочность и жесткость. В неконструктивных компонентах, таких как ограждения и заполнения, могут появиться трещины, но ремонт возможен. Необратимые перемещения очень незначительны. Нет необходимости в серьезных ремонтных работах.

Перечисленные предельные состояния с соответствующими описаниями, уровнями воздействий и методами расчета должны быть со временем введены и в отечественные нормы. Работы в этом направлении ведутся и в странах СНГ. В статье Ю.И. Немчинова и др.¹² (Украина) предлагается ввести три уровня эксплуатационных характеристик, так, чтобы они были связаны с уровнями сейсмического воздействия, заложенными в карты ОСР:

- отсутствие повреждений и возможность продолжить эксплуатацию здания после землетрясения (СЗ - слабое землетрясение, соответствует Immediate Occupancy Level или LS of Damage Limitation);
- обеспечение безопасности жизнедеятельности и возможность проведения ремонтно-восстановительных работ после умеренного землетрясения (ПЗ – проектное землетрясение, соответствует Life Safety Level или LS of Significant Damage);

¹² Немчинов Ю.И., Хавкин А.К., Марьенков Н.Г., Бабик К.Н. Инженерная методика проектирования сейсмостойких конструкций заданной категории пластичности с учетом положений Еврокода-8//Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2012, №4, с.51-54.

- обеспечение устойчивости сооружения, сохранности жизни людей, ценного оборудования и инфраструктуры, необходимой для ликвидации последствий землетрясения (MP3 – максимальное расчетное землетрясение, Structural Stability, соответствует Collapse Prevention Level или LS of Near Collapse).

Однако для практического применения следует более детально характеризовать эти предельные состояния, дать для каждого случая описания допускаемых повреждений хотя бы основных несущих элементов, как это сделано в нормативных документах США и Европы.

1.7. Проектирование с заданным уровнем обеспечения сейсмостойкости

Проектирование с заданным уровнем обеспечения эксплуатационных характеристик (Performance-Based Seismic Design) – метод сейсмического расчета, указанный в Национальной программе США по снижению сейсмической опасности (National Earthquake Hazards Reduction Program, NEHRP, <http://www.nehrp.gov>) как наиболее перспективный и стратегический для развития теории сейсмостойкости. В руководствах FEMA проектирование рекомендуется выполнять методами нелинейного статического анализа, в основе которых лежит pushover-процедура.

Смысл pushover-процедуры заключается в определении кривой несущей способности в осях «сила - максимальное перемещение контрольной точки», причем в роли силы выступает суммарная опорная реакция в основании, возникающая в ответ на приложенные к перекрытиям горизонтальные силы, а за контрольную точку рекомендуется брать центр масс верхнего перекрытия. Кривая несущей способности строится по результатам физически и геометрически нелинейного статического расчета. Для получения кривой конструкция нагружается системой поперечных сил, приложенных к каждому перекрытию. В руководствах FEMA

предлагается несколько способов распределения поперечных сейсмических сил¹³, например, равномерное распределение сил по высоте, пропорциональное массам перекрытий, распределение по формам колебаний и т.д. Процесс нагружения организуется по шагам и заканчивается, когда достигается деформация, соответствующая целевому уровню эксплуатационных характеристик или, если происходит разрушение.

По полученной кривой несущей способности можно найти силы и деформации, соответствующие началу нелинейного деформирования и заданному уровню эксплуатационных характеристик (Рисунок 1.8).

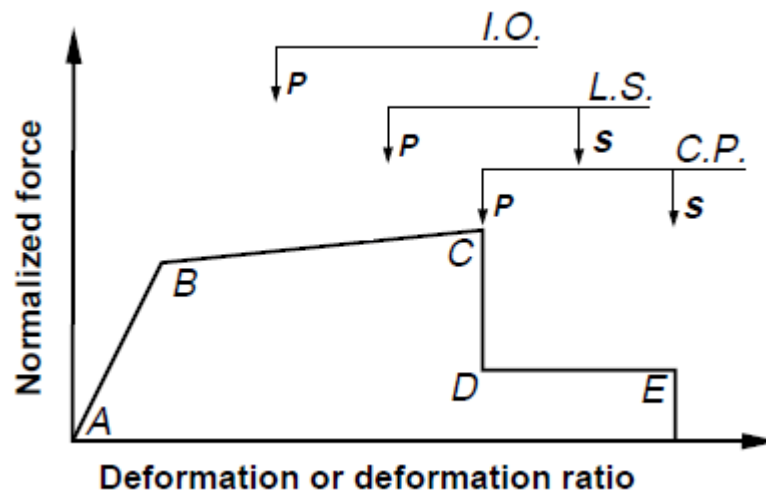


Рисунок 1.8. Уровни эксплуатационных характеристик на кривой несущей способности (рисунок из FEMA-273, P – первичные элементы, S – вторичные)

Pushover-процедуру используют в модальном нелинейном статическом методе (Modal Pushover Analysis, MPA¹⁴), при котором поперечные силы прикладываются в соответствии с формами колебаний, нелинейные усилия и перемещения определяются для каждой формы колебаний по модальной кривой несущей способности,

¹³ См. подробнее в статье Джинчвелашвили Г.А., Булушев С.В., Колесников А.В. Нелинейный статический метод анализа сейсмостойкости зданий и сооружений//Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2016, №5, с.39-47.

¹⁴ A.K.Chopra, R.K.Goel. A modal pushover analysis procedure to estimate seismic demands for buildings: theory and evaluation. PEER Report 2001/03. University of California, Berkeley, 2001.

а полная реакция рассчитывается по правилу ККСК, как это принято в линейно-спектральном методе.

Pushover-процедура лежит в основе и другой разновидности нелинейного статического анализа – метода спектра несущей способности (Capacity Spectrum Method, CSM), разработанного З. Фрименом¹⁵. В этом методе рассматривают на одном графике кривую несущей способности конструкции и спектр неупругой реакции. Их пересечение дает реакцию конструкции на воздействие, заданное в виде спектра реакции. Спектр неупругой реакции получают из спектра линейно-упругой системы с помощью эффективного коэффициента демпфирования.

В работах А.Чопра и З.Фримена показано, что для простых регулярных конструкций нелинейный статический метод дает конечные нелинейные перемещения и усилия, соответствующие заданному уровню воздействия, с хорошей точностью.

Отметим ограничения нелинейного статического метода:

- 1) Считается, что в ходе пластического деформирования формы колебаний не меняются (или мало меняются) и не оказывают существенного взаимного влияния. Однако, в состояниях, близких к уровню полного обрушения (Collapse Prevention Level) с характерной утратой части внутренних связей, формы колебаний могут быть другими, соответствующими поврежденной системе с остаточными упругими свойствами.
- 2) При статическом расчете не могут быть учтены особенности нагружения, связанные с цикличностью процесса – постепенным накоплением повреждений, рассеянием энергии. Определяются только конечные нелинейные деформации и усилия.
- 3) Инерционные сейсмические силы моделируются как горизонтальные поперечные силы в одном направлении; при учете двух направлений общая реакция вычисляется как комбинация усилий, вычисленных отдельно для

¹⁵ S. A. Freeman. REVIEW OF THE DEVELOPMENT OF THE CAPACITY SPECTRUM METHOD. ISET Journal of Earthquake Technology, Paper No. 438, Vol. 41, No. 1, March 2004, pp. 1-13.

Описание алгоритма метода спектра несущей способности можно найти в статье Джинчвелашвили Г.А., Булушев С.В., Колесников А.В. Нелинейный статический метод анализа сейсмостойкости зданий и сооружений//Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2016, №5, с.39-47.

каждого из двух направлений, не учитывается влияние угловых степеней свободы РДМ и углового сейсмического движения грунта.

Следует отметить, что зарубежные версии модального pushover-анализа начали развитие от раннего линейного спектрального метода, имеющего проблемы, связанные с учетом пространственного характера конструкции: определение опасных направлений сейсмического воздействия, поиск значимых форм колебаний, учет угловых степеней свободы конструкции и возможных угловых движений грунта и т.д. В настоящее время в отечественной теории сейсмостойкости эти проблемы решены, и новые подходы могут обогатить и усовершенствовать модальный pushover-анализ.

2. Модели сейсмического воздействия

2.1. Типы сейсмических волн

Сейсмические волны подразделяют на три основных типа:

1. Продольные P -волны, или первичные. Имеют самую высокую скорость и проходят через твердые и жидкие среды, поэтому, распространяясь от очага землетрясения, первыми достигают поверхности земли. При движении продольной волны происходит последовательное объемное сжатие и разрежение вещества (Рисунок 2.1 из [45]). Эти волны вызывают поступательные движения грунта.

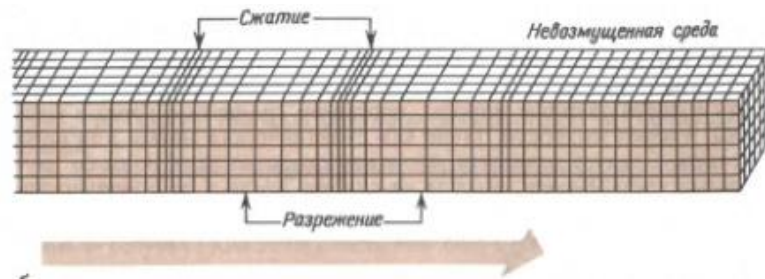


Рисунок 2.1. Прохождение продольной P -волны

Скорость продольной волны равна [121]

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho},$$

где ρ - плотность среды, λ и μ - параметры Ламе, связанные с параметрами упругой среды (грунта): модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , модулем сдвига G соотношениями

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

2. Поперечные S -волны, или вторичные. Поперечные волны заставляют двигаться частицы объема геологической породы в вертикальном направлении (SV -волны, показаны на Рисунке 2.2 из [45]), или в горизонтальном направлении (SH -волны). Скорость этих волн всегда меньше, чем скорость P -волн. S -волны вызывают только сдвиговые деформации, поэтому распространяются исключительно в твердых породах. Поперечные волны приводят к поворотам объемов грунта и являются

причиной ротационных перемещений. Чем меньше скорость поперечных волн (например, в рыхлых, мягких грунтах, см. Таблицу 1.1), тем больше проявляются ротации грунта. Скорость поперечной волны равна [121]

$$c_2 = \sqrt{\mu/\rho},$$

где ρ - плотность среды, $\mu = G$ - параметр Ламе, равный модулю сдвига.

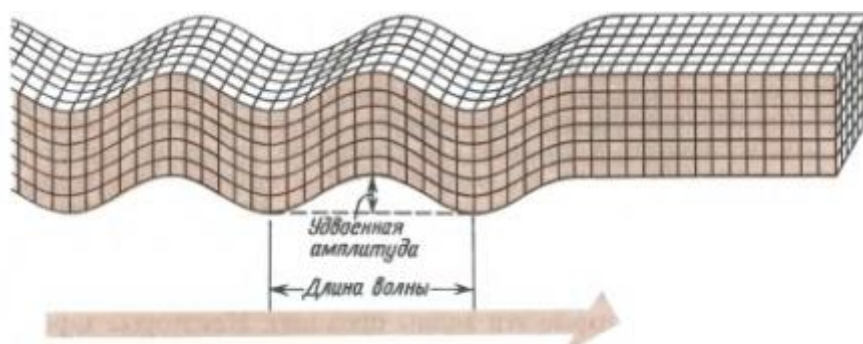


Рисунок 2.2. Поперечная SV-волна

Таблица 2.1.

Скорость распространения поперечных волн в грунтах [49]

Грунт	Скорость, м/с
Песок	60
Насыпной	100
Суглинок	100-200
Глина	250
Гравий с примесью песка	300-400
Влажный песок	340
Гравий	600
Третичные породы	больше 1000

Объемные P и S -волны способны отражаться от поверхности земли и преломляться на границах сред. Отраженные, преломленные и обменные волны (обозначаются как PP , PPP , SP , SS , SSS и т.д.) также участвуют в волновом процессе.

3. Поверхностные L -волны (long waves). Поверхностные волны передаются по поверхности земли и быстро затухают с глубиной. Распространяются медленнее объемных волн (и продольных, и поперечных). Основные виды поверхностных волн – волны Лява и Рэлея (L_Q и L_R -волны соответственно).

Форма волн Лява связана с увеличением жесткости грунта с глубиной (Рисунок 2.3 из [45]). Под действием волны Лява происходят только горизонтальные смещения частиц. Горизонтальное движение определяет повороты грунта относительно вертикальной оси и оси, совпадающей с направлением распространения волны Лява (то есть имеется только две ненулевые ротационные компоненты). Формулы для перемещений частиц грунта и ротационных компонент для гармонической волны приведены в [72].

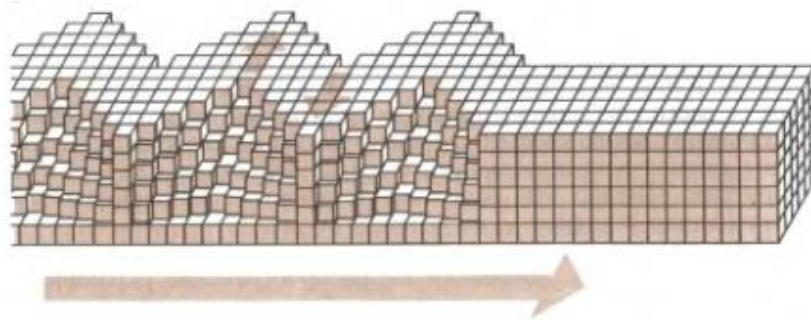


Рисунок 2.3. Поверхностная волна Лява

Волны Рэлея вызывают и горизонтальные, и вертикальные смещения (Рисунок 2.4 из [45]). Траектория движения частицы показана эллипсом, расположенным в вертикальной плоскости, параллельной направлению распространения волны. Большая ось эллипса ориентирована вертикально, малая – горизонтально. По этой причине вращательное движение от волны Рэлея происходит только в плоскости этого эллипса, и ротационная компонента только одна (угол вращения относительно оси, перпендикулярной плоскости эллипса, формулы для гармонической волны приведены в [72]).

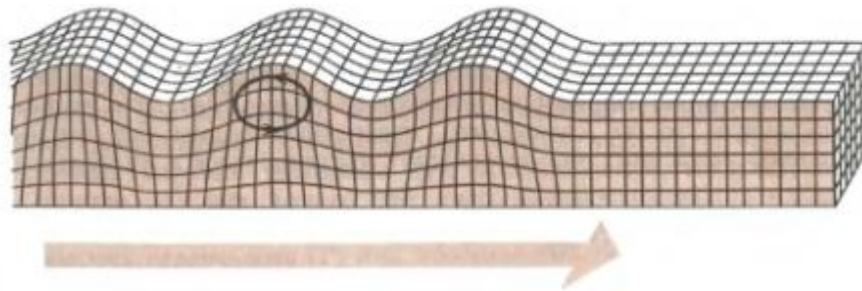


Рисунок 2.4. Поверхностная волна Рэлея

Наиболее опасными для зданий и сооружений считаются S и L -волны, так как при их действии происходит и поступательное, и ротационное движение грунта.

Изложение теории распространения сейсмических волн с выводами волновых уравнений можно найти, например, в [72, 114].

2.2. Вектор сейсмического воздействия

Вектор сейсмического воздействия является результатом осреднения поля сейсмических перемещений под фундаментом здания и в общем случае состоит из трех поступательных и трех ротационных компонент. Допуская, что основание сооружения движется как абсолютно твердое тело с шестью степенями свободы, его движение описывается трехкомпонентными векторами поступательного и углового (ротационного) перемещений \mathbf{X}_0 , $\mathbf{\alpha}_0$, скоростей $\dot{\mathbf{X}}_0$, $\dot{\mathbf{\alpha}}_0$ и ускорений $\ddot{\mathbf{X}}_0$, $\ddot{\mathbf{\alpha}}_0$.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0(t) &= (X_{10} \quad X_{20} \quad X_{30})^T, & \mathbf{\alpha}_0(t) &= (\alpha_{10} \quad \alpha_{20} \quad \alpha_{30})^T \\ \dot{\mathbf{X}}_0(t) &= (\dot{X}_{10} \quad \dot{X}_{20} \quad \dot{X}_{30})^T, & \dot{\mathbf{\alpha}}_0(t) &= (\dot{\alpha}_{10} \quad \dot{\alpha}_{20} \quad \dot{\alpha}_{30})^T \\ \ddot{\mathbf{X}}_0(t) &= (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{20} \quad \ddot{X}_{30})^T, & \ddot{\mathbf{\alpha}}_0(t) &= (\ddot{\alpha}_{10} \quad \ddot{\alpha}_{20} \quad \ddot{\alpha}_{30})^T\end{aligned}\quad (2.1)$$

или шестикомпонентным вектором

$$\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = (\ddot{\mathbf{X}}_0 \quad \ddot{\mathbf{\alpha}}_0)^T = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{20} \quad \ddot{X}_{30} \quad \ddot{\alpha}_{10} \quad \ddot{\alpha}_{20} \quad \ddot{\alpha}_{30})^T, \quad (2.2)$$

где $\ddot{X}_{i0}(t)$ - линейные ускорения основания вдоль i -го направления, $\ddot{\alpha}_{i0}(t)$ - угловые ускорения относительно i -ой оси ($i = 1, 2, 3$). Ноль в индексации означает, что векторы имеют начало в центре приведения вектора сейсмической нагрузки O . Для определенности совместим точку O с началом координат основных (глобальных) осей конструкции $O123$.

Каждую координату вектора $\ddot{\mathbf{q}}_0$ можно представить в виде произведения модуля вектора поступательного или ротационного движения на соответствующие направляющие косинусы. Модули векторов поступательного и углового движения рассчитываются по формулам:

$$|\ddot{\mathbf{X}}_0| = \sqrt{\ddot{X}_{10}^2 + \ddot{X}_{20}^2 + \ddot{X}_{30}^2} \quad (2.3)$$

$$|\ddot{\mathbf{a}}_0| = \sqrt{\ddot{\alpha}_{10}^2 + \ddot{\alpha}_{20}^2 + \ddot{\alpha}_{30}^2} \quad (2.4)$$

Функции (2.3) и (2.4) есть длины векторов $\ddot{\mathbf{X}}_0$ и $\ddot{\mathbf{a}}_0$ являются положительными функциями времени, инвариантными относительно ориентации системы координат. Направляющие косинусы векторов $\ddot{\mathbf{X}}_0$ и $\ddot{\mathbf{a}}_0$

$$v_{1X} = \frac{\ddot{X}_{10}}{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}, \quad v_{2X} = \frac{\ddot{X}_{20}}{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}, \quad v_{3X} = \frac{\ddot{X}_{30}}{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}, \quad (2.5)$$

$$v_{1\alpha} = \frac{\ddot{\alpha}_{10}}{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}, \quad v_{2\alpha} = \frac{\ddot{\alpha}_{20}}{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}, \quad v_{3\alpha} = \frac{\ddot{\alpha}_{30}}{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}. \quad (2.6)$$

Тройки направляющих косинусов поступательного и ротационного движения можно объединить в векторы

$$\mathbf{v}_X(t) = (v_{1X} \quad v_{2X} \quad v_{3X})^T, \quad \mathbf{v}_\alpha(t) = (v_{1\alpha} \quad v_{2\alpha} \quad v_{3\alpha})^T. \quad (2.7)$$

Компоненты этих векторов связаны условиями нормировки:

$$v_{1X}^2 + v_{2X}^2 + v_{3X}^2 = 1 \quad \text{и} \quad v_{1\alpha}^2 + v_{2\alpha}^2 + v_{3\alpha}^2 = 1.$$

На Рисунке 2.5 приведен пример трехкомпонентной акселерограммы землетрясения в Бухаресте с расчетом модуля и направляющих косинусов: а)-в) – компоненты вектора поступательного движения $\ddot{\mathbf{X}}_0(t)$, г)-е) – компоненты вектора направляющих косинусов $\mathbf{v}_X(t)$ и ж) - модуль $|\ddot{\mathbf{X}}_0|$.

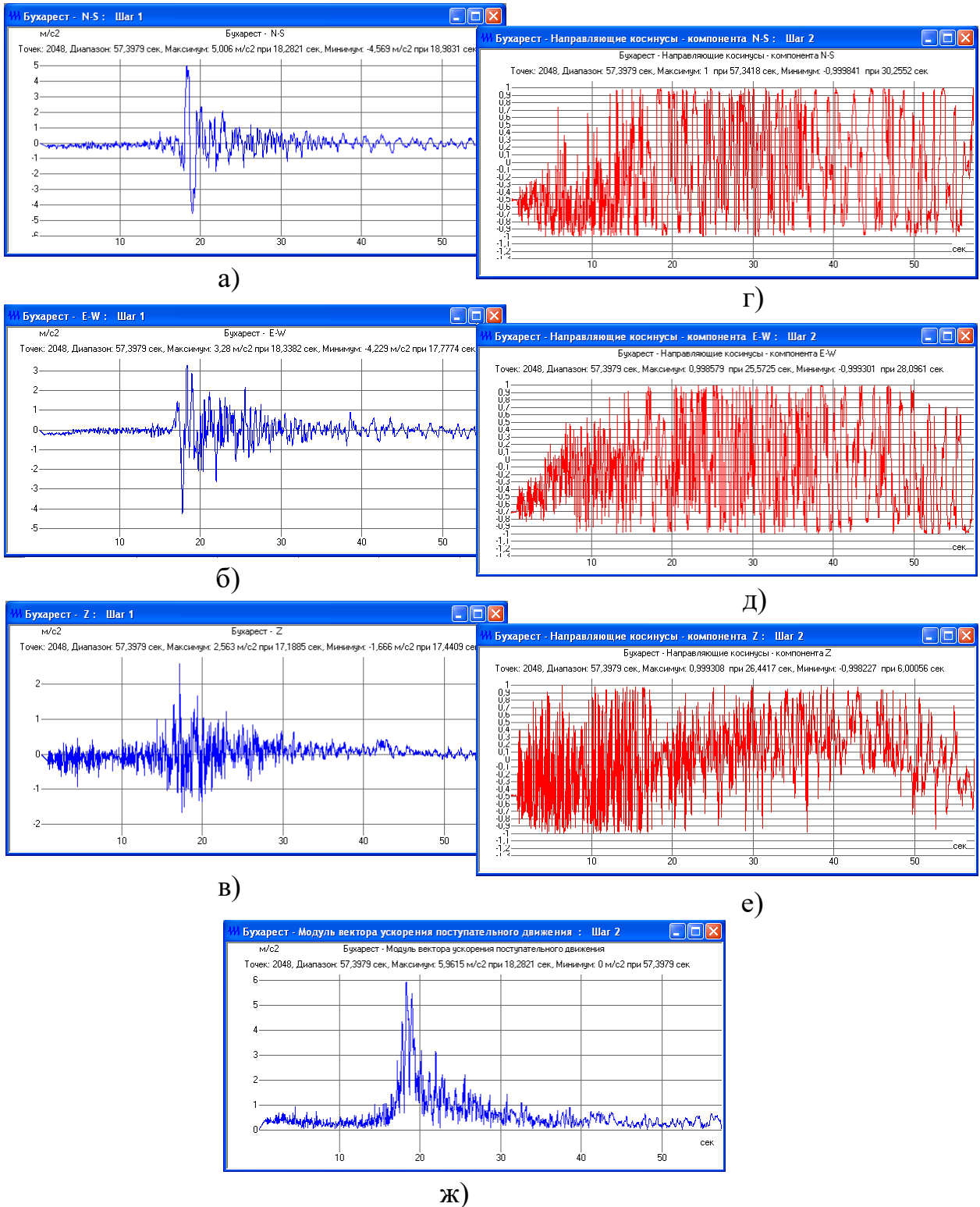


Рисунок 2.5. Акселерограммы землетрясения в Бухаресте: а) направление *N-S*, б) направление *E-W*, в) направление *Z*; г)–е) – направляющие косинусы; ж) – модуль; акселерограммы получены в ПО «Одиссей» (ООО «Еврософт»).

2.3. Интенсивность интегрального сейсмического воздействия

Интенсивность сейсмического воздействия может быть задана как:

- *Прогнозируемая расчетная сейсмичность* в баллах шкалы MSK-64, которая определяется по комплекту вероятностных карт общего сейсмического районирования территории Российской Федерации ОСР-97 [134, 135]. Комплект состоит из трех карт: ОСР-97А, ОСР-97В и ОСР-97С. Каждая карта составлена для своего уровня сейсмической интенсивности: карта А - для 10%, карта В – для 5%, карта С – для 1% вероятности возможного превышения расчетной интенсивности в течение 50 лет. Это соответствует повторяемости землетрясения расчетной интенсивности в среднем один раз в 500, 1000 и 5000 лет.
- *Нормативная интенсивность*, выраженная через коэффициент сейсмичности, равный отношению пикового ускорения к ускорению свободного падения; для землетрясения в 7, 8 и 9 баллов коэффициент сейсмичности равен 0.1, 0.2 и 0.4 соответственно.
- *Нормативная интенсивность*, выраженная через пиковое ускорение грунта¹⁶. Если известна сейсмичность площадки, то землетрясению интенсивности 7 баллов соответствует максимальное ускорение грунта не менее 1 м/с², 8 баллов – не менее 2 м/с², 9 баллов – не менее 4 м/с².

Если известны сценарные акселерограммы, интенсивность сейсмического воздействия рассчитывается по записям землетрясения. В случае *детерминированного расчета* по трехкомпонентным акселерограммам интенсивность сейсмического воздействия определяется как максимальное значение модуля вектора поступательного ускорения грунта (2.3):

$$I_x = \max |\ddot{\mathbf{X}}_0|. \quad (2.8)$$

¹⁶ См., например, СП 14.13330.2014. Свод правил. Строительство в сейсмических районах.

Значение интенсивности (2.8) не должно приниматься меньше нормативного пикового ускорения грунта. Если расчет по акселерограммам проводится в *вероятностной постановке*, то интенсивность сейсмического воздействия оценивают как сумму математического ожидания $\langle |\ddot{\mathbf{X}}_0| \rangle$ и стандарта модуля вектора ускорения поступательного движения $\sigma_{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}$, то есть

$$I_X = \langle |\ddot{\mathbf{X}}_0| \rangle + \sigma_{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}. \quad (2.9)$$

Если значением математического ожидания в силу его малости можно пренебречь, то интенсивность поступательного движения равна стандарту модуля вектора $\ddot{\mathbf{X}}_0$

$$I_X = \sigma_{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}. \quad (2.10)$$

Очевидно, что интенсивность I_X в виде максимального значения модуля вектора ускорения (2.8) будет значительно превосходить I_X , вычисленную как стандарт этого модуля по формулам (2.9) - (2.10). Следует помнить, что при расчете по (2.8) получаются максимальные, пиковые значения сейсмических сил и внутренних усилий, а по (2.9) - (2.10) – их стандарты.

Интенсивность ротационного движения *при детерминированном анализе* есть максимальное значение модуля вектора ротаций

$$I_\alpha = \max |\ddot{\mathbf{a}}_0|. \quad (2.11)$$

Чтобы связать интенсивности поступательного и ротационного движения, вводят относительную интенсивность ротационного движения w в виде отношения максимального значения модуля вектора ротационного движения (2.4) к величине I_X :

$$w = \max |\ddot{\mathbf{a}}_0| / I_X, \quad (2.12)$$

тогда интенсивность ротационного движения равна

$$I_\alpha = \max |\ddot{\mathbf{a}}_0| = w I_X. \quad (2.13)$$

При отсутствии данных о прогнозируемом землетрясении значение w принимается равным $2 \cdot 10^{-2}$, $6 \cdot 10^{-2}$, $9 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ для грунта I категории ($c_2 \geq 500 \text{ м/с}$), II ($c_2 = 200 \text{ м/с}$) и III ($c_2 \leq 50 \text{ м/с}$) категории соответственно [96]. Эти оценки получены Ю.П. Назаровым после анализа ротационных акселерограмм движения, сгенерированных по природным записям с учетом различных грунтовых условий.

Интенсивность ротационного движения *в вероятностных расчетах* оценивают как сумму среднего значения модуля вектора углового ускорения $\langle |\ddot{\mathbf{a}}_0| \rangle$ и его стандарта $\sigma_{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}$

$$I_\alpha = \langle |\ddot{\mathbf{a}}_0| \rangle + \sigma_{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}. \quad (2.14)$$

В вероятностном подходе относительная интенсивность углового ускорения w есть отношение интенсивностей углового и поступательного ускорений; через среднее значение и стандарт углового движения

$$w = \frac{I_\alpha}{I_x}, \quad (2.15)$$

а при малых средних значениях $w = \frac{\sigma_{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}}{\sigma_{|\ddot{\mathbf{x}}_0|}}$.

Определим интенсивность сейсмического воздействия при поступательном и ротационном движениях грунта. Объединим векторы направляющих косинусов \mathbf{v}_x и \mathbf{v}_α в единый вектор направления сейсмического воздействия

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x \\ w\mathbf{v}_\alpha \end{pmatrix} = (v_{1x} \quad v_{2x} \quad v_{3x} \quad wv_{1\alpha} \quad wv_{2\alpha} \quad wv_{3\alpha})^T. \quad (2.16)$$

Вектор сейсмического ускорения грунта $\ddot{\mathbf{q}}_0(t)$ можно представить (см. формулы (2.6), (2.8), (2.11) и (2.13)) в виде произведения постоянной интенсивности поступательного движения на вектор-столбец (2.16)

$$\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = I_x \cdot \mathbf{v}(t). \quad (2.17)$$

2.4. Определение доминирующих волн сейсмического воздействия и функция нормированной интенсивности

Сейсмическое движение грунта – случайный процесс, который можно представить в виде разложения в тригонометрический ряд Фурье как конечную совокупность p простых гармонических волн с определенной частотой ω_i , ($i=1, 2, \dots, p$). Каждая из этих волн имеет длину $\lambda_i = \frac{2\pi c}{\omega_i}$, где c - фазовая скорость распространения волны в грунте.

Длины *доминирующих* волн сейсмического воздействия можно определить по графику нормированной интенсивности $\chi_1(\bar{\lambda})$. Пусть \ddot{X} - случайный процесс, реализацией которого является акселерограмма поступательного движения; $\sigma_{\ddot{X}}$ - интенсивность процесса \ddot{X} , равная его стандарту; $\sigma_{\ddot{X}}(\bar{\lambda})$ - интенсивность процесса \ddot{X} , из которого удалены (отфильтрованы) все волны с длинами, меньшими $\bar{\lambda}$. Другими словами, в отфильтрованном процессе $\bar{\lambda}$ - самая короткая длина волны. Тогда нормированная интенсивность поступательного движения $\chi_1(\bar{\lambda})$ определяется как

$$\chi_1(\bar{\lambda}) = \frac{\sigma_{\ddot{X}}(\bar{\lambda})}{\sigma_{\ddot{X}}}$$

Величина $\chi_1(\bar{\lambda})$ показывает, какая часть общей интенсивности приходится на волны с длинами, превышающими $\bar{\lambda}$. Например, по графику нормированной интенсивности на Рисунке 2.6 (акселерограмма Спитакского землетрясения 1988 г., направление Z, фазовая скорость 100 м/с) видно, что $\chi_1(250) = 0.15$. Это означает, что вклад волн с длинами от 250 м в общую интенсивность составляет 15%, то есть волны длиной до 250 м преобладают и могут считаться доминирующими.

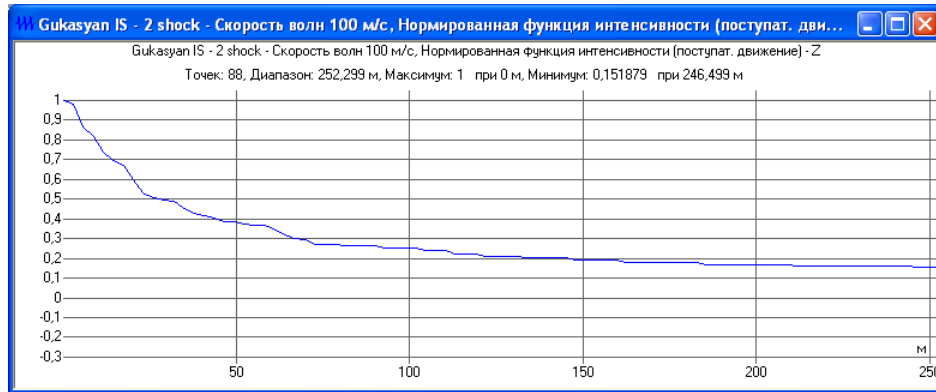


Рисунок 2.6. Окно ПО «Одиссей» с $\chi_1(\bar{\lambda})$ – диаграммой, $\chi_1(250)=0.15$.

χ_1 -функция является положительной и убывающей функцией $\bar{\lambda}$. Отметим, что коэффициент χ_1 равен значению нормированной функции интенсивности при $\bar{\lambda} = B$. Этот коэффициент учитывает фильтрующие свойства очень жестких фундаментов при волновом сейсмическом воздействии (жесткий фундамент не реагирует на коротковолновые составляющие) и позволяет обоснованно снизить сейсмическую нагрузку (расчетная интенсивность сейсмического воздействия принимается равной $I\chi_1$).

2.5. Модели сейсмического движения грунта

Различают две модели сейсмического движения грунта – интегральную и дифференцированную. При интегральной модели движение фундамента с примыкающей к нему областью основания происходит подобно абсолютно твердому телу. В зависимости от наличия угловых (ротационных) движений этого тела различают интегральную дилатационную и интегральную дилатационно-ротационную модели. Интегральная модель подходит для задания сейсмического воздействия на здания с очень жесткими фундаментами (например, плитно-свайный с мощной плитой), а также для конструкций на податливых фундаментах при условии, что доминирующие длины сейсмических волн значительно превосходят размеры фундамента. Если фундамент податливый, а доминирующие длины волн короткие (порядка длины фундамента), то движение каждой опорной точки конструкции происходит независимо, по индивидуальному закону, отражающему процесс про-

хождения волны. Под движением опорной точки будем понимать движение грунта в некоторой её окрестности, без учета эффектов взаимодействия конструкции с основанием. Такая модель задания сейсмического воздействия называется дифференцированной. Более точное определение дифференцированного (или нежесткого) движения: дифференцированное движение опорных точек конструкции – это движение, при котором кинематические параметры движения опорных точек вместе с прилегающими областями грунта зависят только от процессов прохождения сейсмической волны в грунтовом основании и не связаны между собой точными геометрическими соотношениями.

По соотношению длин доминирующих волн и минимальных размеров фундамента в плане B сейсмическое движение грунта в [72] подразделяется на три вида (Рисунок 2.7):

Доминирующие волны	Вид сейсмического движения грунта в основании
длинные $\lambda > 10B$	<i>Интегральное дилатационное движение:</i> перемещения частиц грунта преимущественно линейные, сдвиги малы. Вектор сейсмического воздействия включает только акселерограммы поступательного движения.
средние $kB < \lambda < 10B$, $k = 2 \div 4$	<i>Интегральное дилатационно-ротационное движение:</i> перемещения частиц грунта линейные со сдвигами. Вектор сейсмического воздействия включает акселерограммы поступательного и ротационного движения
короткие $\lambda < kB$, $k = 2 \div 4$	<i>Дифференцированное движение:</i> перемещения частиц грунта линейные со значительными сдвигами. Возможно движение частиц грунта в противофазе. Сейсмическое воздействие задается векторным полем перемещений.

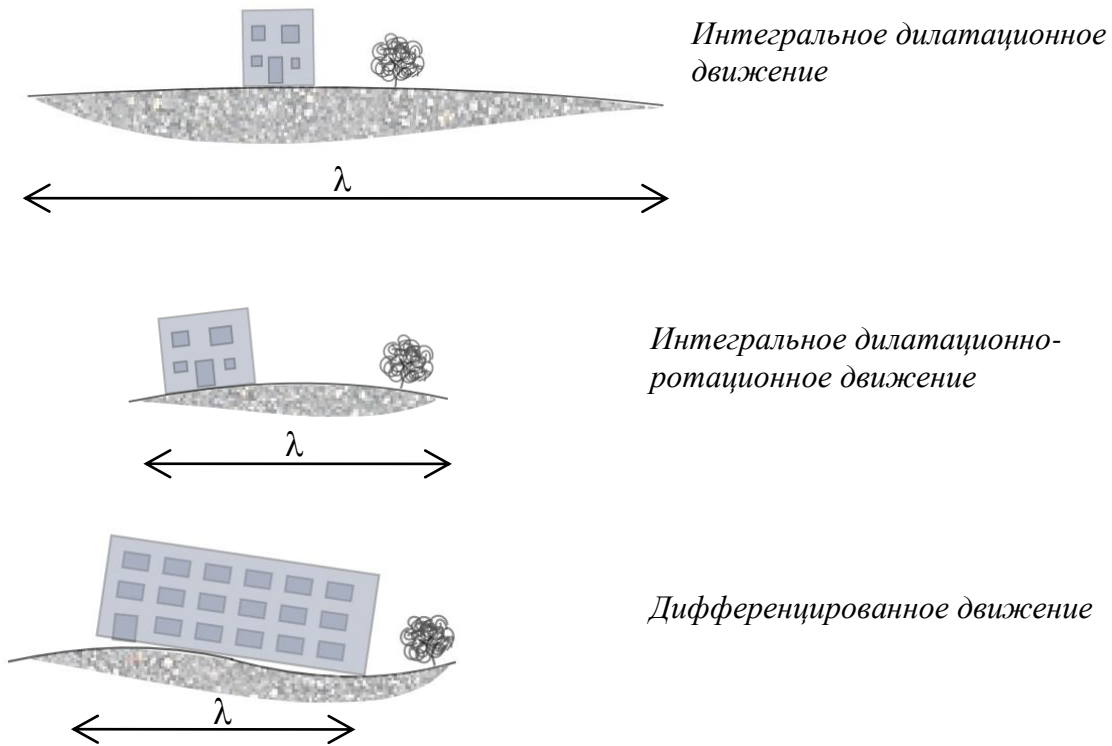


Рисунок 2.7. Виды сейсмического движения грунта

2.6. Обобщенная волновая модель сейсмического движения Ю.П. Назарова

Ниже описан универсальный подход к описанию волнового движения грунта, предложенный Ю.П. Назаровым в [72, 75, 96] для оценки сейсмических ротаций. Для получения вектора сейсмического воздействия движение грунта осредняется по области основания под жестким фундаментом. В дифференцированной модели функции поступательных перемещений грунта $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ в направлении $i = 1, 2, 3$ задают переменное во времени пространственное векторное поле \mathbf{X} . Переход от дифференцированной модели движения грунта к интегральной сопровождается осреднением поля перемещений частиц грунта под сооружением. Интегральные компоненты вектора поступательного движения $\mathbf{X}_o(t) = (X_{1o} \ X_{2o} \ X_{3o})^T$ вычисляются как поток поля через ортогональные площади S_1, S_2, S_3 , ограничивающие объем осреднения, по формулам:

$$X_{1o}(t) = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} X_1(x_2, x_3) dS_1, \quad X_{2o}(t) = \frac{1}{S_2} \int_{S_2} X_2(x_1, x_3) dS_2, \quad X_{3o}(t) = \frac{1}{S_3} \int_{S_3} X_3(x_1, x_2) dS_3.$$

В результате осреднения получается трехкомпонентный вектор интегральных перемещений $\mathbf{X}_o(t)$, приложенный в геометрическом центре объема осреднения под фундаментом. Для его расчета необходимо задать поле перемещений \mathbf{X} . Эту задачу решает обобщенная волновая модель.

Предположим, что поступательное движение X_i вдоль i -той оси вызвано не только продольными перемещениями от Р-волны, но и поперечными смещениями от SH и SV-волн, продвигающимися вдоль других осей (Рисунок 2.8):

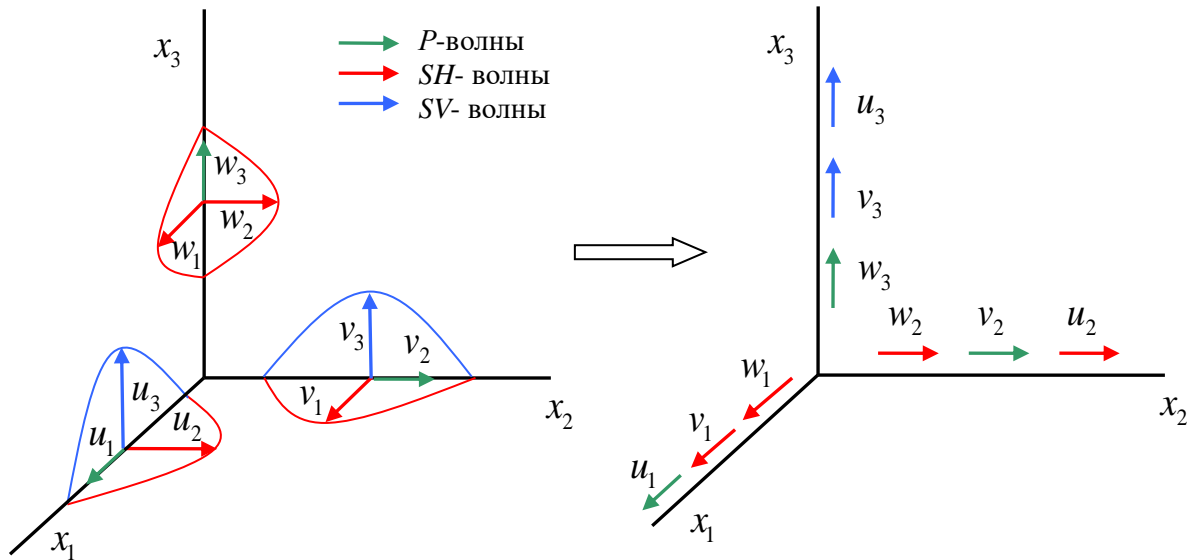


Рисунок 2.8. Обобщенная волновая модель.

$$X_1 = u_1 + v_1 + w_1, \quad X_2 = u_2 + v_2 + w_2, \quad X_3 = u_3 + v_3 + w_3. \quad (2.18)$$

Введем матрицу весовых коэффициентов $C = [c_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 3$) для формирования поступательных движений из продольных и поперечных смещений. Как показано на Рисунке 2.8, u_1, v_2, w_3 – продольные перемещения от Р-волн (они не вызывают ротаций и не так опасны для конструкций¹⁷), u_2, v_1, w_1, w_2 – поперечные пе-

¹⁷ Р-волны могут трансформироваться в S-волны при отражении о земную поверхность, но в обобщенной волновой модели эти явления не рассматриваются. Эта модель разработана прежде всего для инженерного подхода (в рамках «малой сейсмологии»).

ремещения от SH-волн, u_3, v_3 – поперечные перемещения от SV-волн. Свяжем перемещения X_i и u_i, v_i, w_i следующими соотношениями

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{11}X_1 & u_2 &= c_{12}X_2 & u_3 &= c_{13}X_3 \\ v_1 &= c_{21}X_1 & v_2 &= c_{22}X_2 & v_3 &= c_{23}X_3 \\ w_1 &= c_{31}X_1 & w_2 &= c_{32}X_2 & w_3 &= c_{33}X_3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $c_{11} + c_{21} + c_{31} = 1 \quad c_{12} + c_{22} + c_{32} = 1 \quad c_{13} + c_{23} + c_{33} = 1.$

Разложим (2.8) в тригонометрический ряд Фурье, и далее будем подразумевать, что X_i и u_i, v_i, w_i – простые гармонические волны из спектра Фурье. Выразим u_i, v_i, w_i через решения волновых уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1 + v_1 + w_1 = A_{11}f_1(x_1 - c_1t) + A_{12}\varphi_1(x_2 - c_2t) + A_{13}\psi_1(x_3 - c_2t), \\ X_2 &= u_2 + v_2 + w_2 = A_{21}f_2(x_1 - c_2t) + A_{22}\varphi_2(x_2 - c_1t) + A_{23}\psi_2(x_3 - c_2t), \\ X_3 &= u_3 + v_3 + w_3 = A_{31}f_3(x_1 - c_2t) + A_{32}\varphi_3(x_2 - c_2t) + A_{33}\psi_3(x_3 - c_1t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

здесь $A_{ij} = A_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ – спектральные амплитуды и f_i, φ_i, ψ_i – гармонические волновые функции, c_1 и c_2 – фазовые скорости продольных и поперечных волн. Разложение (2.20) можно записать для комбинации любых волн, в том числе поверхностных. Аналитические выражения для амплитудных функций $A_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$, соответствующих поверхностным волнам Рэлея-Лэмба и Лява, приведены в [72, 75]. Для P и S-волн функции A_{ij} в виде аналитических координатно-временных зависимостей не известны, но могут быть определены эмпирически. При отсутствии экспериментальных данных можно полагать, что вблизи поверхности для P и S-волн $A_{ij} = const$.

2.7. Расчет сейсмических ротаций грунта

Изучение проблемы сейсмических ротаций началось в 1969 году с работы Ньюмарка [19, 99], впервые предложившего соотношения, связывающие компоненты вращательного и поступательного движения грунта. За рубежом в настоящее время расчеты с учетом ротационного движения проводятся в основном с использо-

ванием синтезированных акселерограмм ротационных компонент, полученных по методике В. Ли, Дж. Луко и М. Трифунака [9-12]. Основные положения этой методики: 1) движение происходит в линейно-упругом, слоистом полупространстве, и 2) движение грунта есть суперпозиция P, SV и поверхностных волн Рэлея для поворотов относительно двух горизонтальных осей (rocking) и SH и поверхностных волн Лява для крутильных колебаний относительно вертикальной оси (shaking). Заметим, что повороты относительно вертикальной и горизонтальной осей моделируются отдельно.

В СССР и России развивался более универсальный способ расчета ротационных компонент по акселерограммам поступательного движения, впервые намеченный в трудах В.Т. Рассказовского [119], и развитый и обобщенный в работах Э.Е. Хачияна [138], Н.А. Николаенко и Ю.П. Назарова [96]. Преимущества этого подхода перед методом В. Ли, Дж. Луко и М. Трифунака заключаются в следующем:

- 1) Использование обобщенной волновой модели как способа представления сейсмического воздействия в виде пространственной композиции из любых объемных и поверхностных волн.
- 2) Известны точные аналитические соотношения, полученные Ю.П. Назаровым [72, 75], по которым спектры ротаций определяются по спектрам поступательных движений. Эти соотношения дают возможность провести одновременный расчет всех трех ротационных компонент, внутренне взаимосвязанных и между собой, и с исходными записями.

Полученная тройка ротационных акселерограмм используется в качестве трех дополнительных компонент вектора сейсмического воздействия. Ротационные компоненты сейсмического движения – углы поворота $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ некоторого объема грунта, а также его угловые скорости $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$ и ускорения $\ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2, \ddot{\alpha}_3$ относительно локальных ортогональных осей, выбранных для поступательного движения и обычно связанных со сторонами света, $\dot{\alpha}_i = d\alpha_i/dt$, $\ddot{\alpha}_i = d^2\alpha_i/dt^2$.

В дифференцированной модели функции поступательных перемещений грунта $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ задают переменное во времени пространственное векторное поле \mathbf{X} . В каждой точке (x_1, x_2, x_3) поля \mathbf{X} определен вектор ротора

$$\text{rot}\mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ - орты соответствующих осей. Вычисляя вектор ротора в каждой точке, получаем новое векторное поле – роторное.

Из последней формулы следует вид координатной формы ротора

$$\text{rot}\mathbf{X} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{j}_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{j}_2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{j}_3.$$

Известно, что углы поворота элементарного объема связаны с вектором ротора соотношением $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2} \text{rot}\mathbf{X}$, тогда

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.21)$$

После дифференцирования по времени получим угловые скорости $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$ и ускорения $\ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2, \ddot{\alpha}_3$ в точке (x_1, x_2, x_3) :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{X}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{X}_2}{\partial x_3} \right), \quad \dot{\alpha}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{X}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{X}_3}{\partial x_1} \right), \quad \dot{\alpha}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{X}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{X}_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.22)$$

$$\ddot{\alpha}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{X}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \ddot{X}_2}{\partial x_3} \right), \quad \ddot{\alpha}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{X}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \ddot{X}_3}{\partial x_1} \right), \quad \ddot{\alpha}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{X}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \ddot{X}_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.23)$$

Эти формулы задают ротации малой области в окрестности точки пространства, то есть соответствуют дифференцированному описанию поля угловых движений грунта. При переходе к интегральной модели векторное поле ротационных дви-

жений (так же, как и поле поступательных движений) осредняется по некоторому объему грунта и характеризуется единым вектором, приложенным в геометрическом центре объема осреднения. Осреднение пространственного поля перемещений по объему грунта под фундаментом аналогично процедуре фильтрации коротких волн поступательного движения, таких что $\lambda_k \leq B$.

Из формул (2.20), (2.22) и (2.23) следуют соотношения, связывающие параметры поступательного и ротационного движения во временной области (подробный вывод см. в [72]):

$$\begin{aligned}
2\alpha_1 &= \bar{A}_{31}^{(2)} u_3 - \bar{A}_{21}^{(3)} u_2 + \left(\bar{A}_{32}^{(2)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{32}^{(t)} \right) v_3 + \bar{A}_{22}^{(3)} v_2 + \\
&+ \bar{A}_{33}^{(2)} w_3 - \left(\bar{A}_{23}^{(3)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{32}^{(t)} \right) w_2 + \frac{1}{c_2} \left(\frac{dw_2}{dt} - \frac{dv_3}{dt} \right), \\
2\alpha_2 &= \bar{A}_{11}^{(3)} u_1 - \left(\bar{A}_{31}^{(1)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{31}^{(t)} \right) u_3 + \bar{A}_{12}^{(3)} v_1 - \bar{A}_{32}^{(1)} v_3 + \\
&+ \left(\bar{A}_{13}^{(3)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{13}^{(t)} \right) w_1 - \bar{A}_{33}^{(1)} w_3 + \frac{1}{c_2} \left(\frac{du_3}{dt} - \frac{dw_1}{dt} \right), \\
2\alpha_3 &= \left(\bar{A}_{21}^{(1)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{21}^{(t)} \right) u_2 - \bar{A}_{11}^{(2)} u_1 + \bar{A}_{22}^{(1)} v_2 - \left(\bar{A}_{12}^{(2)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{12}^{(t)} \right) v_1 + \\
&+ \bar{A}_{23}^{(1)} w_2 - \bar{A}_{13}^{(2)} w_3 + \frac{1}{c_2} \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где
$$\bar{A}_{ij}^{(1)} = \frac{1}{A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1}, \quad \bar{A}_{ij}^{(2)} = \frac{1}{A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2}, \quad \bar{A}_{ij}^{(3)} = \frac{1}{A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_3}, \quad \bar{A}_{ij}^{(t)} = \frac{1}{A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial t}.$$

Формулы для $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$ и $\ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2, \ddot{\alpha}_3$ представлены в [15, 72].

Рассмотрим поступательную компоненту сейсмического движения $X_i(t)$ в точке (x_1, x_2, x_3) . Разложение в тригонометрический ряд Фурье функции X_i с периодом $2T$ на интервале $[-T, T]$ имеет вид [57]:

$$X_i(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \frac{\pi t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k \frac{\pi t}{T}, \quad (2.25)$$

где A_k и B_k – коэффициенты Фурье

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T X_i(\tau) \cos k \frac{\pi \tau}{T} d\tau, \quad B_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T X_i(\tau) \sin k \frac{\pi \tau}{T} d\tau.$$

Каждая спектральная составляющая в (2.25) имеет угловую частоту $\omega_k = k\pi/T$.

Аналогично могут быть представлены углы ротаций ($i=1, 2, 3$)

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{2}A_0^{\alpha_i} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{\alpha_i} \cos k \frac{\pi t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{\alpha_i} \sin k \frac{\pi t}{T} \quad (2.26)$$

и волновые компоненты из формулы (2.20)

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \frac{1}{2}A_0^{u_i} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{u_i} \cos k \frac{\pi t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{u_i} \sin k \frac{\pi t}{T}, \\ v_i(t) &= \frac{1}{2}A_0^{v_i} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{v_i} \cos k \frac{\pi t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{v_i} \sin k \frac{\pi t}{T}, \\ w_i(t) &= \frac{1}{2}A_0^{w_i} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{w_i} \cos k \frac{\pi t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{w_i} \sin k \frac{\pi t}{T}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Рассмотрим движение, соответствующее k -тому слагаемому рядов (2.25), (2.26) и (2.27). Подставим (2.26) и (2.27) в (2.24) и приравняем коэффициенты при $\cos k \frac{\pi t}{T}$

и $\sin k \frac{\pi t}{T}$. В результате получим полный набор коэффициентов Фурье для задания

ротационного движения в форме (2.26):

$$\begin{aligned} 2A_k^{\alpha_1} &= \bar{A}_{31}^{(2)} A_k^{u_3} - \bar{A}_{21}^{(3)} A_k^{u_2} + \left(\bar{A}_{32}^{(2)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{32}^{(t)} \right) A_k^{v_3} - \bar{A}_{22}^{(3)} A_k^{v_2} + \\ &+ \bar{A}_{33}^{(2)} A_k^{w_3} - \left(\bar{A}_{23}^{(3)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{23}^{(t)} \right) A_k^{w_2} + \frac{\omega_k}{c_2} (B_k^{w_2} - B_k^{v_3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2B_k^{\alpha_1} &= \bar{A}_{31}^{(2)} B_k^{u_3} - \bar{A}_{21}^{(3)} B_k^{u_2} + \left(\bar{A}_{32}^{(2)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{32}^{(t)} \right) B_k^{v_3} - \bar{A}_{22}^{(3)} B_k^{v_2} + \\
&+ \bar{A}_{33}^{(2)} B_k^{w_3} - \left(\bar{A}_{23}^{(3)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{23}^{(t)} \right) B_k^{w_2} - \frac{\Omega_k}{c_2} (A_k^{w_2} - A_k^{v_3}), \\
2A_k^{\alpha_2} &= \bar{A}_{11}^{(1)} A_k^{u_1} - \left(\bar{A}_{31}^{(1)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{31}^{(t)} \right) A_k^{u_3} + \bar{A}_{12}^{(3)} A_k^{v_1} - \bar{A}_{32}^{(1)} A_k^{v_3} + \\
&+ \left(\bar{A}_{13}^{(3)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{13}^{(t)} \right) A_k^{w_1} - \bar{A}_{33}^{(1)} A_k^{w_3} + \frac{\Omega_k}{c_2} (B_k^{u_3} - B_k^{w_1}), \\
2B_k^{\alpha_2} &= \bar{A}_{11}^{(1)} B_k^{u_1} - \left(\bar{A}_{31}^{(1)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{31}^{(t)} \right) B_k^{u_3} + \bar{A}_{12}^{(3)} B_k^{v_1} - \bar{A}_{32}^{(1)} B_k^{v_3} + \\
&+ \left(\bar{A}_{13}^{(3)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{13}^{(t)} \right) B_k^{w_1} - \bar{A}_{33}^{(1)} B_k^{w_3} - \frac{\Omega_k}{c_2} (A_k^{u_3} - A_k^{w_1}), \\
2A_k^{\alpha_3} &= \left(\bar{A}_{21}^{(1)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{21}^{(t)} \right) A_k^{u_2} - \bar{A}_{11}^{(2)} A_k^{u_1} + \bar{A}_{22}^{(1)} A_k^{v_2} - \\
&- \left(\bar{A}_{12}^{(2)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{12}^{(t)} \right) A_k^{v_1} + \bar{A}_{23}^{(1)} A_k^{w_3} - \bar{A}_{13}^{(2)} A_k^{w_1} + \frac{\Omega_k}{c_2} (B_k^{v_1} - B_k^{u_2}), \\
2B_k^{\alpha_3} &= \left(\bar{A}_{21}^{(1)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{21}^{(t)} \right) B_k^{u_2} - \bar{A}_{11}^{(2)} B_k^{u_1} + \bar{A}_{22}^{(1)} B_k^{v_2} - \\
&- \left(\bar{A}_{12}^{(2)} + \frac{1}{c_2} \bar{A}_{12}^{(t)} \right) B_k^{v_1} + \bar{A}_{23}^{(1)} B_k^{w_3} - \bar{A}_{13}^{(2)} B_k^{w_1} - \frac{\Omega_k}{c_2} (A_k^{v_1} - A_k^{u_2}).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Аналогично могут быть получены формулы для угловых скоростей (2.22) и ускорений (2.23) через спектры скоростей $\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{w}_i$ и ускорений $\ddot{u}_i, \ddot{v}_i, \ddot{w}_i$ [72]. Таким образом, если известны коэффициенты Фурье разложения (2.27), расчет соответствующих коэффициентов Фурье для ротаций осуществляется напрямую по формулам (2.28). Формулы (2.28) универсальны, так как применимы для любых сейсмических волн, включая поверхностные. В зависимости от типа волны будет меняться её амплитудная функция $A_{ij} = A_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$.

Если предварительные исследования сейсмического движения показали, что модель волнового воздействия является *дилатационно-ротационной*, то угловые ускорения должны быть включены наряду с ускорениями поступательного дви-

жения в шестикомпонентный вектор сейсмического воздействия. Ротационные компоненты вектора сейсмического воздействия могут приводить к заметному перераспределению внутренних усилий в конструкции, особенно когда длины доминирующих сейсмических волн λ сопоставимы с длиной фундамента. Так как $\lambda = cT$ (c - фазовая скорость распространения волн в упругой среде, T - доминирующий период воздействия), то наиболее чувствительны к сейсмическим ротациям конструкции на мягких грунтах и при короткопериодическом воздействии.

Общий аналитический подход к расчету ротационных акселерограмм, описанный выше, реализован в программном обеспечении «Одиссей» для суперпозиции P, SV и SH-волн [14, 15, 89]. В качестве начальных данных для расчета требуется задать фазовую скорость поперечной S-волны под подошвой фундамента и определить матрицы волновых процессов C , $CPX1$, $CPX2$, $CPX3$ и CPT (Рисунок 2.9).

Фазовая скорость S-волны c_2 – один из важнейших факторов, определяющих ротации грунта. Пусть G – модуль сдвига грунта, ρ – его плотность, тогда фазовая скорость поперечной волны $c_2 = \sqrt{G/\rho}$. Заметим, что низкая фазовая скорость характерна для слабых грунтов, а ротации грунта увеличиваются с уменьшением скорости c_2 .

Матрицы волновых процессов

Скорость распространения волны: 200 м/с

CPX 1

0	0	0
0	0	0
0	0	0

CPX 2

0	0	0
0	0	0
0	0	0

CPX 3

0	0	0
0	0	0
0	0	0

C

0	0,5	0,5
0,5	0	0,5
0,5	0,5	0

CPT

0	0	0
0	0	0
0	0	0

OK Помощь Отмена

Рисунок 2.9. Входные данные для расчета ротационных акселерограмм, окно ввода данных ПО «Одиссей»

Матрица весовых коэффициентов C отвечает за распределение волновых составляющих в общей композиции (2.20). Если матрица C единичная, то волновая модель состоит только из P-волн, не создающих ротации. В этом случае ротацион-

ные акселерограммы получаются нулевыми. Матрицы $CPX1$, $CPX2$, $CPX3$ и CPT задают коэффициенты при перемещениях u_i , v_i и w_i в формулах (2.25). Эти коэффициенты определяют относительное изменение амплитудных функций $A_{ij} = A_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ в зависимости от координаты и времени. Компоненты матриц $CPX1$, $CPX2$, $CPX3$ и CPT вычисляются по формулам:

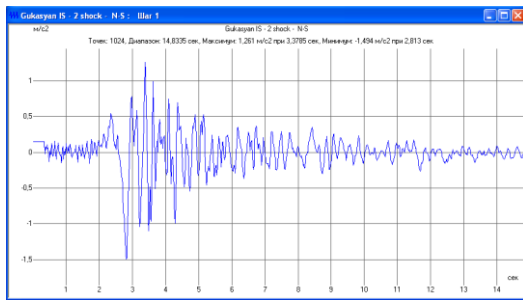
$$\begin{aligned} CPX1: \quad \bar{A}_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1}, & CPX2: \quad \bar{A}_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2}, \\ CPX3: \quad \bar{A}_{ij}^{(3)} &= \frac{1}{A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_3}, & CPT: \quad \bar{A}_{ij}^{(t)} &= \frac{1}{A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Если P, SH и SV-волны имеют плоский фронт и не изменяются по глубине, их амплитудные функции постоянны ($A_{ij} = const$). В этом случае матрицы $CPX1$, $CPX2$, $CPX3$ и CPT – нулевые, а углы поворота рассчитываются по формулам Ньюмарка:

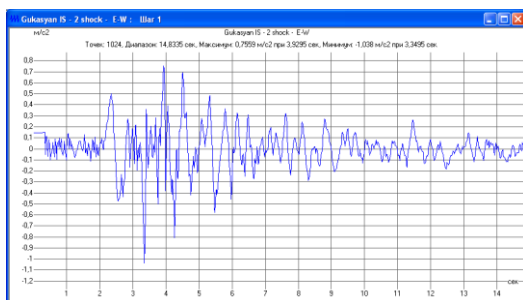
$$\alpha_1 = \frac{1}{2c_2} \left(\frac{dw_2}{dt} - \frac{dv_3}{dt} \right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2c_2} \left(\frac{du_3}{dt} - \frac{dw_1}{dt} \right), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2c_2} \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right). \quad (2.29)$$

Для примера рассмотрим расчет ротационных акселерограмм для записей Спитакского землетрясения 1988 года (длительность 14.8 с, 1024 точек). Будем использовать модель ротаций (2.29). Волновые матрицы для этого случая показаны на Рисунке 2.9, то есть перемещения от P-волн не учитываются, перемещения от S-волн распределены поровну вдоль каждой оси. Матрицы $CPX1$, $CPX2$, $CPX3$ и CPT нулевые. Фазовая скорость поперечных волн равна 200 м/с. На Рисунках 2.10а, 2.10б, 2.10в показаны акселерограммы поступательного движения Спитакского землетрясения 7 декабря 1988 г. и полученные акселерограммы ротационного движения 2.10г, 2.10д, 2.10е.

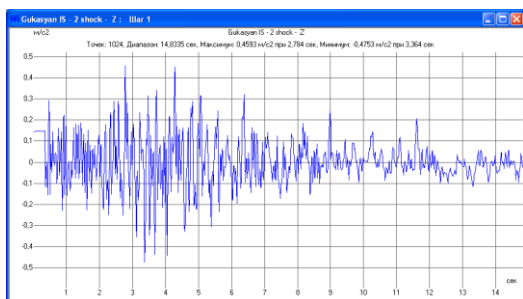
Поступательное движение



а) Направление N-S
 Max: 1.261 м/с², Min: -1.494 м/с²

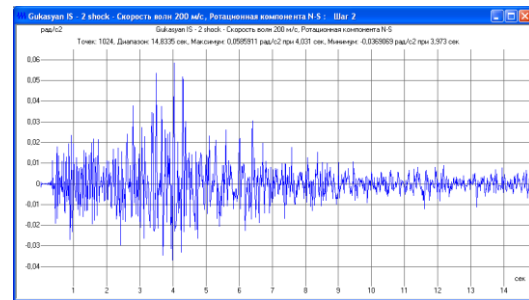


б) Направление E-W
 Max: 0.756 м/с², Min: -1.038 м/с²

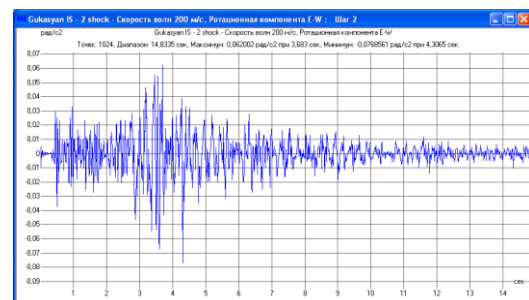


в) Направление Z
 Max: 0.459 м/с², Min: -0.475 м/с²

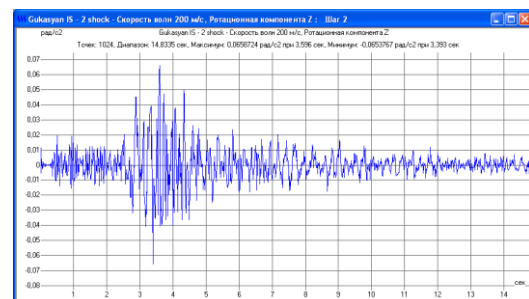
Ротационное движение



г) Направление N-S
 Max: 0.059 рад/с², Min: -0.037 рад/с²



д) Направление E-W
 Max: 0.062 рад/с², Min: -0.077 рад/с²



е) Направление Z
 Max: 0.066 рад/с², Min: -0.065 рад/с²

Рисунок 2.10. Ротационные акселерограммы, рассчитанные по записям Спитакского землетрясения 7 декабря 1988 г.

2.8. Моделирование волновых полей по заданным акселерограммам

Моделирование полей волн Рэлея

При решении задач теории сейсмостойкости по дифференцированной схеме необходимы методики моделирования пространственно-временных сейсмических полей. Как распространяется в пространстве одна монохроматическая волна Рэлея,

известно [72, 98]. Однако более реалистично выглядит случай, когда волны Рэлея движутся в составе волнового пакета, причем имеется запись этого движения в одной из точек пространства. Покажем, каким может быть алгоритм моделирования движения волн Рэлея по поверхности упругого полупространства, если в начале координат задана акселерограмма вертикального движения грунта.

Волновое движение в однородном упругом полупространстве будем описывать в осях $Ox_1x_2x_3$. Упругие свойства среды зададим с помощью параметров Ламе λ и μ или модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν (см.п.2.1):

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где G - модуль сдвига. Напомним, что фазовые скорости объемных Р- и S-волн в упругом пространстве равны соответственно

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

где ρ - плотность грунта.

Допустим, поверхностная волна Рэлея распространяется в направлении оси Ox_1 с угловой частотой ω и фазовой скоростью c_R . Период, длина и волновое число такой волны равны $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\lambda = \frac{2\pi c_R}{\omega}$ и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Волна Рэлея плоская, поэтому частицы грунта совершают движение только в направлении осей Ox_1 и Ox_3 с перемещениями u_1 и u_3 соответственно, $u_2 = 0$.

Задача распространения волны Рэлея в упругом полупространстве имеет известное решение [72, 98], полученное с точностью до константы C :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3, t) &= -C \left(e^{f_1(x_3)} - Q_1 e^{f_2(x_3)} \right) \sin \varphi(x_1, t), \\ u_3(x_1, x_3, t) &= -C \left(Q_3 e^{f_1(x_3)} - Q_2 e^{f_2(x_3)} \right) \cos \varphi(x_1, t), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где введены обозначения

$$Q_1 = 2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-L^2\alpha^2}}{2-\alpha^2}, \quad Q_2 = 2 \frac{\sqrt{1-L^2\alpha^2}}{2-\alpha^2}, \quad Q_3 = \sqrt{1-L^2\alpha^2}, \quad L = \frac{c_2}{c_1}, \quad \alpha = \frac{c_R}{c_2},$$

$$f_1(x_3) = kQ_3x_3, \quad f_2(x_3) = k(x_3\sqrt{1-\alpha^2}), \quad \varphi(x_1, t) = k(c_R t - x_1) = \omega t - kx_1.$$

Фазовая скорость волны Рэлея $c_R = \alpha c_2$, где α есть решение нелинейного уравнения [72, 98],

$$(2-\alpha^2)^2 - 4\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-L^2\alpha^2} = 0, \quad \alpha \in [0,1].$$

Поля скоростей и ускорений частиц грунта, инициированные прохождением волны Рэлея, задаются выражениями:

$$\dot{u}_1(x_1, x_3, t) = -C\omega \left(e^{f_1(x_3)} - Q_1 e^{f_2(x_3)} \right) \cos \varphi(x_1, t), \quad (2.31)$$

$$\dot{u}_3(x_1, x_3, t) = C\omega \left(Q_3 e^{f_1(x_3)} - Q_2 e^{f_2(x_3)} \right) \sin \varphi(x_1, t),$$

$$\ddot{u}_1(x_1, x_3, t) = C\omega^2 \left(e^{f_1(x_3)} - Q_1 e^{f_2(x_3)} \right) \sin \varphi(x_1, t), \quad (2.32)$$

$$\ddot{u}_3(x_1, x_3, t) = C\omega^2 \left(Q_3 e^{f_1(x_3)} - Q_2 e^{f_2(x_3)} \right) \cos \varphi(x_1, t).$$

На Рисунке 2.11 показан пространственно-временной процесс распространения монохроматической волны Рэлея ($\omega=1$ рад/с, $C=1$) по поверхности грунта в направлении оси x_1 . Параметры грунта: $E=100$ МПа, $G=40$ МПа, $\nu=0.25$, кинематические параметры: $\alpha=0.9184$, $c_1=273.86$ м/с, $c_2=158.11$ м/с, $c_R=145.21$ м/с, $\lambda=912.40$ м.

Покажем, как на основе акселерограммы вертикального движения можно смоделировать пространственно-временное векторное поле сейсмического движения от волн Рэлея. Вертикальное движение грунта в начале координат O в направлении оси Ox_3 зададим в виде акселерограммы $a_3(t)$.

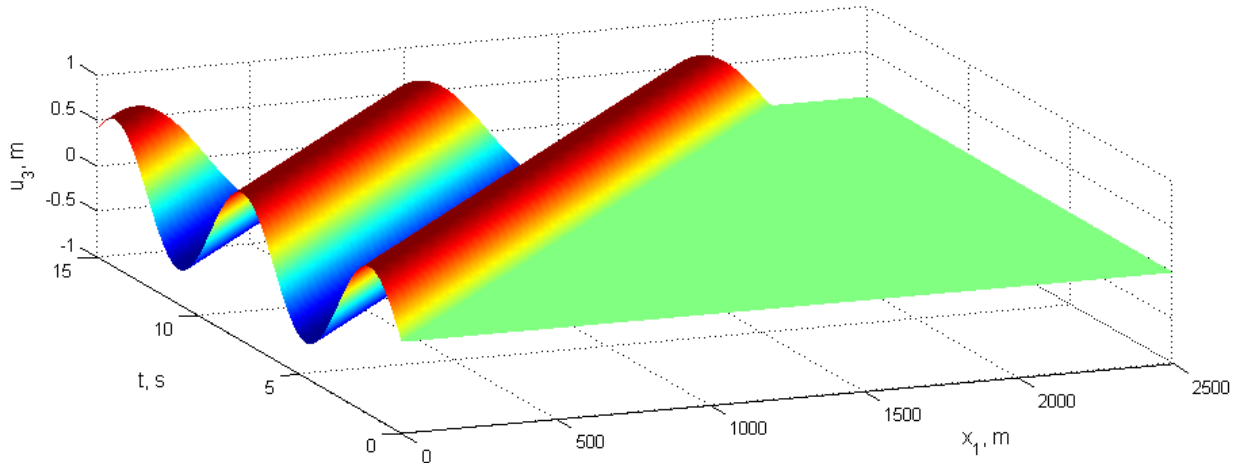


Рисунок 2.11 - Волна Рэлея, вертикальные перемещения

Разложим функцию $a_3(t)$ в ряд Фурье по косинусам. Для этого представим её как четную с периодом $2T$ (зеркально отразим график функции относительно оси ординат, а затем сместим результат по горизонтали на расстояния, кратные $2T$ - получится четная функция с периодом $2T$, совпадающая с исходной на промежутке $[0, T]$). В этом случае функция $a_3(t)$ может быть разложена в ряд Фурье по косинусам [120]:

$$a_3(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2\pi(n-1)}{2T} t, \quad (2.33)$$

где

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T a_3(\tau) \cos \frac{2\pi(n-1)\tau}{2T} d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

Гармоника в сумме (2.33) с номером n имеет угловую частоту $\omega_n = \frac{\pi}{T}(n-1)$,

длину волны $\lambda_n = \frac{2\pi}{\omega_n} c_R$, волновое число $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Представим имеющуюся акселерограмму как функцию дискретного аргумента. Допустим, акселерограмма a_3 содержит N точек с шагом Δt , длительность реализации $T = (N-1)\Delta t$. Значение времени в начале каждого интервала обозначим

$t_j = (j-1)\Delta t$, j - номер отсчета, $j=1, \dots, N$. В моменты времени t_j функция принимает дискретные значения $a_3(t_j)$. Тогда $\omega_n = \frac{\pi}{T}(n-1) = \frac{\pi}{(N-1)\Delta t}(n-1)$, $n=1, \dots, N$. Сумма (2.33) из бесконечной превращается в финитную

$$a_3(t_j) = \sum_{n=1}^N A_n \cos \omega_n t_j, \quad j=1, \dots, N. \quad (2.35)$$

Коэффициенты A_n , учитывая заранее оговоренную четность функции a_3 и четность функции косинуса, можно найти по финитному варианту формулы (2.34)

$$A_n = \frac{2}{(N-1)} \sum_{j=1}^N a_3(t_j) \cos \frac{\pi(n-1)(j-1)}{(N-1)}, \quad n=1, 2, \dots, N. \quad (2.36)$$

Набор постоянных A_n , соответствующих $a_3(t_j)$ можно определить по формуле (2.36) в любой математической программе.

Допустим, что вертикальное движение грунта является результатом прохождения пакета волн Рэлея – ограниченной во времени совокупности монохроматических волн, движущихся с единой фазовой скоростью c_R . Тогда в начале отсчета O ускорение вертикального движения грунта (2.32) от пакета волн Рэлея совпадает с заданной акселерограммой $\ddot{X}_3(t_j)$ по каждой гармонике из суммы (2.35). В точке O $x_1 = x_3 = 0$, $f_1(x_3) = 0$, $f_2(x_3) = 0$, $\varphi_n(t_j) = k_n c_R t_j = \omega_n t_j$, тогда

$$\ddot{u}_{3(n)}(t_j) = C_n \omega_n^2 (Q_3 - Q_2) \cos \omega_n t_j = A_n \cos \omega_n t_j.$$

Таким образом, постоянные C_n могут быть определены из начальных условий:

$$C_n = \frac{A_n}{\omega_n^2 (Q_3 - Q_2)}. \quad (2.37)$$

Заметим, что при $n=1$ $\omega_1 = 0$. В формулах (2.32) квадрат угловой частоты – множитель при гармонических функциях. При подстановке найденной постоянной в

(2.32) квадрат частоты сократится и неопределенности, возникающей при делении на нуль, не будет.

В результате формулы для пространственно-временного векторного поля ускорений от пакета монохроматических волн Рэлея (2.32), формирующих заданную акселерограмму $a_3(t_j)$ вертикального движения в начале координат, имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_1(x_1, x_3, t_j) &= \frac{1}{Q_3 - Q_2} \sum_{n=1}^N A_n \left(e^{f_{1(n)}(x_3)} - Q_1 e^{f_{2(n)}(x_3)} \right) \sin \varphi_n(x_1, t_j), \\ \ddot{X}_3(x_1, x_3, t_j) &= \frac{1}{Q_3 - Q_2} \sum_{n=1}^N A_n \left(Q_3 e^{f_{1(n)}(x_3)} - Q_2 e^{f_{2(n)}(x_3)} \right) \cos \varphi_n(x_1, t_j),\end{aligned}\quad (2.38)$$

где

$$Q_1 = 2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-L^2\alpha^2}}{2-\alpha^2}, \quad Q_2 = 2 \frac{\sqrt{1-L^2\alpha^2}}{2-\alpha^2}, \quad Q_3 = \sqrt{1-L^2\alpha^2}, \quad L = \frac{c_2}{c_1}, \quad \alpha = \frac{c_R}{c_2},$$

$$f_{1(n)}(x_3) = k_n Q_3 x_3, \quad f_{2(n)}(x_3) = k_n x_3 \sqrt{1-\alpha^2}, \quad \varphi_n(x_1, t) = k_n (c_R t - x_1) = \omega_n t - k_n x_1,$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{T} (n-1), \quad k_n = \frac{\omega_n}{c_R}, \quad n = 1, 2, 3, \dots N$$

константы A_n перед расчетом определяются по формуле (2.36).

На Рисунке 2.12 приведены акселерограммы $\ddot{X}_1(x_1, x_3, t_j)$ и $\ddot{X}_3(x_1, x_3, t_j)$ движения грунта от волн Рэлея, сгенерированные в точке O ($x_1 = x_3 = 0$) по акселерограмме вертикального движения a_3 (Газлийское землетрясение 14 мая 1976 г., 2048 точек, длительность 13.48 с). Полученная акселерограмма \ddot{X}_3 полностью совпадает с исходной.

На Рисунках 2.13 и 2.14 показаны акселерограммы $\ddot{X}_1(x_1, x_3, t_j)$ и $\ddot{X}_3(x_1, x_3, t_j)$ на поверхности грунта ($x_3 = 0$) при различных значениях координат x_1 . Эти координаты были выбраны таким образом, чтобы показать разные фазы волнового процесса. Вспомним, что при разложении функции $a_3(t)$ предполагалась периодич-

ность исходной акселерограммы с периодом $2T$, обусловленная периодичностью волновых функций в формулах (2.30-2.32). Поэтому акселерограммы при $x_1 = 0$ и при $x_1 = 2Tc_R$ выглядят идентично, но со сдвигом по времени в $2T$. Промежуточные стадии волнового процесса $x_1 = 0.5Tc_R$, $x_1 = Tc_R$ и $x_1 = 1.5Tc_R$ по виду довольно сильно отличаются друг от друга. Это обусловлено различным запаздыванием составляющих с разными частотами.

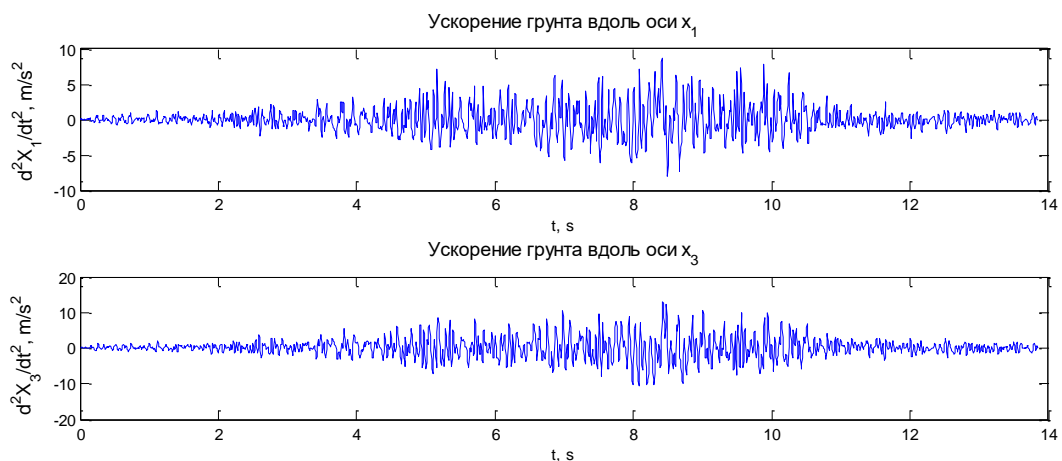


Рисунок 2.12. Формирование поля ускорений от волн Рэлея
Акселерограммы $\ddot{X}_1(x_1, x_3, t_j)$ и $\ddot{X}_3(x_1, x_3, t_j)$ в точке O

На Рисунке 2.15 показан пространственно-временной процесс распространения волн Рэлея, формирующих акселерограмму. Предложенный алгоритм может быть полезен не только для расчета по дифференцированной схеме протяженных в плане сооружений. Этот подход можно применять и для представления волн Рэлея в составе обобщенной волновой модели [15, 72, 75], удобной для формирования композиции объемных и поверхностных сейсмических волн, расчета ротаций, выбора наиболее опасной расчетной комбинации волн.

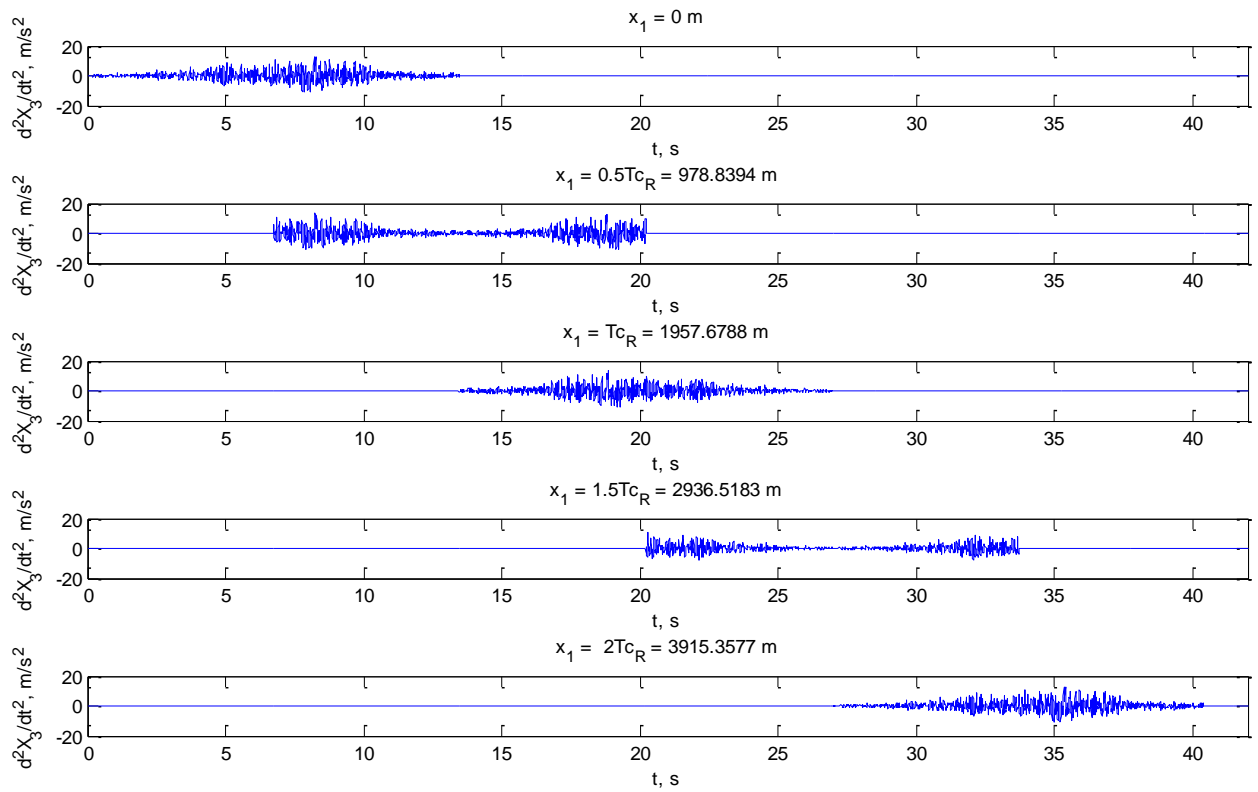


Рисунок 2.13. Распространение волны Рэлея
 $c_R = 145.21 \text{ м/с}$, вертикальное ускорение точек на поверхности грунта
 длительность акселерограммы $T = 13.48 \text{ с}$, время наблюдения 42 с

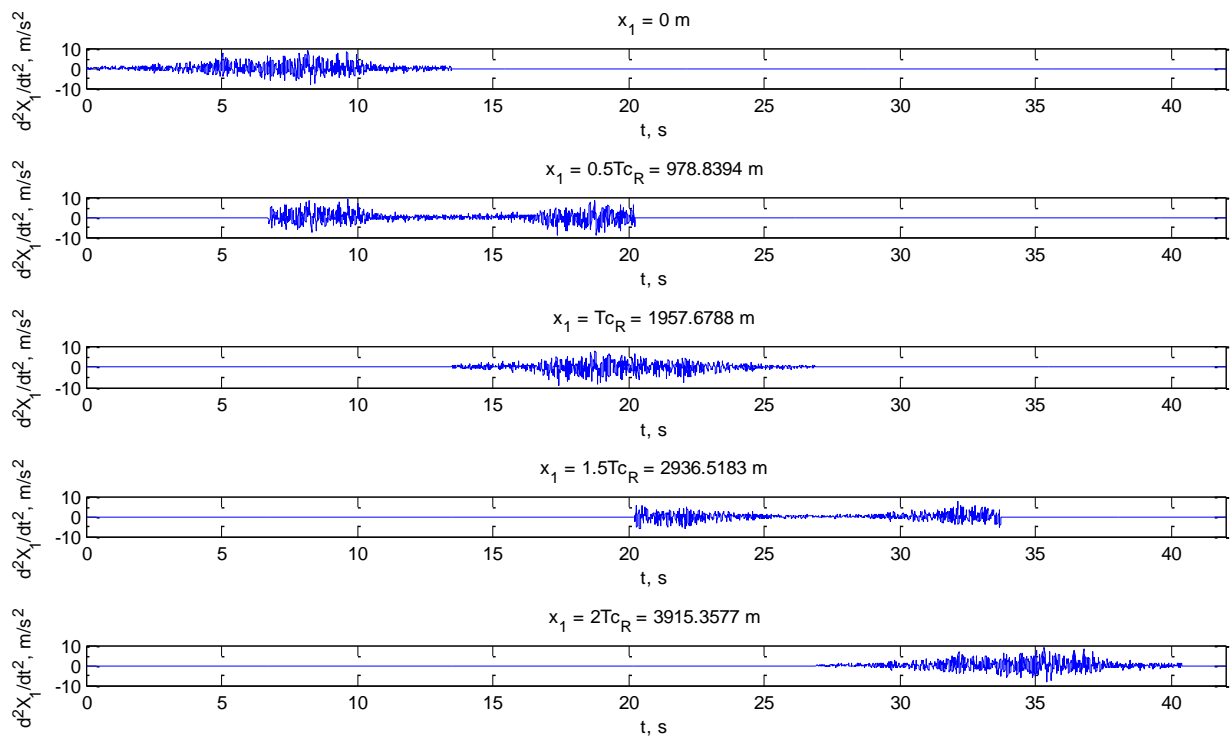


Рисунок 2.14. Распространение волны Рэлея
 $c_R = 145.21 \text{ м/с}$, горизонтальное ускорение точек на поверхности грунта

длительность акселерограммы $T=13.48$ с, время наблюдения 42 с

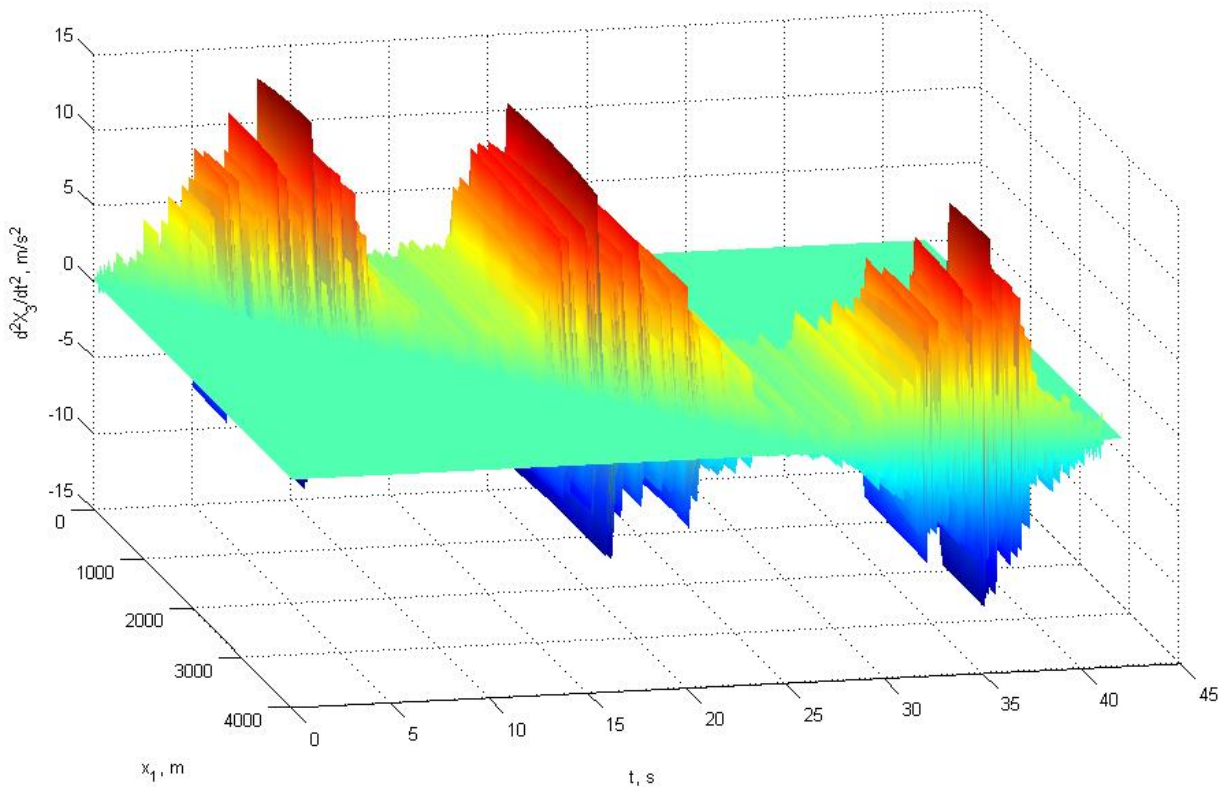


Рисунок 2.15. Пространственно-волновой процесс распространения пакета волн Рэлея, сгенерированный по заданной акселерограмме

Рассчитаем угловые ускорения волн Рэлея, заданных в виде (2.38). Для таких волн угловое движение происходит только относительно оси x_2 . По определению угловое перемещение в точке с координатой (x_1, x_3) равно [116]:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right), \quad \dot{\alpha}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{X}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{X}_3}{\partial x_1} \right), \quad \ddot{\alpha}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{X}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \ddot{X}_3}{\partial x_1} \right).$$

Найдем производные, входящие в формулу для $\ddot{\alpha}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{X}_1(x_1, x_3, t_j)}{\partial x_3} &= \frac{1}{Q_3 - Q_2} \sum_{n=1}^N A_n k_n \left(Q_3 e^{f_{1(n)}(x_3)} - Q_1 \sqrt{1 - \alpha^2} e^{f_{2(n)}(x_3)} \right) \sin \varphi_n(x_1, t_j), \\ \frac{\partial \ddot{X}_3(x_1, x_3, t_j)}{\partial x_1} &= \frac{1}{Q_3 - Q_2} \sum_{n=1}^N A_n k_n \left(Q_3 e^{f_{1(n)}(x_3)} - Q_2 e^{f_{2(n)}(x_3)} \right) \sin \varphi_n(x_1, t_j). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Тогда угловое ускорение в точке (x_1, x_3) равно

$$\ddot{\alpha}_2 = \frac{1}{2(Q_3 - Q_2)} \sum_{n=1}^N A_n k_n (Q_2 - Q_1 \sqrt{1 - \alpha^2}) e^{f_{2(n)}(x_3)} \sin \varphi_n(x_1, t_j). \quad (2.40)$$

Моделирование полей волн Лява

При решении задач теории сейсмостойкости по дифференцированной схеме [72] необходимы методики моделирования пространственно-временных сейсмических полей. Алгоритм моделирования пространственно-временного поля волн Рэлея, соответствующего граничным условиям в виде акселерограммы, заданной в одной точке, был описан в работе [81]; в настоящей работе этот же алгоритм применяется для моделирования процесса распространения поверхностных волн Лява. Причины возникновения и механизм распространения волн Лява изучены для монохроматических волн [72, 98, 121]. Однако алгоритм построения полей волн Лява по акселерограмме, заданной в одной точке поля пока, по-видимому, не был известен. Ниже приведено решение этой задачи.

Рассмотрим двухслойное полупространство, состоящее из жесткого подстилающего полупространства и более мягкого верхнего слоя высотой H . Обозначим E^* , G^* , ν^* , ρ^* - модули упругости и сдвига, коэффициент Пуассона и плотность нижнего полупространства; E , G , ν , ρ - модули упругости и сдвига, коэффициент Пуассона и плотность верхнего слоя, H - высота слоя. Фазовая скорость c_2 объемных S-волн, распространяющихся в упругой среде, равна $c_2 = \sqrt{G/\rho}$.

А.Е. Ляв [98] показал, что, если поверхностный слой имеет меньшую жесткость по сравнению с подстилающим полупространством, в нем могут возникать поверхностные волны (волны Лява) с конфигурацией, изображенной на Рисунке 2.16.

Волновое движение будем описывать в осях $Ox_1x_2x_3$ (Рисунок 2.16). Допустим, одиночная гармоническая волна Лява распространяется в направлении оси Ox_1 с угловой частотой ω и фазовой скоростью c_L . Период, длина и волновое число

волны равны $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\lambda = \frac{2\pi c_L}{\omega}$ и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Под действием волны Лява происходят горизонтальные смещения частиц грунта u_2 (Рисунок 2.16) в направлении Ox_2 .

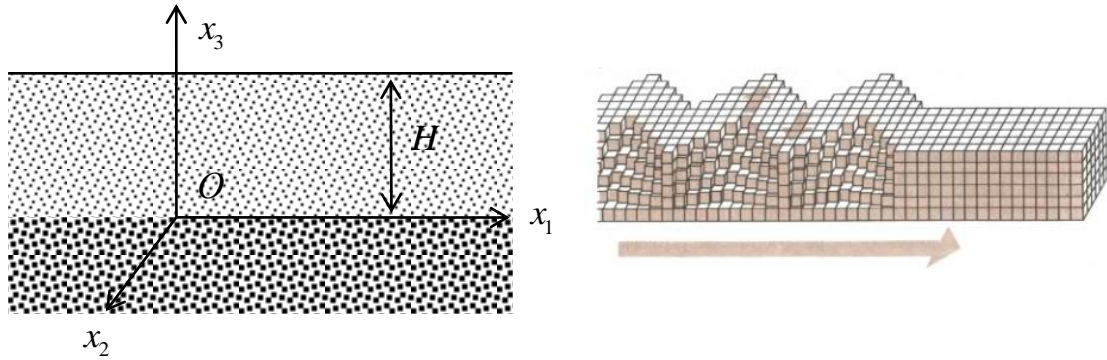


Рисунок 2.16. Поверхностная волна Лява (справа рисунок из [45])

Волновое уравнение такой волны имеет вид [98, 121]:

$$\frac{\partial^2 X_2(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 X_2(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c_2} \frac{\partial^2 X_2(x_1, x_3, t)}{\partial t^2}.$$

Задача распространения волн Лява имеет известное решение. Для одиночной гармонической волны Лява [72, 98, 121] в верхнем слое ($0 \leq x_3 \leq H$)

$$X_2(x_1, x_3, t) = (A \sin(k\beta x_3) + B \cos(k\beta x_3)) \exp(-ik(c_L t - x_1)), \quad (2.41)$$

в подстилающем полупространстве ($-\infty \leq x_3 \leq 0$)

$$X_2^*(x_1, x_3, t) = C \exp(k\beta^* x_3) \exp(-ik(c_L t - x_1)), \quad (2.42)$$

где c_L - фазовая скорость волны Лява, $k = \frac{\omega}{c_L}$ - волновое число,

$$\beta^2 = \left(\frac{c_L}{c_2}\right)^2 - 1, \quad (\beta^*)^2 = 1 - \left(\frac{c_L}{c_2^*}\right)^2. \quad (2.43)$$

Так как β и β^* действительные числа, фазовая скорость c_L лежит в пределах $c_2 \leq c_L \leq c_2^*$. Функции (2.41) и (2.42) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

- 1) $X_2 = X_2^*$ при $x_3 = 0$, откуда следует, что $B = C$;
- 2) $\sigma_{23} = \sigma_{23}^*$ при $x_3 = 0$, откуда $A/C = (G^*\beta^*)/(G\beta)$;
- 3) $\sigma_{23} = 0$ при $x_3 = H$, откуда $A\cos(k\beta H) - B\sin(k\beta H) = 0$.

Условие 3) с учетом 1) и 2) дает дисперсионное уравнение, корни которого определяют скорость волны Лява:

$$(G^*\beta^*)/(G\beta)\cos(k\beta H) - \sin(k\beta H) = 0. \quad (2.44)$$

Из граничных условий следует, что функции (2.41), (2.42) зависят от одной постоянной C :

$$X_2(x_1, x_3, t) = C(\cos(k\beta x_3) + \tan(k\beta x_3)\sin(k\beta x_3))\exp(-ik(c_L t - x_1)),$$

$$X_2^*(x_1, x_3, t) = C\exp(k\beta^* x_3)\exp(-ik(c_L t - x_1)),$$

Ускорения частиц грунта найдем, дважды продифференцировав по времени функции X_2 и X_2^* : для верхнего слоя ($0 \leq x_3 \leq H$) получим

$$\ddot{X}_2(x_1, x_3, t) = Ck^2 c_L^2 (\cos(k\beta x_3) + \tan(k\beta x_3)\sin(k\beta x_3))\exp(-ik(c_L t - x_1)), \quad (2.45)$$

для подстилающего полупространства ($-\infty \leq x_3 \leq 0$)

$$\ddot{X}_2^*(x_1, x_3, t) = Ck^2 c_L^2 \exp(k\beta^* x_3)\exp(-ik(c_L t - x_1)). \quad (2.46)$$

Константа C определяется из дополнительных граничных условий. Как видно из (2.45) и (2.46), волны Лява не меняют свою амплитуду по высоте поверхностного слоя, а в полупространстве затухают, так как $k\beta^* x_3 < 0$.

Фазовая скорость волны Лява c_L равна решению дисперсионного уравнения (2.43) и зависит не только от свойств упругих сред, но и от волнового числа $k = \omega/c_L$. Таким образом, волны Лява обладают дисперсией¹⁸. Решение дисперсионного уравнения достаточно полно аналитически исследовано в [72, 98]. Показано, что дисперсионное уравнение может иметь несколько действительных корней в зависимости от толщины верхнего слоя H , частоты ω , механических характеристик слоев грунта. Таким образом, на одной частоте может существовать несколько монохроматических волн (по числу корней уравнения (2.44)) с различными скоростями распространения. Первому корню соответствует волна первого порядка (или номера), второму – второго порядка, и т.д. Часто волной Лява считают только волну первого порядка.

Рассмотрим пример решения уравнения для конкретных грунтовых условий:

верхний слой толщиной $H = 20$ м – песок, $E = 37$ МПа, $G = 14$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 1650$ кг/м³, $c_2 = 92.87$ м/с; подстилающее полупространство – крупнообломочный грунт, $E^* = 100$ МПа, $G^* = 38$ МПа, $\nu^* = 0.3$, $\rho^* = 1800$ кг/м³, $c_2^* = 146.18$ м/с. Решения дисперсионного уравнения при изменении частоты от 15 до 100 рад/с для слоя $H = 20$ м приведены в Таблице 2.2; там же показаны соответствующие длины волн. На частотах примерно до 15 рад/с уравнение (2.44) корней не имеет, и волны Лява не возникают. С увеличением частоты возрастает количество корней: в диапазоне 40-50 рад/с их два, при 60-70 рад/с – три, при 80-90 рад/с – четыре, при 100 рад/с – уже пять.

Таблица 2.2

Скорости и длины волн Лява при различных частотах, $H = 20$ м

ω , рад/с (f , Гц)	c_{L1} , м/с (λ_1 , м)	c_{L2} , м/с (λ_2 , м)	c_{L3} , м/с (λ_3 , м)	c_{L4} , м/с (λ_4 , м)	c_{L5} , м/с (λ_5 , м)
15 (2.4)	121.43 (50.6)	133.11(21.17)	-	-	-
20 (3.2)	102.28 (32.0)	-	-	-	-
30 (4.8)	96.28 (20.0)	-	-	-	-
40 (6.4)	94.65 (14.8)	115.60 (18.1)	-	-	-
50 (8.0)	93.98 (11.7)	104.75 (13.1)	-	-	-

¹⁸ Для волн без дисперсии фазовая скорость не зависит от волнового числа (частоты) и является константой.

60 (9.6)	93.62 (9.7)	100.40 (10.5)	121.90 (12.7)	-	-
70 (11.1)	93.42 (8.4)	98.15 (8.8)	110.70 (10.0)	-	-
80 (12.7)	93.28 (7.3)	96.78 (7.6)	105.32 (8.3)	125.36 (9.9)	-
90 (14.3)	93.19 (6.5)	95.90 (6.7)	102.20 (7.14)	114.85 (8.0)	-
100 (15.9)	93.13 (5.9)	95.27 (6.0)	100.13 (6.3)	109.14 (6.9)	127.50 (8.0)

Рассмотрим подробнее уравнение (2.44); корни которого показаны на Рисунке 2.17 в осях $k\beta H$ и $D(k\beta H)$, где

$$D(k\beta H) = (G^*\beta^*) / (G\beta) \cos(k\beta H) - \sin(k\beta H).$$

Свойства уравнения (2.44) на отрезке $c_2 \leq c_L \leq c_2^*$ (что соответствует $k\beta(c_2)H < k\beta(c_L)H \leq k\beta(c_2^*)H$):

1) имеется одна особая точка при $c_L = c_2$ $k\beta(c_2)H = 0$, здесь $k\beta^*H$ достигает своего максимального значения;

2) при $c_L = c_2^*$ $k\beta^*H = 0$;

3) $D(k\beta H)$ - убывающая функция, поскольку при $k\beta H \rightarrow k\beta(c_2^*)H$ функция $(G^*\beta^*) / (G\beta)$ убывает в силу свойств 1) и 2);

4) при $c_2^* \gg c_2$ решение вблизи c_2 в основном определяется первым членом уравнения (2.44), так как $(G^*\beta^*) / (G\beta) \gg 1$; вблизи c_2^* решение определяют оба члена уравнения (2.44).

На основании свойства 4) можно найти начальные приближения к корням и максимально возможное количество корней дисперсионного уравнения. Начальное приближение $c_L^{(n+1)}$ к $(n+1)$ корню при условии, что $\cos(k\beta(c_L)H) = 0$, равно

$k\beta(c_L)H = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $0 \leq n \leq n_r$, откуда

$$c_L^{(n+1)} = \frac{c_2 \omega H}{\sqrt{\omega^2 H^2 - c_2^2 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2}}. \quad (2.47)$$

Это приближение будет тем точнее, чем ближе корень к c_2 . Примерное количество корней уравнения (2.44) можно определить из условия $k\beta(c_2^*)H = \frac{\pi}{2} + \pi n_r$.

Максимально возможное количество корней дисперсионного уравнения равно

$$n_r = \left[\frac{\omega H}{\pi c_2^*} \sqrt{\left(\frac{c_2^*}{c_2}\right)^2 - 1} - \frac{1}{2} \right] + 1, \quad (2.48)$$

$D(k\beta H)$

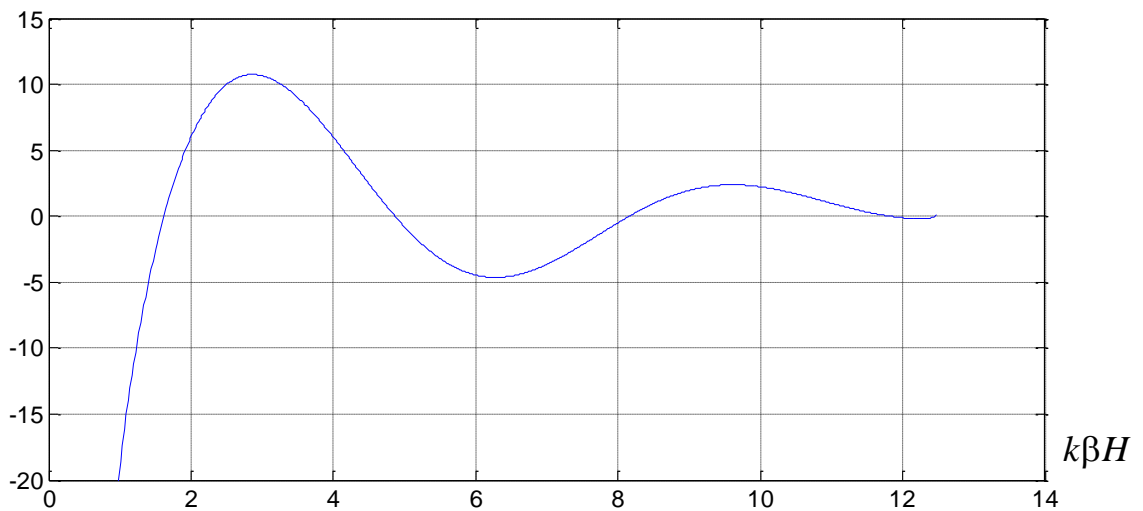


Рисунок 2.17. Корни дисперсионного уравнения (5 корней) $\omega=15$ рад/с, $H=100$ м

где $\lceil n \rceil$ - округление в большую сторону числа n . Значение n_r равно числу полу-волн косинуса, входящего в $D(k\beta H)$. Так как в конце интервала возрастает роль второго слагаемого в уравнении (2.44), корней может быть больше, чем получается по выражению в скобках в (2.48). Анализ функции $D(k\beta H)$ для приведенных выше данных, показал, что может появиться один дополнительный корень, близкий к $k\beta(c_2^*)H$, поэтому в (2.48) добавлена единица. Таким образом, формула (2.48) дает оценку сверху для количества корней (см. Таблицу 2.3).

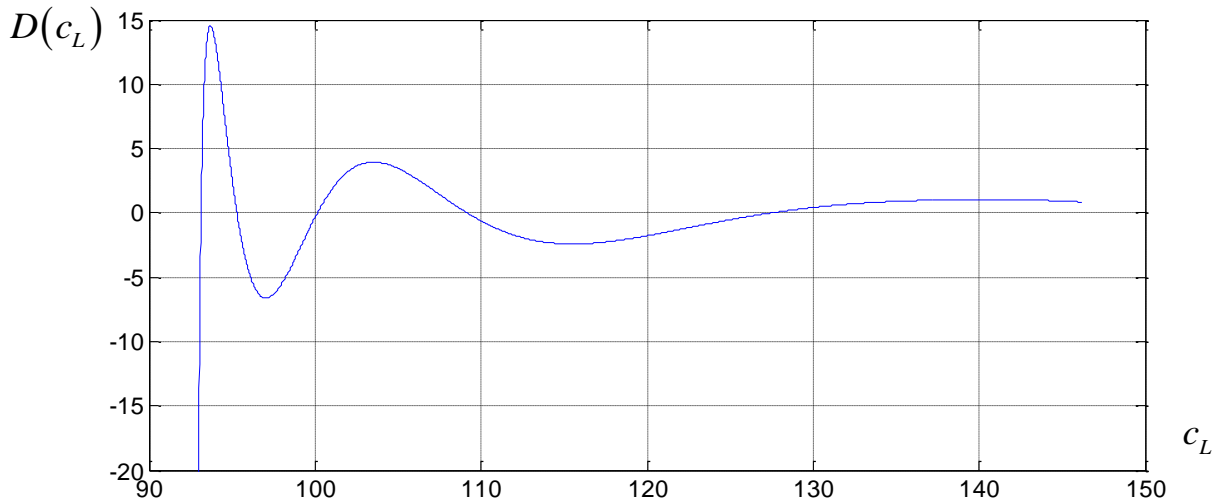


Рисунок 2.18. Корни дисперсионного уравнения (5 корней) $\omega=100$ рад/с, $H=20$ м

В таблице 2.3 приведены корни уравнения (2.44) для $\omega=15$ рад/с ($f=2.4$ с⁻¹) при варьируемой толщине слоя H ; в скобках указаны соответствующие найденным скоростям длины волн $\lambda=c_L/f$. Во втором столбце Таблицы 2.3 даны значения n_r , рассчитанные по формуле (2.48). Допустим, $\omega=15$ рад/с, $H=100$ м, $c_2=92.87$ м/с, тогда по формуле (2.48) $n_r=5$; начальные приближения для пяти корней дисперсионного уравнения по формуле (2.47) равны: $c_L^{(1)}=93.31$ м/с ($n=0$), $c_L^{(2)}=97.09$ м/с ($n=1$), $c_L^{(3)}=106.28$ м/с ($n=2$), $c_L^{(4)}=126.78$ м/с ($n=3$), $c_L^{(5)}=192.03$ м/с ($n=4$). Эти значения особенно близки к своим корням в начале интервала (Таблица 2.3) и могут быть приняты за исходные значения для их уточнения. Для последнего корня в качестве начального приближения лучше взять c_2^* .

По результатам расчета корней дисперсионного уравнения в Таблицах 2.2 и 2.3 видно, что с увеличением частоты и с ростом толщины слоя увеличивается количество корней уравнения (2.44), Рисунки 2.18, 2.19.

Интересно, что, если толщина слоя H очень велика, в композиции волн Лява преобладают волны со скоростью, близкой к c_2 (Рисунок 2.19). На скорость волн в

тонком слое, очевидно, в большей степени влияют свойства упругого полупространства; это особенно заметно для низких частот (см. расчет для $H=20$ м в Таблице 2.2 для 15 и 100 рад/с). Отметим, что при описанных условиях в слое толщиной менее 20 м дисперсионное уравнение не имеет корней, и волны Лява не возникают.

Таблица 2.3

Скорости и длины волн Лява при толщинах H , $\omega=15$ рад/с, $f=2.4$ Гц

H , м	n_r	c_{L1} , м/с, (λ_1 , м)	c_{L2} , м/с (λ_2 , м)	c_{L3} , м/с (λ_3 , м)	c_{L4} , м/с (λ_4 , м)	c_{L5} , м/с (λ_5 , м)
20	2	121.43(50.6)	133.11(21.17)	-	-	
30	2	99.73 (41.5)	-	-	-	
40	3	96.28 (40.1)	-	-	-	
50	3	94.93 (39.5)	121.89(50.8)	-	-	
60	3	94.25 (39.3)	108.70(45.3)	-	-	
70	4	93.87 (39.1)	103.35(43.1)	-	-	
80	4	93.61 (39.0)	100.40(41.8)	121.9 (50.8)	-	
90	5	93.45(38.9)	98.62 (41.1)	112.55(46.9)	-	
100	5	93.34 (39.0)	97.4 (40.6)	107.56(44.8)	136.45(57.0)	146.02(60.8)

При решении прикладных задач для сокращения времени вычислений желательно отфильтровать компоненты воздействия, не несущие большой опасности для сооружений. Короткие волны не так опасны для конструкций, как воздействие с длинами волн, сравнимыми с типичным размером фундамента. Кроме того, сама конструкция является «фильтром», усиливающим те спектральные компоненты воздействия (особенно на низких частотах), которые близки или совпадают с её собственными частотами. Поэтому высокочастотные составляющие из спектра воздействия можно удалить, проведя их фильтрацию. Можно отфильтровать и те низкочастотные компоненты воздействия, при которых волны Лява не возникают. Из формулы (2.47) следует, что для существования волны Лява по меньшей мере необходимо, чтобы $\omega > c_2\pi/H$; для $c_2=92.87$ м/с и $H=20$ м эта граничная частота равна 7.29 рад/с. На Рисунке 2.19 показаны исходная и отфильтрованная акселерограммы Газлийского землетрясения (14 мая 1976 г., направление E-W), в которой оставлены составляющие с частотами $7.29 \leq \omega \leq 15$ (рад/с). Характеристики

исходной записи: длительность 13.4815 с, 2048 точек, время отсчета 0.006586 с, частотный диапазон $0.233 \leq \omega \leq 477$ рад/с.

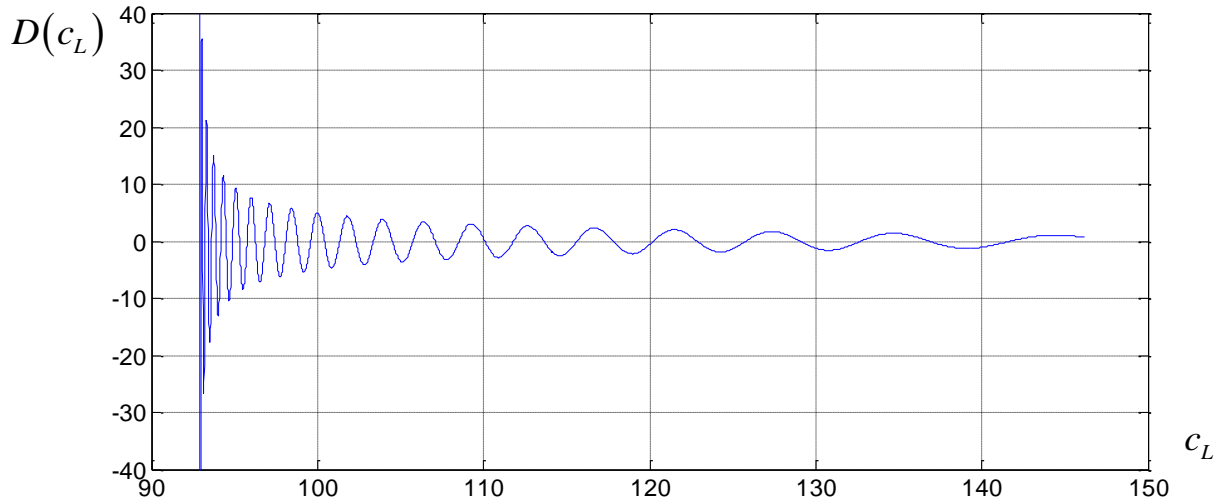


Рисунок 2.19. Корни дисперсионного уравнения (40 корней) для $\omega=15$ рад/с, $H=1000$ м

Сейсмическое воздействие представляет собой спектр гармонических волн. Каждая отдельно выделенная волна из этого спектра может рассматриваться как граничное условие для формирования пространственно-временного поля волн Лява с определенной частотой. Сложность заключается в том, что на этой частоте, возможно, существует не одна волна, а целая композиция волн Лява, по числу корней дисперсионного уравнения. Все волны композиции удовлетворяют волновому уравнению, граничным условиям и могут существовать одновременно и вносить свой вклад в общее волновое движение. Они имеют одинаковую частоту и различные фазовые скорости.

В условиях, когда известна только одна спектральная амплитуда воздействия, отвечающая конкретной частоте, определить вклад каждой волны в композиции, по видимому, невозможно. Другими словами, амплитуда каждой такой волны остается неопределенной, известна лишь суммарная спектральная амплитуда всей композиции.

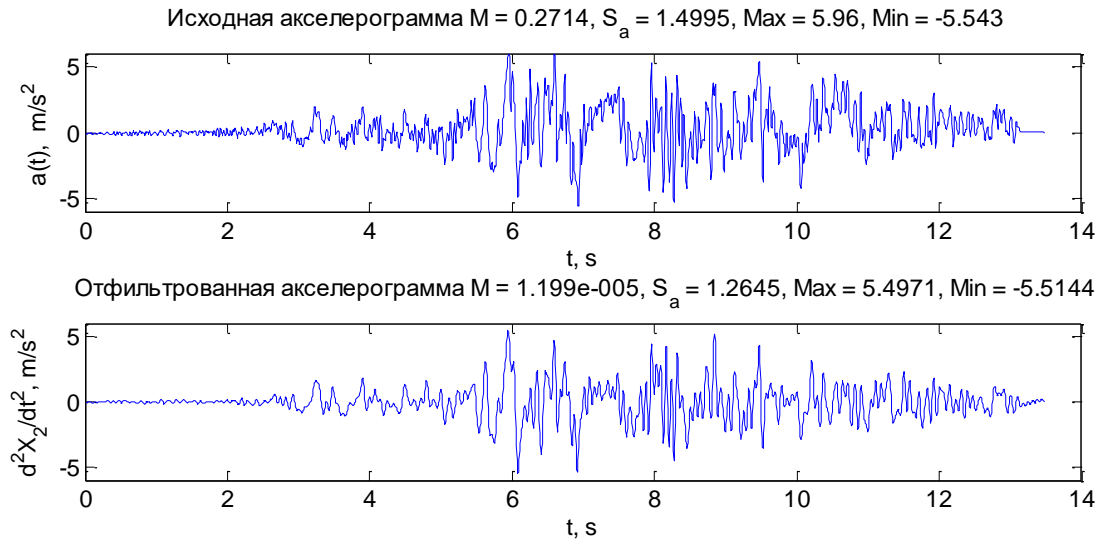


Рисунок 2.20. Акселерограмма до и после фильтрации частот (над графиками указаны среднее значение, стандарт, максимальное и минимальное значения)

По одному граничному условию найти амплитуды всех волн, составляющих композицию, невозможно; очевидно, необходимо несколько граничных условий в разных точках грунта (по числу корней дисперсионного уравнения), чтобы «зацепить» составляющие волны Лява с одной частотой, но с разными скоростями и найти их амплитуды. Однако обычно расчетные сейсмологические данные включают запись землетрясения в одной точке. Поэтому в прикладных задачах целесообразно рассматривать только одну, самую «медленную» волну Лява первого порядка, которая имеет ту же спектральную амплитуду, что и воздействие на заданной частоте.

Зависимость скорости волн Лява первого порядка для частот отфильтрованного спектра воздействия землетрясения в Газли (Рисунок 2.20) показана на Рисунке 2.21. Видно, что для самых низких частот воздействия фазовая скорость волн Лява первого порядка близка к c_2^* , для более высоких частот – к c_2 .

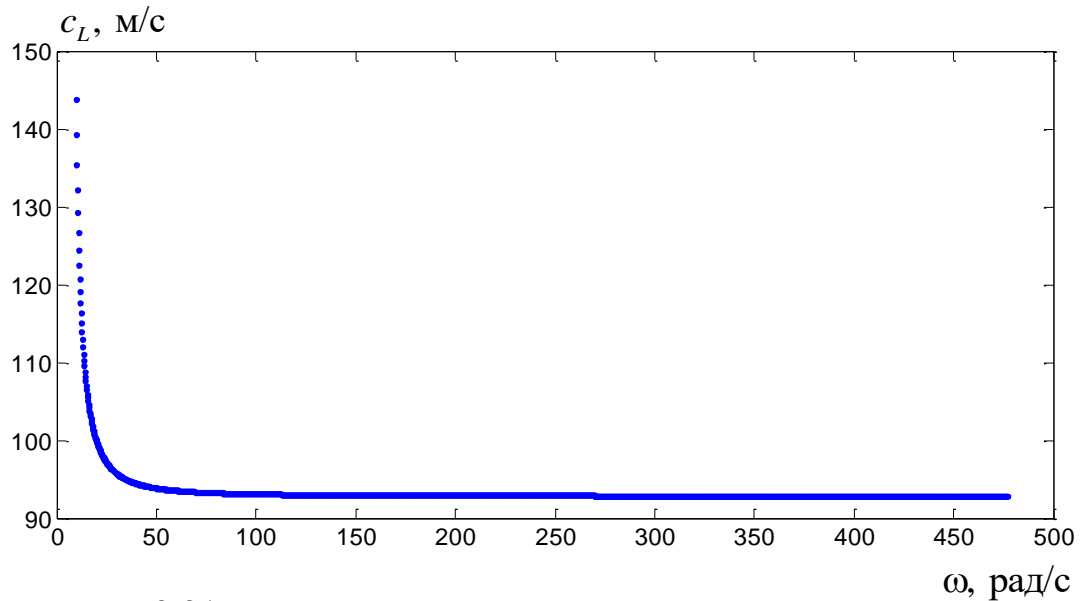


Рисунок 2.21. Скорости волн Лява первого порядка в зависимости от частоты ω , $H=20$ м

Алгоритм формирования пространственно-временного поля волн Лява первого порядка не отличается от алгоритма, предложенного и подробно описанного в [81], кроме, конечно, предварительного определения фазовой скорости волны Лява для каждой частоты. Если частоте ω_n воздействия соответствует спектральная амплитуда A_n , то постоянная в (2.45) и (2.46) будет равна

$$C_n = \frac{A_n}{k_n^2 c_{L(n)}^2 \left(\cos(k_n \beta_n H) + \tan(k_n \beta_n H) \sin(k_n \beta_n H) \right)},$$

где $c_{L(n)}$ - фазовая скорость волны Лява первого порядка для частоты ω_n , $k_n = \omega_n / c_{L(n)}$ - волновое число, $\beta_n = \beta_n(c_{L(n)})$. Заметим, что хорошее приближение первого корня уравнения (2.44) дает формула (2.47). Суммируя составляющие для частот воздействия, получим решение в любой точке пространства, подробно см. выше. На Рисунках 2.22 и 2.23 показаны процессы распространения волны Лява в различных точках поверхности слоя и в полупространстве, над графиками указаны координата точки, среднее значение, стандарт, максимальное и минимальное значения акселерограммы.

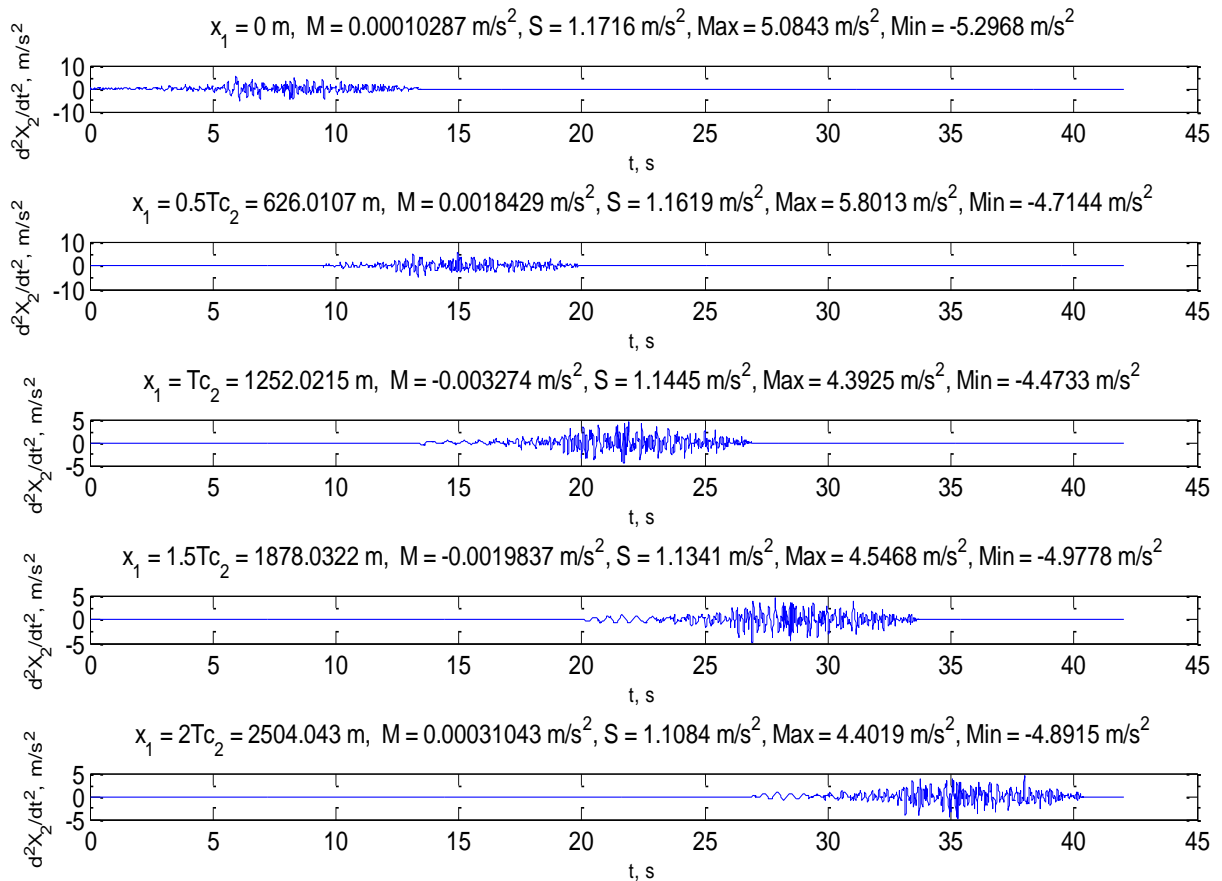


Рисунок 2.22. Движущаяся волна Лява (на поверхности).

Интенсивность воздействия снижается по мере движения волны, что соответствует дисперсионному характеру волн Лява. На Рисунке 2.23 видно заметное затухание волны Лява с глубиной.

Предложенный алгоритм может быть полезен для проверочных расчетов по дифференцированной схеме протяженных в плане сооружений. Отметим, что описанный метод имеет некоторые ограничения: при сильных землетрясениях может произойти пластическое деформирование грунта, так что грунтовое основание при таких условиях нельзя считать упругой средой. Кроме того, в классической задаче распространения волн в слоистых средах предполагается идеальная горизонтальная граница разделения двух сред. Если это не так, то можно предложить такой подход: область пространства разбивается на зоны, где границу можно приблизительно считать горизонтальной. В каждой такой зоне строится свое решение с учетом условий стыковки по границам.

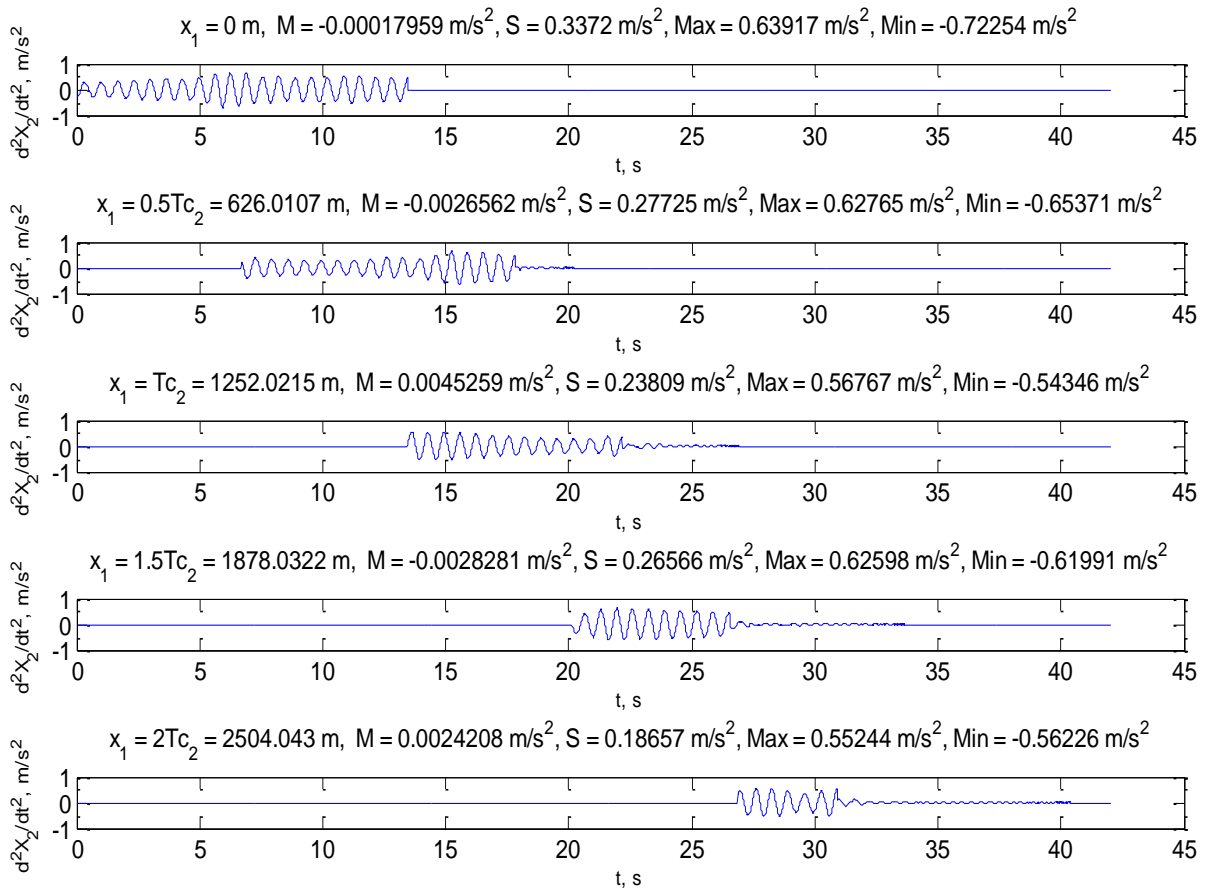


Рисунок 2.23. Движущаяся волна Лява
(на глубине $H=20$ м от поверхности)

Этот метод может применяться и для представления волн Лява в составе обобщенной волновой модели (см. п. 2.6), удобной для формирования композиции объемных и поверхностных сейсмических волн, расчета ротаций, выбора наиболее опасной для сооружения расчетной комбинации волн. Обобщенная волновая модель применяется для задания сейсмического воздействия в виде пространственного волнового движения грунта от нескольких типов волн. Волновая модель должна формироваться совместно со специалистами-сейсмологами, которые могут дать указания относительно доли объемных или поверхностных волн в общей волновой картине. Однако если такой информации нет, волны Лява могут быть рассмотрены как самостоятельное проверочное пространственное воздействие, вызывающее повороты конструкции относительно вертикальной оси.

2.9. Состоятельная оценка спектральной плотности сейсмического ускорения грунта

В задачах теории сейсмостойкости строительных сооружений, решаемых в частотной области, возникает проблема определения состоятельной оценки спектральной плотности мощности сейсмического ускорения грунта. Эта важная вероятностная характеристика необходима для определения несущих частот сейсмического воздействия, модального коэффициента динамичности в линейно-спектральном методе, для оценки изменчивости сейсмических движений грунта с помощью функции когерентности [1, 2, 72, 82].

Будем считать акселерограмму $x(t)$ реализацией стационарного эргодического случайного процесса - сейсмического воздействия $X(t)$ ¹⁹. Для таких процессов состоятельные оценки для математического ожидания, стандарта, дисперсии, корреляционной функции [57, 65], известны и получаются путем простого усреднения по длине реализации. Значительно сложнее получить состоятельную оценку спектральной плотности мощности. Оценка считается *состоятельной*, если при увеличении интервала измерений T оценка будет сходиться по вероятности к оцениваемой характеристике [57], то есть

$$P\left(\left|\hat{F} - F\right| < \delta\right) = 1 \text{ при } T \rightarrow \infty,$$

где \hat{F} - оценка вероятностной характеристики F , а δ - сколь угодно малое положительное число. Для того чтобы оценка была состоятельной, необходимо и достаточно, чтобы она была несмещенной, то есть смещение оценки $b(\hat{F})$ должно быть равно нулю

$$b(\hat{F}) = \langle \hat{F} \rangle - F = \langle \hat{F} - F \rangle = 0,$$

и её дисперсия должна стремиться к нулю при $T \rightarrow \infty$:

¹⁹ Конечно, эти предположения не совсем соответствуют реальным сейсмическим процессам. Сейсмическое движение грунта может приближенно считаться стационарным лишь на отдельных интервалах реализации. Эргодичность процесса вообще доказать невозможно, так как каждое землетрясение уникально, и нет возможности изучить свойства ансамбля реализаций. Поэтому понятие спектральной плотности сейсмического воздействия носит несколько условный характер.

$$\langle (\hat{F} - F)^2 \rangle \rightarrow 0.$$

Существуют два метода оценивания спектральной плотности – периодограммный и коррелограммный. В основе первого лежит строгое определение спектральной плотности в виде:

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left\langle \left| \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \right\rangle.$$

Этому определению соответствует оценка, называемая периодограммой или «сырой» спектральной плотностью

$$\hat{G}_x(f) = \frac{2}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2.$$

Второй метод - коррелограммный, соответствует определению спектральной плотности через функцию корреляции

$$G_x(f) = 4 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau$$

и оценивается по предварительно полученной коррелограмме $\hat{K}_x(\tau)$

$$\hat{G}_x(f) = 4 \int_0^T \hat{K}_x(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau, \text{ где } \hat{K}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t-\tau) dt.$$

Оба метода эквивалентны, дают несмещенную оценку спектральной плотности с дисперсией порядка квадрата оцениваемой величины, то есть со 100%-ой относительной среднеквадратичной ошибкой:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\langle (\hat{G}_x(f) - G_x(f))^2 \rangle}}{G_x(f)} \rightarrow 1 \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

Однако эти оценки не позволяют достичь желаемой точности при увеличении интервала измерений T и являются несостоятельными.

Для нахождения состоятельной оценки спектральной плотности мощности оценку усредняют по малому интервалу частот Δf , в пределах которого $G_x(f)$ можно считать постоянной:

$$\hat{G}_x^{c2l.}(f) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \hat{G}_x(f_1) df_1,$$

где

$$\hat{G}_x(f) = \frac{2}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-j \cdot 2\pi f t} dt \right|^2 \quad (2.49)$$

при периодограммной оценке или

$$\hat{G}_x(f) = 4 \int_0^T \hat{K}_x(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau, \quad (2.50)$$

где $\hat{K}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau)dt$ при коррелограммной оценке.

При достаточно большом интервале измерений T эти оценки практически совпадают. Описанная процедура усреднения часто называется сглаживанием по частотному интервалу.

Сглаживание периодограммы эквивалентно операции свертывания с прямоугольной весовой функцией g . Действительно,

$$\hat{G}_x^{c2l.}(f) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \hat{G}_x(f_1) df_1 = \int_0^{\infty} \hat{G}_x(f_1) g(f - f_1, \Delta f) df_1,$$

где

$$g(f - f_1, \Delta f) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta f}, & |f - f_1| \leq \frac{\Delta f}{2}, \\ 0, & |f - f_1| > \frac{\Delta f}{2}. \end{cases}$$

При этом все спектральные составляющие в интервале Δf входят в оценку с ве-

сом $\frac{1}{\Delta f}$, а остальные в расчет не принимаются. Функцию $g(f)$ называют спек-

тральным окном.

Можно показать, что оценка спектральной функции усреднением по частоте при коррелограммном подходе эквивалентна умножению оценки корреляционной функции на весовую функцию k :

$$\begin{aligned}\hat{G}_x^{csl.}(f) &= \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \hat{G}_x(f_1) df_1 = \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \left(4 \int_0^T \hat{K}_x(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau \right) df_1 = \\ &= 4 \int_0^T \hat{K}_x(\tau) \frac{\sin \pi \Delta f \tau}{\pi \Delta f \tau} \cos(2\pi f \tau) d\tau = 4 \int_0^T \hat{K}_x(\tau) k(\tau, \Delta f) \cos(2\pi f \tau) d\tau,\end{aligned}$$

где весовая функция, называемая также корреляционным окном, равна

$$k(\tau, \Delta f) = \frac{\sin \pi \Delta f \tau}{\pi \Delta f \tau}$$

и связана со спектральным окном преобразованием Фурье.

Весовые (или оконные) функции g и k связаны преобразованием Фурье:

$$g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau.$$

Таким образом, сглаживание по частоте эквивалентно оконному преобразованию Фурье. Обобщая приведенные выше рассуждения, можно получить семейство состоятельных оценок спектральной плотности для оконных функций - спектральной g и корреляционной k :

$$\hat{G}_x^{csl.}(f) = \int_0^{\infty} \hat{G}_x(f_1) g(f - f_1) df_1, \quad \hat{G}_x^{csl.}(f) = 4 \int_0^T \hat{K}_x(\tau) k(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau,$$

где g и k - четные функции, связанные преобразованием Фурье:

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(f) \cos(2\pi f \tau) df = 2 \int_0^{\infty} g(f) \cos(2\pi f \tau) df,$$

$$g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} k(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau.$$

В [57] приведены оконные функции для усеченной оценки, оценок Бартлета, Пу-гачева-Даниэля, Хэмминга, Хэннинга. Чаще всего для сглаживания оценки спектральной плотности акселерограмм применяют оконные функции Хэмминга (оценка Хэмминга):

$$k(\tau) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m}, & |\tau| \leq \tau_m, \\ 0, & |\tau| > \tau_m, \end{cases}$$

$$g(f) = 1.08\tau_m \frac{\sin 2\pi f \tau_m}{2\pi f \tau_m} + 0.46\tau_m \frac{\sin(2\pi f \tau_m + \pi)}{2\pi f \tau_m + \pi} + 0.46\tau_m \frac{\sin(2\pi f \tau_m - \pi)}{2\pi f \tau_m - \pi},$$

периодограммная оценка Хэмминга:

$$\hat{G}_x^{Хэм.}(f) = \int_0^\infty \hat{G}_x(f_1) g(f - f_1) df_1, \text{ где } \hat{G}_x(f) = \frac{2}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2$$

коррелограммная оценка Хэмминга:

$$\hat{G}_x^{Хэм.}(f) = 4 \int_0^{\tau_m} \hat{K}_x(\tau) \left(0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m} \right) \cos(2\pi f \tau) d\tau,$$

$$\text{где } \hat{K}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t - \tau) dt.$$

Преимущества этой оценки заключаются в отсутствии у спектрального окна $g(f)$ значительных боковых максимумов. Относительная среднеквадратичная ошибка приближенно вычисляется по формуле (в предположении, что смещение мало)

$$\varepsilon^2 = \frac{D(\hat{G}_x^{Хэм.}(f))}{\hat{G}_x(f)} \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(f) df = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(\tau) d\tau = \frac{4}{5} \frac{\tau_m}{T}.$$

Параметр τ_m , определяющий ширину корреляционного окна, выбирают так, чтобы и смещение, и дисперсия оценки были минимальными (с уменьшением τ_m смещение возрастает, с увеличением – растет дисперсия). Например, оптимальное значение этого параметра можно найти из условия минимума среднеквадратичной ошибки $\sqrt{D(\hat{G}_x^{сэл.}(f)) + b^2(\hat{G}_x^{сэл.}(f))}$.

Процедура сглаживания основана на выборе частотного интервала Δf , на котором определено спектральное окно. Периодограммная спектральная оценка на полосе частот Δf получается при вычислении среднего значения множества неза-

висимых спектральных составляющих, попадающих в интервал Δf . Под *разрешением спектрального окна* понимают ширину полосы частот Δf , по которой проводится сглаживание.

Интервалу наблюдения $T = N\Delta t$ соответствует частотный диапазон с верхней частотой $f_{\text{верхн.}} = \frac{1}{\Delta t}$, независимые спектральные составляющие отличаются по ча-

стоте на величину порядка $\frac{f_{\text{верхн.}}}{N} = \frac{1}{T}$. Выделим в интервале T сегмент, содержащий n точек отсчета по времени, это и будет область задания n -точечного корреляционного окна. Выделенному сегменту соответствует полоса частот

$\Delta f = n \frac{f_{\text{верхн.}}}{N} = \frac{n}{T}$ спектрального окна, содержащая $n = T\Delta f$ спектральных составляющих.

Оценка напрямую зависит от выбора ширины полосы частот Δf . При сглаживании периодограмм удобно работать с алгоритмами (например, метод Уэлча), в которых задается ширина корреляционного окна (допустим, n точек).

Чем больше точек содержит корреляционное окно, тем шире соответствующее спектральное окно (больше $\Delta f = \frac{n}{T}$), тем больше спектральных составляющих оно

захватывает и тем выше его разрешение. В [72] при анализе акселерограмм рекомендуется оставлять в оценке 5-10 основных максимумов периодограммы. Это связано с тем, что чаще всего основной динамический отклик сооружения формируется композицией из 5-10 собственных форм; таким образом, количество точек корреляционного окна будем подбирать так, чтобы в оценке осталось 5-10 основных максимумов.

Акселерограммы, записанные на сейсмостанциях, представляют собой реализации дискретных случайных процессов, заданные через определенные промежутки времени - отсчеты. Так, длительность реализации T складывается из N интервалов длительностью Δt каждый. Значение времени в начале каждого интервала обозначим $i\Delta t$, номер отсчета $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Дискретный случайный процесс

$X(i\Delta t)$ описывается непрерывной случайной функцией дискретного аргумента $i\Delta t$. Спектральная плотность дискретного процесса на частоте f получается при замене интегралов Фурье интегральными суммами или рядами Фурье. Тогда периодограммная оценка спектральной плотности (2.49) для дискретного процесса равна (с учетом, что $T = N\Delta t$)

$$\begin{aligned}\hat{G}_x(f) &= \frac{2\Delta t}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} x(i\Delta t) e^{-j2\pi f \cdot i\Delta t} \right|^2 = \frac{2\Delta t}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x(i\Delta t) e^{-j2\pi f \cdot i\Delta t} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{j2\pi f \cdot k\Delta t} \right) = \\ &= \frac{2\Delta t}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) x(i\Delta t) e^{-j2\pi f \cdot (i-k)\Delta t} \right) = 2\Delta t \sum_{h=-N+1}^{N-1} \varphi(h\Delta t) e^{-j2\pi f \cdot h\Delta t}, \quad h = i - k.\end{aligned}$$

Зде

сь

$$\varphi(h\Delta t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{h}{N}\right) \frac{1}{(N-h)} \sum_{i=h}^{N-1} x(i\Delta t) x((i-h)\Delta t), & h > 0, \\ \left(1 + \frac{h}{N}\right) \frac{1}{(N+h)} \sum_{i=0}^{N-1+h} x(i\Delta t) x((i-h)\Delta t), & h < 0, \end{cases}$$

Для коррелограммного метода получаем дискретный эквивалент оценки (2.50) в виде ряда

$$\hat{G}_x(f) = 2\Delta t K_x(0) + 4\Delta t \sum_{h=1}^{N-1} \hat{K}_x(h\Delta t) \cos 2\pi f h \Delta t,$$

Эти оценки спектральной плотности, так же, как и их непрерывные аналоги (2.49) и (2.50), несостоятельные, то есть при $N \rightarrow \infty$ их дисперсии не стремятся к нулю. Состоятельные оценки получают при помощи частотного сглаживания [57]:

$$\hat{G}_x^{cgl.}(f) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \hat{G}_x(f_1) df_1,$$

где

$$\hat{G}_x(f) = \frac{2\Delta t}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} x(i\Delta t) e^{-j2\pi f \cdot i\Delta t} \right|^2$$

при периодограммной оценке или

$$\hat{G}_x(f) = 2\Delta t K_x(0) + 4\Delta t \sum_{h=1}^{N-1} \hat{K}_x(h\Delta t) \cos 2\pi f h \Delta t$$

при коррелограммной оценке.

Процедура сглаживания периодограммы по частоте (так же, как и для непрерывных случайных процессов) эквивалентна оконному преобразованию Фурье оценки корреляционной функции:

$$\hat{G}_x^{csl.}(f) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \hat{G}_x(f_1) df_1 = \int_0^{\infty} \hat{G}_x(f_1) g(f-f_1, \Delta f) df_1,$$

где

$$g(f-f_1, \Delta f) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta f}, & |f-f_1| \leq \frac{\Delta f}{2}, \\ 0, & |f-f_1| > \frac{\Delta f}{2}. \end{cases}$$

При этом все спектральные составляющие в интервале Δf входят в оценку с весом $\frac{1}{\Delta f}$, а остальные в расчет не принимаются. Функция g является прямоуголь-

ным спектральным окном.

$$\hat{G}_x^{csl.}(f) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \hat{G}_x(f_1) df_1 = 4 \int_0^T \hat{K}_x(\tau) \frac{\sin \pi \Delta f \tau}{\pi \Delta f \tau} \cos(2\pi f \tau) d\tau,$$

где функция корреляционного окна равна

$$k(\tau, \Delta f) = \frac{\sin \pi \Delta f \tau}{\pi \Delta f \tau}.$$

Обобщая приведенные выше рассуждения, получают семейство состоятельных оценок спектральной плотности для различных оконных функций - спектральной g и корреляционной k .

Особенность дискретных процессов в том, что оценка корреляции представляют собой дискретные зависимости, которые можно выразить через δ -функции. Известно, что преобразование Фурье импульсной функции дает периодическую функцию вида $\frac{\sin \pi \Delta f \tau}{\pi \Delta f \tau}$ с периодом повторения $\frac{1}{\Delta f}$. Она имеет главный максимум

и боковые максимумы (так называемые боковые лепестки). При наложении этих

лепестков от различных импульсов (из этих импульсов состоит корреляционная функция дискретного процесса) может возникать погрешность многократного наложения высокочастотных составляющих. Этот эффект будет отсутствовать при выборе интервала отсчетов в соответствии с теоремой Котельникова: сигнал, описываемый функцией с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями, отсчитанными через временной интервал, равный $\Delta t = \frac{1}{2f_s}$, где f_s - самая высокая частота спектра. Если точки отсчета расположить чаще, данные будут избыточными и излишне коррелированными. Если точки расположить реже, часть информации пропадет и появится эффект наложения высокочастотных составляющих.

Статистическая точность спектральной оценки равна $\varepsilon \approx \frac{1}{\sqrt{T\Delta f_s}}$, где Δf_s - эквивалентная ширина полосы частот, по которой осуществляется сглаживание периодограммы (интервал сглаживания), Δf_s также характеризует разрешающую способность спектрального анализа.

Пусть f_s - верхняя граничная частота спектра исследуемого сигнала, для частоты отсчетов выполняется соотношение $f_0 = \frac{1}{\Delta t} = 2f_s$, длительность сигнала $T = N\Delta t$, m - количество интервалов усреднения ($N \gg m$), длительность интервала усреднения $\tau_m = m\Delta t$, шаг дискретизации по частоте $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$. Для частоты $f = n\Delta f$ несглаженные («сырые») периодограммная и коррелограммная оценки спектральной плотности имеют вид:

$$\hat{G}_x(n\Delta f) = \frac{2\Delta t}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} x(i\Delta t) e^{-j2\pi \frac{in}{N}} \right|^2,$$

$$\hat{G}_x(n\Delta f) = 2\Delta t \hat{K}_x(0) + 4\Delta t \sum_{h=1}^{N-1} \hat{K}_x(h\Delta t) \cos\left(2\pi \frac{hn}{N}\right),$$

где $\frac{f_e}{\Delta f} = \frac{N}{2}$, $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$, $f = n\Delta f$, $n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$.

Соответствующие сглаженные оценки определяют по формулам

$$\hat{G}_x^{c2l.}(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_x(k\Delta f) g(k\Delta f - n\Delta f) \Delta f,$$

$$\hat{G}_x^{c2l.}(n\Delta f) = 2\Delta t \hat{K}_x(0) + 4\Delta t \sum_{h=1}^{N-1} \hat{K}_x(h\Delta t) k(h\Delta t) \cos\left(2\pi \frac{hn}{N}\right),$$

Метод сглаживания периодограмм, предложенный Уэлчем [7], заключается в разделении исходных данных на перекрывающиеся сегменты. Перекрытие сегментов увеличивает количество усредняемых интервалов при заданной длине реализации. Так уменьшается дисперсия оценки спектральной плотности. До вычисления периодограммы данные каждого сегмента умножаются на оконную функцию. Эта операция дает возможность избежать эффекта появления боковых лепестков и уменьшить смещение оценки. Затем вычисляется преобразование Фурье каждого сегмента. Результат суммируется по сегментам и делится на так называемый коэффициент коррекции энергии окна (дисперсия окна, умноженная на количество сегментов). Обычно применяют окно Хэмминга с 50% перекрытием. Разрешение метода определяется шириной окна, или, что то же, количеством точек сегмента. Результаты применения метода сглаживания Уэлча проиллюстрируем на тестовом примере - записи сейсмического ускорения грунта во время Бухарестского землетрясения 1977 г. в направлении N-S (2048 отсчетов) (Рисунок 2.24). Применяется метод Уэлча с 50% перекрытием окнами Хэмминга. С уменьшением ширины окна среднеквадратичное отклонение ошибки оценивания увеличивается (Рисунки 2.25-2.27). Расчеты были выполнены с использованием функции **pwelch** математического пакета *MATLAB Signal Toolbox*:

$$[P_{xx}, f] = \text{pwelch}(x, \text{window}, \text{noverlap}, \text{nfft}, \text{fs})$$

Здесь

x - вектор данных размерности N ;

window - сглаживающее окно с заданным количеством точек, например,

hamming(128) – 128-точечное окно Хэмминга;

noverlap - число точек, общих для двух соседних сегментов вектора **x**, если **noverlap** равно длине окна, деленной на 2, то это окно с 50% перекрытием. Если **noverlap** не задано (то есть в списке аргументов вместо **noverlap** записано []), то сглаживание автоматически проводится с 50% перекрытием, например, для **hamming (128) noverlap = 128/2=64**;

nfft - число точек для процедуры быстрого преобразования Фурье, может быть равно N , если N - степень двойки;

fs - частотный диапазон, Гц.

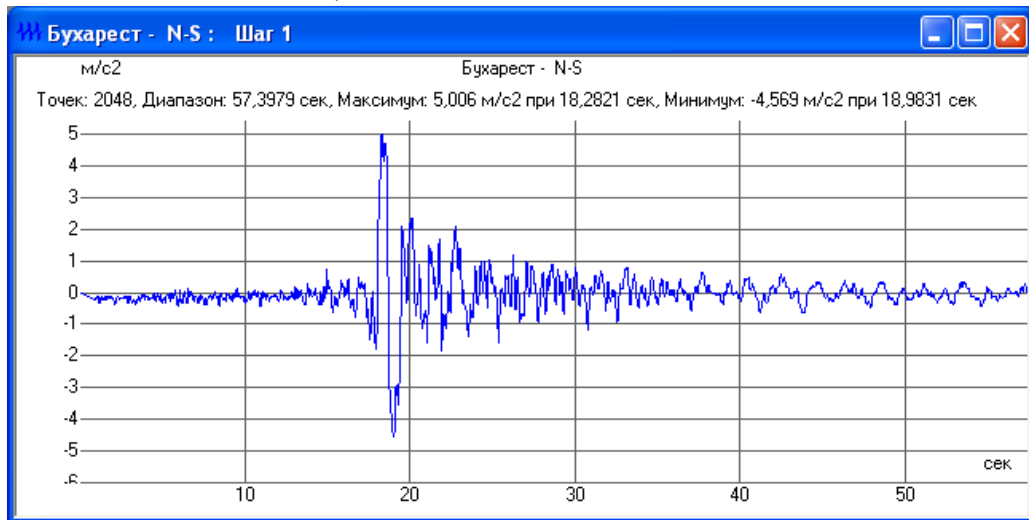


Рисунок 2.24. Акселерограмма Бухарестского землетрясения 1977 г. в направлении N-S. Окно ПО «Еврософт Одиссей».

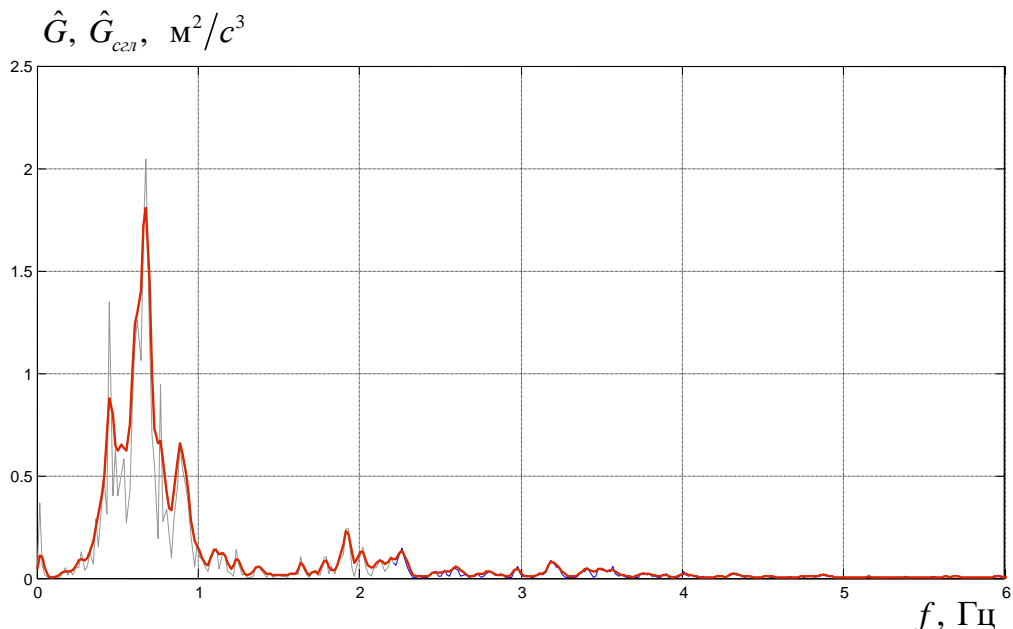


Рисунок 2.25. Периодограмма и сглаженная спектральная плотность мощности (1024 точки, 50% перекрытие)

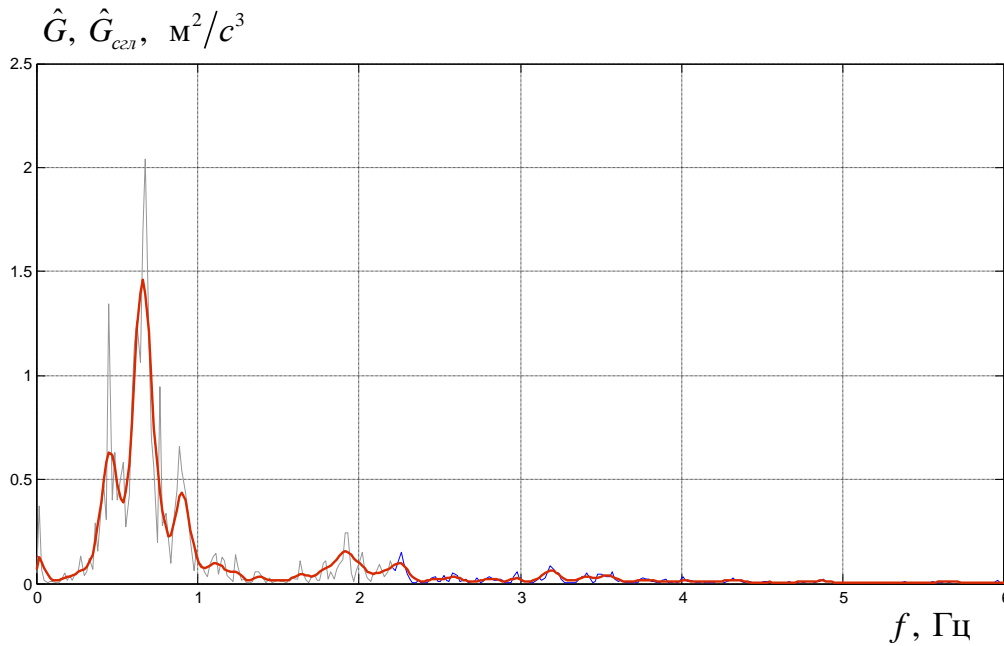


Рисунок 2.26. Периодограмма и сглаженная спектральная плотность мощности
(512 точек, 50% перекрытие)

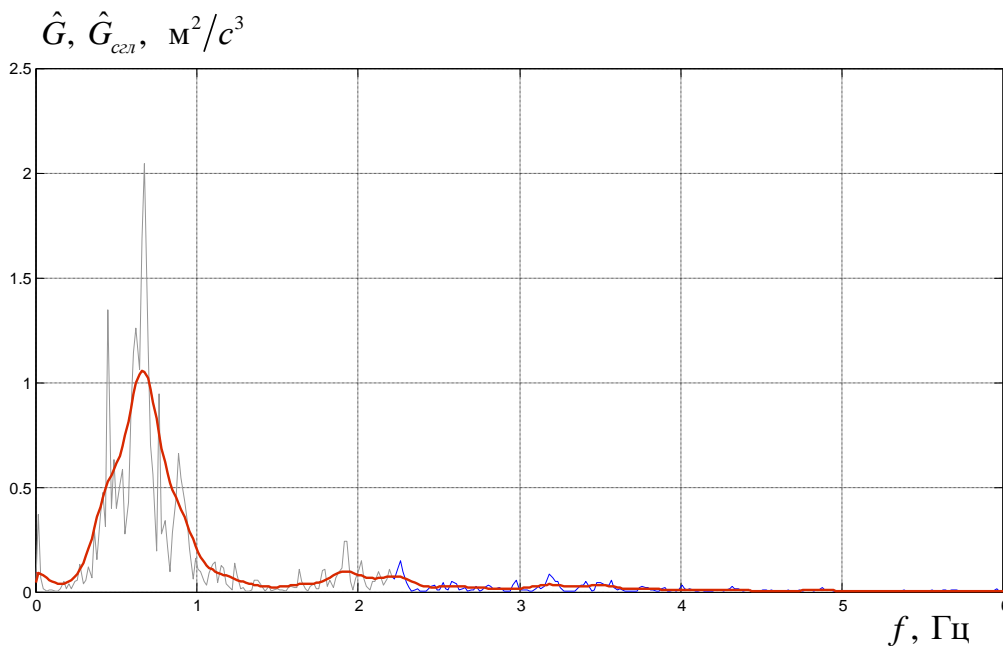


Рисунок 2.27. Периодограмма и сглаженная спектральная плотность мощности
(256 точек, 50% перекрытие)

Итак, значения спектральной плотности мощности зависят от способа сглаживания и разрешения спектральной оконной функции. Чем шире используемое корреляционное окно, тем уже соответствующее спектральное, то есть тем выше разрешение. В этом случае на графиках спектральной плотности точнее проявляются

экстремумы. Чем уже корреляционное окно, тем более размыт график спектральной плотности. Для анализа акселерограмм достаточно подбирать такие параметры оценивания, чтобы в оценке спектральной плотности оставались 5-10 основных максимумов периодограммы. Особо отметим, что при оценке акселерограмм описанным выше способом неизбежны ошибки, связанные с предположением стационарности и эргодичности случайного процесса. Для повышения точности оценки следует вычленить активную фазу землетрясения, которую можно приближенно считать стационарной.

2.10. Пространственная изменчивость сейсмического движения

Понимание характера движения поверхности грунта под фундаментом при расчете на сейсмостойкость, особенно при расчете на максимальные расчетные землетрясения для протяженных конструкций с высокой степенью ответственности, - первая проблема, с которой приходится сталкиваться проектировщику. Невозможно точно предсказать сейсмическое воздействие в пространстве, то есть однозначно задать направление распространения фронта волны, определить вид волны, вид сейсмического источника, его динамику и ориентацию в пространстве и т.д. Поэтому при инженерных расчетах применяется универсальное правило – нагрузки соответствуют наиболее неблагоприятному сценарию с максимальной динамической реакцией здания. В сейсмических расчетах применяется упрощенный инженерный подход [47, 75, 125, 126], то есть обычно принимают, что под фундаментом проходит плоская S -волна с горизонтальным вектором, распространяющаяся с фазовой скоростью. Такой случай соответствует максимальной динамической реакции сооружения. Для условий плотной городской застройки с развитой подземной инфраструктурой, с непредсказуемой картиной распространения сейсмических волн, этот подход является наиболее оправданным. В последние годы появились новые данные о пространственном характере сейсмических движений в малых масштабах. В 80-х годах прошлого века началось создание специальных полигонов – полей (или массивов) с плотным размещением сейсмодатчи-

ков (*dense instrument arrays*), разделенных между собой достаточно малыми расстояниями, порядка десятка метров. Сегодня во многих сейсмически активных зонах мира (США, Тайвань, Япония, Италия, Греция, Финляндия) работают десятки таких полигонов [1, 2, 32]. Их основная цель - сбор, накопление и анализ сейсмологических данных для изучения сейсмических движений в малых масштабах. Результаты обработки данных представляются чаще всего в виде *функции когерентности* - меры согласованности спектрального состава сейсмического воздействия в различных точках поверхности грунта. Основным вопросом, решаемым в настоящее время – практическое применение эмпирической функции когерентности для инженерных методов расчета.

Определение функции пространственной когерентности

Примем за начало координат точку, в которой заданы инструментальные или синтезированные акселерограммы, а также определим три взаимно ортогональных направления (обычно совпадающих со сторонами света). Пусть в этой системе координат радиус-векторы $r_k(x_k, y_k)$ и $r_m(x_m, y_m)$ задают положение k -той и m -той точек на поверхности грунта, $\xi_{km} = |r_k - r_m|$ - расстояние между ними, $a(t, r_k)$ и $a(t, r_m)$ - реализации сейсмического ускорения грунта в этих точках в одном из трех фиксированных направлений, S_{km} , S_k , S_m - сглаженные взаимная спектральная плотность и спектральные плотности мощности реализаций $a(t, r_k)$ и $a(t, r_m)$, тогда функция пространственной когерентности определяется как

$$\gamma(f, \xi_{km}) = \frac{S_{km}(f, \xi_{km})}{\sqrt{S_k(f)S_m(f)}}.$$

Из-за комплексной взаимной спектральной плотности

$$S_{km} = |S_{km}| \exp[j\varphi(f, \xi_{km})]$$

функция $\gamma(f, \xi_{km})$ также является комплексной

$$\gamma(f, \xi_{km}) = |\gamma(f, \xi_{km})| \exp[j\varphi(f, \xi_{km})] \quad (2.51)$$

с модулем

$$|\gamma(f, \xi_{km})| = \frac{\sqrt{(\operatorname{Re} S_{km})^2 + (\operatorname{Im} S_{km})^2}}{\sqrt{S_k(f) S_m(f)}}, \quad (2.52)$$

и аргументом

$$\varphi(f, \xi_{km}) = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} S_{km}(f, \xi_{km})}{\operatorname{Re} S_{km}(f)}. \quad (2.53)$$

В тригонометрической форме функция когерентности имеет вид

$$\gamma(f, \xi_{km}) = |\gamma(f, \xi_{km})| (\cos \varphi(f, \xi_{km}) + j \sin \varphi(f, \xi_{km})). \quad (2.54)$$

Важно отметить, что спектральные плотности S_{km} , S_k , S_m входящие в (2.51), должны быть сглаженными с помощью оконного преобразования Фурье (применяется, например, метод Уэлча с окнами Хэмминга (Рисунок 2.28), Хана и др.). Процедура оконного сглаживания дает состоятельную оценку спектральной плотности [57]. Значения функции когерентности в значительной мере зависят от выбора разрешения оценки спектральной плотности. Без сглаживания модуль функции когерентности тождественно равен единице $|\gamma(f, \xi_{km})| \equiv 1$.

Для независимых случайных процессов модуль когерентности $|\gamma(f, \xi_{km})| = 0$, для линейно связанных $|\gamma(f, \xi_{km})| = 1$, в остальных случаях $0 < |\gamma(f, \xi_{km})| < 1$.

Аргумент функции когерентности $\varphi(f, \xi_{km})$ называется *функцией разности фаз* и представляет собой сдвиг по фазе между спектральными составляющими реализаций $a(t, r_k)$ и $a(t, r_m)$ на частоте f .

Волновые процессы в точках k и m происходят с запаздыванием по времени (*time lag*) τ_{km} , в этом состоит эффект продвижения волны (*wave passage effect*). Запаздывание по времени τ_{km} связано со сдвигом по фазе $\varphi(f, \xi_{km})$. Эту связь легко установить на примере отдельной гармонике сейсмического воздействия - плоской монохроматической волны с круговой частотой $\omega = 2\pi f$, фазовой скоростью

c и волновым числом κ . Пусть $a_k = a(r_k, t)$ и $a_m = a(r_m, t)$ - ускорения от этой волны в точках k и m . Если обе точки лежат на луче волны, то

$$a_k = A \cos(\omega t - \kappa r_k), \quad a_m = A \cos(\omega t - \kappa r_m), \quad \kappa = \frac{\omega}{c}, \quad \kappa r_k = \omega \frac{r_k}{c}.$$



Рисунок 2.28. Акселерограмма Бухарестского землетрясения (направление $N-S$) и соответствующая сглаженная спектральная плотность (метод Уэлча с 50% перекрытием окнами Хэмминга).

Если $\tau_{km} = \frac{\xi_{km}}{c}$ - промежуток времени, за который волна проходит расстояние

$$\xi_{km} = r_k - r_m, \text{ то } \kappa r_m = \omega \left(\frac{r_k}{c} + \frac{r_m - r_k}{c} \right) = \omega \left(\frac{r_k}{c} + \frac{\xi_{km}}{c} \right) = \omega \frac{r_k}{c} + \omega \tau_{km} = \kappa r_k + \omega \tau_{km}.$$

Обозначая

$$\varphi = \omega \tau_{km} = \omega \frac{\xi_{km}}{c}, \quad (2.55)$$

получим

$$a_m = A \cos(\omega t - \kappa r_k - \varphi),$$

то есть волна подошла к точке m с отставанием по фазе φ через время τ_{km} .

Таким образом, множитель $\exp[j\varphi(f, \xi_{km})]$ в (2.51) фактически отвечает только за эффект продвижения волны. Его считают детерминированным из формальных соображений: так как по формуле (2.55) сдвиг по фазе зависит только от частоты волны, её скорости и расстояния между точками, следовательно, φ - величина не случайная.

Модуль функции когерентности $|\gamma(f, \xi_{km})|$ тоже несет информацию о сдвиге по фазе или запаздывании между спектральными составляющими, поскольку так же, как и $\varphi(f, \xi_{km})$, зависит от взаимной спектральной плотности S_{km} . Поэтому в зарубежных источниках для обозначения модуля функции когерентности $|\gamma(f, \xi_{km})|$ применяют термин *lagged coherency*, что переводится как *когерентность с учетом запаздывания*. С функцией $|\gamma(f, \xi_{km})|$ связывают все случайные изменения амплитуды и фазы, происходящие с волной при движении от одной точки к другой.

Используются и две производные формы от функции $|\gamma(f, \xi_{km})|$: когерентность без запаздывания и плоско-волновая когерентность.

Когерентностью без запаздывания (unlagged coherency) называют $\gamma(f, \xi_{km})_{\varphi=0}$, если предполагается, что $\varphi(f, \xi_{km}) \equiv 0$. Если $\varphi(f, \xi_{km}) \equiv 0$, то $\text{Im}S_{km}(f, \xi_{km}) = 0$, тогда из (2.51) и (2.52)

$$\gamma(f, \xi_{km})_{\varphi=0} = |\gamma(f, \xi_{km})|_{\varphi=0} = \frac{\text{Re}S_{km}}{\sqrt{S_k(f)S_m(f)}} = \text{Re}[\gamma(f, \xi_{km})].$$

Таким образом, когерентность без запаздывания равна действительной части функции когерентности $\text{Re}[\gamma(f, \xi_{km})]$.

Если принять одинаковое запаздывание по времени $\tau_{km} = const$ для всех спектральных составляющих, то есть рассматривать сейсмическую волну как пакет плоских монохроматических волн, движущихся с постоянной фазовой скоростью, то такое движение характеризуют *плоско-волновой когерентностью* $|\gamma(f, \xi_{km})|_{\tau=const}$ (*plane-wave coherency*). Так как по определению (2.54)

$$\operatorname{Re} \gamma(f, \xi_{km}) = |\gamma(f, \xi_{km})| \cos \varphi(f, \xi_{km}),$$

то плоско-волновая когерентность $|\gamma(f, \xi_{km})|_{\tau=const}$ может быть выражена через когерентность без запаздывания

$$|\gamma(f, \xi_{km})|_{\tau=const} = \frac{\operatorname{Re} \gamma(f, \xi_{km})}{\cos \varphi(f, \xi_{km})} = \frac{|\gamma(f, \xi_{km})|_{\varphi=0}}{\cos 2\pi f \tau_{km}}.$$

В отечественной практике, говоря о функции когерентности, чаще всего подразумевают ее модуль $|\gamma(f, \xi_{km})|$.

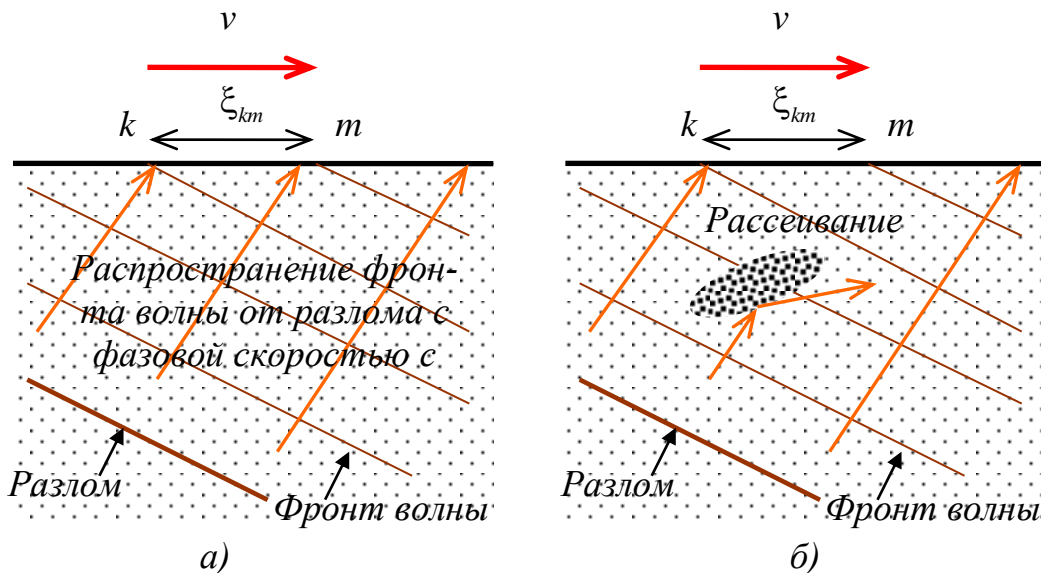


Рисунок 2.29. Согласованное (а) и несогласованное (б) волновое движение

Согласованное и несогласованное сейсмическое движение грунта. Функция когерентности Н. Абрахамсона

Если предполагается, что в заданную точку поверхности каждая гармоника с частотой f доходит без случайного изменения амплитуды и с фазовым сдвигом, равным $\varphi = k\xi_{km}$, (как на Рисунке 2.29a), то такое движение поверхности грунта называют согласованным или когерентным. Согласованное волновое движение может быть получено и исследовано аналитически при решении волнового уравнения.

Инструментально зарегистрированное волновое сейсмическое движение не в полной мере является согласованным из-за явления пространственной изменчивости. Под пространственной изменчивостью (*spatial variation*) сейсмического движения понимают случайные изменения в амплитуде и фазе сейсмических волн при распространении их по поверхности земли. Причины возникновения пространственной изменчивости наземных сейсмических движений состоят в рассеянии волн (в зарубежной литературе - *scattering effect*) из-за наличия в грунте локальных неоднородностей, таких как вкрапления более твердых или мягких грунтов, пустоты, разжижения. Учет пространственной изменчивости может быть важен для протяженных конструкций (мостов, дамб, плотин, трубопроводов, протяженных зданий, не разделенных деформационными швами), особенно при наличии податливых фундаментов.

Как было показано выше, комплексная функция когерентности $\gamma(f, \xi)$ несет в себе информацию одновременно и о согласованном, и о несогласованном волновом движении. Модуль этой функции $|\gamma(f, \xi)|$ применяют для оценки пространственной изменчивости сейсмического движения, а экспоненциальная часть $\exp[j\varphi(f, \xi)]$ является характеристикой согласованного движения, или эффекта продвижения волны.

По результатам регрессионного анализа данных регистрации, собранных на полигоне LSST (The Lotung Large Scale Seismic Test, г. Лотунг, Тайвань) Н. Абрахамсон в 1991 году получил одну из самых известных и, по-видимому, наиболее

обоснованную эмпирическую аппроксимацию для модуля функции пространственной когерентности [1, 2, 32]:

$$|\gamma(f, \xi)| = \tanh \left[(2.54 - 0.012\xi) \cdot \left(\exp\{(-0.115 - 0.00084\xi) f\} + \frac{f^{-0.878}}{3} \right) + 0.35 \right],$$

здесь ξ - расстояние между точками (до 100 м), f - частота (в Гц). Полигон LSST включает 15 датчиков, расположенных на расстояниях от 3 до 85 м, грунт – аллювий, функция получена после обработки акселерограмм 15 землетрясений магнитудой от 3 до 7.8. Есть и другие эмпирические и полуэмпирические модели когерентности (см. [32]) для разных расстояний и грунтовых условий. Они не так широко используются, прежде всего потому, что почти все построены по данным единственного землетрясения.

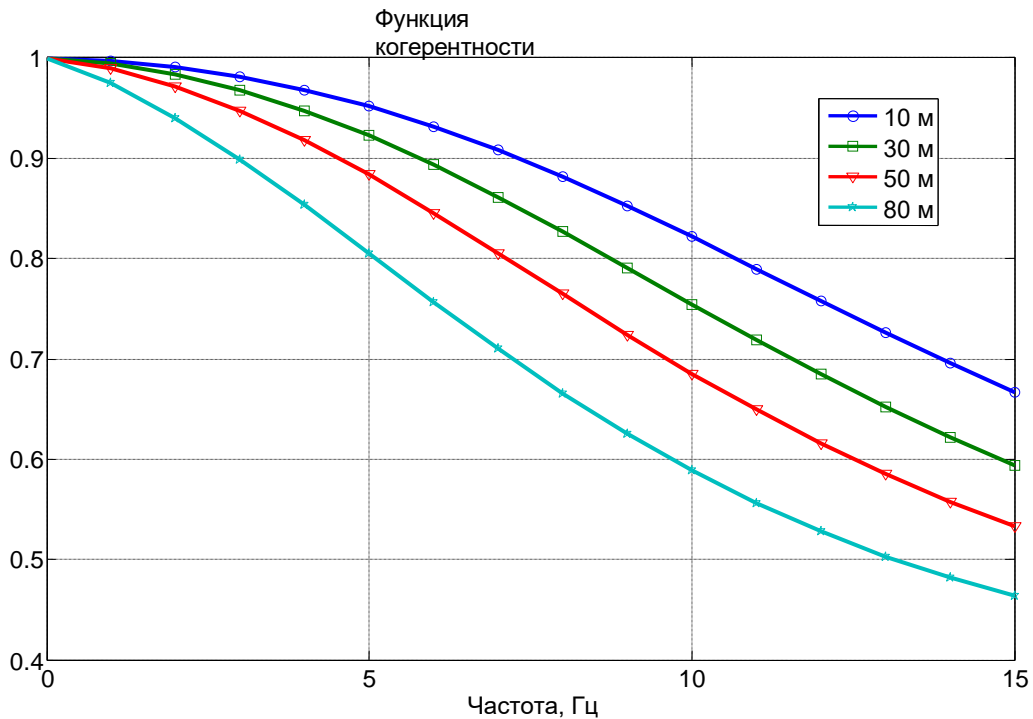


Рисунок 2.30. Функция когерентности Н. Абрахамсона

По графику на Рисунке 2.30 видно, что для расстояний до 100 м на мягком грунте спектральные составляющие до 10 Гц хорошо согласованы. Это означает, что

пространственную изменчивость грунта можно не учитывать, когда одновременно выполняются условия:

- 1) землетрясение имеет доминирующие частоты до 10 Гц (как, например, на Рисунке 2.28);
- 2) фундамент с максимальными размерами в плане до 100 м;
- 3) свойства грунта совпадают с грунтовыми условиями на полигоне LSST.

Учет пространственной изменчивости грунта влечет за собой вероятностную постановку задачи и решение методами статистической динамики. Поскольку некогерентность характерна для высоких частот (см. Рисунок 2.30), пространственную изменчивость грунта моделируют высокочастотными шумами [65].

Стоит обсудить вопрос о том, правомерно ли применять данные, полученные в Тайване, к другим местностям. Сравнительный анализ с данными с других полигонов в Японии и Калифорнии показал [2], что при сходных грунтовых условиях функции когерентности отличаются мало, а для более жестких грунтов согласованное движение выражено сильнее.

Функция когерентности Н. Абрахамсона получена для аллювия – смеси гальки, песка, суглинка и глины – то есть для довольно рыхлого грунта. Чем плотнее и тверже грунт, тем более согласованным будет сейсмическое движение. Этот факт, установленный экспериментально и описанный в [2], позволяет переформулировать третье условие так: «свойства грунта не хуже, чем на полигоне LSST».

Другим важным фактором, влияющим на величину когерентности, является скорость сейсмических волн на поверхности грунта. Зарегистрированная скорость распространения волнового фронта по земной поверхности (Рисунок 2.29) равна

$v = \frac{\xi_{km}}{\tau_{km}}$. На полигонах с плотным размещением датчиков скорость S -волн дости-

гает 2-3,5 км/с и более [1] и зависит от ориентации сейсмического источника (разлома). Если волны расходятся от источника вертикально, они достигают поверхности одновременно, сдвиг по фазе равен нулю, а скорость v - бесконечна. При

этом фазовая скорость c распространения фронта волны от источника к поверхности сравнительно низкая (порядка сотен метров в секунду) и определяется только механическими свойствами грунта.

В практике строительных инженерных расчетов на сейсмостойкость принимают [74, 75], что фронт объемной сейсмической волны движется по поверхности с фазовой скоростью. Как соотносится это предположение с эмпирической функцией когерентности? Аппроксимация Абрахамсона построена для зарегистрированных «быстрых» волн со скоростью v , а в инженерных методах сейсмическая волна «медленная» - скорость распространения фронта принимается равной фазовой скорости c , причем $v \sim 10 \cdot c$ [1, 2]. Это означает, что время запаздывания для

«медленной» волны будет больше: $\frac{\tau_{km}(c)}{\tau_{km}(v)} \sim 10$, так как $\tau_{km} = \frac{\xi_{km}}{v}$. Известно, что

функция когерентности уменьшается с увеличением времени запаздывания. Отсюда следует формальный вывод о том, что для «медленных» волн функция когерентности при тех же расстояниях должна быть меньше, чем на Рисунке 2.30, следовательно, область частот согласованного движения сужается. Так как это сужение связано с искусственным ужесточением воздействия, разумно договориться о том, чтобы и при инженерном подходе придавать сейсмической волне пространственную изменчивость, зафиксированную при реальных землетрясениях.

Подводя итог, становится очевидным, что эмпирическая функция поверхностной когерентности Н. Абрахамсона поможет определить, есть ли необходимость принимать в расчет пространственную изменчивость сейсмических движений грунта. При этом кроме размера фундамента необходимо иметь в виду реальные грунтовые условия, спектральный состав сейсмического воздействия и условности инженерного подхода.

2.11. Фильтрующие свойства жестких фундаментов

В расчетах на сейсмостойкость на основе интегральной модели сейсмическое воздействие представляется в виде вектора, содержащего три поступательные и три угловые (или ротационные) компоненты. Этот вектор сейсмического воздействия есть результат осреднения волнового движения по объему грунта под фундаментом. Известно, что основным условием применения интегральной модели является достаточная жесткость фундамента, то есть такая, при которой фундамент движется как недеформируемое твердое тело с 6 степенями свободы [72, 75]. Под таким фундаментом сейсмическая волна малой длины не даст существенного вклада в осредненное движение грунта, а значит, и в общую сейсмическую интенсивность.

Вопрос о том, какие длины волн преобладают в сейсмическом движении, решается разложением трехкомпонентного поступательного сейсмического движения в спектр Фурье. Зная диапазон несущих частот воздействия f_i (Гц, i - номер несущей частоты) и скорость распространения поперечных волн c_2 , длины сейсмических волн рассчитываются по формуле: $\lambda_i = c_2 / f_i$. Длинные волны (по сравнению с характерным размером фундамента) определяют основной вклад в движение конструкции, а короткие, соответствующие высоким частотам, – «отфильтровываются», а фактически гасят себя сами, давая в среднем малые перемещения под фундаментом (Рисунок 2.31). В результате сейсмическая интенсивность I несколько уменьшается²⁰. Однако фильтрация происходит не только за счет осреднения, но и из-за рассеяния и дифракции коротких волн под фундаментом, а при сильных землетрясениях – и из-за пластических деформаций, особенно характерных для мягких рыхлых грунтов. К сожалению, экспериментальных данных о качественных и количественных оценках рассеивающих свойств фундаментов очень мало, поэтому любой натурный эксперимент в этой области представляет боль-

²⁰ В сейсмических расчетах уменьшение интенсивности учитывают с помощью редуцирующих коэффициентов (χ -коэффициентов, см.п.1.4).

шую ценность, помогая определиться с заданием величин понижающих коэффициентов.

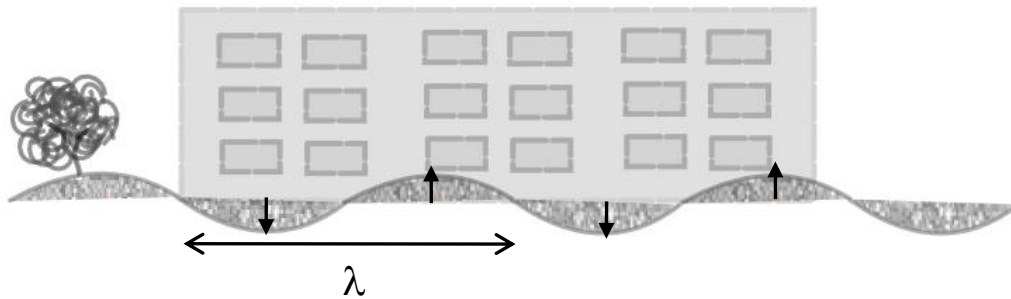


Рисунок 2.31. Осреднение коротковолнового движения под жестким фундаментом приводит к снижению сейсмической нагрузки.

За рубежом дискуссия о фильтрующих свойствах жестких фундаментов возникает периодически, по мере поступления новых экспериментальных данных. Отметим, что она не касается воздействий с доминирующими длинными волнами, когда коротковолновая часть мала и фильтрация незначительна. Речь идет о жестких фундаментах на мягких грунтах – в таких грунтах скорость поперечных волн относительно мала и преобладают более короткие сейсмические волны. По мнению ведущих зарубежных специалистов, проблема в том, что не все натурные эксперименты, проводимые путем сравнения записей на свободном поле и на фундаментах зданий, однозначно подтверждают наличие эффекта фильтрации. Так, авторы работы [27], в которой детально описан такой эксперимент, пишут: «При рассмотрении эффекта взаимодействия основания и конструкции фундамент часто считают абсолютно жестким. Это уменьшает число степеней свободы модели и дает хорошие результаты для длинных, по сравнению с размерами фундамента, волн. Для коротких волн такое предположение может привести к неконсервативной оценке деформаций в конструкции и, скорее всего, к завышенным оценкам рассеяния энергии падающей волны и демпфирования.... Работы Хаузнера²¹ ...

²¹ Хаузнер [Housner G.W. Interaction of building and ground during an earthquake. Bull Seismol Soc Am 1957; 47: 179–86], при сравнении амплитудных спектров внутри здания и на свободном поле, пришел к выводу, что протяженный фундамент «сглаживает» высокочастотные компоненты движения грунта и поэтому здания на длинных жестких фундаментах более устойчивы к сейсмическим воздействиям. Однако проведенные через 44 года повторные расчеты выявили ошибку в расчетах и показали, что на самом деле разница невелика.

заставили многих инженеров думать, что большие фундаменты отфильтровывают высокочастотные спектральные составляющие движения грунта. Хотя фильтрация есть всегда, она становится завышенной при предположении абсолютной жесткости фундамента. Полномасштабный эксперимент показывает, что даже при малых амплитудах воздействия фундамент здания деформируется при прохождении волн».

Объектом исследования упомянутого в цитате из работы [27] натурального эксперимента послужило семиэтажное здание отеля в Лос-Анжелесе 1965 г. постройки, эксплуатировалось до 1994 г. Размеры в плане 62x150 футов (около 19x46 м). Несущая способность железобетонного монолитного каркаса здания обеспечена внутренней частью каркаса, состоящей из колонн и перекрытий, и внешней - из колонн и обвязочных балок (сейсмопоясов); внешняя часть каркаса за счет обвязочных балок имеет большую жесткость (примерно в два раза), чем внутренняя. Колонны расположены с шагом 20 футов (около 6 м) в поперечном направлении и 19 футов (около 5.8 м) в продольном. Здание симметричное, если не принимать во внимание легкую рамную конструкцию лестницы и лифтовой шахты в одном из торцов. Первый этаж располагается на уровне 2 фт. (0.61 м) от плотного грунта. Толщина пола 1 этажа - 4 дюйма (около 10 см), железобетонные этажные перекрытия толщиной: 2 этажа – 10 дюймов (25.4 см), 3-7 этажей – 8.5 дюймов (около 22 см), крыши – 8 дюймов (около 20 см). Фундамент здания состоит из кустов 40-футовых (12.2 м) висячих свай по 2-4 штуки диаметром 24 дюйма (0.61 м), оголовники свай высотой 38 дюймов (0.96 м) скреплены балками ростверка (Рисунок 2.32). Каждая свая рассчитана на продольную нагрузку 100 kips (ок. 445 кН) и поперечную нагрузку 20 kips (ок. 89 кН). Над оголовниками центрируются все несущие колонны здания. Грунтовое основание представляет собой аллювий (наносные отложения), состоит из песка и заиленного песка со средней скоростью поперечных волн порядка 300 м/с.

За период с 1971 по 1994 г. отель испытал 11 сильных землетрясений магнитудой от 4.9 до 6.6. Особенно серьезные повреждения были зафиксированы во время

Нортриджского землетрясения 17 января 1994 г. (Northridge earthquake) магнитудой 6.6, пиковое ускорение грунта в горизонтальном направлении достигало 0.44g, в вертикальном – 0.27g, расстояние до эпицентра 1.5 км. Во время землетрясения пострадали в основном внешние конструкции каркаса на северной и южной стороне, усиленные обвязочными балками. В серединах несущих колонн 5 этажа, связанных обвязочными балками, образовались глубокие поперечные трещины, колонны 3 и 4 этажей также были повреждены, но в меньшей степени. Видимых повреждений внутренней части каркаса, перекрытий и фундамента не отмечено. Пришла в негодность внутренняя отделка гостиницы – растрескались штукатурка и кирпичная кладка. Афтершок Нортриджского землетрясения магнитудой 5.2 произошел 20 марта 1994 года, при этом пиковое ускорение грунта в горизонтальном направлении достигало 0.27g, в вертикальном – 0.10g, расстояние до эпицентра составляло 1.2 км.

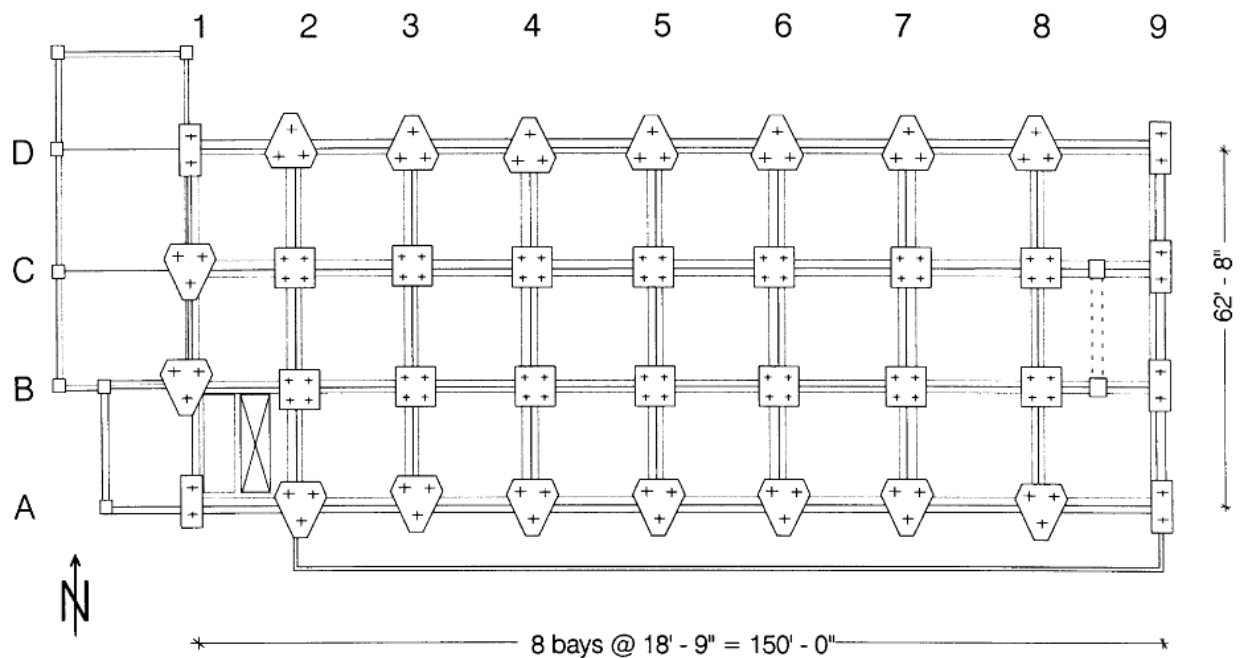


Рисунок 2.32. Устройство фундамента, из [27].

В феврале и апреле 1994 года были проведены два эксперимента, первый после Нортриджского землетрясения, второй – спустя месяц после его афтершока. Целью первого эксперимента было измерение собственных частот поврежденного здания. Схема расположения датчиков на здании показана на Рисунке 2.33. Вто-

рой эксперимент был более информативным. Кроме выявления изменений в собственном спектре из-за новых повреждений после афтершока (оказалось, что собственные частоты изменились незначительно), проводились измерения движения грунта вокруг здания. Датчики были установлены на парковке в 46 точках на расстоянии от 15 до 20 м от здания. Схема расположения внешних датчиков показана на Рисунке 2.34. В ходе эксперимента в течение трех минут с частотой 400 отсчетов в секунду записывались микросейсмы техногенного происхождения – колебания, вызванные работой тяжелой техники в промышленном районе Лос-Анжелоса Сан-Фернандо и движением автомобилей по двум близлежащим трассам (150 м к западу и 50 м к северу от здания). Во время эксперимента отель был закрыт, выключено электро- и водоснабжение, отключены лифты.

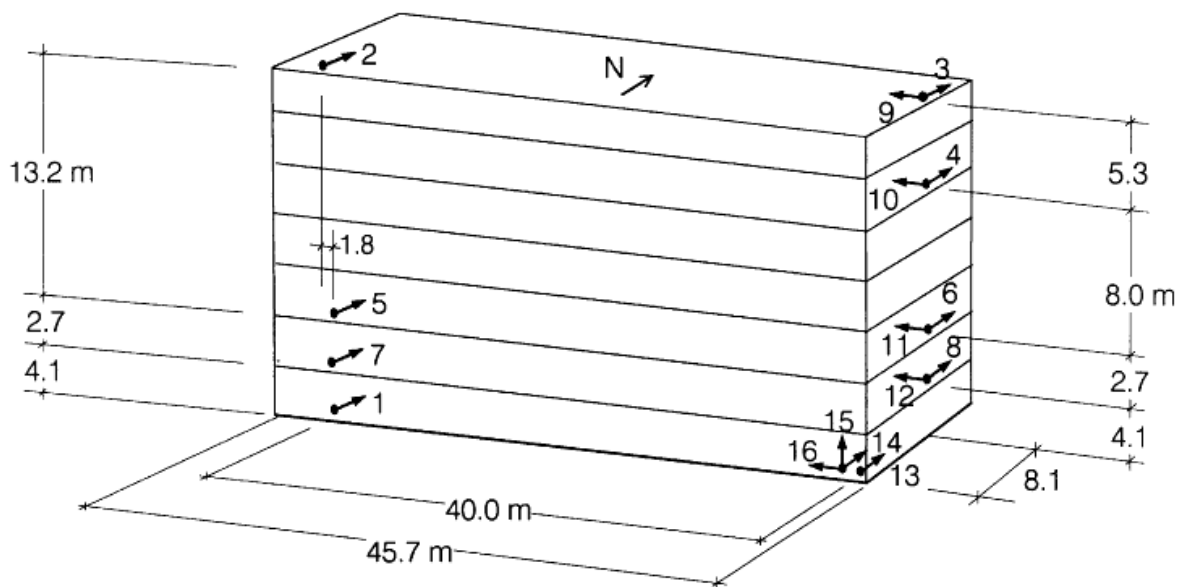


Рисунок 2.33. Расположение датчиков и направления измерений, из [27].

Спектры Фурье ускорений грунта по трем направлениям на парковке показали множество пиков в диапазоне от 1 до 10 Гц, спектры нарастают до частоты около 4 Гц (пики у частоты 4 Гц вызваны движением автомобилей), а затем имеют ниспадающий тренд примерно до частоты 9-10 Гц (Рисунок 2.35). Интересно, что в амплитудном спектре Фурье на парковке не было выявлено никаких пиков выше уровня шума, связанных с раскачиванием или с поступательным движением са-

мого здания, то есть колебаний грунта, «наведенных» конструкцией, обнаружено не было.

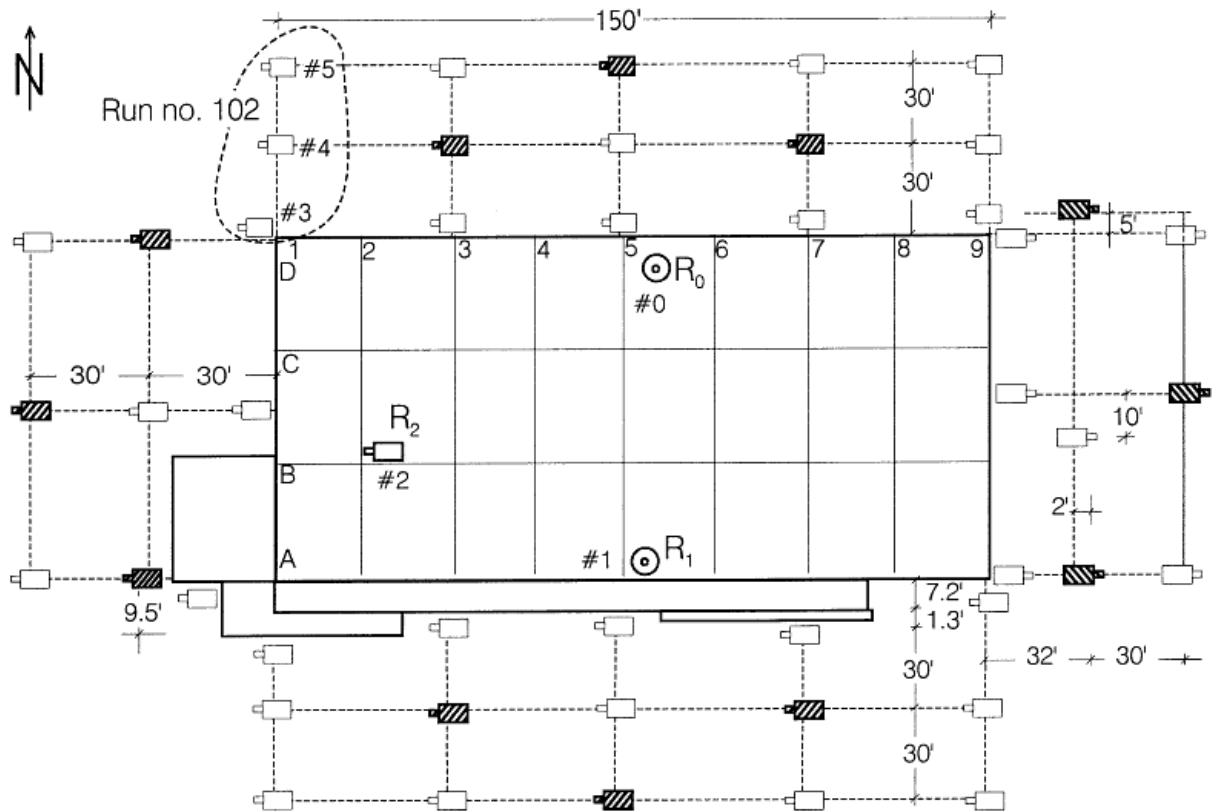


Рисунок 2.34. Схема расположения датчиков на парковке у здания, из [27].

Анализ перемещений, полученных по каналам 1, 2, 3, 13 (Рисунок 2.33) показал, что колебания грунта приводят к кручению, увеличивающему динамическую реакцию конструкции на 20-40%. При сравнении данных с каналов 1 и 13 выяснилось, что перемещения в точке 1 на 10-20% больше, чем в точке 13. Это говорит о том, что фундамент совершал повороты относительно смещенного центра жесткости.

Для полного описания волновой картины в зоне вокруг здания, был выполнен корреляционный анализ полученных данных: выбрана опорная точка и для всех остальных точек вычислена взаимная корреляционная функция. Корреляционный анализ дал возможность определить запаздывание по времени и пространственное распределение волн. Было установлено, что микроколебания грунта вызваны высокочастотными волнами Рэлея, проходящими по поверхностным слоям грунта.

По запаздыванию была определена скорость волн – около 250-300 м/с, а также установлена пространственная картина распределения фаз и амплитуд волнового движения (Рисунок 2.36, линии равных фаз показаны штриховой линией, амплитуд - сплошной линией, направление NS). Рисунок 2.36 показывает, что при прохождении волн с запада на восток фундамент действительно поворачивается относительно точки, близкой к юго-восточному углу. Такое движение говорит о больших эксцентриситетах фундамента, которые вызвали заметные крутильные колебания здания. Эксперимент был выполнен после нескольких сильных землетрясений и афтершока, поэтому авторы [27] предполагают, что нерегулярность волновой картины и смещение центра жесткости фундамента связаны с локальным «расцементированием» грунта рядом со сваями, местным разрыхлением, трещинами и нарушением целостности грунта в некоторых зонах свайного фундамента и парковки, с возможным повреждением одной или нескольких свай. Все графики контуров горизонтальных и вертикальных амплитуд деформаций показали, что фундамент здания ведет себя не как жесткое тело, а деформируется при прохождении падающих волн. При этом происходит совместное движение фундамента и основания по горизонтали. По вертикали, предположительно, фундамент и основание двигаются отдельно в зоне северо-западного угла здания.

Анализируя данные, приведенные в [27], дадим свои принципиальные выводы:

1. Длины доминирующих волн при скорости $c_2=300$ м/с для пиков около 8 Гц (Рисунок 2.35) равны $\lambda|_{8\text{Гц}} = 300/8 = 37.5$ м, для пиков порядка 4 Гц - $\lambda|_{4\text{Гц}} = 300/4 = 75$ м. Размеры здания 19x46 м, то есть длины доминирующих волн превышают минимальный размер фундамента. Таким образом, при заданных грунтовых условиях и частотном диапазоне воздействия фундамент не может проявить заметные фильтрующие свойства за счет осреднения сейсмического движения. Сопоставляя размер фундамента и фазовую скорость волн, можно сделать вывод о том, что модель сейсмического движения фундамента ротационно-

дилатационная, то есть следует ожидать не только поступательного движения, но и заметных угловых движений.

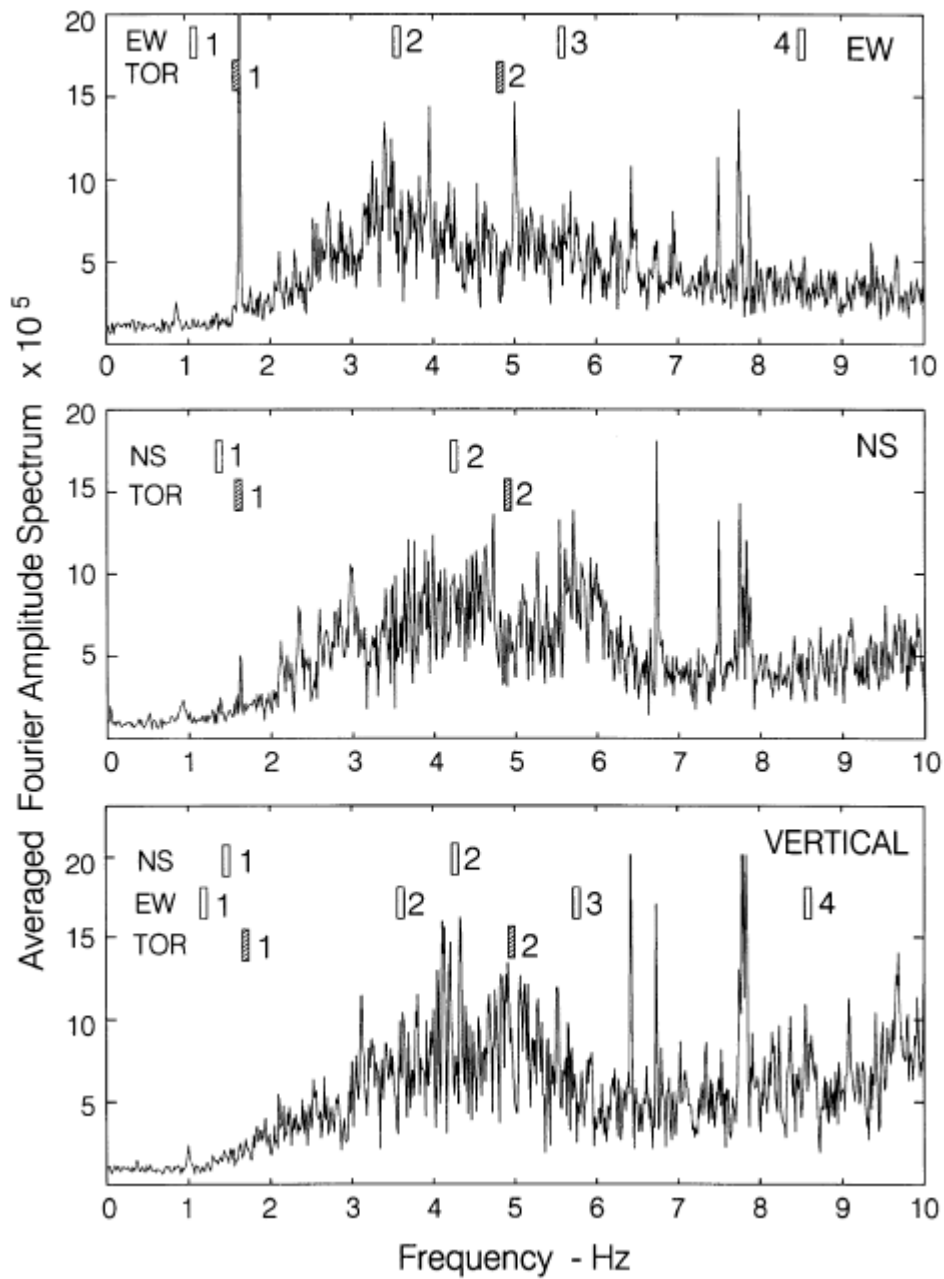


Рисунок 2.35. Амплитудные спектры Фурье, из [27].

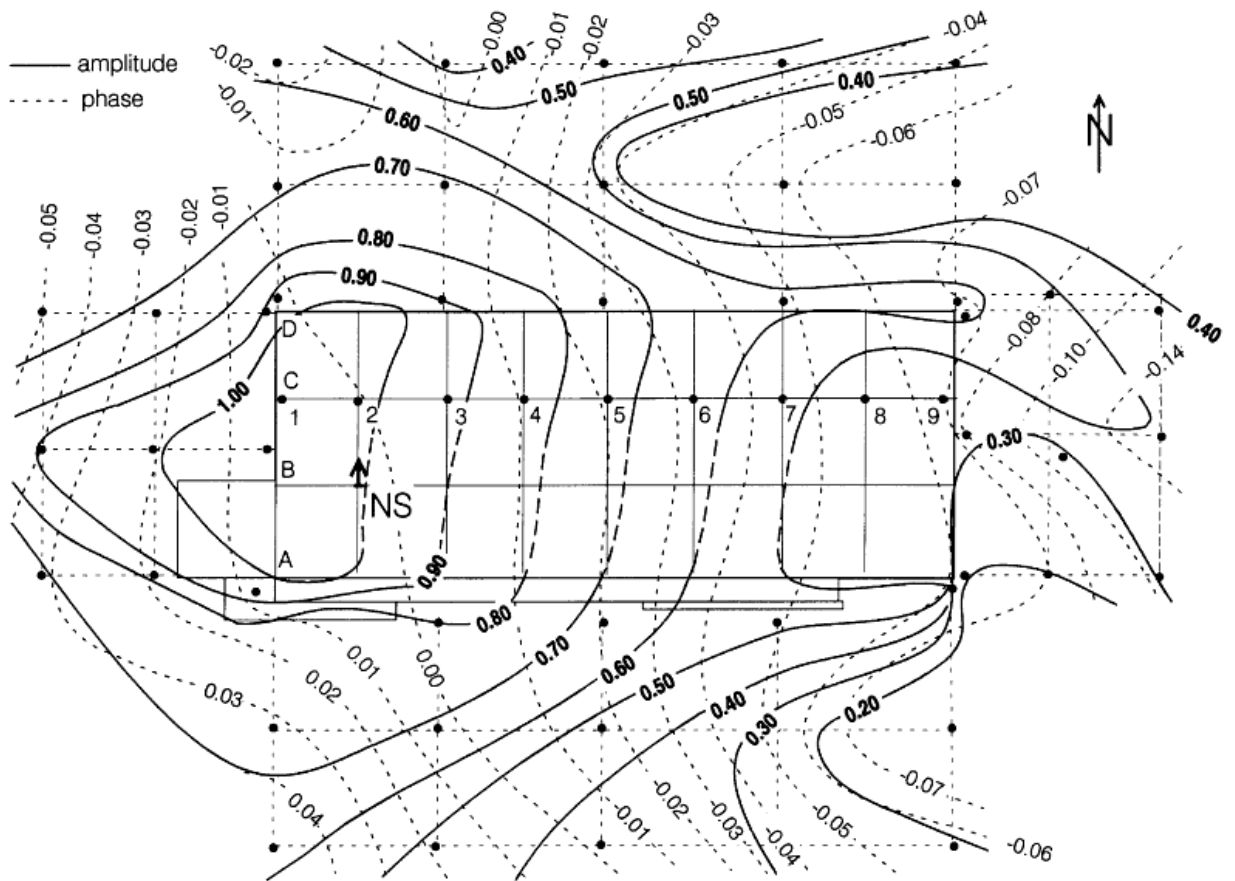


Рисунок 2.36. Пространственная картина волнового движения, из [27].

2. Имеет место «фундаментальный парадокс»²² - ситуация, когда фундамент работает не в расчетном режиме, снижая интенсивность сейсмического воздействия, а наоборот, неравномерно передает воздействие на здание, возбуждая сильные крутильные колебания. Причина в том, что грунт основания достиг предельного состояния, деформирован неоднородно, с заметными пластическими деформациями. Колебания такого фундамента в горизонтальной плоскости можно представить как движение жесткой пластины на произвольно расставленных нелинейных опорах разной жесткости (Рисунок 2.37). Неравномерное распределение жесткостей связей приводит к непредсказуемому смещению центра жесткости фундамента (точка С на Рисунке 2.37) и к крутильным колебаниям здания.

²² О «фундаментальном парадоксе» см.

Сейсмозащитные устройства: актуальные проблемы сейсмобезопасности. Под ред. Н.П. Абовского. М.: Издательство «Проспект», 2015, 87 с.

Абовский Н.П., Инжутов И.С., Хорошавин Е.А., Палагушкин В.И. О роли фундаментов в сейсмостойком строительстве. Сейсмозащитный фундамент // "ОФМГ". - 2012. - № 5. - С. 28-29.

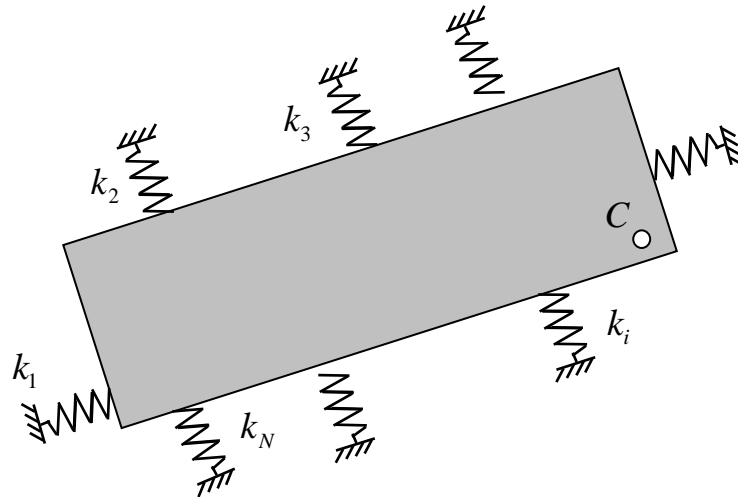


Рисунок 2.37. Модель нелинейной работы системы фундамент + основание.

3. Фундамент оказался недостаточно жестким. Причина его деформативности не очень понятна – либо из-за малой изгибной жесткости свайного ростверка, либо из-за его возможных повреждений, либо из-за потери грунтом несущей способности. Со времени постройки отеля в 1965 г. технологии устройства и расчета сейсмоизолирующих фундаментов значительно продвинулись²³. Сегодня строительство на слабых грунтах предусматривает гораздо более жесткие фундаменты: мощные фундаментные плиты и фундаментные платформы, сплошные плитно-свайные фундаменты, устройство искусственного основания в виде плитно-свайного ростверка с сейсмоизолирующей грунтовой подушкой и т.д. В идеале фундаменты на слабых грунтах должны быть действительно жесткими по всем трем направлениям сейсмического воздействия, с обеспеченной несущей способностью грунта, с прогнозируемым демпфированием и рассеиванием сейсмических движений. Только при таких условиях можно говорить о фильтрации сейсмических волн под жестким фундаментом и о снижении интенсивности воздействия.

²³ О новых технологиях в этой области см.:

Уздин А.М., Сандович Т.А., Аль-Насер-Мохомад Самих Амин. Основы теории сейсмостойкости и сейсмостойкого строительства зданий и сооружений. -С.-Петербург: ВНИИГ, 1993. - 175 с.

Ильясов А.Б., Уздин А.М. О системном подходе к анализу динамического взаимодействия “сооружение - фундамент - основание” при расчете сейсмостойких сооружений// "ОФМГ". - 2014. - № 3. - С. 28-29.

Ставницер Л.Р. Сейсмостойкость оснований и фундаментов. - М.: Изд-во АСВ. - 2010. -447 с.

3. Динамика строительных конструкций при интегральной модели воздействия

3.1. Переносные сейсмические силы

Расчетная схема конструкции включает деформируемые элементы, сосредоточенные массы и абсолютно твердые тела. Так как деформируемые элементы дискретизируются (например, методом конечных элементов) и приобретают вид упруго соединенных узловых масс, под *расчетно-динамической моделью (РДМ)* конструкции будем понимать закрепленную дискретную совокупность инерционных элементов: сосредоточенных масс и абсолютно твердых тел, связанных между собой внутренними связями. При движении инерционных элементов относительно друг друга вдоль этих связей возникают внутренние упругие восстанавливающие силы и силы вязкого сопротивления. Каждый инерционный элемент обладает собственным числом степеней свободы – минимальным количеством (до 6 для пространственных систем) независимых переменных, однозначно определяющих его положение в пространстве. Колебательный процесс инерционных элементов описывают обобщенные координаты (переменные, перемещения) – линейные и угловые перемещения по числу степеней свободы.

Обобщенные координаты могут быть абсолютными, то есть задавать движение в неподвижной (неинерциальной) системе координат, и относительными – если система координат подвижная (инерциальная). При интегральном сейсмическом воздействии оси подвижной системы считают «вмороженными» в абсолютно твердое основание, а само основание совершает переносное движение – поступательное и ротационное²⁴ движение относительно центра приведения вектора сейсмического воздействия (2.1).

В теории сейсмостойкости уравнения движения РДМ записывают в относительном движении. Это связано с тем, что упругие силы и силы вязкого сопротивления совершают работу на относительных перемещениях и скоростях, следова-

²⁴ Ротационное движение – колебательное угловое движение с небольшими углами поворота.

тельно, от них зависят внутренние усилия, напряжения и, в конечном итоге, прочность конструкции.

Как известно из курсов теоретической механики и теории колебаний, уравнения относительного движения содержат переносные инерционные силы. Силы инерции, действующие на тело, равны произведению матрицы инерции на вектор абсолютных ускорений. Определим инерционные силы, действующие на отдельно взятое абсолютно твердое тело РДМ.

Введем неподвижную систему координат $O123$. Центр тяжести тела с массой m расположен в точке C с радиус-вектором $\mathbf{r} = (x_{1C}, x_{2C}, x_{3C})^T$. Пусть оси $O123$ являются для этого тела главными осями инерции, а параллельные им оси $C123$ — главными центральными. Моменты инерции в осях $C123$ обозначим $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (для сосредоточенной массы $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$). Движение центра тяжести тела C будем описывать 6 обобщенными координатами — тремя линейными вдоль осей $O123$ и тремя углами поворота относительно этих осей.

Подвижная система координат в начальный момент времени (до начала воздействия) совпадает с неподвижной $O123$, а затем начинает движение, заданное векторами перемещений, скоростей и ускорений, приведенными к точке O (Рисунок 3.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0(t) &= (X_{10} \quad X_{20} \quad X_{30})^T, & \boldsymbol{\alpha}_0(t) &= (\alpha_{10} \quad \alpha_{20} \quad \alpha_{30})^T \\ \dot{\mathbf{X}}_0(t) &= (\dot{X}_{10} \quad \dot{X}_{20} \quad \dot{X}_{30})^T, & \dot{\boldsymbol{\alpha}}_0(t) &= (\dot{\alpha}_{10} \quad \dot{\alpha}_{20} \quad \dot{\alpha}_{30})^T \\ \ddot{\mathbf{X}}_0(t) &= (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{20} \quad \ddot{X}_{30})^T, & \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_0(t) &= (\ddot{\alpha}_{10} \quad \ddot{\alpha}_{20} \quad \ddot{\alpha}_{30})^T, \end{aligned} \quad (3.1)$$

или в виде шестикомпонентных векторов

$$\mathbf{q}_0(t) = (\mathbf{X}_0 \quad \boldsymbol{\alpha}_0)^T, \quad \dot{\mathbf{q}}_0(t) = (\dot{\mathbf{X}}_0 \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_0)^T, \quad \ddot{\mathbf{q}}_0(t) = (\ddot{\mathbf{X}}_0 \quad \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_0)^T. \quad (3.2)$$

Вектора (3.2) задают переносное движение системы.

Введем вектора относительных линейных и угловых перемещений, скоростей и ускорений (относительно подвижных осей $O123$):

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= (X_1 \quad X_2 \quad X_3)^T, & \boldsymbol{\varphi} &= (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^T, \\ \dot{\mathbf{X}} &= (\dot{X}_1 \quad \dot{X}_2 \quad \dot{X}_3)^T, & \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= (\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2 \quad \dot{\varphi}_3)^T, \\ \ddot{\mathbf{X}} &= (\ddot{X}_1 \quad \ddot{X}_2 \quad \ddot{X}_3)^T, & \ddot{\boldsymbol{\varphi}} &= (\ddot{\varphi}_1 \quad \ddot{\varphi}_2 \quad \ddot{\varphi}_3)^T,\end{aligned}\quad (3.3)$$

или в виде шестикомпонентных векторов

$$\mathbf{q} = (\mathbf{X} \quad \boldsymbol{\varphi})^T, \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{X}} \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}})^T, \quad \ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{\mathbf{X}} \quad \ddot{\boldsymbol{\varphi}})^T, \quad (3.4)$$

а также абсолютных перемещений, скоростей и ускорений (относительно начального положения $O123$):

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{abs} &= (X_{1abs} \quad X_{2abs} \quad X_{3abs})^T, & \boldsymbol{\varphi}_{abs} &= (\varphi_{1abs} \quad \varphi_{2abs} \quad \varphi_{3abs})^T, \\ \dot{\mathbf{X}}_{abs} &= (\dot{X}_{1abs} \quad \dot{X}_{2abs} \quad \dot{X}_{3abs})^T, & \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{abs} &= (\dot{\varphi}_{1abs} \quad \dot{\varphi}_{2abs} \quad \dot{\varphi}_{3abs})^T, \\ \ddot{\mathbf{X}}_{abs} &= (\ddot{X}_{1abs} \quad \ddot{X}_{2abs} \quad \ddot{X}_{3abs})^T, & \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{abs} &= (\ddot{\varphi}_{1abs} \quad \ddot{\varphi}_{2abs} \quad \ddot{\varphi}_{3abs})^T.\end{aligned}$$

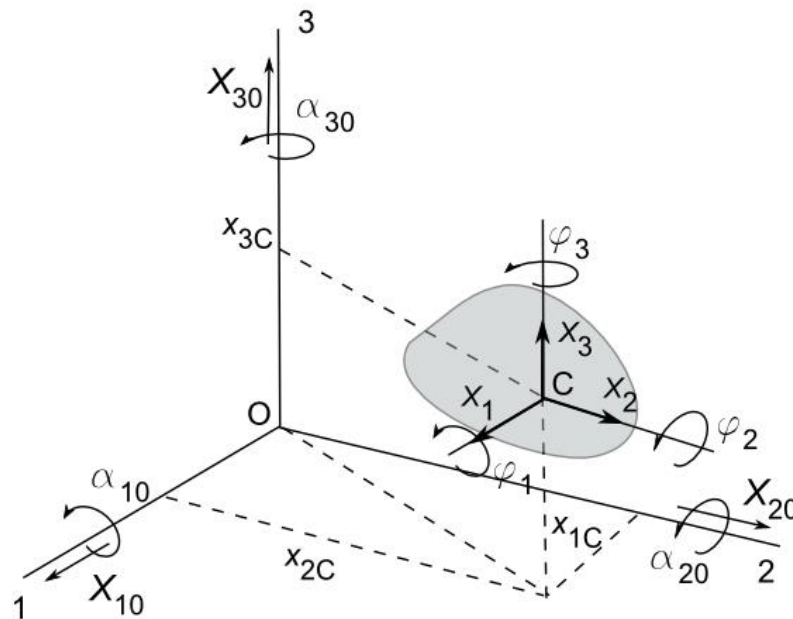


Рисунок 3.1. Твердое тело в основных осях

Учитывая повороты относительно центра O , определим скорость поступательного движения $\dot{\mathbf{X}}_{abs}$ как сумму относительной $\dot{\mathbf{X}} + \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r}$ и переносной скоростей $\dot{\mathbf{X}}_0 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_0 \times \mathbf{r}$:

$$\dot{\mathbf{X}}_{abs} = \dot{\mathbf{X}} + \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{X}}_0 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_0 \times \mathbf{r}, \quad (3.5)$$

где $\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r}$ и $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_0 \times \mathbf{r}$ - векторные произведения

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} k & l & m \\ \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ x_{1C} & x_{2C} & x_{3C} \end{vmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_0 \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} k & l & m \\ \dot{\alpha}_{10} & \dot{\alpha}_{20} & \dot{\alpha}_{30} \\ x_{1C} & x_{2C} & x_{3C} \end{vmatrix},$$

k, l, m - тройка направляющих ортов радиус-вектора \mathbf{r} .

Угловая скорость при малых ротациях равна

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_{abs} = \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_0.$$

В покомпонентном виде:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{1abs} &= \dot{X}_1 + \dot{X}_{10} + \dot{\phi}_2 x_{3C} - \dot{\phi}_3 x_{2C} + \dot{\alpha}_{20} x_{3C} - \dot{\alpha}_{30} x_{2C}, & \dot{\phi}_{1abs} &= \dot{\phi}_1 + \dot{\alpha}_{10}, \\ \dot{X}_{2abs} &= \dot{X}_2 + \dot{X}_{20} - \dot{\phi}_1 x_{3C} + \dot{\phi}_3 x_{1C} - \dot{\alpha}_{10} x_{3C} + \dot{\alpha}_{30} x_{1C}, & \dot{\phi}_{2abs} &= \dot{\phi}_2 + \dot{\alpha}_{20}, \\ \dot{X}_{3abs} &= \dot{X}_3 + \dot{X}_{30} + \dot{\phi}_1 x_{2C} - \dot{\phi}_2 x_{1C} + \dot{\alpha}_{10} x_{2C} - \dot{\alpha}_{20} x_{1C}, & \dot{\phi}_{3abs} &= \dot{\phi}_3 + \dot{\alpha}_{30}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Запишем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}_{1abs}^2 + \dot{X}_{2abs}^2 + \dot{X}_{3abs}^2 \right) + \frac{1}{2} \theta_1 \dot{\phi}_{1abs}^2 + \frac{1}{2} \theta_2 \dot{\phi}_{2abs}^2 + \frac{1}{2} \theta_3 \dot{\phi}_{3abs}^2.$$

Чтобы получить силы инерции в уравнениях относительного движения, необходимо взять частные производные от T по относительным скоростям \dot{X}_i , $\dot{\phi}_i$, учитывая (3.6), и продифференцировать по времени:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_1} = m \left(\dot{X}_1 + \dot{X}_{10} + \dot{\phi}_2 x_{3C} - \dot{\phi}_3 x_{2C} + \dot{\alpha}_{20} x_{3C} - \dot{\alpha}_{30} x_{2C} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_2} = m(\dot{X}_2 + \dot{X}_{20} - \dot{\phi}_1 x_{3C} + \dot{\phi}_3 x_{1C} - \dot{\alpha}_{10} x_{3C} + \dot{\alpha}_{30} x_{1C}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_3} = m(\dot{X}_3 + \dot{X}_{30} + \dot{\phi}_1 x_{2C} - \dot{\phi}_2 x_{1C} + \dot{\alpha}_{10} x_{2C} - \dot{\alpha}_{20} x_{1C}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} &= m(-x_{3C})(\dot{X}_2 + \dot{X}_{20} - \dot{\phi}_1 x_{3C} + \dot{\phi}_3 x_{1C} - \dot{\alpha}_{10} x_{3C} + \dot{\alpha}_{30} x_{1C}) + \\ &+ mx_{2C}(\dot{X}_3 + \dot{X}_{30} + \dot{\phi}_1 x_{2C} - \dot{\phi}_2 x_{1C} + \dot{\alpha}_{10} x_{2C} - \dot{\alpha}_{20} x_{1C}) + \theta_1(\dot{\phi}_1 + \dot{\alpha}_{10}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} &= mx_{3C}(\dot{X}_1 + \dot{X}_{10} + \dot{\phi}_2 x_{3C} - \dot{\phi}_3 x_{2C} + \dot{\alpha}_{20} x_{3C} - \dot{\alpha}_{30} x_{2C}) + \\ &+ m(-x_{1C})(\dot{X}_3 + \dot{X}_{30} + \dot{\phi}_1 x_{2C} - \dot{\phi}_2 x_{1C} + \dot{\alpha}_{10} x_{2C} - \dot{\alpha}_{20} x_{1C}) + \theta_2(\dot{\phi}_2 + \dot{\alpha}_{20}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_3} &= m(-x_{2C})(\dot{X}_1 + \dot{X}_{10} + \dot{\phi}_2 x_{3C} - \dot{\phi}_3 x_{2C} + \dot{\alpha}_{20} x_{3C} - \dot{\alpha}_{30} x_{2C}) + \\ &+ mx_{1C}(\dot{X}_2 + \dot{X}_{20} - \dot{\phi}_1 x_{3C} + \dot{\phi}_3 x_{1C} - \dot{\alpha}_{10} x_{3C} + \dot{\alpha}_{30} x_{1C}) + \theta_3(\dot{\phi}_3 + \dot{\alpha}_{30}), \end{aligned}$$

Дифференцируем по времени и получаем инерционные силы:

$$\text{по } X_1: I_{X1} = m(\ddot{X}_1 + \ddot{\phi}_2 x_{3C} - \ddot{\phi}_3 x_{2C}) + m(\ddot{X}_{10} + \ddot{\alpha}_{20} x_{3C} - \ddot{\alpha}_{30} x_{2C}),$$

$$\text{по } X_2: I_{X2} = m(\ddot{X}_2 - \ddot{\phi}_1 x_{3C} + \ddot{\phi}_3 x_{1C}) + m(\ddot{X}_{20} - \ddot{\alpha}_{10} x_{3C} + \ddot{\alpha}_{30} x_{1C}),$$

$$\text{по } X_3: I_{X3} = m(\ddot{X}_3 + \ddot{\phi}_1 x_{2C} - \ddot{\phi}_2 x_{1C}) + m(\ddot{X}_{30} + \ddot{\alpha}_{10} x_{2C} - \ddot{\alpha}_{20} x_{1C}),$$

по ϕ_1 :

$$\begin{aligned} I_{\phi_1} &= m(-x_{3C})(\ddot{X}_2 - \ddot{\phi}_1 x_{3C} + \ddot{\phi}_3 x_{1C}) + mx_{2C}(\ddot{X}_3 + \ddot{\phi}_1 x_{2C} - \ddot{\phi}_2 x_{1C}) + \theta_1 \ddot{\phi}_1 + \\ &+ m(-x_{3C})(\ddot{X}_{20} - \ddot{\alpha}_{10} x_{3C} + \ddot{\alpha}_{30} x_{1C}) + mx_{2C}(\ddot{X}_{30} + \ddot{\alpha}_{10} x_{2C} - \ddot{\alpha}_{20} x_{1C}) + \theta_1 \ddot{\alpha}_{10}, \end{aligned}$$

по ϕ_2 :

$$\begin{aligned} I_{\phi_2} &= mx_{3C}(\ddot{X}_1 + \ddot{\phi}_2 x_{3C} - \ddot{\phi}_3 x_{2C}) + mx_{3C}(\ddot{X}_{10} + \ddot{\alpha}_{20} x_{3C} - \ddot{\alpha}_{30} x_{2C}) + \\ &+ m(-x_{1C})(\ddot{X}_3 + \ddot{\phi}_1 x_{2C} - \ddot{\phi}_2 x_{1C}) + m(-x_{1C})(\ddot{X}_{30} + \ddot{\alpha}_{10} x_{2C} - \ddot{\alpha}_{20} x_{1C}) + \\ &+ \theta_2 \ddot{\phi}_2 + \theta_2 \ddot{\alpha}_{20}, \end{aligned}$$

по φ_3 :

$$I_{\varphi_3} = m(-x_{2C})(\ddot{X}_1 + \ddot{\varphi}_2 x_{3C} - \ddot{\varphi}_3 x_{2C}) + m(-x_{2C})(\ddot{X}_{10} + \ddot{\alpha}_{20} x_{3C} - \ddot{\alpha}_{30} x_{2C}) + \\ + mx_{1C}(\ddot{X}_2 - \ddot{\varphi}_1 x_{3C} + \ddot{\varphi}_3 x_{1C}) + mx_{1C}(\ddot{X}_{20} - \ddot{\alpha}_{10} x_{3C} + \ddot{\alpha}_{30} x_{1C}) + \\ + \theta_3 \ddot{\varphi}_3 + \theta_3 \ddot{\alpha}_{30},$$

Как видно из последних формул, вектор инерционных сил разделяется на два слагаемых:

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}_o \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_o \ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{M}_o (\ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}}_0), \quad (3.7)$$

здесь \mathbf{M}_o - матрица инерции твердого тела при относительном движении

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mx_{3C} & -mx_{2C} \\ 0 & m & 0 & -mx_{3C} & 0 & mx_{1C} \\ 0 & 0 & m & mx_{2C} & -mx_{1C} & 0 \\ 0 & -mx_{3C} & mx_{2C} & \theta_1 + m(x_{3C}^2 + x_{2C}^2) & -mx_{1C}x_{2C} & -mx_{1C}x_{3C} \\ mx_{3C} & 0 & -mx_{1C} & -mx_{1C}x_{2C} & \theta_2 + m(x_{1C}^2 + x_{3C}^2) & -mx_{2C}x_{3C} \\ -mx_{2C} & mx_{1C} & 0 & -mx_{1C}x_{3C} & -mx_{2C}x_{3C} & \theta_3 + m(x_{2C}^2 + x_{1C}^2) \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{M}_o \ddot{\mathbf{q}}_0$ - переносные инерционные сейсмические силы. (3.8)

Для случая плоского переносного движения $\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{20} \quad \ddot{\alpha}_0)^T$ тела массой m , моментом инерции θ и радиус-вектором центра тяжести $\mathbf{r} = (x_{1C} \quad x_{2C})$ матрица \mathbf{M}_o имеет вид

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} m & 0 & mx_{2C} \\ 0 & m & -mx_{1C} \\ mx_{2C} & -mx_{1C} & \theta + m(x_{1C}^2 + x_{2C}^2) \end{pmatrix}. \quad (3.8')$$

3.2. Уравнения относительного движения

Будем считать, что обобщенные перемещения РДМ и вектор сейсмического воздействия заданы в одной системе координат; для определенности примем, что это основные оси здания. Если сейсмическое воздействие имеет ротационные компо-

ненты, или РДМ допускает угловые перемещения, координаты масс в подвижных осях определяют значения элементов матрицы инерции и связанных с ними переносных сейсмических сил (см. (3.8)). Выбирая в качестве подвижных осей основные оси конструкции, мы получаем соответствующие друг другу матрицу инерции РДМ и переносные сейсмические силы. Если движение грунта поступательное при наличии только линейных степеней свободы РДМ, матрица инерции не зависит от координат масс, и в этом случае начало подвижных осей можно выбирать произвольно.

При учете ротаций и (или) наличии угловых степеней свободы РДМ матрица инерции \mathbf{M} для системы с n степенями свободы формируется по обычным правилам (например, как согласованная или несогласованная матрица по методу конечных элементов), с учетом недиагональных «добавок» (3.8) по обобщенным координатам всех инерционных элементов: узловых, сосредоточенных масс и абсолютно твердых тел. Кроме того, в матрице \mathbf{M} изменятся (при наличии в РДМ угловых степеней свободы) диагональные моменты инерции. Для n -мерных систем вектор инерционных сил представляет собой произведение матрицы инерции на вектор сейсмического воздействия $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0$, но вектор $\ddot{\mathbf{q}}_0$ будет n -мерным, сформированным в соответствии со степенями свободы РДМ. Так, если i -тое уравнение движения соответствует поступательному движению вдоль одной из осей, то в i -той строке вектора $\ddot{\mathbf{q}}_0$ должно стоять ускорение грунта вдоль этой оси; если это уравнение описывает угловое движение относительно одной из осей, в i -той строке вектора $\ddot{\mathbf{q}}_0$ должно стоять ротационное ускорение относительно этой оси. Заметим, что пространственную ориентацию n -мерного вектора $\ddot{\mathbf{q}}_0$ будет задавать n -мерный вектор направляющих косинусов $\mathbf{v}^{[n]}$. Он формируется по тем же правилам, что и $\ddot{\mathbf{q}}_0^{[n]}$. Учитывая (2.17)), получим

$$\ddot{\mathbf{q}}_0^{[n]}(t) = I_x \cdot \mathbf{v}^{[n]}(t). \quad (3.9)$$

Таким образом, в i -той строке вектора $\mathbf{v}^{[n]}$ располагается направляющий косинус поступательного или углового движения, в зависимости от того, какая компонента вектора $\ddot{\mathbf{q}}_0$ соответствует i -тому уравнению движения.

Второй вариант представления переносных сейсмических сил предусматривает в расчете шестимерный вектор $\ddot{\mathbf{q}}_0$, заданный в виде (3.2). Для систем с n степенями свободы введем *матрицу переносных инерционных коэффициентов* \mathbf{M}_s так, чтобы произведение $\mathbf{M}_s^{[n \times 6]} \ddot{\mathbf{q}}_0^{[6]}$ давало вектор инерционных сейсмических сил для всей системы. Матрица \mathbf{M}_s такова, что в её i -той строке располагается вектор $\mathbf{m}_{O,i}^{[6]}$, который зависит от движения по этой степени свободы. Если обобщенная координата поступательная вдоль осей 1, 2 или 3, то $\mathbf{m}_{O,i}$ есть 1, 2 или 3 строка матрицы инерции \mathbf{M}_O (см. (3.8)). Если степени свободы соответствует угловое движение относительно осей 1, 2, 3, то вектор $\mathbf{m}_{O,i}$ соответственно равен 4, 5 или 6 строке матрицы \mathbf{M}_O .

Далее для представления переносных сейсмических сил чаще будет применяться второй вариант, он более удобен для систем с малым количеством степеней свободы. Чтобы не возникло путаницы относительно размерностей векторов $\ddot{\mathbf{q}}_0$ и \mathbf{v} , будем либо оговаривать это отдельно, либо указывать размерность в верхнем индексе, например, $\ddot{\mathbf{q}}_0^{[6]}$ для вектора ускорений (3.2) или $\ddot{\mathbf{q}}_0^{[n]}$. Переносные инерционные силы в обоих случаях будут одинаковыми:

$$\mathbf{P}_s = -\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_0^{[6]}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{P}_s = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_0^{[n]}. \quad (3.11)$$

Запишем уравнения относительного движения для системы с n степенями свободы. Применим принцип Даламбера, для чего просуммируем инерционные, восстанавливающие упругие силы и силы вязкого сопротивления и приравняем эту сумму к нулю:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0^{[n]} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ или } \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0^{[6]} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Окончательно

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}_s, \quad (3.12)$$

здесь $\mathbf{q}^{[n]}$ - вектор относительных обобщенных координат, $\mathbf{M}^{[n \times n]}$, $\mathbf{K}^{[n \times n]}$ и $\mathbf{B}^{[n \times n]}$ - матрицы инерции, жесткости и демпфирования РДМ. Будем считать, что матрица жесткости получена с учетом сил и моментов от продольных нагрузок²⁵. В правой части формулы (3.12) записаны переносные инерционные сейсмические силы и моменты в виде (3.10) или (3.11).

Их прикладывают к массам системы как обычные внешние вынуждающие силы. Таким образом, кинематическое воздействие на систему представляется в относительном движении как силовое. Покажем это на

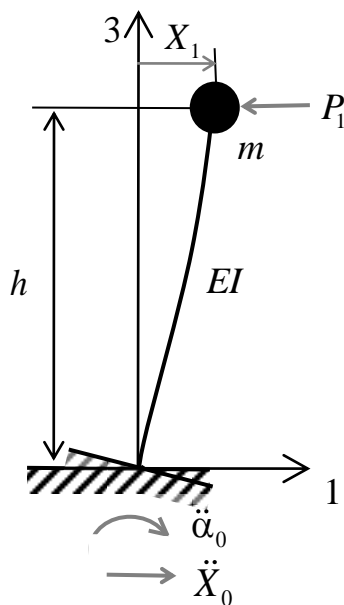


Рисунок 3.2.
Система с одной степенью свободы

простых примерах.

Пример 1. Одномассовый осциллятор под действием поступательного \ddot{X}_0 и ротационного $\ddot{\alpha}_0$ ускорений грунта (Рисунок 3.2):

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_0 \quad \ddot{\alpha}_0)^T.$$

Система имеет одну степень свободы и одну обобщенную координату – перемещение X_1 . В матрице \mathbf{M}_s (3.8') оставим первую строку, соответствующую перемещению X_1 , учитывая, что центр тяжести массы m имеет координату $(0, h)$:

²⁵ При расчетах с помощью конечно-элементных программных комплексов эти нагрузки (например, Р-Δ-эффект, при котором появляются дополнительные силы и моменты от смещений верхней части конструкции) учитываются в матрице жесткости пространственной РДМ автоматически.

$\mathbf{M}_s = (m \quad mh)^{26}$. Переносная сейсмическая сила, действующая на массу m в относительном движении, в силу (3.10) равна $P_1 = -m(\ddot{X}_0 + h\ddot{\alpha}_0)$, на Рисунке 3.2 направление P_1 показано с учетом знака минус.

Уравнение движения получим по принципу Даламбера. Для этого просуммируем силы, действующие на массу по горизонтали, включая силу инерции, упругую силу и переносную сейсмическую силу:

$$m\ddot{X}_1 + cX_1 = P_1,$$

здесь $c = \frac{3EI}{h}$ - жесткость стержня. Уравнение вынужденных колебаний в стандартном виде

$$\ddot{X}_1 + \omega_0^2 X_1 = -\ddot{X}_0 - h\ddot{\alpha}_0,$$

где $\omega_0^2 = \frac{3EI}{mh}$ - квадрат собственной частоты

системы.

Пример 2. Тело массой m и моментом инерции в главных центральных осях θ_C находится под сейсмическим воздействием, заданным поступательным \ddot{X}_0 и ротационным $\ddot{\alpha}_0$ ускорениями грунта (Рисунок 3.3):

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_0 \quad \ddot{\alpha}_0)^T.$$

Система имеет две степени свободы и две обобщенные координаты: X_1 и φ . Координата центра тяжести массы m $(0, h)$, тогда

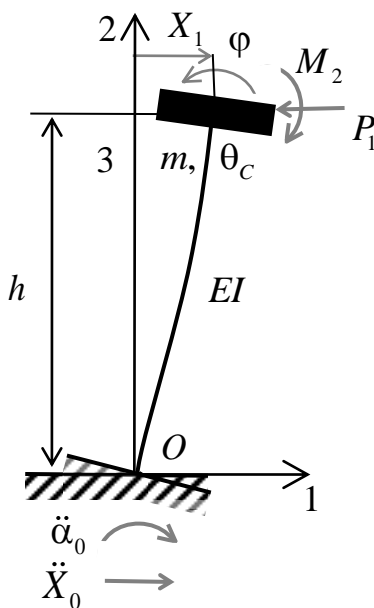


Рисунок 3.3. Система с двумя степенями свободы

матрица \mathbf{M}_s (3.8') равна

²⁶ В этом примере не получится задать сейсмические силы в виде (2.11), так как количество степеней свободы меньше размерности вектора воздействия.

$$\mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} m & mh \\ mh & \theta_o \end{pmatrix},$$

где $\theta_o = \theta_c + mh^2$ - момент инерции тела относительно точки O . Сейсмические силу и момент найдем по формуле (3.10):

$$P_1 = -m(\ddot{X}_0 + h\ddot{\alpha}_0), \quad M_2 = -(\theta_o\ddot{\alpha}_0 + mh\ddot{X}_0). \quad (3.13)$$

И момент, и сила прикладываются к телу как внешние нагрузки. На Рисунке 3.3 P_1 и M_2 направлены с учетом знаков минус в формулах (3.13).

В этом примере матрица инерции \mathbf{M} совпадает с \mathbf{M}_s . Упругие восстанавливающие сила и момент линейно выражаются через обобщенные перемещения²⁷:

$$\begin{pmatrix} Q \\ L \end{pmatrix} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & -6h \\ -6h & 4h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения (3.12) в матричной форме (демпфирование не учитываем):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0, \quad (3.14)$$

где $\mathbf{q} = (X_1 \ \varphi)$ - вектор относительных обобщенных координат,

$\mathbf{K} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & -6h \\ -6h & 4h^2 \end{pmatrix}$ - матрица жесткости, \mathbf{M} , \mathbf{M}_s - матрицы инерции и перенос-

ных инерционных коэффициентов, $\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_0 \ \ddot{\alpha}_0)^T$.

Система уравнений (3.14) в развернутом виде:

$$\begin{cases} m\ddot{X}_1 + mh\ddot{\varphi} + Q = -m(\ddot{X}_0 + h\ddot{\alpha}_0), \\ \theta_o\ddot{\varphi} + mh\ddot{X}_1 + L = -(\theta_o\ddot{\alpha}_0 + mh\ddot{X}_0). \end{cases}$$

Пример 3. Консольный стержень с двумя телами под двухкомпонентным сейсмическим воздействием $\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_0 \ \ddot{\alpha}_0)^T$, движение каждого тела описывается линей-

²⁷ Внутренние усилия в стержневом элементе определяются как произведение матрицы жесткости на вектор узловых перемещений, см. литературу по методу конечных элементов, например, [67], [110].

ными и угловыми обобщенными координатами $\mathbf{q} = (X_1 \quad \varphi_1 \quad X_2 \quad \varphi_2)^T$ (Рисунок 3.4). Пусть m_1, θ_1 и m_2, θ_2 - массы и моменты тел в главных центральных осях, EI - суммарная изгибная жесткость стоек, h - высота этажа.

Матрицы инерции \mathbf{M} и переносных инерционных коэффициентов \mathbf{M}_s :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 h & 0 & 0 \\ m_1 h & \theta_{1o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 2m_2 h \\ 0 & 0 & 2m_2 h & \theta_{2o} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 h \\ m_1 h & \theta_{1o} \\ m_2 & 2m_2 h \\ 2m_2 h & \theta_{2o} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\theta_{1o} = \theta_1 + mh^2,$$

$$\theta_{2o} = \theta_2 + 4mh^2.$$

Так же, как в примерах 1 и 2, определяем сейсмические силы, действующие на каждое тело:

$$P_1 = -m_1 (\ddot{X}_0 + h\ddot{\alpha}_0) \quad \text{и} \quad P_2 = -m_2 (\ddot{X}_0 + 2h\ddot{\alpha}_0),$$

и сейсмические моменты относительно центров тел:

$$M_1 = -(\theta_{1o}\ddot{\alpha}_0 + m_1 h \ddot{X}_0) \quad \text{и} \quad M_2 = -(\theta_{2o}\ddot{\alpha}_0 + 2hm_2 \ddot{X}_0).$$

На Рисунке 3.4 сейсмические силы и моменты направлены с учетом знаков минус в четырех последних формулах (действуют против обобщенных перемещений). На перекрытия действуют внутренние силы и моменты, они связаны с обобщенными перемещениями линейными соотношениями:

$$\begin{pmatrix} Q_0 \\ L_0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & -6h \\ -6h & 4h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ L_1 \\ Q_2 \\ L_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \varphi_1 \\ X_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

На Рисунке 3.5 все усилия показаны так, как будто они действуют в одном направлении - против обобщенных перемещений. Действительные знаки внутренних усилий учтены в последних формулах, так, например, $Q_1 = -Q_2$.

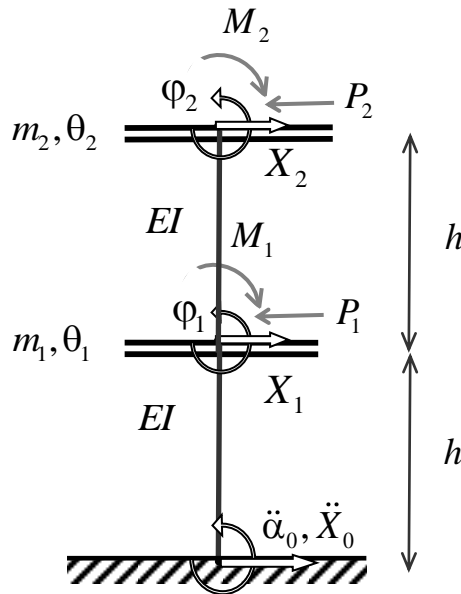


Рисунок 3.4. Консольный стержень с двумя телами под действием переносных сейсмических сил

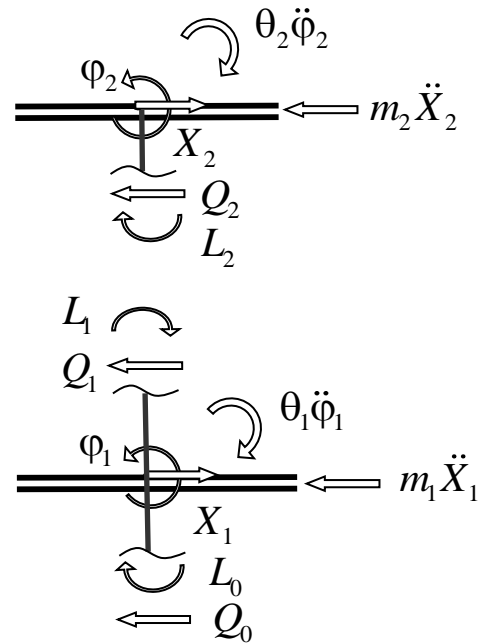


Рисунок 3.5. Восстанавливающие и даламберовы силы и моменты

По принципу Даламбера получим уравнения движения. Рассмотрим равновесие тел, мысленно «вырезав» их и приложив суммарные упругие восстанавливающие силы Q_i и моменты L_i ($i = 0, 1, 2$), действующие в сечениях стержней (Рисунок 3.5).

Два уравнения движения получим, приравняв к нулю сумму всех сил по горизонтали для каждого тела. В сумму включаем силы инерции, упругие восстанавливающие и переносные сейсмические силы:

$$m_1 \ddot{X}_1 + m_1 h \ddot{\phi}_1 + Q_0 + Q_1 = -m_1 (\ddot{X}_0 + h \ddot{\alpha}_0),$$

$$m_2 \ddot{X}_2 + 2m_2 h \ddot{\phi}_2 + Q_2 = -m_2 (\ddot{X}_0 + 2h \ddot{\alpha}_0).$$

Сумма моментов, действующих на каждое тело, так же должна быть равна нулю, это условие дает еще два уравнения:

$$\theta_1 \ddot{\phi}_1 + m_1 h \ddot{X}_1 + L_0 + L_1 = -(\theta_{10} \ddot{\alpha}_0 + m_1 h \ddot{X}_0),$$

$$\theta_2 \ddot{\varphi}_2 + 2m_2 h \ddot{X}_2 + L_2 = -(\theta_{2O} \ddot{\alpha}_0 + 2m_2 h \ddot{X}_0).$$

Система уравнений относительного движения в матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_0,$$

где матрицы \mathbf{M} и \mathbf{M}_s заданы в виде (3.15), \mathbf{K} - матрица жесткости

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & 6h \\ 0 & 8h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.

Рассмотрим движение абсолютно жесткой плиты на N стойках различной жесткости (Рисунок 3.7) k_{i1}, k_{i2} ($i=1, \dots, N$) под действием двух горизонтальных поступательных компонент сейсмического ускорения: $\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{20})^T$. Масса плиты и момент инерции относительно главной центральной оси $C3$ равны m и θ_{3C} .

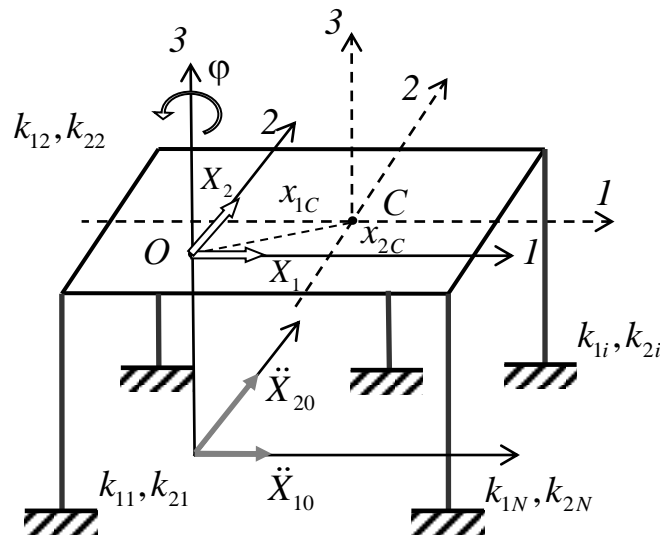


Рисунок 3.6. Пространственная модель с несовпадающими центрами масс и жесткости.

Особенность этой модели в том, что центр масс плиты C и центр жесткости O не совпадают. Напомним, что в расчетных схемах каркасных зданий с жесткими

плитами перекрытий центром жесткости (или центром изгиба) называют точку перекрытия, в которой момент от равнодействующей всех поперечных сил равен нулю (внутренние поперечные силы возникают в вертикальных стойках и других связях в ответ на внешнее воздействие). Это означает, что:

- 1) при приложении к центру жесткости внешней горизонтальной силы движение перекрытия происходит строго поступательно в направлении действия этой силы, при приложении к центру жесткости внешнего момента перекрытие поворачивается в горизонтальной плоскости относительно этого центра без каких-либо линейных перемещений;
- 2) если горизонтальная внешняя сила или момент приложены в любой другой точке, перекрытие будет совершать поступательное движение и поворот в горизонтальной плоскости относительно центра жесткости.

Координаты центра жесткости $O (x_{1c} \ x_{2c})$ определяются относительно центральных осей $C123$ из уравнения равновесия: равнодействующая поперечных сил не создает момент относительно точки O . Допустим, произвольная внешняя сила P приложена в центре жесткости O в направлении оси $O1$ (Рисунок 3.8). Перекрытие смещается на величину X_1 вдоль этого направления без поворотов, а в N стойках возникают упругие восстанавливающие силы Q_{1i} и Q_{2i} с равнодействующей $Q_1 = \sum_{i=1}^N k_{1i} X_1 = X_1 \sum_{i=1}^N k_{1i}$, i - номер стойки, k_{1i} - изгибная жесткость по направлению $O1$. Главный момент этих сил относительно точки O равен нулю (сила P момента не создает)

$$L_3 = X_1 \sum_{i=1}^N k_{1i} (x_{1i} - x_{2c}) = 0,$$

где x_{1i} - координата i -той стойки в центральных осях $C123$ в направлении 1.

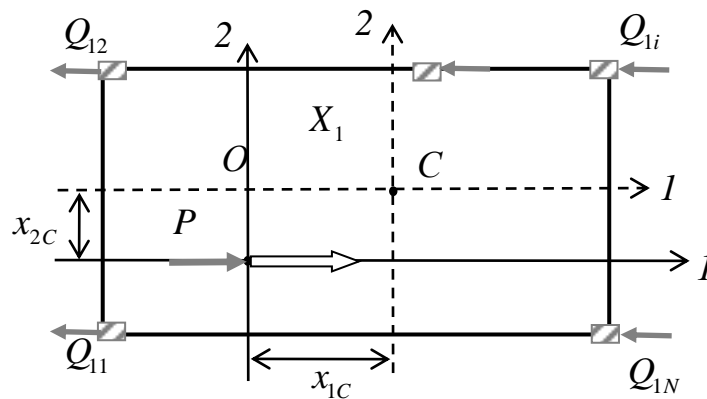


Рисунок 3.7. К определению координат центра жесткости.

Из последней формулы следует выражение для координаты центра жесткости x_{2C} в осях, связанных с центром масс (аналогичное выражение можно получить для координаты x_{1C})

$$x_{1C} = \frac{\sum_{i=1}^N k_{2i} x_{1i}}{\sum_{i=1}^N k_{2i}}, \quad x_{2C} = \frac{\sum_{i=1}^N k_{1i} x_{2i}}{\sum_{i=1}^N k_{1i}}, \quad (3.24)$$

здесь x_{1i}, x_{2i} - координаты i -той стойки в центральных осях $CXYZ$.

Введем обобщенные координаты (Рисунок 3.7), описывающие движение центра жесткости плиты O : линейные перемещения X_1, X_2 вдоль осей $O1, O2$ и угловое φ в горизонтальной плоскости относительно точки O . Фактически движение плиты можно рассматривать как колебания физического маятника относительно точки подвеса – точки O , которая, в свою очередь, движется только поступательно.

Суммарные поперечные силы равны

$$Q_1 = \sum_{i=1}^N Q_{1i} = \sum_{i=1}^N k_{1i} X_1 = K_1 X_1, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^N Q_{2i} = \sum_{i=1}^N k_{2i} X_2 = K_2 X_2,$$

здесь $K_1 = \sum_{i=1}^N k_{1i}$, $K_2 = \sum_{i=1}^N k_{2i}$ - общие жесткости перекрытия в направлениях $O1$ и $O2$.

Момент от поперечных сил равен

$$L_3 = \sum_{i=1}^N (-Q_{2i}x_{1i} + Q_{1i}x_{2i}) = -\sum_{i=1}^N k_{2i}x_{1i}X_{2i} + \sum_{i=1}^N k_{1i}x_{2i}X_{1i}.$$

Перемещения i -той стойки при повороте на малый угол φ равны $X_{1i} = -\varphi x_{2i}$ и $X_{2i} = \varphi x_{1i}$. После подстановки перемещений в формулу для L_3 получим

$$L_3 = -\left(\sum_{i=1}^N k_{2i}x_{1i}^2 + \sum_{i=1}^N k_{1i}x_{2i}^2 \right) \varphi = -K_{12}\varphi,$$

где $K_{12} = \sum_{i=1}^N k_{2i}x_{1i}^2 + \sum_{i=1}^N k_{1i}x_{2i}^2$ - общая угловая жесткость перекрытия.

Матрицы \mathbf{M} и \mathbf{M}_s формируются на основе матрицы \mathbf{M}_O . Матрица инерции системы получается из матрицы \mathbf{M}_O (3.8), если в ней оставить строки и столбцы, соответствующие обобщенным координатам X_1 , X_2 и φ . Матрица переносных инерционных коэффициентов \mathbf{M}_s получается из \mathbf{M}_O , если в ней оставить столбцы, соответствующие поступательному движению \ddot{X}_{10} , \ddot{X}_{20} , и строки, соответствующие обобщенным координатам X_1 , X_2 и φ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & -mx_{2c} \\ 0 & m & mx_{1c} \\ -mx_{2c} & mx_{1c} & \theta_{30} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \\ -mx_{2c} & mx_{1c} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\theta_{30} = \theta_3 + m(x_{1c}^2 + x_{2c}^2).$$

Запишем уравнения движения в матричном виде относительно вектора обобщенных координат $\mathbf{q} = (X_1 \quad X_2 \quad \varphi)^T$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0, \quad (3.26)$$

где $\mathbf{K} = \text{diag}(K_1 \quad K_2 \quad K_{12})$ - матрица жесткости, $\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{20})^T$ - вектор сейсмического воздействия, матрицы \mathbf{M} и \mathbf{M}_s определяются по (3.25). Уравнения движения в развернутом виде:

$$\begin{cases} m\ddot{X}_1 - mx_{2c}\ddot{\varphi} + K_1 X_1 = -m\ddot{X}_{10}, \\ m\ddot{X}_2 + mx_{1c}\ddot{\varphi} + K_2 X_2 = -m\ddot{X}_{20}, \\ \theta_{30}\ddot{\varphi} - mx_{2c}\ddot{X}_1 + mx_{1c}\ddot{X}_2 + K_{12}\varphi = -m(-\ddot{X}_{10}x_{2c} + \ddot{X}_{20}x_{1c}). \end{cases}$$

Правая часть третьего уравнения системы показывает, что при поступательном сейсмическом движении система с эксцентриситетом между центром масс и центром изгиба совершает не только изгибные, но и вынужденные крутильные колебания. Чтобы не нагружать конструкцию дополнительными крутящими моментами, эксцентриситет (x_{1c}, x_{2c}) должен быть минимальным.

В [44] приведены уравнения движения модели многоэтажного каркасного здания со смещенными центрами масс с учетом $P - \Delta$ -эффекта и демпфирования.

Пример 5. Модель каркасного здания с двумя перекрытиями под сейсмическим воздействием, заданным двумя поступательными и ротационным ускорениями грунта (Рисунок 3.8) $\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{30} \quad \ddot{\alpha}_{20})^T$. Обозначим m_1, θ_1 и m_2, θ_2 - массы и моменты инерции перекрытий в их главных центральных осях, EI, EF - изгибная жесткость и жесткость на растяжение-сжатие каждой стойки, h - высота этажа, B - ширина перекрытия. Движение каждого перекрытия описывается шестью обобщенными координатами: относительными линейными горизонтальными перемещениями X_1, X_2 , вертикальными Y_1, Y_2 и угловыми φ_1, φ_2 (Рисунок 3.9). Введем вектор обобщенных координат:

$$\mathbf{q} = (Y_1 \quad X_1 \quad \varphi_1 \quad Y_2 \quad X_2 \quad \varphi_2)^T. \quad (3.27)$$

Система включает два твердых тела, поэтому матрица инерции составляется из двух матриц \mathbf{M}_o (3.8') так, чтобы соблюдалось соответствие между обобщенной

координатой и строкой \mathbf{M}_O . Для обоих перекрытий $x_{1c} = 0$, для первого перекрытия $x_{2c} = h$, для второго $x_{2c} = 2h$. Матрица $\mathbf{M}_O^{(1)}$ для первого (нижнего) перекрытия и воздействия $\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{30} \quad \ddot{\alpha}_{20})^T$ имеет вид:

$$\mathbf{M}_O^{(1)} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & m_1 h \\ 0 & m_1 & 0 \\ m_1 h & 0 & \theta_{10} \end{pmatrix}, \quad \theta_{10} = \theta_1 + m_1 h^2.$$

Для верхнего (второго) перекрытия:

$$\mathbf{M}_O^{(2)} = \begin{pmatrix} m_2 & 0 & 2m_2 h \\ 0 & m_2 & 0 \\ 2m_2 h & 0 & \theta_{20} \end{pmatrix}, \quad \theta_{20} = \theta_2 + 4m_2 h^2.$$

Матрица инерции РДМ для вектора обобщенных перемещений $\mathbf{q} = (Y_1 \quad X_1 \quad \varphi_1 \quad Y_2 \quad X_2 \quad \varphi_2)^T$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_1 h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 h & \theta_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 2m_2 h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_2 h & \theta_{20} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Определим сейсмические силы, действующие на каждое перекрытие. Составим матрицу \mathbf{M}_s для вектора сейсмического воздействия $\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{30} \quad \ddot{\alpha}_{20})^T$ и вектора обобщенных перемещений (3.27):

$$\mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & 0 \\ m_1 & 0 & m_1 h \\ m_1 h & 0 & \theta_{10} \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_2 & 0 & 2m_2 h \\ 2m_2 h & 0 & \theta_{20} \end{pmatrix}.$$

Вектор переносных сейсмических сил в направлении каждой обобщенной координаты равен $\mathbf{P} = -\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_0$, или в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} P_{Y1} \\ P_{X1} \\ M_1 \\ P_{Y2} \\ P_{X2} \\ M_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & m_1 & 0 \\ m_1 & 0 & hm_1 \\ hm_1 & 0 & \theta_{10} \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_2 & 0 & 2hm_2 \\ 2hm_2 & 0 & \theta_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_{10} \\ \ddot{X}_{30} \\ \ddot{\alpha}_{20} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

В развернутом виде

$$P_{X1} = -m_1 (\ddot{X}_{10} + h\ddot{\alpha}_{20}), \quad P_{X2} = -m_2 (\ddot{X}_{10} + 2h\ddot{\alpha}_{20}),$$

$$P_{Y1} = -m_1 \ddot{X}_{30}, \quad P_{Y2} = -m_2 \ddot{X}_{30},$$

$$M_1 = -(hm_1 \ddot{X}_{10} + \theta_{10} \ddot{\alpha}_{20}) \quad \text{и} \quad M_2 = -(2hm_2 \ddot{X}_{10} + \theta_{20} \ddot{\alpha}_{20}),$$

На Рисунке 3.9 сейсмические силы и моменты направлены с учетом знаков минус в последних формулах.

По принципу Даламбера получим уравнения движения. Рассмотрим равновесие перекрытий, мысленно «вырезав» их и приложив упругие восстанавливающие силы и моменты, действующие в сечениях стоек (Рисунок 3.9), а также даламберовы силы инерции (обозначены стрелками с серой заливкой).

Введем узловые перемещения конечных элементов - стоек U_i, V_i, α_i , ($i=1, \dots, 6$) (Рисунок 3.8). Из условия абсолютной жесткости перекрытий и малости углов поворотов следует связь между узловыми перемещениями и обобщенными координатами:

$$\begin{aligned} U_2 = U_5 = X_1, \quad U_3 = U_4 = X_2, \quad \alpha_2 = \alpha_5 = \varphi_1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \varphi_2, \\ V_2 = Y_1 - \varphi_1 \frac{B}{2}, \quad V_3 = Y_2 - \varphi_2 \frac{B}{2}, \quad V_5 = Y_1 + \varphi_1 \frac{B}{2}, \quad V_4 = Y_2 + \varphi_2 \frac{B}{2}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

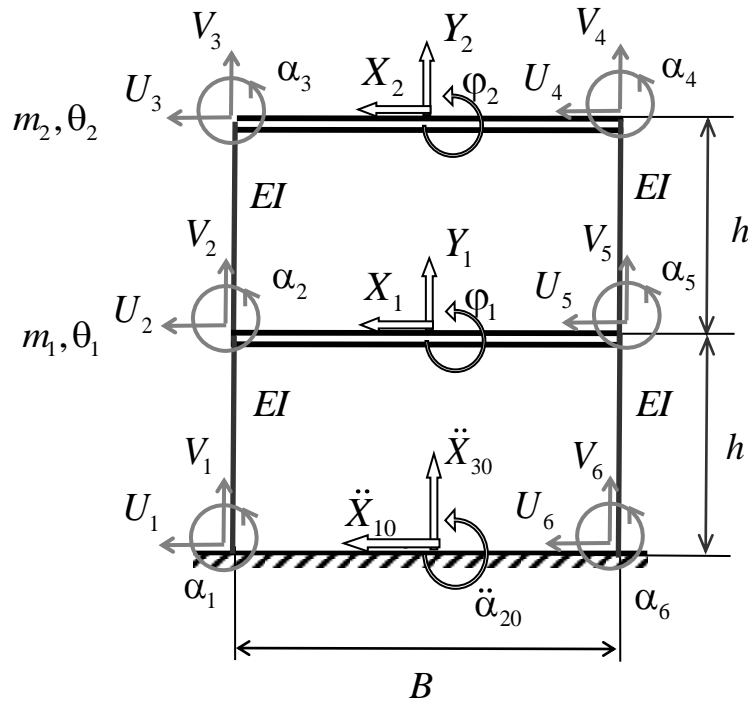


Рисунок 3.8. Обобщенные координаты и координаты конечных элементов.

Граничные условия в относительном движении:

$$U_1 = 0, V_1 = 0, U_6 = 0, V_6 = 0, \alpha_1 = \alpha_6 = 0. \quad (3.31)$$

Матрица жесткости стержневого элемента $\mathbf{K}_{эл}$ связывает внутренние усилия

N_i, Q_i, L_i ($i = 2, 3, 4, 5$) с узловыми перемещениями:

$$\mathbf{K}_{эл} = \begin{pmatrix} EF/h & 0 & 0 & -EF/h & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/h^3 & 6EI/h^2 & 0 & -12EI/h^3 & 6EI/h^2 \\ 0 & 6EI/h^2 & 4EI/h & 0 & -6EI/h^2 & 2EI/h \\ -EF/h & 0 & 0 & EF/h & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/h^3 & -6EI/h^2 & 0 & 12EI/h^3 & -6EI/h^2 \\ 0 & 6EI/h^2 & 2EI/h & 0 & -6EI/h^2 & 4EI/h \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

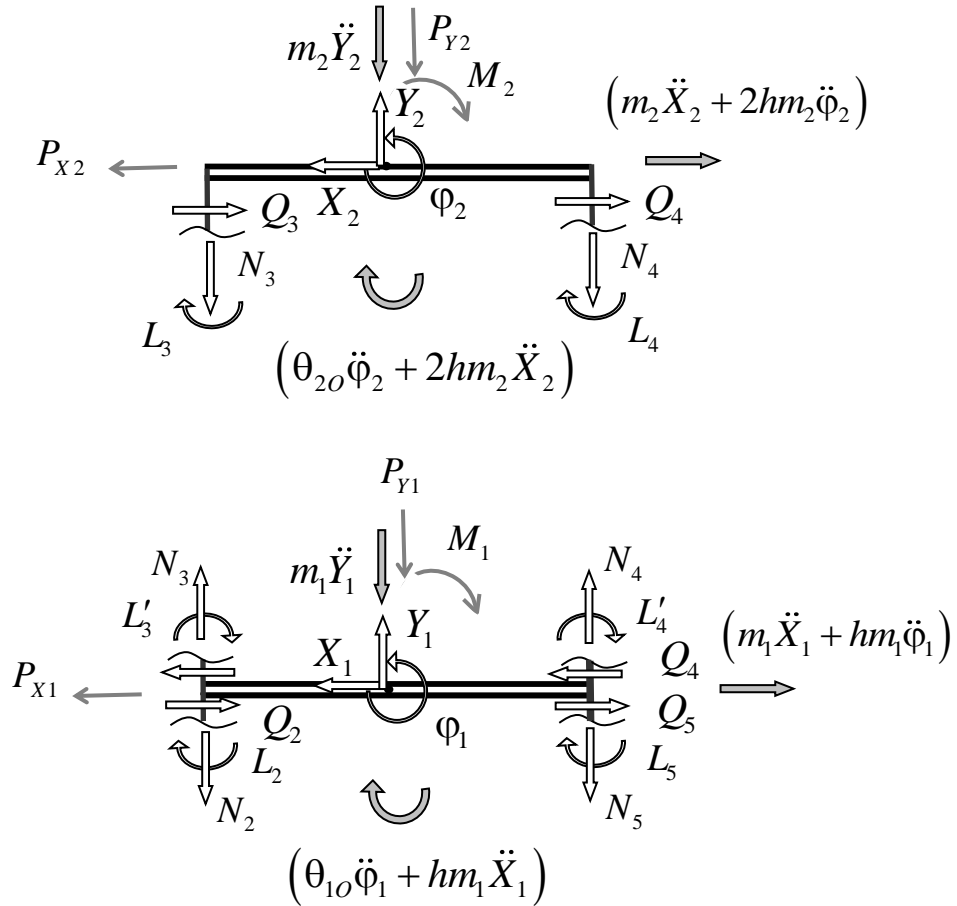


Рисунок 3.9. Силы и моменты на перекрытия

Пусть \mathbf{k}_j - j -тая строка матрицы \mathbf{K} ($j=1, \dots, 6$). Тогда с учетом (3.30) и (3.31) продольные силы равны:

$$N_2 = \mathbf{k}_4 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = (EF/h)(V_2 - V_1) = (EF/h)(Y_1 - B\phi_1/2),$$

$$N_3 = \mathbf{k}_4 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = (EF/h)(V_3 - V_2) = \\ = (EF/h)(Y_2 - Y_1 - B(\phi_2 - \phi_1)/2),$$

$$N_4 = \mathbf{k}_4 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = (EF/h)(V_4 - V_5) = \\ = (EF/h)(Y_2 - Y_1 + B(\phi_2 - \phi_1)/2),$$

$$N_5 = \mathbf{k}_4 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = (EF/h)(V_5 - V_6) = (EF/h)(Y_1 + B\phi_1/2), \quad \text{попе-}$$

речные силы:

$$Q_2 = \mathbf{k}_5 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = (12EI/h^3)(U_2 - U_1) - (6EI/h^2)\alpha_2 = \\ = (12EI/h^3)X_1 - (6EI/h^2)\phi_1,$$

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \mathbf{k}_5 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = (12EI/h^3)(U_3 - U_2) - (6EI/h^2)(\alpha_2 + \alpha_3) = \\
&= (12EI/h^3)(X_2 - X_1) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \varphi_2), \\
Q_4 &= \mathbf{k}_5 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = (12EI/h^3)(U_4 - U_5) - (6EI/h^2)(\alpha_4 + \alpha_5) = \\
&= (12EI/h^3)(X_2 - X_1) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \varphi_2), \\
Q_5 &= \mathbf{k}_5 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = (12EI/h^3)(U_5 - U_6) - (6EI/h^2)(\alpha_5 + \alpha_6) = \\
&= (12EI/h^3)X_1 - (6EI/h^2)\varphi_1,
\end{aligned}$$

из-

гибающие моменты:

$$\begin{aligned}
L_2 &= \mathbf{k}_6 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = (6EI/h^2)(U_1 - U_2) + (2EI/h)(\alpha_1 + 2\alpha_2) = \\
&= -(6EI/h^2)X_1 + (4EI/h)\varphi_1, \\
L_3 &= \mathbf{k}_6 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = (6EI/h^2)(U_2 - U_3) + (2EI/h)(\alpha_2 + 2\alpha_3) = \\
&= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(\varphi_1 + 2\varphi_2), \\
L'_3 &= \mathbf{k}_3 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = (6EI/h^2)(U_2 - U_3) + (2EI/h)(2\alpha_2 + \alpha_3) = \\
&= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \varphi_2), \\
L_4 &= \mathbf{k}_6 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = (6EI/h^2)(U_5 - U_4) + (2EI/h)(\alpha_5 + 2\alpha_4) = \\
&= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(\varphi_1 + 2\varphi_2), \\
L'_4 &= \mathbf{k}_3 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = (6EI/h^2)(U_5 - U_4) + (2EI/h)(2\alpha_5 + \alpha_4) = \\
&= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \varphi_2), \\
L_5 &= \mathbf{k}_6 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = (6EI/h^2)(U_6 - U_5) + (2EI/h)(\alpha_6 + 2\alpha_5) = \\
&= -X_1(6EI/h^2) + (4EI/h)\varphi_1.
\end{aligned}$$

Отметим, что внутренние усилия направлены против соответствующих им перемещений, кроме того, внутренние поперечная и продольная силы равны и противоположно направлены на концах элемента (Рисунок 3.9), а изгибающие моменты имеют разные значения на концах.

Условия равновесия первого перекрытия дают три уравнения движения (Рисунок 3.29). Сумма сил по горизонтали равна нулю

$$m_1\ddot{X}_1 + m_1h\ddot{\phi}_1 + Q_2 + Q_5 - Q_3 - Q_4 = P_{X1},$$

сумма всех сил по вертикали равна нулю:

$$m_1\ddot{Y}_1 + N_2 + N_5 - N_3 - N_4 = P_{Y1},$$

сумма моментов всех сил относительно центра перекрытия равна нулю:

$$\theta_1\ddot{\phi}_1 + m_1h\ddot{X}_1 + L_2 + L_5 + L'_3 + L'_4 + (B/2)(N_5 - N_2 + N_3 - N_4) = M_1.$$

Те же условия для второго перекрытия:

$$m_2\ddot{X}_2 + 2m_2h\ddot{\phi}_2 + Q_3 + Q_4 = P_{X2},$$

$$m_2\ddot{Y}_2 + N_3 + N_4 = P_{Y2},$$

$$\theta_2\ddot{\phi}_2 + 2m_2h\ddot{X}_2 + L_3 + L_4 + (B/2)(N_4 - N_3) = M_2.$$

Подставляя выражения для внутренних усилий через обобщенные координаты, получим уравнения движения системы в относительном движении:

$$m_1\ddot{Y}_1 + 4Y_1(EF/h) - 2Y_2(EF/h) = -m_1\ddot{Y}_0,$$

$$m_1\ddot{X}_1 + m_1h\ddot{\phi}_1 + 4(12EI/h^3)X_1 - 2(12EI/h^3)X_2 + 2(6EI/h^2)\phi_2 = -m_1(\ddot{X}_0 + h\ddot{\alpha}_0),$$

$$\theta_1\ddot{\phi}_1 + m_1h\ddot{X}_1 - 2(6EI/h^2)X_2 + [B^2(EF/h) + 4(4EI/h)]\phi_1 -$$

$$+ [(4EI/h) - (B^2/2)(EF/h)]\phi_2 = -(\theta_1\ddot{\alpha}_0 + hm_1\ddot{X}_{10}),$$

$$m_2\ddot{Y}_2 + 2(EF/h)Y_2 - 2(EF/h)Y_1 = -m_2\ddot{Y}_0,$$

$$m_2\ddot{X}_2 + 2m_2h\ddot{\phi}_2 - 2(12EI/h^3)X_1 + 2(12EI/h^3)X_2 - 2(6EI/h^2)\phi_1 - 2(6EI/h^2)\phi_2 =$$

$$= -m_2(\ddot{X}_0 + 2h\ddot{\alpha}_0),$$

$$\theta_2\ddot{\phi}_2 + 2hm_2\ddot{X}_2 + 2(6EI/h^2)X_1 - 2(6EI/h^2)X_2 + [(4EI/h) - (B^2/2)(EF/h)]\phi_1 +$$

$$+ [(B^2/2)(EF/h) + 2(4EI/h)]\phi_2 = -(\theta_2\ddot{\alpha}_0 + 2hm_2\ddot{X}_{10}).$$

Уравнения относительного движения в матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}_s, \quad (3.33)$$

где $\mathbf{q} = (Y_1 \quad X_1 \quad \varphi_1 \quad Y_2 \quad X_2 \quad \varphi_2)^T$ - вектор обобщенных координат,

\mathbf{M} - матрица инерции (3.28), \mathbf{K} - матрица жесткости:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4EF/h & 0 & 0 & -2EF/h & 0 & 0 \\ 0 & 48EI/h^3 & 0 & 0 & -24EI/h^3 & 12EI/h^2 \\ 0 & 0 & (16EI + B^2EF)/h & 0 & -12EI/h^2 & (4EI - B^2EF/2)/h \\ -2EF/h & 0 & 0 & 2EF/h & 0 & 0 \\ 0 & -24EI/h^3 & -12EI/h^2 & 0 & 24EI/h^3 & -12EI/h^2 \\ 0 & 12EI/h^2 & (4EI - B^2EF/2)/h & 0 & -12EI/h^2 & (8EI + B^2EF/2)/h \end{pmatrix},$$

\mathbf{P}_s - вектор переносных сейсмических сил, выражается через матрицу переносных инерционных коэффициентов (3.29) $\mathbf{P} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0$.

3.3. Характеристики демпфирования и связь между ними

Рассмотрим вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = P(t),$$

где m - масса системы, b - коэффициент вязкого сопротивления, c - жесткость, $P(t)$ - приложенная внешняя сила. В стандартной форме это уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \Omega^2x = \frac{1}{m}P(t),$$

где $\varepsilon = \frac{b}{2m}$ - коэффициент демпфирования, имеет размерность c^{-1} , $\Omega^2 = \frac{k}{m}$ - соб-

ственная частота системы.

За безразмерные характеристики демпфирования принимают:

- $\xi = \frac{\varepsilon}{\Omega}$ - коэффициент затухания (или относительное демпфирование),

- $\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}}$ - логарифмический декремент колебаний, равный натуральному логарифму отношения двух последовательных максимальных амплитуд колебаний A_k и A_{k+1} .
- $\gamma = \frac{\delta}{\pi}$ - коэффициент рассеяния энергии (или коэффициент потерь, или коэффициент неупругого сопротивления).

Ниже даны формулы связи характеристик демпфирования:

$$\delta = 2\pi \frac{\varepsilon}{\Omega} = 2\pi\xi, \quad \xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{\gamma}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\Omega\delta}{2\pi} = \gamma \frac{\Omega}{2}, \quad \gamma = 2\xi = \frac{\delta}{\pi} = 2 \frac{\varepsilon}{\Omega}.$$

Например, для коэффициента затухания бетона $\xi = 0.05$ коэффициент рассеяния $\gamma = 2\xi = 0.1$.

3.4. Уравнения относительного движения диссипативной системы и решение в пространстве главных координат

Уравнение движения диссипативной системы с n степенями свободы имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}_s \quad (3.34)$$

здесь $\mathbf{q}^{[n]}$ - вектор обобщенных перемещений, $\mathbf{M}^{[n \times n]}$ - матрица инерции, $\mathbf{V}^{[n \times n]}$ - матрица демпфирования, $\mathbf{K}^{[n \times n]}$ - матрица жесткости $\mathbf{P}_s^{[n]} = -\mathbf{M}_s^{[n \times 6]} \ddot{\mathbf{q}}_0^{[6]}$ - вектор переносных сейсмических сил при шестикомпонентном векторе ускорений $\ddot{\mathbf{q}}_0$.

Матрица переносных инерционных коэффициентов \mathbf{M}_s формируется для каждой степени свободы (или обобщенной координаты) по правилам, изложенным в п.3.2.

Будем считать известными матрицу собственных векторов $\mathbf{V}^{[n \times n]}$ системы (3.34) и диагональную матрицу квадратов собственных частот $\mathbf{\Omega}^2$. Переход к главным координатам осуществим при помощи ортогонального преобразования

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{u}. \quad (3.35)$$

В пространстве главных координат система уравнений (3.34) превращается в набор не связанных между собой дифференциальных уравнений второго порядка, каждое из которых соответствует движению одномассового осциллятора. Процедура разделения возможна благодаря свойствам матрицы собственных форм, и при принятии одной из трех гипотез, связанных с демпфированием:

свойства матрицы собственных форм:

1) выполняется соотношение

$$\mathbf{KV} = \mathbf{MV}\Omega^2, \quad (3.36)$$

2) преобразование матрицы инерции дает диагональную матрицу *модальных масс*

$$\mathbf{V}^T \mathbf{MV} = \mathbf{M}_{\text{mod}}, \quad (3.37)$$

здесь $\mathbf{M}_{\text{mod}} = \text{diag} [M_{\text{mod},k}]$, где $M_{\text{mod},k} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}_k$ - *модальная масса* по k -той форме,

\mathbf{v}_k - собственный вектор k -той формы, $\mathbf{M}_{\text{mod}}^{-1} = \text{diag} \left[\frac{1}{M_{\text{mod},k}} \right]$.

Гипотезы о демпфировании [46]:

1. Гипотеза внешнего трения: матрица демпфирования пропорциональна матрице инерции: $\mathbf{B} = 2\varepsilon \mathbf{M}$, ε - скалярный коэффициент.

2. Гипотеза внутреннего трения: матрица демпфирования пропорциональна матрице жесткости: $\mathbf{B} = 2\eta \mathbf{K}$, η - скалярный коэффициент.

3. Случай малой диссипации.

Далее будем предполагать, что демпфирование в системе мало. При малой диссипации матрица демпфирования $2\varepsilon = \mathbf{M}_{\text{mod}}^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V}$ может считаться диагональной $\varepsilon = \text{diag} [\varepsilon_k]$, где ε_k - модальный коэффициент демпфирования по k -той собственной форме.

Выполним подстановку $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{u}$ в (3.34) и умножим все уравнение сначала слева на \mathbf{V}^T , а затем – слева на $\mathbf{M}_{\text{mod}}^{-1}$. С учетом (3.36), (3.37) система уравнений (3.34) принимает вид:

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\varepsilon\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{u} = \mathbf{Q}, \quad (3.38)$$

где $\mathbf{u}^{[n]}$ - вектор главных координат, $\mathbf{Q}^{[n]} = -\mathbf{M}_{\text{mod}}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0$ - вектор переносных сейсмических сил, приведенный к главным координатам или вектор модальных сейсмических нагрузок. Уравнение (3.38) в покомпонентном виде:

$$\ddot{u}_k + 2\varepsilon_k\dot{u}_k + \Omega_k^2u_k = Q_k, \quad (3.39)$$

где $Q_k = -\frac{1}{M_{\text{mod},k}}\mathbf{v}_k^T\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0$. Решение уравнения (3.39) найдем с помощью интеграла Дюамеля для случая малого демпфирования:

$$u_k = \frac{1}{\Omega_k} \int_0^t Q_k \exp[-\varepsilon_k(t-\tau)] \sin \Omega_k(t-\tau) d\tau.$$

Множитель в выражении для модальной силы, не зависящий от времени, вынесем за знак интеграла:

$$u_k = -\frac{\mathbf{v}_k^T\mathbf{M}_s}{\Omega_k M_{\text{mod},k}} \int_0^t \ddot{\mathbf{q}}_0(\tau) \exp[-\varepsilon_k(t-\tau)] \sin \Omega_k(t-\tau) d\tau. \quad (3.40)$$

Обозначим $\mathbf{w}_k^{[6]}$ - шестимерный вектор, зависящий от вектора ускорения основания $\ddot{\mathbf{q}}_0^{[6]}$, определенный для каждой k -той собственной формы

$$\mathbf{w}_k(t, \ddot{\mathbf{q}}_0) = -\Omega_k \int_0^t \ddot{\mathbf{q}}_0(\tau) \exp[-\varepsilon_k(t-\tau)] \sin \Omega_k(t-\tau) d\tau,$$

тогда решение в главных координатах можно записать более компактно:

$$u_k = \frac{\mathbf{v}_k^T\mathbf{M}_s\mathbf{w}_k}{\Omega_k^2 M_{\text{mod},k}}. \quad (3.41)$$

Напомним, что в формуле (3.41) $\mathbf{v}_k^{[n]}$ - вектор k -той собственной формы, $\mathbf{M}_s^{[n \times 6]}$ - матрица переносных инерционных коэффициентов, вектор \mathbf{w}_k имеет смысл ускорения, приведенного к k -той форме колебаний.

Решение в исходном базисе определяют, используя разложение перемещений \mathbf{q} по собственным формам (3.35). Найденным перемещениям \mathbf{q} соответствуют обобщенные внутренние усилия $\mathbf{S} = \mathbf{Kq}$.

Принимая во внимание, что $\mathbf{KV} = \mathbf{MV}\Omega^2$, получим вектор отклика системы на сейсмическое воздействие

$$\mathbf{S} = \mathbf{Kq} = \mathbf{KVu} = \mathbf{MV}\Omega^2\mathbf{u}. \quad (3.42)$$

Формулу (3.42) представим в виде суммы, каждое слагаемое в которой соответствует реакции конструкции по конкретной форме колебаний. Вектор обобщенных координат \mathbf{q} разложим по собственным формам \mathbf{v}_k :

$$\mathbf{q} = \mathbf{Vu} = \sum_{k=1}^n u_k \mathbf{v}_k.$$

Вектор внутренних усилий \mathbf{S} с учетом последней формулы так же равен сумме векторов модальных откликов \mathbf{S}_k

$$\mathbf{S} = \mathbf{Kq} = \sum_{k=1}^n u_k \mathbf{Kv}_k = \sum_{k=1}^n u_k \Omega_k^2 \mathbf{Mv}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_k, \quad (3.43)$$

здесь $\mathbf{S}_k = u_k \Omega_k^2 \mathbf{Mv}_k$ - вектор модальных усилий по k -той форме, u_k - модальное перемещение в главных координатах по этой форме.

Представим i -тую строку матрицы инерции \mathbf{M} (матрица \mathbf{M} не обязательно диагональная) в виде вектора-строки $\mathbf{m}_i^{[n]}$, $i = 1, \dots, n$. Такое представление даёт возможность записать вектор \mathbf{S}_k в покомпонентной форме

$$S_{ik} = \Omega_k^2 \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k u_k,$$

здесь S_{ik} - модальное внутреннее усилие по k -той собственной форме, действующее в направлении i -той обобщенной координаты. С учетом (3.41) получим формулу для расчета величины модального внутреннего усилия

$$S_{ik} = \frac{\mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{w}_k. \quad (3.44)$$

3.5. Статическое решение

В нормах по сейсмическим расчетам применен статический подход, при котором интенсивность сейсмического воздействия задается константой. Внешние сейсмические силы прикладываются к конструкции статически, следовательно, внутренние усилия не зависят от времени, что значительно упрощает дальнейшие конструктивные расчеты.

В статической постановке вектор сейсмического воздействия $\ddot{\mathbf{q}}_0^{[6]}(t) = I_X \cdot \mathbf{v}^{[6]}(t)$ превращается в вектор с постоянными коэффициентами $\ddot{\mathbf{q}}_0 = I_X \mathbf{v} = \text{const}$. Смысл постоянных во времени направляющих косинусов пока оставим неопределенным; он прояснится ниже, когда вектор \mathbf{v} будет трактоваться либо как вектор опасных направлений сейсмического воздействия, либо как известное заданное направление.

Рассмотрим уравнения движения в главных координатах

$$\ddot{u}_k + 2\varepsilon_k \dot{u}_k + \Omega_k^2 u_k = Q_k,$$

где $Q_k = -\frac{I_X}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}^{[6]}$ или, что то же, $Q_k = -\frac{I_X}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}^{[n]}$ - модальные сей-

смические силы. Сейсмические силы образуют вектор

$$\mathbf{Q} = -I_X \mathbf{M}_{\text{mod}}^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}^{[6]}. \quad (3.45)$$

Эти силы постоянны во времени и прикладываются к системе статически.

Модальное перемещение от статической нагрузки равно

$$u_k^{cm} = -\frac{I_X}{M_{\text{mod},k} \Omega_k^2} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}^{[6]}.$$

Минус показывает, что перемещение направлено против направления движения грунта.

Динамические перемещения получим, умножив статические u_k^{cm} на модальный коэффициент динамичности

$$u_k = \beta_k u_k^{cm} = -\frac{\beta_k I_X}{M_{\text{mod},k} \Omega_k^2} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}^{[6]}. \quad (3.46)$$

Если переносные инерционные силы представлены в виде (3.11), то модальные перемещения в главных координатах (3.46) равны

$$u_k = -\frac{\beta_k I_X}{M_{\text{mod},k} \Omega_k^2} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}^{[n]}. \quad (3.46')$$

Перемещения в исходных обобщенных координатах определяются по формуле $\mathbf{q} = \mathbf{V} \mathbf{u}$, где вектор-столбец \mathbf{u} составлен из элементов u_k . Вектор \mathbf{q} состоит из перемещений $q_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{u}$, перемещение q_i соответствует i -той обобщенной координате.

3.6. Модальные коэффициенты динамичности и спектры ускорений

Коэффициент динамичности по определению равен отношению максимального значения динамического перемещения к перемещению от статической нагрузки.

Рассмотрим вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = P(t),$$

здесь m - масса осциллятора, b - коэффициент вязкого сопротивления, k - коэффициент жесткости, $P(t)$ - сейсмическая сила. В стандартной форме это уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \Omega^2 x = \frac{1}{m} P(t), \quad (3.47)$$

где $\varepsilon = \frac{b}{2m}$ - коэффициент демпфирования, $\Omega^2 = \frac{k}{m}$ - квадрат собственной частоты осциллятора.

При статическом методе расчета к системе (3.47) прикладываются *статические* сейсмические нагрузки. Для статических нагрузок решение $x = x_{cm}$ не зависит от времени, что равносильно отбрасыванию двух первых слагаемых в левой части (3.43)

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \Omega^2 x = \frac{1}{m} P(t) \xrightarrow{P=const} \Omega^2 x_{cm} = \frac{1}{m} P.$$

Решая последнее уравнение, определяем перемещение от статически приложенной силы (статическое перемещение)

$$x_{cm} = \frac{P}{m\Omega^2}. \quad (3.48)$$

Динамические перемещения определим с помощью коэффициента динамичности, который по определению равен

$$\beta = \frac{x_{дин}}{x_{cm}}, \quad (3.49)$$

то есть максимальное динамическое перемещение $x_{дин} = \beta x_{cm}$. Для линейных задач это эквивалентно умножению сейсмических сил P на коэффициент динамичности

$$x_{дин} = \beta x_{cm} = \frac{\beta P}{m\Omega^2} \quad (3.50)$$

Сейсмические силы – это инерционные силы конструкции при кинематическом возбуждении фундамента, то есть $P(t) = -m \cdot \ddot{q}_0(t)$. Если расчет проводится по акселерограммам, то за интенсивность воздействия \ddot{q}_0 принимают либо максимальное значение модуля вектора ускорения грунта, либо его стандарт (, см. п.2.3. В расчете по нормам интенсивность \ddot{q}_0 равна нормативному значению ускорения

грунта. Во всех случаях постоянному значению ускорения \ddot{q}_0 соответствует *статическая сейсмическая сила* P . С учетом (3.50) и последней формулы получаем альтернативный вариант формулы (3.49):

$$\beta = \Omega^2 \frac{x_{дин}}{\ddot{q}_0}.$$

Коэффициент динамичности связан со спектром ускорений. По формуле (3.50), для учета динамических эффектов статическую сейсмическую силу (фактически – ускорение \ddot{q}_0) надо умножить на коэффициент динамичности β . Произведение $\beta\ddot{q}_0$ называется *спектральным ускорением* – это максимальное ускорение одно-массового осциллятора с собственной частотой Ω (или собственным периодом T). Для множества осцилляторов с разными собственными периодами T коэффициент динамичности β будет функцией $\beta(T)$. Совокупность спектральных ускорений составляет спектр ускорений $\ddot{q}_0 \cdot \beta(T)$. Таким образом, коэффициент динамичности – это нормированный на величину интенсивности спектр ускорений.

Алгоритм расчета функции $\beta(T)$ по заданной акселерограмме может быть следующим: правую часть уравнения (3.47) представляют в виде акселерограммы $\ddot{q}_0(t)$. Перемещение $x(t)$ определяют численным интегрированием интеграла Дюамеля, затем результат дважды дифференцируют и находят максимальное по модулю ускорение. Заметим, что акселерограмма $\ddot{q}_0(t)$ – функция с высокочастотными составляющими, поэтому процедура двойного численного дифференцирования функции $x(t)$ может быть крайне неустойчивой в вычислительном смысле. Для случая малого демпфирования можно воспользоваться приближенной формулой $\ddot{x}(t) \approx \Omega^2 x(t)$. Проведя эту процедуру для каждого собственного периода T или частоты Ω , получают спектр ускорений. Далее этот спектр нормируют на величину максимального ускорения.

Описанный алгоритм основан на детерминированном подходе, при котором акселерограмма представляется в виде неслучайной функции от времени. Существует и альтернативная методика расчета КД, разработанная благодаря трудам замечательных отечественных ученых-механиков В.В. Болотина и М.Ф. Барштейна. Она предполагает вероятностный подход к описанию сейсмического воздействия с применением методов статистической динамики [40, 43, 35, 75]. Акселерограмма $\ddot{q}_0(t)$ представляется как одна из реализаций случайного процесса и описывается с помощью его вероятностных характеристик, таких как математическое ожидание, дисперсия, спектральная плотность и корреляционная функция. Поскольку чаще всего расчет на сейсмостойкость проводят по единственной записи землетрясения, соответствующий процесс считают эргодическим. Решение $x(t)$ является реакцией стационарной линейной системы на внешнее случайное воздействие $\ddot{q}_0(t)$, а уравнение (3.47) используется для получения связи спектральных плотностей случайных процессов на входе и выходе линейной системы.

При случайных нагрузках коэффициент динамичности (3.49) представляет собой реализацию случайного процесса. Как любой случайный процесс, он характеризуется своими вероятностными параметрами. Для эргодического случайного процесса рассеяние коэффициента динамичности описывается его стандартом

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_x}{x_{cm}},$$

здесь σ_x - стандарт перемещения $x(t)$. Стандарт σ_β принимают за коэффициент динамичности в статистической динамике. Поскольку стандарт – неслучайная величина, его удобно использовать при расчетах. Формула (3.49) для стандартов принимает вид:

$$\sigma_\beta = \Omega^2 \frac{\sigma_x}{\ddot{q}_0}.$$

Для многомерных систем коэффициент динамичности представляет собой функцию собственных частот Ω_k (или периодов $T_k = \frac{2\pi}{\Omega_k}$) [75]:

$$\sigma_{\beta}(\Omega_k, \gamma) = \left(\int_0^{\infty} \frac{\Omega_k^4 G_a(\omega)}{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + \Omega_k^2 \gamma^2 \omega^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

здесь $\gamma = 2 \frac{\varepsilon_k}{\Omega_k}$ - коэффициент рассеяния энергии, $G_a(\omega)$ - сглаженная спектральная плотность входного процесса $a(t)$.

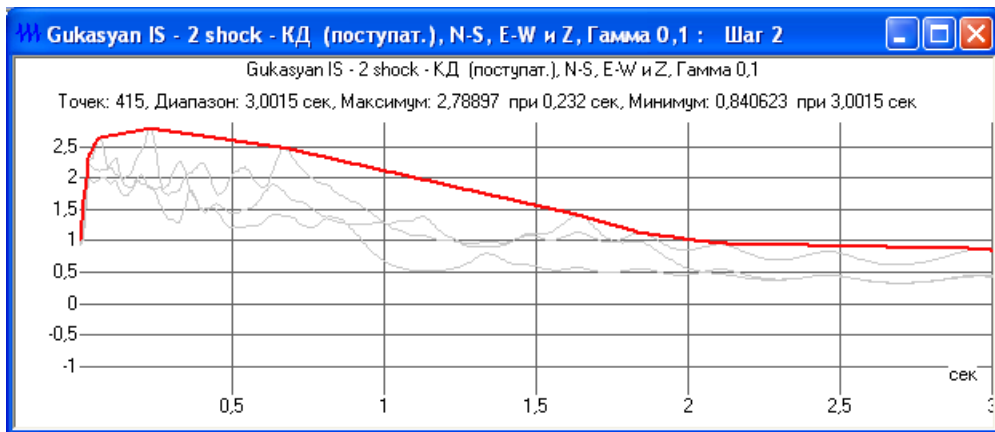


Рисунок 3.10. Три графика КД для поступательного движения и общая огибающая. Землетрясение в г. Спитак, 1988 г.

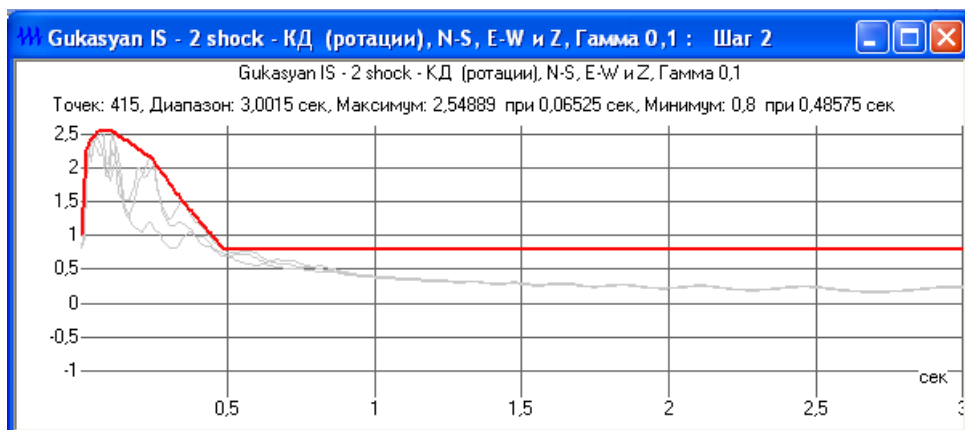


Рисунок 3.11. Три графика КД для ротационного движения и общая огибающая. Землетрясение в г. Спитак, 1988 г.

При расчете по акселерограммам каждой записи соответствует своя диаграмма коэффициента динамичности в осях собственных периодов. Для шестикомпонентного воздействия таких диаграмм будет шесть. В [75] предлагается принимать за модальный КД $\beta_k(\Omega_k)$ общую огибающую всех диаграмм коэффициентов динамичности.

3.7. Модальные усилия и перемещения. Коэффициенты формы и участия

Динамическая реакция системы включает внутренние усилия и перемещения по обобщенным координатам РДМ. Величину модального внутреннего усилия S_{ik} (модальное усилие по k -той собственной форме, действующее в направлении i -той обобщенной координаты) находят, применяя стандартный прием по формулам (3.42) - (3.44). С учетом (3.46), опуская минус, получим

$$S_{ik} = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}^{[6]}. \quad (3.51)$$

Если переносные инерционные силы представлены в виде (3.11), то

$$S_{ik} = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}^{[n]}.$$

Модальные усилия S_{ik} - это внутренние упругие восстанавливающие силы, действующие в направлениях обобщенных координат; это динамическая реакция конструкции в ответ на внешние переносные силы инерции (они находятся в правой части уравнений (3.34)). Заметим, что при решении задач сейсмостойкости в квазистатической постановке модальные усилия S_{ik} , рассчитанные по формуле (3.51), прикладывают по направлениям обобщенных координат и находят соответствующие им динамические перемещения конструкции.

Коэффициентом участия k -той собственной формы колебаний называют скалярную величину

$$\Gamma_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}^{[n]} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}^{[6]}. \quad (3.52)$$

Тогда внутреннее усилие равно

$$S_{ik} = \beta_k I_X \frac{\Gamma_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k.$$

Усилие S_{ik} часто записывают в более краткой форме, через *вектор коэффициентов формы колебаний* $\boldsymbol{\eta}_k^{[n]}$

$$S_{ik} = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \boldsymbol{\eta}_k,$$

где

$$\boldsymbol{\eta}_k = \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}^{[6]}}{M_{\text{mod},k}} = \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}^{[n]}}{M_{\text{mod},k}} = \frac{\Gamma_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k. \quad (3.53)$$

Коэффициент формы принимает более привычный вид, знакомый по строительным нормам, для плоской консольной модели с диагональной матрицей инерции $\mathbf{M} = \text{diag}[m_i]$ ($i = 1, \dots, n$) при одномерном горизонтальном поступательном сейсмическом воздействии. В этом случае вектор направлений \mathbf{v} будет иметь одну ненулевую единичную компоненту, соответствующую движению по единственному поступательному направлению, произведение $\mathbf{M}_s \mathbf{v}$ в (3.51) превратится в n -мерный вектор-столбец с компонентами m_i , коэффициент участия будет равен

$$\Gamma_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}^{[6]} = \sum_{j=1}^n v_{jk} m_j. \text{ В результате внутренние усилия и коэффициент формы}$$

примут вид

$$S_{ik} = \beta_k I_X m_i \eta_{ik}, \quad \eta_{ik} = \frac{1}{M_{\text{mod},k}} v_{ik} \sum_{j=1}^n v_{jk} m_j.$$

Модальные усилия (3.52), соответствующие k -той собственной форме, можно представить в виде вектора с компонентами S_{ik} :

$$\mathbf{S}_k = \beta_k I_X \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_k. \quad (3.54)$$

Модальные перемещения по k -той собственной форме в исходном базисе вычисляются как произведение обращенной матрицы жесткости \mathbf{K} на вектор (3.54)

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}_k = \beta_k I_X \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_k.$$

В силу свойства собственных форм (3.36) получим вектор модальных перемещений по k -той собственной форме:

$$\mathbf{q}_k = \beta_k I_X \frac{1}{\Omega_k^2} \boldsymbol{\eta}_k. \quad (3.55)$$

3.8. Коэффициент динамичности формы и опасные направления сейсмического воздействия

Формула (3.52) позволяет рассчитать S_{ik} - модальное внутреннее усилие по k -той собственной форме, действующее в направлении i -той обобщенной координаты. Величина этого усилия зависит от вектора направления переносных сейсмических сил в основной системе координат $O123$, то есть от компонент вектора направляющих косинусов \mathbf{v} .

Напомним, что при расчетах линейно-спектральным методом применяется статический подход, когда переменное во времени сейсмическое воздействие заменяется на статическое с постоянной ориентацией в пространстве. При расчетах по нормам нормативная интенсивность сейсмического воздействия известна, а вектор направляющих косинусов \mathbf{v} никак не определен. При расчете по акселерограммам есть возможность рассчитать функции направляющих косинусов по формулам (2.5), (2.6). Но опыт показывает, что направляющие косинусы вектора сейсмического воздействия, рассчитанные по природным записям, отличаются резко выраженным случайным характером (Рисунок 2.5), имеют близкое к нулю математическое ожидание и большую дисперсию, то есть обладают высокой изменчивостью. По этим графикам довольно сложно предположить какое-то одно преимущественное направление статического вектора воздействия.

Поскольку в этом вопросе существует неопределённость, применяют метод, отражающий один из принципов инженерного подхода: расчетные нагрузки задаются так, чтобы конструкция находилась в наиболее неблагоприятных условиях; этот принцип воплотился в методе поиска опасных направлений сейсмического воздействия. Для каждой формы колебаний с номером k вводится своё индивидуальное опасное направление \mathbf{v}_k , обеспечивающее максимум динамической реакции при движении этой форме.

Заметим, что для однокомпонентного сейсмического воздействия опасное направление для всех форм колебаний одно – по направлению движения грунта (Рисунок 3.12). Так, если сейсмическое ускорение действует только вдоль оси $O1$, то опасное направление определяется направляющими косинусами $\mathbf{v}_{k,x}(t) = (1 \ 0 \ 0)^T$ для каждой формы колебаний. При этом в пределах одной формы усилия могут иметь противоположные направления (как на Рисунке 3.12в), за это отвечают коэффициенты формы.

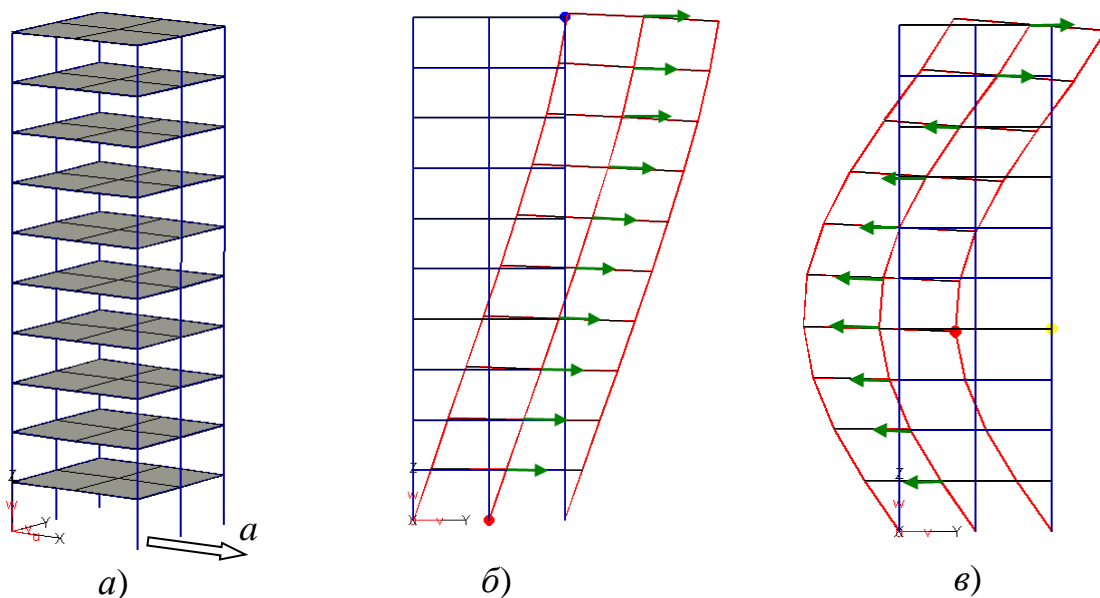


Рисунок 3.12. Опасные направления сейсмических сил при одномерном воздействии

Сформулируем задачу о поиске опасных направлений сейсмического воздействия: требуется найти такие компоненты векторов направляющих косинусов поступательного и ротационного движения

$$\mathbf{v}_{k,X}(t) = (v_{k,1X} \quad v_{k,2X} \quad v_{k,3X})^T, \quad \mathbf{v}_{k,\alpha}(t) = (v_{k,1\alpha} \quad v_{k,2\alpha} \quad v_{k,3\alpha})^T,$$

или в виде общего вектора

$$\mathbf{v}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k,X} \\ w\mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix} = (v_{k,1X} \quad v_{k,2X} \quad v_{k,3X} \quad wv_{k,1\alpha} \quad wv_{k,2\alpha} \quad wv_{k,3\alpha})^T, \quad (3.56)$$

чтобы модальная динамическая реакция конструкции по k -той форме колебаний была максимальной. Напомним, что эта задача имеет смысл только при статическом расчете линейно-спектральным методом²⁸, когда известна постоянная интенсивность воздействия, определяющая величины сейсмических сил, а их направления остаются неопределенными или обладают высокой изменчивостью.

Будем оценивать динамическую реакцию конструкции по компонентам векторов модальных откликов \mathbf{S}_k (3.54), k - номер формы колебаний. Рассмотрим i -тую компоненту вектора \mathbf{S}_k , то есть модальный отклик по i -той обобщенной координате и k -той форме колебаний

$$S_{ik} = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k. \quad (3.57)$$

Выделим в (3.57) множитель, общий для всех компонент вектора \mathbf{S}_k (не меняющийся в зависимости от номера обобщенной координаты):

$$\theta_k = \beta_k \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k. \quad (3.58)$$

Если переносные инерционные силы представлены в виде (3.11),

²⁸ Если расчет проводится во временной области по акселерограммам, направления сейсмического воздействия определяются самими записями.

$$\theta_k = \beta_k \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{M}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^{[n]} = \beta_k \frac{\Gamma_k}{M_{\text{mod},k}}, \quad (3.58')$$

где $\mathbf{v}_k^{[n]}$ составляется из компонент вектора $\mathbf{v}_k^{[6]}$ (3.56) так же, как $\mathbf{v}^{[n]}$ из компонент $\mathbf{v}^{[6]}$ в п.3.2, Γ_k - коэффициент участия (3.52). В новых обозначениях внутренние усилия можно переписать так:

$$S_{ik} = \theta_k I_X \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k. \quad (3.59)$$

Скалярная функция θ_k отвечает за величину динамической реакции по k -той форме колебаний и, по определению Ю.П. Назарова [75], называется *коэффициентом динамичности k -той формы колебаний*. Отметим, что θ_k линейно зависит от модального коэффициента динамичности β_k и компонент вектора направления \mathbf{v}_k (3.56), связанных двумя нелинейными ограничениями - условиями нормировки

$$v_{k,1X}^2 + v_{k,2X}^2 + v_{k,3X}^2 = 1 \quad \text{и} \quad v_{k,1\alpha}^2 + v_{k,2\alpha}^2 + v_{k,3\alpha}^2 = 1.$$

Итак, опасные направления сейсмического воздействия для k -той формы колебаний определяются вектором \mathbf{v}_k , который доставляет условный максимум функции θ_k . Так как все компоненты вектора \mathbf{S}_k умножаются на коэффициент динамичности формы θ_k , то реакция по k -той форме будет максимальной.

Шесть неизвестных компонент вектора \mathbf{v}_k получим методом неопределенных множителей Лагранжа, как в [75]. Составим функцию Лагранжа в виде

$$L(\mathbf{v}_k, \lambda_1, \lambda_2) = \theta_k(\mathbf{v}_k) + \lambda_1 (v_{k,1X}^2 + v_{k,2X}^2 + v_{k,3X}^2 - 1) + \lambda_2 (v_{k,1\alpha}^2 + v_{k,2\alpha}^2 + v_{k,3\alpha}^2 - 1).$$

Приравняем к нулю частные производные функции Лагранжа по неизвестным направляющим косинусам и множителям Лагранжа. Получим восемь уравнений относительно восьми неизвестных:

$$\frac{\partial L}{\partial v_{k,1X}} = \frac{\partial \theta_k(\mathbf{v}_k)}{\partial v_{k,1X}} + 2\lambda_1 v_{k,1X} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial v_{k,1\alpha}} = \frac{\partial \theta_k(\mathbf{v}_k)}{\partial v_{k,1\alpha}} + 2\lambda_2 v_{k,1\alpha} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{k,2X}} &= \frac{\partial \theta_k(\mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{v}_{k,2X}} + 2\lambda_1 \mathbf{v}_{k,2X} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{k,2\alpha}} &= \frac{\partial \theta_k}{\partial \mathbf{v}_{k,2\alpha}} + 2\lambda_2 \mathbf{v}_{k,2\alpha} = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{k,3X}} &= \frac{\partial \theta_k(\mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{v}_{k,3X}} + 2\lambda_1 \mathbf{v}_{k,3X} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{k,3\alpha}} &= \frac{\partial \theta_k(\mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{v}_{k,3\alpha}} + 2\lambda_2 \mathbf{v}_{k,3\alpha} = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= \mathbf{v}_{k,1X}^2 + \mathbf{v}_{k,2X}^2 + \mathbf{v}_{k,3X}^2 - 1 = 0, & \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= \mathbf{v}_{k,1\alpha}^2 + \mathbf{v}_{k,2\alpha}^2 + \mathbf{v}_{k,3\alpha}^2 - 1 = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Рассмотрим частную производную

$$\frac{\partial \theta_k(\mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{v}_{k,1X}} = \beta_k \frac{\mathbf{v}_k^T}{M_{\text{mod},k}} \frac{\partial(\mathbf{M}_s \mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{v}_{k,1X}}.$$

Представим матрицу $\mathbf{M}_s^{[n \times 6]}$ в виде шести n -мерных столбцов

$$\mathbf{M}_s^{[n \times 6]} = \left(\mathbf{m}_{s,1X}^{[n]} \quad \mathbf{m}_{s,2X}^{[n]} \quad \mathbf{m}_{s,3X}^{[n]} \quad \mathbf{m}_{s,1\alpha}^{[n]} \quad \mathbf{m}_{s,2\alpha}^{[n]} \quad \mathbf{m}_{s,3\alpha}^{[n]} \right). \tag{3.61}$$

Так как

$$\mathbf{M}_s \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k,1X} \mathbf{m}_{s,1X}^{[n]} + \mathbf{v}_{k,2X} \mathbf{m}_{s,2X}^{[n]} + \mathbf{v}_{k,3X} \mathbf{m}_{s,3X}^{[n]} + w \left(\mathbf{v}_{k,1\alpha} \mathbf{m}_{s,1\alpha}^{[n]} + \mathbf{v}_{k,2\alpha} \mathbf{m}_{s,2\alpha}^{[n]} + \mathbf{v}_{k,3\alpha} \mathbf{m}_{s,3\alpha}^{[n]} \right), \text{ то}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{M}_s \mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{v}_{k,1X}} = \mathbf{m}_{s,1X}.$$

Аналогично вычисляются все частные производные в (3.60), эта система уравнений может быть записана в виде:

$$\frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X} + 2\lambda_1 \mathbf{v}_{k,1X} = 0, \quad \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1\alpha} + 2\lambda_2 \mathbf{v}_{k,1\alpha} = 0,$$

$$\frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2X} + 2\lambda_1 \mathbf{v}_{k,2X} = 0, \quad \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha} + 2\lambda_2 \mathbf{v}_{k,2\alpha} = 0,$$

$$\frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X} + 2\lambda_1 \mathbf{v}_{k,3X} = 0, \quad \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3\alpha} + 2\lambda_2 \mathbf{v}_{k,3\alpha} = 0,$$

$$\mathbf{v}_{k,1X}^2 + \mathbf{v}_{k,2X}^2 + \mathbf{v}_{k,3X}^2 = 1,$$

$$\mathbf{v}_{k,1\alpha}^2 + \mathbf{v}_{k,2\alpha}^2 + \mathbf{v}_{k,3\alpha}^2 = 1.$$

Выразим направляющие косинусы через множители λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k,1X} &= -\frac{1}{2\lambda_1} \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X}, & \mathbf{v}_{k,1\alpha} &= -\frac{1}{2\lambda_2} \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1\alpha}, \\ \mathbf{v}_{k,2X} &= -\frac{1}{2\lambda_1} \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2X}, & \mathbf{v}_{k,2\alpha} &= -\frac{1}{2\lambda_2} \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha}, \\ \mathbf{v}_{k,3X} &= -\frac{1}{2\lambda_1} \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X}, & \mathbf{v}_{k,3\alpha} &= -\frac{1}{2\lambda_2} \frac{\beta_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3\alpha}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

множители λ_1 и λ_2 найдем из условий нормировки:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \left(\frac{\beta_k}{2M_{\text{mod},k}} \right)^2 \left[\left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2X} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X} \right)^2 \right], \\ \lambda_2^2 &= \left(\frac{\beta_k}{2M_{\text{mod},k}} \right)^2 \left[\left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1\alpha} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3\alpha} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Из формул (3.62) и (3.63) следует, что опасные направления определяются векторами:

для поступательного движения

$$\mathbf{v}_{k,X} = k_1 \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2X} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X} \right)^T, \quad (3.64)$$

где
$$k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2X} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X} \right)^2}};$$

для ротационного движения

$$\mathbf{v}_{k,\alpha} = k_2 \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1\alpha} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3\alpha} \right), \quad (3.65)$$

где
$$k_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1\alpha} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3\alpha} \right)^2}}.$$

Формулы (3.64-3.65) задают опасные направления сейсмического движения.

Добавим, что, если имеются сейсмологические данные о наиболее вероятном направлении сейсмического движения, проводят дополнительный расчет и на эти направления.

Пример 1. Расчет максимальной динамической реакции с учетом опасных направлений сейсмического воздействия.

Рассмотрим квадратную бетонную плиту с размерами в плане 6×6 м толщиной 0.3 м на четырех стальных колоннах кольцевого сечения (внешний диаметр 0.3 м, внутренний 0.28 м) высотой 3 м. Одна из колонн имеет пониженную по сравнению с остальными жесткость $0.8EI$ ²⁹. Уравнения движения конструкции получены в п.3.2 (пример 4, формулы (3.25)).

Координаты центра жесткости, вычисленные по формуле (3.24), равны $x_0 = y_0 = -0.1579$ м. Уравнение относительного движения (3.26), матрицы инерции, жесткости и переходных инерционных коэффициентов (3.25):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2.7 \cdot 10^4 \text{ кг} & 0 & 4.3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ 0 & 2.7 \cdot 10^4 \text{ кг} & -4.3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ 4.3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 & -4.3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 & 1.6 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 32.398 \cdot 10^6 \text{ Н/м} & 0 & 0 \\ 0 & 32.398 \cdot 10^6 \text{ Н/м} & 0 \\ 0 & 0 & 581.392 \cdot 10^6 \text{ Нм} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} 2.7 \cdot 10^4 \text{ кг} & 0 \\ 0 & 2.7 \cdot 10^4 \text{ кг} \\ 4.3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м} & -4.3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м} \end{pmatrix}.$$

Собственные частоты и матрицы форм колебаний:

²⁹ Подробные расчетные данные и программный код ПК MATLAB приведены в учебном пособии: Позняк Е.В. Основы теории сейсмостойкости строительных конструкций. М.: Изд-во МЭИ, 2016, 92 с.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1946 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1996 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6038 \cdot 10^3 \end{pmatrix} (\text{рад/с})^2,$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -0.0043 & 0.0043 & -5.8743 \cdot 10^{-4} \\ 0.0043 & 0.0043 & 5.8743 \cdot 10^{-4} \\ -1.1289 \cdot 10^{-4} & 0 & 0.0025 \end{pmatrix}.$$

Собственные частоты Ω_i и собственные периоды $T_i = \frac{2\pi}{\Omega_i}$

$$\Omega_1 = 34.56 \text{ рад/с}, \Omega_2 = 34.64 \text{ рад/с}, \Omega_3 = 60.03 \text{ рад/с},$$

$$T_1 = 0.1818 \text{ с}, T_2 = 0.1814 \text{ с}, T_3 = 0.1047 \text{ с},$$

По формуле (3.64) найдем направляющие косинусы опасных направлений воздействия для каждой из трех форм колебаний:

$$\mathbf{v}_1 = (-0.7053 \quad 0.7089)^T, \mathbf{v}_2 = (0.7204 \quad 0.6935)^T, \mathbf{v}_3 = (0.5800 \quad -0.8146)^T.$$

Формы колебаний (плита - вид сверху) и соответствующие им опасные направления, обозначенные белыми стрелками, показаны на Рисунке 3.13.

Допустим, максимальные ускорения грунта вдоль горизонтальных осей равны 1 м/с^2 , интенсивность сейсмического воздействия $I=1.41 \text{ м/с}^2$. Примем коэффициент динамичности $\beta=2.5$ для всех трех форм сейсмического воздействия. Модальные усилия по трем формам, соответствующие найденным выше опасным направлениям, рассчитаем по формуле (3.57):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -68.709 \text{ кН} & 67.338 \text{ кН} & -0.242 \text{ кН} \\ 68.709 \text{ кН} & 67.338 \text{ кН} & 0.242 \text{ кН} \\ -32.524 \text{ кНм} & 0 & 18.387 \text{ кНм} \\ \text{1 форма} & \text{2 форма} & \text{3 форма} \end{pmatrix}.$$

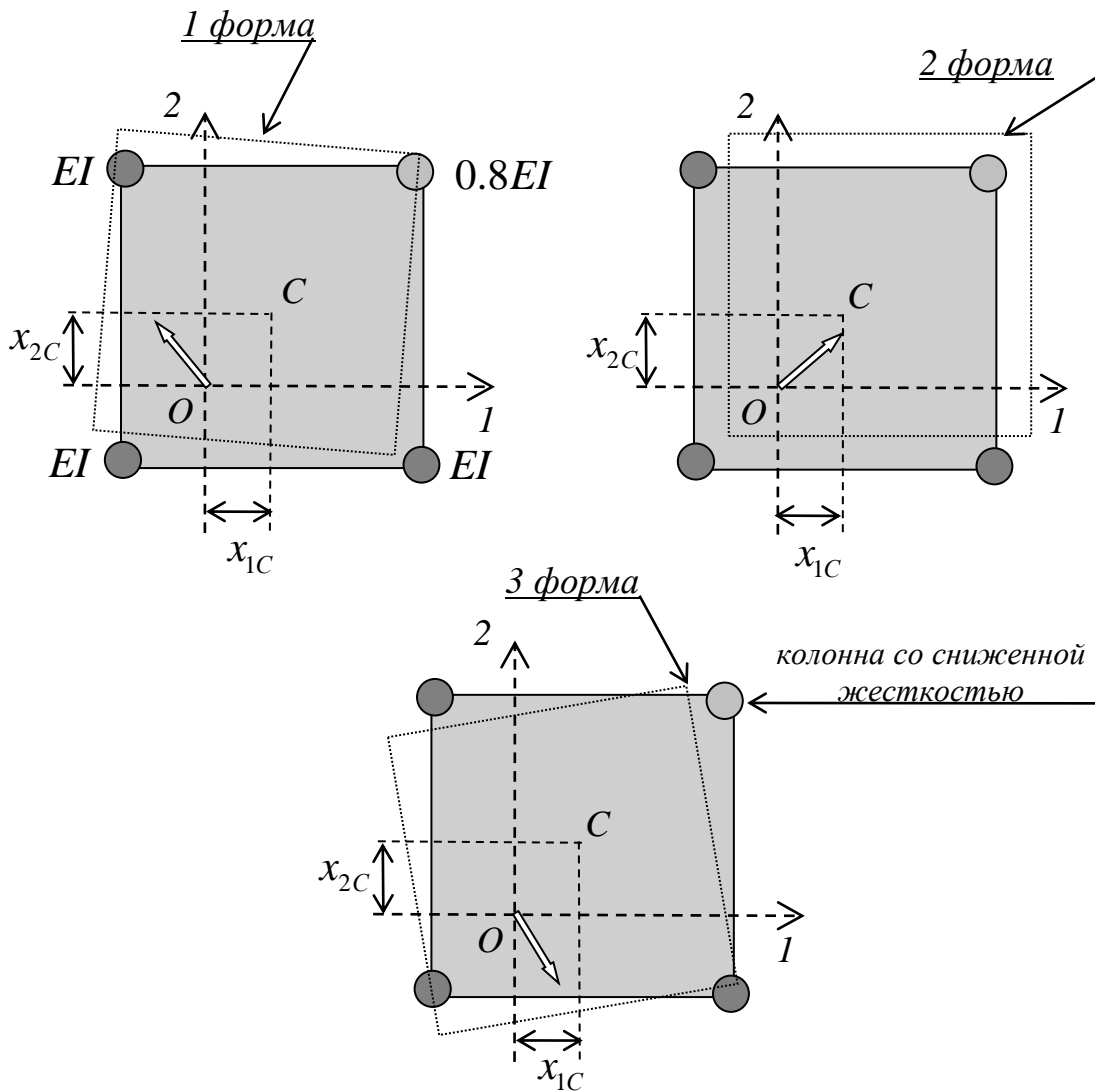


Рисунок 3.13. Опасные направления, соответствующие формам колебаний (показаны белыми стрелками)

В столбцах матрицы \mathbf{S} расположены значения модальных усилий по каждой из трех форм колебаний. В [36] доказано, что наиболее вероятное значение полного расчетного усилия вычисляется по формуле среднеквадратического осреднения (правило ККСК: квадратный корень из суммы квадратов модальных откликов):

$$S_{i\Sigma} = \sqrt{\sum_{k=1}^N S_{ki}^2}, \quad (3.66)$$

где N - число учитываемых форм колебаний. Полное расчетное усилие по каждой обобщенной координате в соответствии с правилом ККСК равно:

$$S_{1\Sigma} = S_{2\Sigma} = \sqrt{68.709^2 + 67.338^2 + 0.242^2} = 96.204 \text{ кН},$$

$$S_{3\Sigma} = \sqrt{32.524^2 + 18.387^2} = 37.362 \text{ кНм}.$$

В столбцах матрицы \mathbf{S} расположены значения модальных усилий по каждой из трех форм колебаний. Полное расчетное усилие по каждой обобщенной координате в соответствии с (3.66) равно:

$$S_{1\Sigma} = S_{2\Sigma} = 87 \text{ кН}, \quad S_{3\Sigma} = 104 \text{ кНм}.$$

Направления усилий совпадают с направлениями обобщенных координат (Рисунок 3.13). Фактически найденные усилия представляют собой модули главного вектора и главного момента внутренних усилий в колоннах как ответ на сейсмическое воздействие.

Пример 2. Применение линейно-спектрального метода. Рассмотрим плоскую сдвигово-поворотную модель каркасного здания с двумя перекрытиями под сейсмическим воздействием, заданным вектором $\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{30} \quad \ddot{\alpha}_{20})^T$ с двумя поступательными и ротационным ускорениями грунта (Рисунок 3.14).

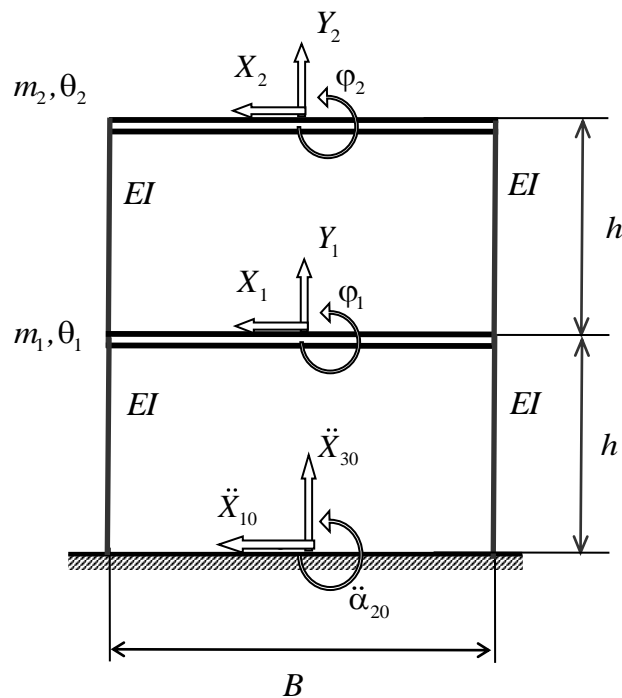


Рисунок 3.14. Расчетная динамическая модель

Обозначим m_1, θ_1 и m_2, θ_2 - массы и моменты инерции перекрытий в их главных центральных осях, EI, EF - изгибная и продольная жесткость каждой стойки, h - высота этажа, B - ширина перекрытия. Движение перекрытий описывается шестью обобщенными координатами: относительными линейными горизонтальными перемещениями X_1, X_2 , вертикальными Y_1, Y_2 и угловыми φ_1, φ_2 (Рисунок 3.14). Введем вектор обобщенных координат:

$$\mathbf{q} = (Y_1 \quad X_1 \quad \varphi_1 \quad Y_2 \quad X_2 \quad \varphi_2)^T.$$

Рассматривая условия равновесия перекрытий при относительном движении, считая их абсолютно жесткими и полагая углы их поворотов малыми, получим уравнения относительного движения системы (см. вывод в примере 5 п.3.2):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0,$$

где \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} - матрицы инерции, демпфирования и жесткости,

$\mathbf{P}_s = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0$ - вектор переносных сейсмических сил:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_1 h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 h & \theta_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 2m_2 h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_2 h & \theta_{20} \end{pmatrix}, \mathbf{P}_s = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0 = - \begin{pmatrix} 0 & m_1 & 0 \\ m_1 & 0 & hm_1 \\ hm_1 & 0 & \theta_{10} \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_2 & 0 & 2hm_2 \\ 2hm_2 & 0 & \theta_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_{10} \\ \ddot{X}_{30} \\ \ddot{\alpha}_{20} \end{pmatrix},$$

$$\theta_{10} = \theta_1 + m_1 h^2, \theta_{20} = \theta_2 + 4m_2 h^2,$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4EF/h & 0 & 0 & -2EF/h & 0 & 0 \\ 0 & 48EI/h^3 & 0 & 0 & -24EI/h^3 & 12EI/h^2 \\ 0 & 0 & (16EI + B^2 EF)/h & 0 & -12EI/h^2 & (4EI - B^2 EF/2)/h \\ -2EF/h & 0 & 0 & 2EF/h & 0 & 0 \\ 0 & -24EI/h^3 & -12EI/h^2 & 0 & 24EI/h^3 & -12EI/h^2 \\ 0 & 12EI/h^2 & (4EI - B^2 EF/2)/h & 0 & -12EI/h^2 & (8EI + B^2 EF/2)/h \end{pmatrix}.$$

Матрица демпфирования \mathbf{B} была принята пропорциональной матрице жесткости так, чтобы обеспечить 5% демпфирование по первой форме колебаний: $\mathbf{B} = \eta \mathbf{K}$, $\eta = 0.02$.

Исходные данные для расчета: внешний и внутренний диаметры колонн $D = 0.3$ м, $d = 0.28$ м, высота колонны $H = 5$ м, $E = 200$ ГПа, $EI = 1.917E+07$ Нм², $EF = 1.822E+09$ Н, ширина плиты перекрытия $B = 10$ м, масса первого перекрытия $m_1 = 45$ тонн, масса второго перекрытия $m_2 = 45$ тонн, моменты инерции первого и второго перекрытий относительно центра приведения вектора сейсмического воздействия $\theta_{1O} = 1.500E+06$ кг·м², $\theta_{2O} = 4.875E+06$ кг·м². РДМ имеет 6 степеней свободы: горизонтальные и вертикальные поступательные перемещения этажей: X_1 , X_2 и Y_1 , Y_2 , угловые φ_1 , φ_2 . Собственные частоты и периоды РДМ (Рисунок 3.16), приведены в Таблице 3.1.

Таблица 3.1

Собственные частоты, периоды РДМ и коэффициенты динамичности

Ω_i , рад/с	f_i , 1/с	T_i , с	$\beta(T_i)$
5.49	0.87	1.14	0.28
14.45	2.30	0.45	0.6
78.65	12.52	0.08	1.7
139.85	22.25	0.04	2.49
205.92	32.77	0.03	2.2
358.18	57.00	0.02	1.9

В качестве тестового воздействия удобно принять поверхностные волны Рэлея. Это плоские волны, вызывающие вертикальные, горизонтальные перемещения частиц грунта, а также ротации в плоскости этих перемещений. Для моделирования волн Рэлея и определения ротаций достаточно задать акселерограмму в точке и механические свойства грунта; формулы для расчета параметров волн Рэлея по заданной акселерограмме приведены в п.2.8. В качестве заданной акселерограммы примем запись вертикального движения Газлийского землетрясения 1976 г для рыхлого песчаного грунта, $E = 5$ МПа. На Рисунке 3.15 показаны три компоненты

вектора сейсмического воздействия, а также приведен график модуля вектора поступательного движения.

Определим параметры сейсмического воздействия для расчета в частотной области: интенсивности поступательного и ротационного движения грунта, относительную интенсивность ротационного движения (2.12):

$$I_X = \max |\ddot{\mathbf{X}}_0| = 14.04 \text{ м/с}^2, \quad I_\alpha = \max |\ddot{\alpha}_0| = 0.3531 \text{ рад/с}^2, \quad w = I_\alpha / I_X = 0.0251 \text{ м}^{-1}.$$

По Рисунку 3.16 определим коэффициент динамичности для записи вертикального движения землетрясения в Газли, акселерограмма приведена на Рисунке 3.15. Коэффициенты динамичности, соответствующие собственным периодам, приведены в Таблице 3.1.

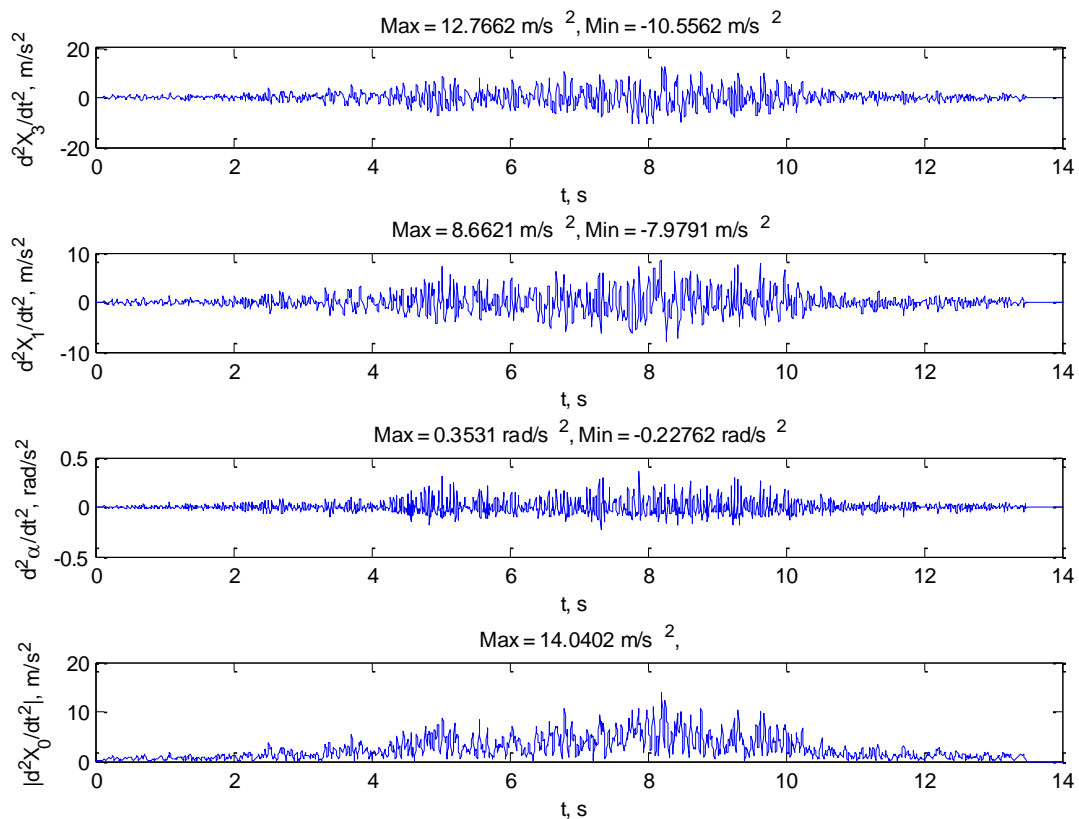


Рисунок 3.15. Входное воздействие. Ускорения вертикального, горизонтального и углового движения и модуль вектора поступательного воздействия.



Рисунок 3.16. Коэффициенты динамичности в осях периодов.
Окно ПО «Одиссей»

Вектор опасных направлений для каждой формы колебаний определяются по формулам (3.64), (3.65). Для плоской модели приведенные выше формулы принимают вид:

$$\mathbf{v}_{k,X} = k_1 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X} & 0 & \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X} \end{pmatrix}^T, \quad k_1 = -\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X})^2 + (\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X})^2}},$$

$$\mathbf{v}_{k,\alpha} = k_2 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad k_2 = -\frac{1}{|\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha}|}.$$

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_{k,1X} & v_{k,3X} & w v_{k,2\alpha} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k_1 \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X} & k_1 \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X} & w \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha} \end{pmatrix}^T.$$

Значения $v_{k,1X}$, $v_{k,3X}$, $w v_{k,2\alpha}$ приведены в Таблице 3.2; опасные направления для каждой формы колебаний показаны на Рисунке 3.17.

Таблица 3.2

Модальные векторы опасных направлений сейсмического воздействия

№ формы	1	2	3	4	5	6
$\begin{pmatrix} v_{k,1X} \\ v_{k,3X} \\ w v_{k,2\alpha} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -w \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ w \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -w \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -w \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$

Проведем расчет модальных внутренних усилий обобщенным линейно-спектральным методом. Внутренние усилия N_1 , N_2 , Q_1 , Q_2 , M_1 , M_2 , действующие в направлении обобщенных координат, рассчитаем по формуле (3.57) для

каждой из 6 форм колебаний; значения коэффициентов динамичности примем по Таблице 3.1, опасные направления – по Таблице 3.2. Значения внутренних усилий для моделей с ротациями и без ротаций приведены в Таблицах 3.3 и 3.4.

Рассмотрены две идентичные модели здания, отличие между которыми состоит только в векторе сейсмического воздействия. Для модели с ротациями в векторе сейсмических нагрузок имеется ротационная компонента сейсмического движения; для модели без ротаций она равна нулю.

Таблица 3.3

Внутренние усилия. Модель с ротациями

№ формы и модаль- ное уси- лие	Внутренние усилия по обобщенной координате i					
	$i=1$ N_1 , кН	$i=2$ Q_1 , кН	$i=3$ M_1 , кНм	$i=4$ N_2 , кН	$i=5$ Q_2 , кН	$i=6$ M_2 , кНм
Форма 1, S_{i1}	0.	1026	5151	0.	1700	17035
Форма 2, S_{i2}	0.	432	2156	0.	-261	-2628
Форма 3, S_{i3}	1138	0.	0.	1842	0.	0.
Форма 4, S_{i4}	0.	0.	179	0.	-2	264
Форма 5, S_{i5}	105	0.	0.	-65	0.	0.
Форма 6, S_{i6}	0.	0.	-11	0.	0.	7
S_i	1143	1113	5587	1843	1719	17239

Основной вывод по результатам расчетов – ротационное грунтовое движение в целом приводит к увеличению динамического отклика конструкции. Максимальные усилия действуют на второе перекрытие: вследствие ротаций поперечная сила Q_2 возросла с 1432 кН до 1719 кН (на 20.0%), момент M_2 - с 14352 кНм до

17239 кНм (на 20.1%). Остались без изменений только вертикальные усилия $N_{1,2}$. Это связано с тем, что вертикальное движение рассматриваемой модели происходит независимо от горизонтального и углового движений, что видно по уравнениям движения и по характеру форм колебаний - формы 3 и 5 не зависят от горизонтальных и угловых степеней свободы.

Таблица 3.4.

Внутренние усилия. Модель без ротаций

№ формы и модальное усилие	Внутренние усилия по обобщенной координате i					
	$i=1$ N_1 , кН	$i=2$ Q_1 , кН	$i=3$ M_1 , кНм	$i=4$ N_2 , кН	$i=5$ Q_2 , кН	$i=6$ M_2 , кНм
Форма 1, S_{i1}	0.	851	4276	0.	1411	14140
Форма 2, S_{i2}	0.	404	2016	0.	-244	-2458
Форма 3, S_{i3}	1138	0.	0.	1842	0.	0.
Форма 4, S_{i4}	0.	0.	10	0.	0.	15
Форма 5, S_{i5}	105	0.	0.	-65	0.	0.
Форма 6, S_{i6}	0.	0.	0.	0.	0.	0.
S_i	1143	942	4727	1843	1432	14352

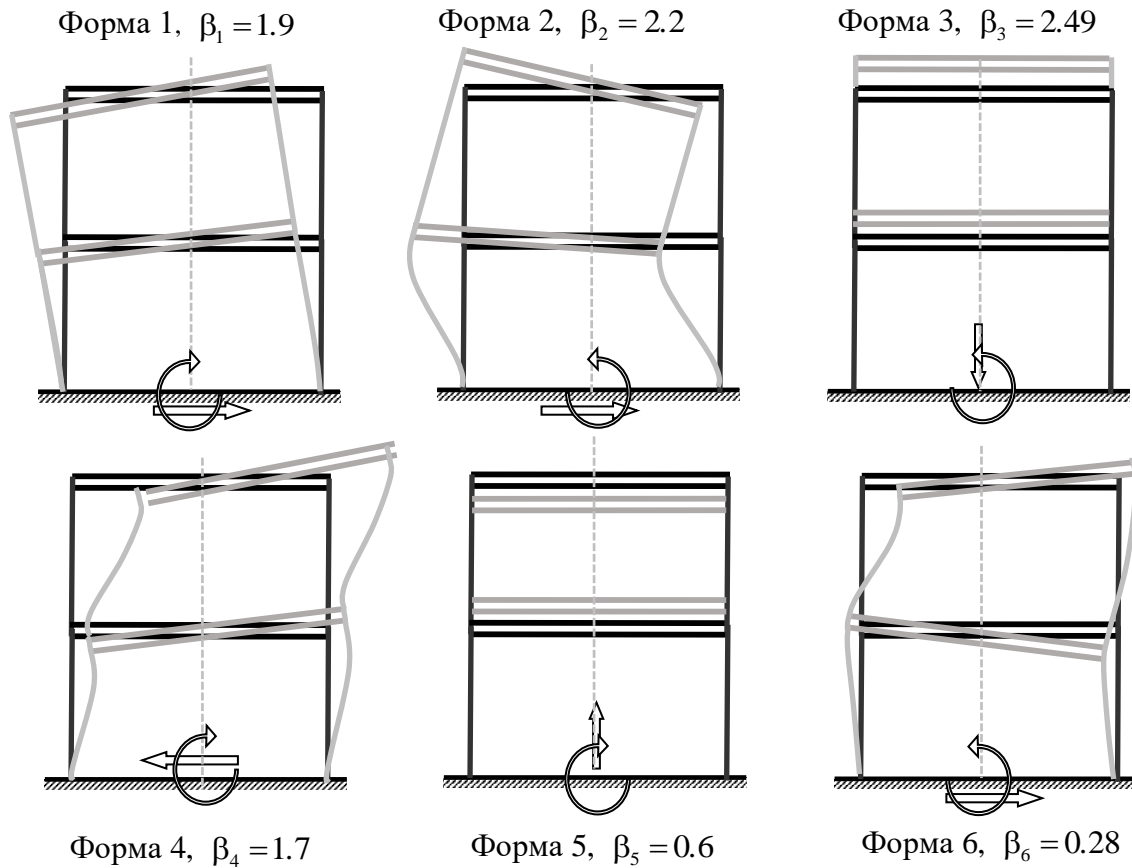


Рисунок 3.17. Формы колебаний, коэффициенты динамичности и опасные направления сейсмического воздействия (показаны белыми стрелками)

3.9. Модальный отклик на отдельные компоненты сейсмического движения

Представим матрицу \mathbf{M}_s в блочном виде $\mathbf{M}_s^{[n \times 6]} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{s,X}^{[n \times 3]} & \mathbf{M}_{s,\alpha}^{[n \times 3]} \end{pmatrix}$ так, чтобы

$$\mathbf{M}_s \mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{s,X} & \mathbf{M}_{s,\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k,X} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

где вектора направляющих косинусов $\mathbf{v}_{k,X}$ и $\mathbf{v}_{k,\alpha}$ задаются формулами (3.64, 3.65).

Тогда модальный отклик (3.57) по k -той форме колебаний разделяется на два вида внутренних сейсмических усилий S_{ik}^X и S_{ik}^α , действующих в направлении i -той обобщенной координаты

$$S_{ik}^X = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_{s,X}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_{k,X} \quad \text{и} \quad S_{ik}^\alpha = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_{s,\alpha}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_{k,\alpha}. \quad (3.67)$$

Усилия S_{ik}^X вызваны поступательным движением грунта, а S_{ik}^α - ротационным. По физическому смыслу эти усилия могут быть и силами, и моментами, в зависимости от того, какова i -тая координата – линейная или угловая.

Найдем модальный отклик на отдельные компоненты сейсмического воздействия. Модальный отклик в направлении i -той обобщенной координаты от поступательного движения грунта вдоль оси $O1$ (Рисунок 3.1), равен

$$S_{ik}^{X1} = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_{s,X}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T,$$

где \mathbf{v}_1 - единичный вектор, направленный вдоль оси $O1$. Аналогично модальные отклики от сейсмических сил, действующих вдоль осей $O2$ и $O3$:

$$S_{ik}^{X2} = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_{s,X}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T, \quad (3.68)$$

$$S_{ik}^{X3} = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_{s,X}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T.$$

Аналогично получаются модальные усилия S_{ik}^α от переносных сейсмических моментов, приложенных относительно осей $O1$, $O2$ и $O3$:

$$\begin{aligned} S_{ik}^{\alpha 1} &= \beta_k w I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_{s,\alpha}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_1, \\ S_{ik}^{\alpha 2} &= \beta_k w I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_{s,\alpha}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_2, \\ S_{ik}^{\alpha 3} &= \beta_k w I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_{s,\alpha}}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_3. \end{aligned} \quad (3.69)$$

3.10. Опорные реакции от сейсмических сил и моментов

Проведем расчет модальных опорных реакций в основании. Эти параметры характеризуют динамическую реакцию конструкции по определенной форме колебаний. Вектор переносных сейсмических сил примем в виде (3.10)

$$\mathbf{P}_s = -\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_0,$$

где $\ddot{\mathbf{q}}_0$ - шестимерный вектор сейсмического воздействия

$$\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = (\ddot{\mathbf{X}}_0 \ \ddot{\mathbf{a}}_0)^T, \quad \ddot{\mathbf{X}}_0(t) = (\ddot{X}_{10} \ \ddot{X}_{20} \ \ddot{X}_{30})^T, \quad \ddot{\mathbf{a}}_0(t) = (\ddot{\alpha}_{10} \ \ddot{\alpha}_{20} \ \ddot{\alpha}_{30})^T,$$

\mathbf{M}_s - матрица переносных инерционных коэффициентов, формируется по правилам, описанным в п. 3.2. Допустим, n_x строк матрицы \mathbf{M}_s соответствует поступательным обобщенным координатам, а n_φ строк – угловым, причем $n = n_x + n_\varphi$. Если обнулить в матрице \mathbf{M}_s n_φ строк, соответствующих угловому движению (обозначим эту матрицу \mathbf{M}_s^X), то в векторе $\mathbf{P}_s = -\mathbf{M}_s^X \ddot{\mathbf{q}}_0$ останутся только сейсмические силы. Если обнулить n_x строк матрицы \mathbf{M}_s , соответствующих поступательным обобщенным координатам (обозначим эту матрицу \mathbf{M}_s^φ), то в векторе $\mathbf{P}_s = -\mathbf{M}_s^\varphi \ddot{\mathbf{q}}_0$ останутся только сейсмические моменты относительно основных осей. В силу линейности РДМ действует принцип суперпозиции, то есть динамическая реакция равна сумме реакций на приложенные отдельно сейсмические силы и моменты.

Определим динамическую реакцию на переносные сейсмические силы. Модальные внутренние усилия рассчитываются по формуле (3.57). Так, усилие (физически представляет собой силу) по k -той собственной форме, действующее в направлении i -той обобщенной координаты, равно

$$S_{ik}^Q = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k. \quad (3.70)$$

Сумма сил S_{ik}^Q по каждой обобщенной координате равна опорной реакции S_k^Q в основании при движении по k -той собственной форме:

$$S_k^Q = \frac{\beta_k I_X}{M_{\text{mod},k}} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X \mathbf{v}_k. \quad (3.71)$$

Моменты в основании относительно основных осей РДМ равны сумме переносных сейсмических моментов и моментов от переносных сейсмических сил. Внутренний момент по k -той собственной форме, действующий в направлении i -той обобщенной координаты, равен

$$S_{ik}^L = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^\varphi}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k.$$

Добавим к внутреннему моменту S_{ik}^L моменты от сил S_{ik}^Q в виде векторного произведения радиус-вектора \mathbf{r}_i i -той обобщенной координаты (см. п.3.1) на вектор силы. Окончательно получим внутренний момент в основании от i -той обобщенной координаты по k -той собственной форме:

$$S_{ik}^L = \frac{\beta_k I_X}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \left(\mathbf{M}_s^\varphi \mathbf{v}_k + \mathbf{M}_s^X \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{k,X} \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix} \right), \quad (3.72)$$

где вектора направляющих косинусов $\mathbf{v}_{k,X}$ и $\mathbf{v}_{k,\alpha}$ задаются формулами (3.64, 3.65).

Сумма моментов S_{ik}^L по каждой обобщенной координате равна опорной реакции S_k^L в основании при движении по k -той собственной форме:

$$S_k^L = \frac{\beta_k I_X}{M_{\text{mod},k}} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \left(\mathbf{M}_s^\varphi \mathbf{v}_k + \mathbf{M}_s^X \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{k,X} \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix} \right). \quad (3.73)$$

Проекции опорных реакций (3.71) и (3.73) на основные оси РДМ получаются при задании соответствующих направляющих косинусов (так же, как в п.3.9).

3.11. Эффективные модальные массы, потенциальная энергия формы и учитываемые формы колебаний

Внутренняя сила S_{ik}^Q в направлении i -той обобщенной координаты для k -той формы колебаний, возникающая в ответ на действие переносных сейсмических сил и моментов, определяется по формуле (3.70). Допустим, направление сейсми-

ческого воздействия задано вектором направляющих косинусов $\mathbf{v}^{[6]}$, одинаковым для всех форм колебаний, тогда

$$S_{ik}^Q = \beta_k I_X \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}. \quad (3.74)$$

S_{ik}^Q можно трактовать как силу, под действием которой масса $\mu_{ik} = \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}$

движется поступательно в направлении i -той обобщенной координаты с ускорением $\beta_k I_X$.

$$S_{ik}^Q = \beta_k I_X \mu_{ik}.$$

Суммируя массы μ_{ik} , движущиеся в составе k -той формы, получим:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n \mu_{ik} = \frac{1}{M_{\text{mod},k}} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X \mathbf{v}. \quad (3.75)$$

μ_k - физическая масса конструкции, вовлекаемая в движение по k -той форме. Масса μ_k называется *эффективной модальной массой* по k -той форме колебаний [61].

В случае плоской консольной модели с диагональной матрицей инерции $\mathbf{M} = \text{diag}[m_i]$ ($i = 1, \dots, n$) при одномерном поступательном сейсмическом движении вектор \mathbf{v} будет иметь одну ненулевую единичную компоненту, $\mathbf{M}_s^X = \mathbf{M}_s$, произведение $\mathbf{M}_s^X \mathbf{v}$ превратится в n -мерный вектор-столбец \mathbf{m} с компонентами

$$m_i, \Gamma_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{m} = \sum_{j=1}^n v_{jk} m_j, \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X \mathbf{v} = \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{m} = \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \Gamma_k, \text{ тогда в (3.75)}$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X \mathbf{v} = \Gamma_k \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k = \Gamma_k^2,$$

следовательно, эффективная модальная масса по k -той форме колебаний будет равна

$$\mu_k = \frac{\Gamma_k^2}{M_{\text{mod},k}}.$$

Если отсутствуют угловые обобщенные координаты и ротационное движение, сумма модальных масс по всем формам колебаний равна общей массе конструкции (доказательство см. в [61]).

$$M_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^n \mu_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \mu_{ik}.$$

В некоторых нормах и руководствах (например, для атомных станций NS-G-1.6, ASCE4-98) встречается другое определение эффективной модальной массы. Она приобретает смысл коэффициента, характеризующего инерционные параметры конструкции по k -той форме колебаний, но при наличии угловых степеней свободы и учете ротаций это уже не физическая масса и не доля от общей массы конструкции. Если собственные формы ортонормированы с весом \mathbf{M} (то есть $\mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}_k = 1$ и $\mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_k = 0$ при $j \neq k$), то

$$\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2, \quad (3.73)$$

где $\Gamma_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}^{[n]}$ - коэффициент участия k -той формы; доказательство (3.73) можно найти в [100]. Принимая во внимание (3.73), под *эффективной модальной массой*³⁰ понимают отношение

$$\mu_k = \frac{\Gamma_k^2}{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}}, \quad \text{причем} \quad \sum_{k=1}^n \mu_k = 1. \quad (3.74)$$

Величина $\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}$ представляет собой скалярное значение (это не общая масса конструкции), в долях которого рассчитывают μ_k . Формулировка (3.74) применяется в модальном анализе для нахождения значимых собственных форм, то есть тех, которые определяют основную динамическую реакцию конструкции [92, 124]. Чем больше масса сооружения, увлекаемая формой, тем больше динамическая ре-

³⁰ Иногда слово «эффективная» опускают.

акция по этой форме колебаний. Поэтому в расчетах оставляют формы с максимальными эффективными модальными массами, так, чтобы суммарно обеспечить не менее 90-95% от общей массы РДМ (критерий отбора значимых форм по эффективной модальной массе). Удобство применения этого критерия заключается в простоте отбора необходимого количества собственных форм для выполнения условия $\sum_{k=1}^n \mu_k \approx 1$. Однако есть и свои недостатки. Во-первых, μ_k не учитывают близость спектрального состава воздействия к спектру конструкции. Иными словами, правильно было бы обращать внимание и на значение модального коэффициента динамичности – чем он выше, тем ближе конструкция к резонансному режиму, тем значительнее динамическая реакция. Во-вторых, для расчета эффективной модальной массы (3.74) необходимо задать направление сейсмического воздействия \mathbf{v} , единое для всех собственных форм. Если конструкция имеет две оси симметрии в плане, можно задать два или три ортогональных направления вдоль основных осей. С несимметричными пространственными РДМ дело обстоит сложнее [124] – приходится либо рассматривать целый ряд векторов направлений и отбирать те из них, которым соответствуют максимальные параметры динамической реакции, либо рассчитывать направления сейсмического воздействия по формулам (3.64), (3.65), выбирая несколько векторов \mathbf{v} , задающих наиболее опасные направления для низших форм.

Недостатки отбора значимых форм по эффективной модальной массе исключаются в работе [72], в которой предлагается определять существенные формы колебаний по величине скалярного коэффициента динамичности собственной формы θ_k (3.58):

$$\theta_k = \beta_k \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}_k}{M_{\text{mod},k}} \quad \text{или} \quad \theta_k = \beta_k \frac{\Gamma_k}{M_{\text{mod},k}}. \quad (3.76)$$

Каждый коэффициент θ_k одновременно учитывает и коэффициент динамичности β_k , и присущее k -той форме опасное направление. Для конструкции из примера,

приведенного в п.3.8, КД формы равны³¹ $\theta_1 = 409.85$, $\theta_2 = 400.88$, $\theta_3 = 43.27$. Таким образом, вклад в общую динамическую реакцию от движения по третьей форме составляет примерно 10% по сравнению с первой формой. С ростом эксцентриситета (x_0, y_0) влияние углового движения растет. Так, при уменьшении жесткости первой колонны с $0.8EI$ до $0.5EI$, положение центра жесткости сместится из точки $(-0.16 \ -0.16)$ в точку $(-0.43 \ -0.43)$, при этом КД форм колебаний принимают значения $\theta_1 = 409.86$, $\theta_2 = 338.81$, $\theta_3 = 119.00$. Вклад третьей формы колебаний составляет уже 29%.

Приведем основные шаги алгоритма отбора значимых форм колебаний, предложенного Ю.П. Назаровым в [76]. Примем к рассмотрению N форм и столько же опасных направлений сейсмического воздействия. Требуется отобрать N_j значимых собственных форм для j -того расчетного направления \mathbf{v}_j . Фиксируем j -тое направление. Для каждой k -той собственной формы ($k = 1, \dots, N$) рассчитываются коэффициенты динамичности формы θ_{kj}

$$\theta_{kj} = \beta_k \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{v}_j}{M_{\text{mod},k}},$$

а также коэффициенты их отношений $k_{kj} = \frac{\theta_{kj}}{\theta_{kk}}$, где $\theta_{kk} = \theta_k$ (3.76), $k_{kk} = 1$.

Формы с коэффициентом k_{kj} , меньшим заданного порогового значения (например, формы с $k_{kj} < 0.1$), отбрасываются. Остается N_j форм с общим вкладом в

движение с j -той ориентацией, равным $k_j = \sum_{n=1}^{N_j} k_{nj}$. В процентном соотношении вклад n -ой собственной формы ($n = 1, \dots, N_j$) в движение с j -той ориентацией со-

³¹ Подробные расчетные данные и программный код ПК MATLAB приведены в учебном пособии: Позняк Е.В. Основы теории сейсмостойкости строительных конструкций. М.: Изд-во МЭИ, 2016, 92 с.

ставляет $\%k_{nj} = \frac{k_{nj}}{k_j} 100\%$. Аналогичные расчеты проводят для каждой из N расчетных ориентаций. Таким образом, каждому направлению сейсмического воздействия соответствует индивидуальный набор учитываемых форм.

Отметим, что применяются и другие принципы отбора значимых форм колебаний, например, по критерию потенциальной энергии упругой деформации k -той формы (энергетический критерий) [36, 124]. Потенциальная энергия деформации равна работе модальных внутренних усилий на соответствующих перемещениях, энергия k -той формы колебаний с учетом (3.54) и (3.55)

$$W_k = \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^T \mathbf{S}_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_k I_X}{\Omega_k} \right)^2 \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_k. \quad (3.75)$$

По энергетическому критерию следует оставлять в расчете формы, сумма потенциальной энергии которых составляет не менее 95% от общей потенциальной энергии [36].

3.12. Анализ влияния ротаций на динамическую реакцию

Для оценки вклада ротационного движения в общую динамическую реакцию проведем серию численных экспериментов. Рассмотрим четыре РДМ каркасного здания, созданных на базе модели из примера 5 (отличие только в том, что добавлено 5% демпфирование) под действием шести вариантов интегрального сейсмического воздействия. Каждый вариант соответствует определенной жесткости грунта (Таблица 3.6) – от сверхмягкого (вход 0 - ротации максимальные) до абсолютно жесткого (вход 5 - ротации нулевые).

Параметры РДМ

Внешний и внутренний диаметры колонн $D=0.3$ м, $d = 0.28$ м, высота колонны $H = 5$ м, $E = 200$ ГПа, $EI = 1.917E+07$ Нм², $EF = 1.822E+09$ Нм², ширина плиты перекрытия $B = 10$ м, масса первого перекрытия $m_1 = 45$ тонн, масса второго перекрытия $m_2 = 45$ тонн, моменты инерции первого и второго перекрытий относительно

центра приведения $\theta_1 = 1.500E+06 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $\theta_2 = 4.875E+06 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. РДМ имеет 6 степеней свободы: горизонтальные и вертикальные поступательные перемещения этажей: X_1 , X_2 и Y_1 , Y_2 , угловые φ_1 , φ_2 .

Модель «Рядовое здание без учета ротаций» - параметры РДМ описаны выше, применяется интегральная модель сейсмического воздействия без ротаций, учитывается только поступательное движение опор. Это модель здания на абсолютно жестком фундаменте, который совершает плоское поступательное движение.

Модель «Рядовое здание с учетом ротаций» - параметры РДМ описаны выше, применяется интегральная модель сейсмического воздействия с учетом ротационного движения. Вектор ротаций совпадает с ротациями левой опоры. Это модель здания на абсолютно жестком фундаменте, который совершает плоское поступательное и угловое движение.

Модель «Высотное здание без учета ротаций» - имитация высотного здания (в два раза увеличена высота перекрытия по сравнению с РДМ рядового здания), применяется интегральная модель сейсмического воздействия без ротаций.

Модель «Высотное здание с учетом ротаций», параметры РДМ такие же, как и в предыдущей модели, применяется интегральная модель сейсмического воздействия с учетом ротаций. Вектор ротаций совпадает с ротациями левой опоры.

Собственные частоты и периоды моделей приведены в таблице 3.5.

Описание входных воздействий

Рассмотрим шесть вариантов воздействий, сгенерированных в виде волны Рэлея (см. п.2.8 и [81]), отличающихся жесткостью основания. Воздействие 0 соответствует сверхмягкому грунту, возможно, не существующему в природе, но необходимому в настоящем анализе как почти предельный случай для очень коротких волн. Нормированная функция интенсивности $\chi(10)$ воздействия 0 равна 0.094, это говорит о том, что примерно 91% спектрального состава воздействия составляют волны с длинами, не превышающими 10 м.

Воздействие 5 соответствует противоположному предельному случаю - абсолютно жесткому грунту. В таком грунте невозможны ротации из-за эффекта прохождения волны, основание движется только поступательно, не деформируясь и не поворачиваясь; в каждой опоре одинаковое поступательное движение и отсутствует ротационное. Воздействие 5 – пример интегрального дилатационного движения грунта, коэффициент $\chi(10)$ воздействия 5 равен 1.

Входы 1-4 представляют собой ряд волновых воздействий с промежуточными свойствами грунта от сверхмягкого до абсолютно жесткого (Таблица 3.6). Эти варианты помогут определить значения χ -функций, задающие границы применимости моделей сейсмического движения грунта (интегральной дилатационной, интегральной дилатационно-ротационной и дифференцированной).

Графики χ -функций входных воздействий поступательного движения представлены на Рисунке 3.18а)-д).

Таблица 3.5

Характеристики нагрузок и частотные спектры моделей

Модель	Ротационное движение	Собственные частоты и периоды		
		Ω , рад/с	f , 1/с	T , с
Рядовое здание без учета ротаций	нет	5.49, 14.45,	0.87, 2.30,	1.14, 0.45,
Рядовое здание с учетом ротаций	есть	78.65, 139.85, 205.92, 358.18	12.52, 22.25, 32.77, 57.00	0.08, 0.04, 0.03, 0.02
Высотное здание без учета ротаций	нет	1.94, 5.17,	0.31, 0.81,	3.23, 1.23,
Высотное здание с учетом ротаций	есть	55.61, 98.88, 145.61, 253.27	8.85, 15.74, 23.17, 40.31	0.11, 0.06, 0.04, 0.02

Параметры входных воздействий

Вход	E , МПа	c_R м/с	$\chi(10)$	Движение центра приведения сейсмического воздействия	
				v_{\max}, u_{\max} , м/с ² φ_{\max} , рад/с ²	v_{\min}, u_{\min} , м/с ² φ_{\min} , рад/с ²
0	0.1	5	0.094	12.766, 8.662, 2.496	-10.556, -7.979, - 1.610
1	5	32	0.237	12.766, 8.662, 0.353	-10.556, -7.979, - 0.228
2	50	103	0.500	12.766, 8.662, 0.112	-10.556, -7.979, - 0.072
3	160	183	0.750	12.766, 8.662, 0.062	-10.556, -7.979, - 0.040
4	300	251	0.840	12.766, 8.662, 0.046	-10.556, -7.979, - 0.029
5	-	-	1	12.766, 8.662, 0	-10.556, -7.979, 0

Генерация волнового процесса для всех воздействий проводилась по записи вертикального движения грунта землетрясения в Газли, менялся лишь коэффициент упругости грунта E (Таблица 3.6) Спектральная плотность акселерограммы представлена на Рисунке 3.18е).

Моделирование осуществлялось в среде Simulink математического пакета MATLAB. Для решения системы ОДУ во временной области был применен решатель ode14x с фиксированным шагом. Максимальные перемещения моделей приведены в Таблицах 3.7, 3.8. Максимальные перемещения моделей рядовых зданий для входа 5 (абсолютно жесткий грунт, полное отсутствие ротаций) составили $X_2 = 0.08797$ м, $\varphi_2 = 0.00025$ рад; для моделей высотных зданий $X_2 = 0.40214$ м, $\varphi_2 = 0.00050$ рад. На Рисунках 3.19-3.22 показаны графики изменения параметров динамической реакции во времени для моделей с учетом ротационного движения для входов 0 и 4.

Таблица 3.7

Максимальные перемещения рядового здания

Модель	Вход 0		Вход 1		Вход 2		Вход 3		Вход 4	
	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад
без ротаций	0.08797	0.00025	0.08797	0.00025	0.08797	0.00025	0.08797	0.00025	0.08797	0.00025
с ротациями	0.09842	0.00029	0.08944	0.00026	0.08843	0.00025	0.08823	0.00025	0.08816	0.00025
%	12%	16%	1.7%	4%	0.5%	0%	0.3%	0%	0.2%	0%

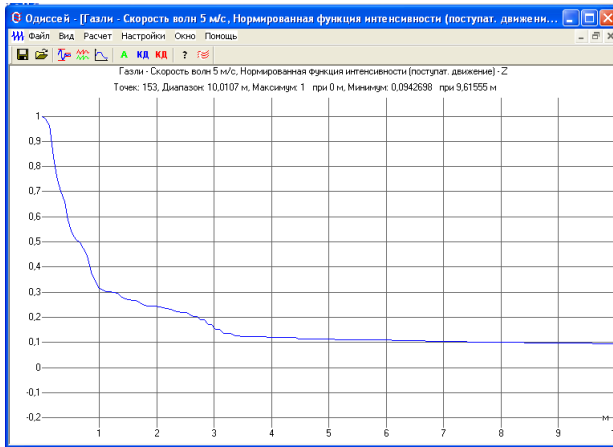
Таблица 3.8

Максимальные перемещения высотного здания

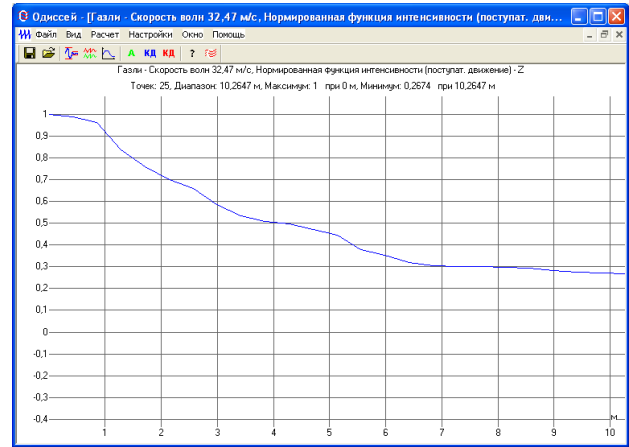
Модель	Вход 0		Вход 1		Вход 2		Вход 3		Вход 4	
	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад
без ротаций	0.40214	0.00050	0.40214	0.00050	0.40214	0.00050	0.40214	0.00050	0.40214	0.00050
с ротациями	0.43019	0.00059	0.40597	0.00051	0.40335	0.00051	0.40282	0.00050	0.40263	0.00050
%	7.5%	18%	0.7%	2%	0.2%	2%	0.17%	0%	0.12%	0%

По результатам численного эксперимента установлено, что влияние ротационного движения, вызванного прохождением волн Рэлея, оказалось существенным только для супермягкого грунта ($\chi=0.094$), когда горизонтальные перемещения для модели с ротациями возрастают на 7.5-12% и угловые – на 16-18%. Это отмечается и для рядового, и для высотного здания. С увеличением жесткости грунта влияние ротаций на динамическую реакцию резко падает. Для $\chi=0.237$ ротации дают прирост 2-4% для угловых перемещений и 0.7-1.7% для горизонтальных, а при $\chi \geq 0.500$ ротации практически не влияют на динамический отклик. Такие результаты объясняются малостью ротационной составляющей, геометрической симметрией РДМ, отсутствием в ней консольных элементов. Угловые перемещения

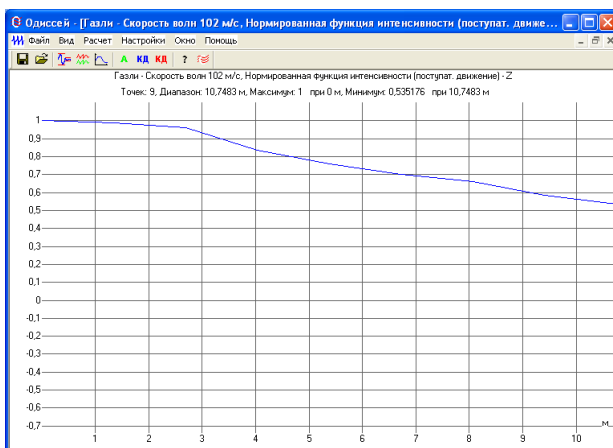
модели не велики, так как сдерживаются стойками с большой жесткостью на растяжение-сжатие.



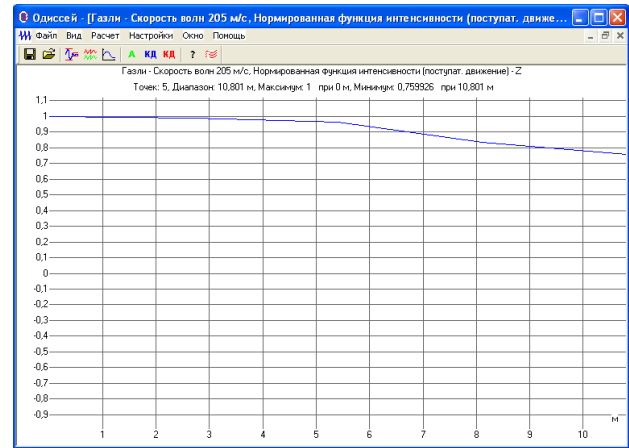
а) вход 0



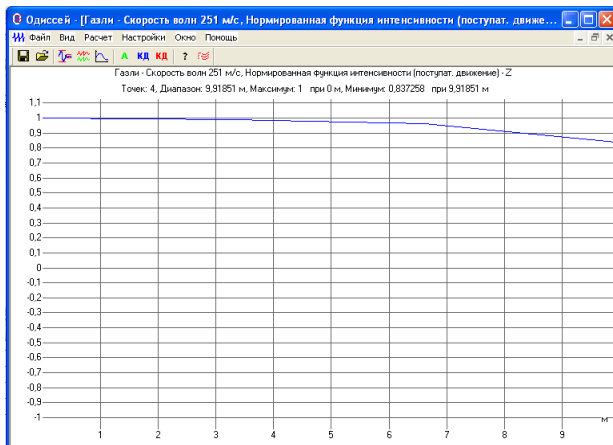
б) вход 1



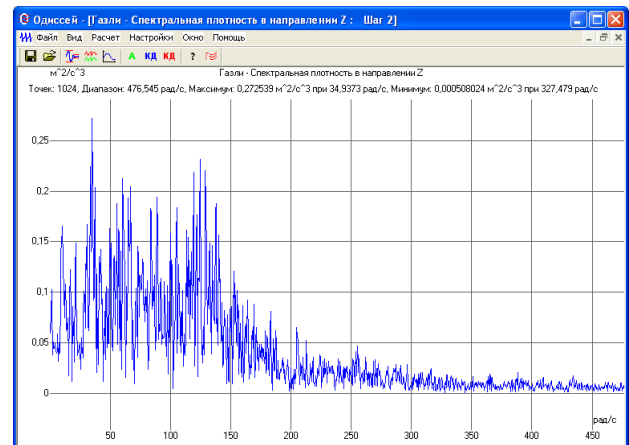
в) вход 2



г) вход 3



д) вход 4



е)

Рисунок 3.18. Нормированные функции интенсивности воздействий
а) вход 0: $E=0.1$ МПа, $c_R=5$ м/с, б) вход 1: $E=5$ МПа, $c_R=32.5$ м/с, в) вход 2: $E=50$ МПа, $c_R=102$ м/с, г) вход 3: $E=160$ МПа, $c_R=205$ м/с, д) вход 4: $E=300$ МПа, $c_R=251$ м/с, е) спектральная плотность Z-акселерограммы, Газли.

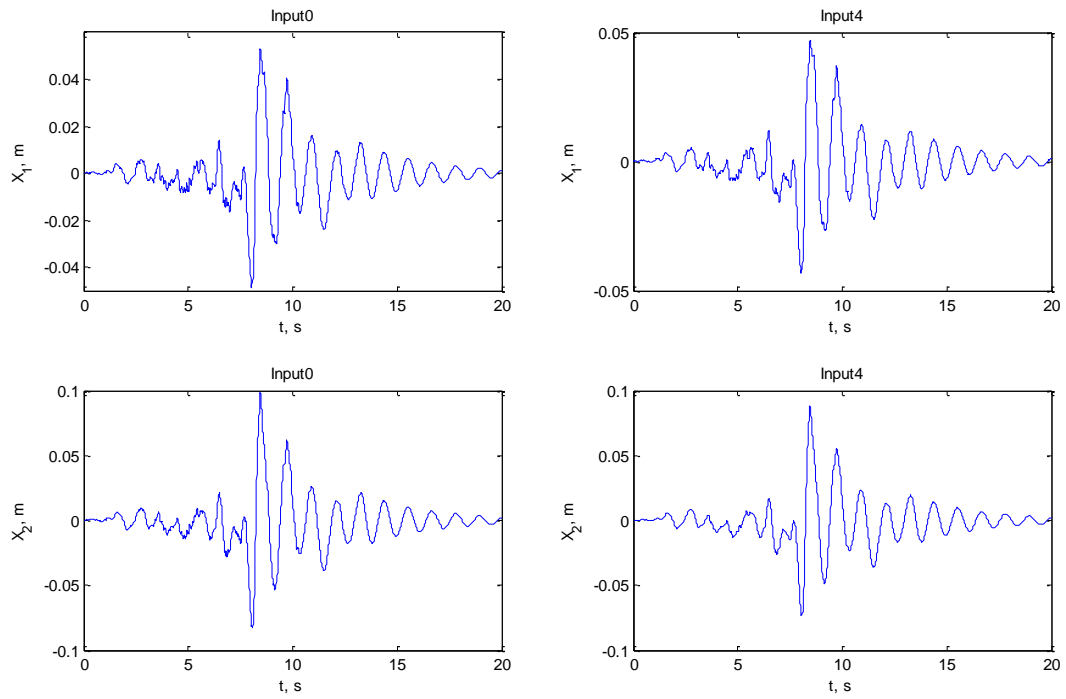


Рисунок 3.19. Модель «Рядовое здание с учетом ротаций», горизонтальная реакция (слева вход 0, справа вход 4).

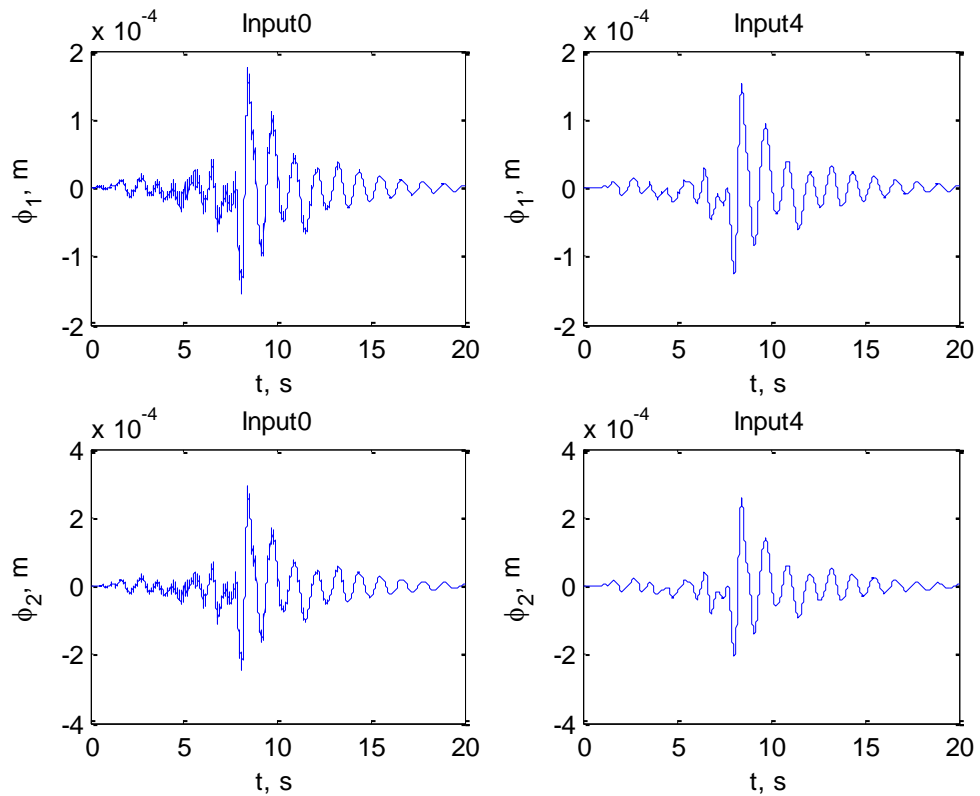


Рисунок 3.20. Модель «Рядовое здание с учетом ротаций», угловая реакция (слева вход 0, справа вход 4).

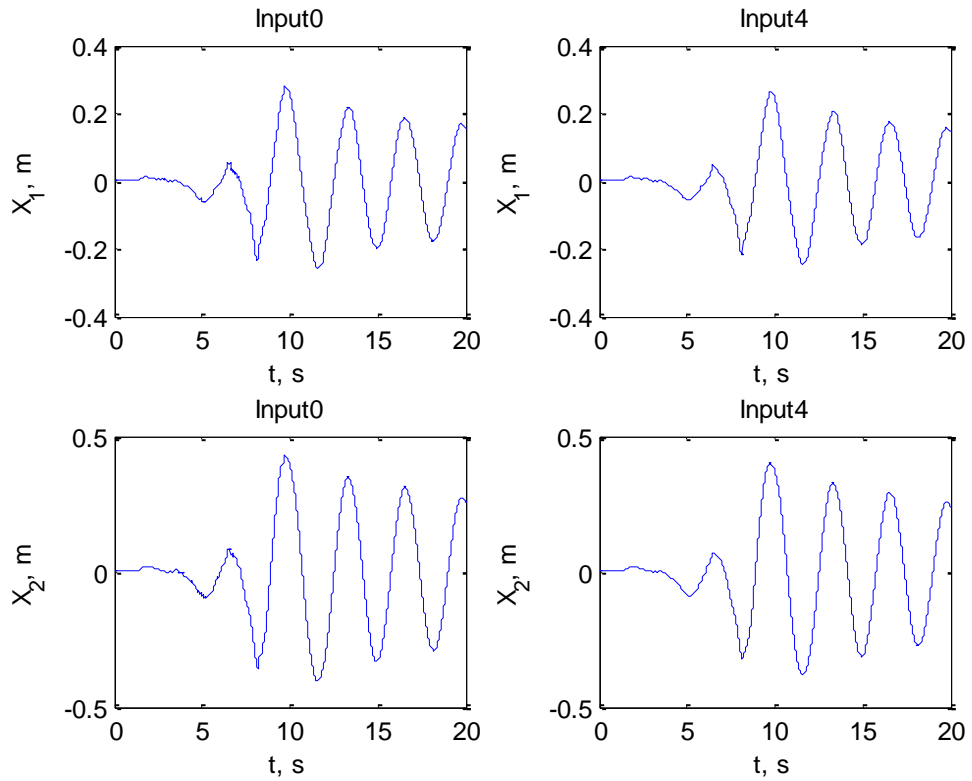


Рисунок 3.21. Модель «Высотное здание с учетом ротаций», горизонтальная реакция (слева вход 0, справа вход 4).

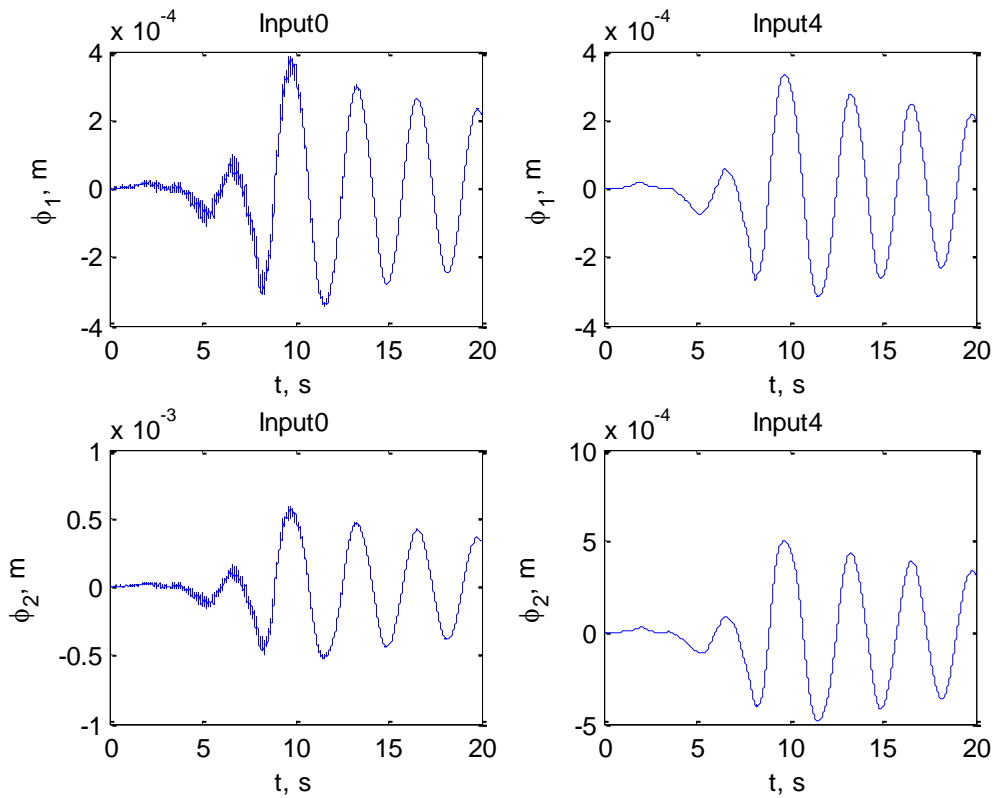


Рисунок 3.22. Модель «Высотное здание с учетом ротаций», угловая реакция (слева вход 0, справа вход 4).

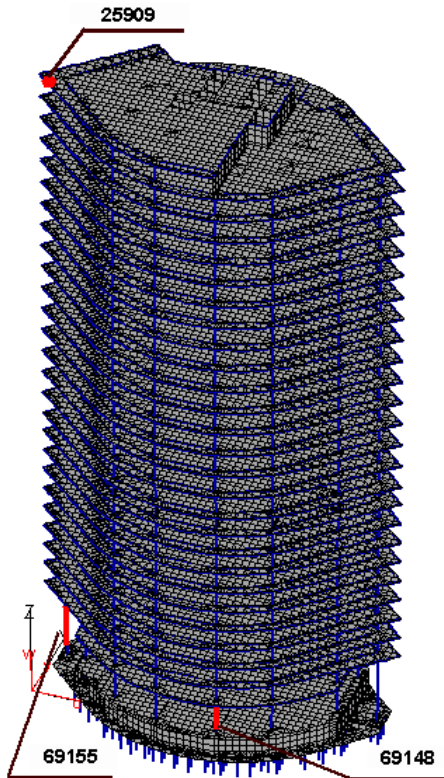


Рисунок 3.23. Конечно-элементная модель здания (показаны опасные колонны и узел с макс. перемещением)

В сложных пространственных моделях угловые движения основания приводят к перераспределению внутренних усилий и к увеличению перемещений. В [14, 89], приведены результаты расчетов модели высотного железобетонного каркасного здания (с размерами 48x30x99 м на плитно-свайном фундаменте, Рисунок 3.23) методом конечных элементов. Был исследован динамический отклик здания на воздействие, заданное двумя акселерограммами (Рисунки 3.24, 3.25) – высокочастотной синтезированной (Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта) и низкочастотной природной (землетрясение в Бухаресте, 1977 г.) при фазовых скоростях поперечных волн c_2 , равных 100,

300, 500 и 2000 м/с.

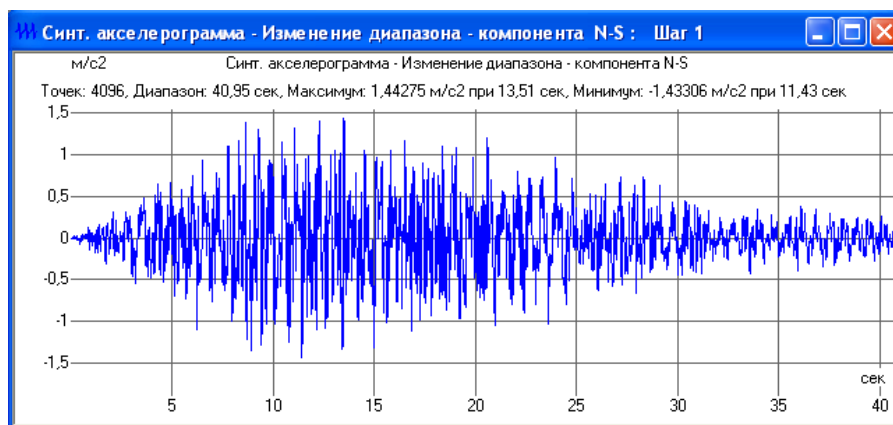


Рисунок 3.24 Одна из трех синтезированных акселерограмм поступательного движения (направление N-S)

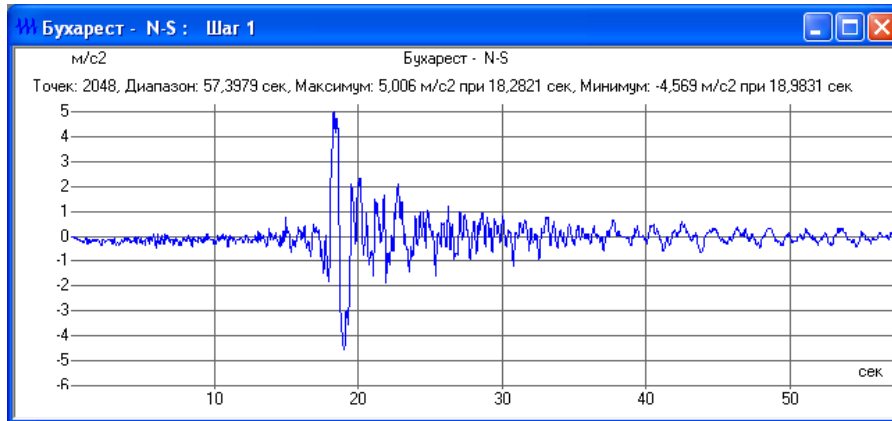


Рисунок 3.25. Одна из трех записей Бухарестского землетрясения 1977 г. (направление *N-S*)

Приведем основные выводы по работе [89]:

- 1) с увеличением скорости поперечных волн влияние ротационного движения на динамическую реакцию заметно снижается (Таблица 3.9);
- 2) для низкочастотных акселерограмм вклад ротационного движения оказался более существенным (Таблицы 3.9, 3.10), перемещения увеличились на 10-11% по сравнению с ростом на 6.5% при высокочастотном воздействии;
- 3) ротационное движение приводит к перераспределению внутренних усилий в конструкции (Таблицы 3.11, 3.12), максимальное увеличение усилий составило 10.7% (Таблица 3.9).

Таблица 3.9

Максимальные перемещения перекрытия верхнего этажа для синтезированной акселерограммы

Скорость волн c_R , м/с	Перемещения, м		
	Направление	без учета ротаций	с учетом ротаций
300	X	0.069	0.072
	Y	0.093	0.099 (+6.5%)
	Z	0.015	0.017
500	X	0.069	0.070
	Y	0.093	0.095 (+2.1%)
	Z	0.015	0.016
2000	X	0.069	0.069
	Y	0.093	0.094
	Z	0.015	0.015

Таблица 3.10

Максимальные перемещения перекрытия верхнего этажа
для акселерограммы землетрясения в Бухаресте

Скорость волн c_2 , м/с	Перемещения, м		
	Направление	без учета ротации	с учетом ротации
300	X	0.891	0.887
	Y	1.256	1.269 (+10%)
	Z	0.122	0.135 (+11%)

Таблица 3.11

Максимальные силовые факторы в колоннах 65155 и 69148
для синтезированной акселерограммы

Скорость волн c_2 , м/с	Максимальные силовые факторы с учетом или без учета ротаций				
	Усилие	65155		69148	
		без учета	с учетом	без учета	с учетом
300	N	1989	2151 (+8.1%)	3000	3006
	Q_s	96	93	146	142
	Q_t	56	55	143	141
	M_r	75	83 (+10.7%)	37	41
	M_s	55	53	227	216
	M_t	134	127	258	250

Таблица 3.12

Максимальные усилия в колоннах 65155 и 69148
для акселерограммы землетрясения в Бухаресте, 1977 г.

Скорость волн c_2 , м/с	Максимальные силовые факторы с учетом или без учета ротаций				
	Усилие	65155		69148	
		без учета	с учетом	без учета	с учетом
300	N	17102	18839	29794	28998
	Q_s	447	457	1044	1087
	Q_t	223	271	1069	920
	M_r	467	435	270	239
	M_s	304	312	1615	1439
	M_t	402	386	1736	1820

4. Динамика строительных конструкций при дифференцированном сейсмическом воздействии

4.1. Кинематические параметры и интенсивность пространственного движения грунта в точке

При волновом сейсмическом воздействии каждая точка грунтового основания совершает пространственное движение. Это движение может быть различным в зависимости от того, происходит оно на свободной от застройки поверхности (так называемое полевое движение) или под фундаментом сооружения. Кинематические параметры (перемещения, скорости, ускорения) полевого движения зависят от геологического строения основания, его физических свойств, типа сейсмических волн, их частотного состава и скоростей, определяющих длины волн. Проблемой определения этих параметров занимаются инженерные сейсмологи, разрабатывая геологическую модель основания и формируя данные микросейсмо районирования: скорости и направления сейсмических волн, расположение возможных источников, пиковые ускорения грунта, сценарные акселерограммы прогнозируемых землетрясений и т.д.

Под фундаментом здания перемещения частиц грунта и общая волновая картина могут быть другими по целому ряду причин. Во-первых, физические свойства грунта под сооружением изменяются из-за его деформирования под весом сооружения, а также из-за внедрения в грунт свай или, возможно, из-за устройства искусственного основания. Эти неоднородности влияют на рассеяние и отражение сейсмических волн и, по-видимому, более или менее достоверно могут быть оценены по результатам полномасштабного эксперимента [27]. Во-вторых, сейсмические нагрузки могут вызывать динамическое взаимодействие конструкции с основанием, когда конструкция сама является источником возбуждения колебаний прилегающего грунта [132]. Соответствующая контактная динамическая задача решается специалистами в области взаимодействия конструкции с основанием (SSI – Soil Structure Interaction).

Таким образом, задание поля перемещений частиц грунта под фундаментом можно выделить в отдельную задачу механики сплошной среды, это предмет анализа инженерной сейсмологии и специалистов по SSI. Далее будем считать, что кинематика любой опорной точки известна и может соответствовать как полевому движению, так и определяться с учетом деформирования и неоднородности основания, динамических эффектов, инициируемых сооружением, эффектов отражения и рассеяния сейсмических волн и т.д.

Вне зависимости от того, каков тип фундамента (плитный, свайный, ленточный, на дискретных опорах), он связан с основанием в опорных точках; для распределенных систем эти точки могут быть получены дискретизацией. Далее под движением опорной точки будем понимать движение опорной точки вместе с некоторой областью прилежащего грунта. Не учитывая эффектов взаимодействия конструкции с основанием, допускаем, что движение опорных точек конструкции равнозначно движению областей грунта в некоторой области закрепления. Тогда дифференцированная модель движения грунта в основании приводит к дифференцированному (или нежесткому) движению опорных точек.

Перейдем к оценке динамической реакции сооружения на заданное дифференцированное сейсмическое воздействие – задаче строительной механики, решаемой инженерами-проектировщиками. Основная проблема заключается в определении процедур, по которым пространственное поле сейсмических движений может быть преобразовано в параметры сейсмического воздействия, необходимые для нормативных инженерных расчетов.

Пусть конструкция имеет p опорных точек, связанных с основанием; движение грунта в зоне опирания i -той точки с координатой (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) зададим векторами абсолютных (то есть заданных в неподвижной системе координат) перемещений, скоростей, ускорений

$$\mathbf{X}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(X_{1i}^0 \quad X_{2i}^0 \quad X_{3i}^0 \right)^T,$$

$$\dot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(\dot{X}_{1i}^0 \quad \dot{X}_{2i}^0 \quad \dot{X}_{3i}^0 \right)^T, \quad (i=1, \dots, p)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(\ddot{X}_{1i}^0 \quad \ddot{X}_{2i}^0 \quad \ddot{X}_{3i}^0 \right)^T.$$

При прохождении сейсмических волн грунтовой объем совершает угловые движения или ротации. Далее, говоря о ротациях грунта в опорной точке (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) , будем иметь в виду повороты некоторого объема грунта в зоне опирания. Введем вектора ротаций относительно трех неподвижных осей, а также вектора угловых скоростей и ускорений:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(\alpha_{1i}^0 \quad \alpha_{2i}^0 \quad \alpha_{3i}^0 \right)^T,$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(\dot{\alpha}_{1i}^0 \quad \dot{\alpha}_{2i}^0 \quad \dot{\alpha}_{3i}^0 \right)^T, \quad (i=1, \dots, p)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(\ddot{\alpha}_{1i}^0 \quad \ddot{\alpha}_{2i}^0 \quad \ddot{\alpha}_{3i}^0 \right)^T.$$

Ротации можно определить по формулам Ньюмарка [99] или по методу Ю.П. Назарова [72] и получить результат в виде трехмерных ротационных акселерограмм. Таким образом, движение каждой опорной точки происходит в составе грунтового основания и полностью описывается шестикомпонентными векторами

$$\mathbf{q}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(\mathbf{X}_i^0 \quad \boldsymbol{\alpha}_i^0 \right)^T,$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(\dot{\mathbf{X}}_i^0 \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0 \right)^T, \quad (i=1, \dots, p)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left(\ddot{\mathbf{X}}_i^0 \quad \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0 \right)^T. \quad (4.1)$$

Заметим, что введение угловых перемещений не является излишним усложнением теории. Во-первых, при задании граничных условий в опорных точках непрерывное векторное поле дискретизируется, осредняется по зоне опирания, вследствие чего и появляются угловые перемещения. Кроме того, перемещения опорных точек являются граничными условиями для задачи динамики, поэтому в неподвиж-

ной системе координат их необходимо дополнить углами поворотов³². Это даст возможность в дальнейшем корректно перейти к уравнениям относительного движения. Интенсивность воздействия в i -той точке определим как модуль вектора ускорения $\ddot{\mathbf{X}}_i^0$, инвариантный относительно ориентации системы координат:

$$I_i^X = |\ddot{\mathbf{X}}_i^0| = \sqrt{(\ddot{X}_{1i}^0)^2 + (\ddot{X}_{2i}^0)^2 + (\ddot{X}_{3i}^0)^2}. \quad (4.2)$$

Вектор ускорений в опорной точке есть произведение интенсивности воздействия на вектор направляющих косинусов:

$$\ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = |\ddot{\mathbf{X}}_i^0| \mathbf{v}_i^X(t). \quad (4.3)$$

Координаты вектора направляющих косинусов поступательного движения

$$\mathbf{v}_i^X(t) = (v_{1i}^X \quad v_{2i}^X \quad v_{3i}^X)^T$$

$$v_{1i}^X = \frac{\ddot{X}_{1i}^0}{|\ddot{\mathbf{X}}_i^0|}, \quad v_{2i}^X = \frac{\ddot{X}_{2i}^0}{|\ddot{\mathbf{X}}_i^0|}, \quad v_{3i}^X = \frac{\ddot{X}_{3i}^0}{|\ddot{\mathbf{X}}_i^0|}, \quad (4.4)$$

причем выполняется условие нормировки $(v_{1i}^X)^2 + (v_{2i}^X)^2 + (v_{3i}^X)^2 = 1$.

Аналогичное представление для вектора угловых ускорений:

$$\ddot{\mathbf{a}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = |\ddot{\mathbf{a}}_i^0| \mathbf{v}_i^\alpha(t) = I_i^\alpha \mathbf{v}_i^\alpha(t), \quad (4.5)$$

где I_i^α - интенсивность углового движения

$$I_i^\alpha = |\ddot{\mathbf{a}}_i^0| = \sqrt{(\ddot{\alpha}_{1i}^0)^2 + (\ddot{\alpha}_{2i}^0)^2 + (\ddot{\alpha}_{3i}^0)^2}. \quad (4.6)$$

Вектор направляющих косинусов углового движения $\mathbf{v}_i^\alpha(t) = (v_{1i}^\alpha \quad v_{2i}^\alpha \quad v_{3i}^\alpha)^T$ имеет координаты

³² Так, например, если рассматривать в качестве опорных элементов колонны, то в соответствующей стержневой модели торцы стержня имеют три поступательные и три угловые степени свободы. Эти угловые степени свободы и определяются ротациями грунта.

$$v_{1i}^\alpha = \frac{\ddot{\alpha}_{1i}^0}{|\ddot{\mathbf{a}}_i^0|}, \quad v_{2i}^\alpha = \frac{\ddot{\alpha}_{2i}^0}{|\ddot{\mathbf{a}}_i^0|}, \quad v_{3i}^\alpha = \frac{\ddot{\alpha}_{3i}^0}{|\ddot{\mathbf{a}}_i^0|},$$

$$(v_{1i}^\alpha)^2 + (v_{2i}^\alpha)^2 + (v_{3i}^\alpha)^2 = 1.$$

Шестикомпонентный вектор ускорений грунта (4.1) в i -той опоре выразим через интенсивность поступательного движения I_i^X , применив подход, изложенный при выводе формулы (1.17):

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I_i^X \cdot \mathbf{v}_i(t), \quad (4.7)$$

где $\mathbf{v}_i(t)$ - вектор, объединяющий векторы направляющих косинусов \mathbf{v}_i^X и \mathbf{v}_i^α в единый вектор направления сейсмического воздействия:

$$\mathbf{v}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^X \\ w_i \mathbf{v}_i^\alpha \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где $w_i = I_i^\alpha / I_i^X$ - относительная интенсивность углового ускорения.

Если проводится детерминированный расчет, то за интенсивности поступательного и углового воздействия принимают максимальные значения модулей (4.3) и (4.6) или их стандарты, как это описано в п.2.3. Далее для определенности примем:

$$I_i^X = \max |\ddot{\mathbf{X}}_i^0|, \quad I_i^\alpha = \max |\ddot{\mathbf{a}}_i^0|.$$

В нормативных статических расчетах с заданной интенсивностью I формула (4.7) для полного вектора ускорений имеет вид

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I \mathbf{v}_i. \quad (4.9)$$

Случай плоской задачи. Для плоской (двумерной) задачи формулы (4.1-4.9) изменятся. Движение i -той точки с координатой (x_{1i}, x_{2i}) будем описывать вектором линейных перемещений, скоростей и ускорений ($i = 1, \dots, p$):

$$\mathbf{X}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}) = \begin{pmatrix} X_{1i}^0 & X_{2i}^0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\dot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}) = \begin{pmatrix} \dot{X}_{1i}^0 & \dot{X}_{2i}^0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}) = \begin{pmatrix} \ddot{X}_{1i}^0 & \ddot{X}_{2i}^0 \end{pmatrix}^T.$$

Поступательное и угловое движение грунта в окрестности точки (x_{1i}, x_{2i}) зададим трехкомпонентными векторами абсолютных линейных и угловых перемещений, скоростей, ускорений:

$$\mathbf{q}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}) = \begin{pmatrix} X_{1i}^0 & X_{2i}^0 & \alpha_i^0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}) = \begin{pmatrix} \dot{X}_{1i}^0 & \dot{X}_{2i}^0 & \dot{\alpha}_i^0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}) = \begin{pmatrix} \ddot{X}_{1i}^0 & \ddot{X}_{2i}^0 & \ddot{\alpha}_i^0 \end{pmatrix}^T. \quad (4.1')^{33}$$

Интенсивность воздействия в i -той точке есть модуль вектора ускорения поступательного движения:

$$I_i^X = |\ddot{\mathbf{X}}_i^0| = \sqrt{(\ddot{X}_{1i}^0)^2 + (\ddot{X}_{2i}^0)^2}. \quad (4.2')$$

Вектор ускорений в опорной точке есть произведение интенсивности воздействия на вектор направляющих косинусов:

$$\ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}) = |\ddot{\mathbf{X}}_i^0| \mathbf{v}_i^X(t). \quad (4.3')$$

Координаты вектора направляющих косинусов поступательного движения

$$\mathbf{v}_i^X(t) = \begin{pmatrix} v_{1i}^X & v_{2i}^X \end{pmatrix}^T$$

$$v_{1i}^X = \frac{\ddot{X}_{1i}^0}{|\ddot{\mathbf{X}}_i^0|}, \quad v_{2i}^X = \frac{\ddot{X}_{2i}^0}{|\ddot{\mathbf{X}}_i^0|}, \quad (v_{1i}^X)^2 + (v_{2i}^X)^2 = 1.$$

³³ Штрихом в номере формулы будем обозначать двумерные аналоги приведенных выше формул.

Интенсивность углового движения I_i^α для плоской задачи $I_i^\alpha = |\ddot{\alpha}_i^0|$. Трехкомпонентный вектор ускорений грунта (4.1') в i -той точке выражается через интенсивность поступательного движения:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I_i^X \cdot \mathbf{v}_i(t), \quad (4.7')$$

где $\mathbf{v}_i(t)$ - вектор направления сейсмического воздействия (w - относительная интенсивность углового ускорения):

$$\mathbf{v}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^X \\ w \end{pmatrix}, \quad w = \frac{|\ddot{\alpha}_i^0|}{I_i^X}. \quad (4.8')$$

Если расчет проводится на нормативную интенсивность сейсмического воздействия I , то формула (4.7') для вектора ускорений в i -той точке принимает вид

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I \mathbf{v}_i. \quad (4.9')$$

4.2. Точка привязки полей перемещений и ускорений

Ниже описан подход Ю.П. Назарова, предложенный им для задания полей перемещений и ускорений точек грунта [72], [75], [76]. Для описания кинематики всего поля грунтового движения выберем одну из опорных точек в качестве начальной (точка привязки). Пусть точкой привязки будет первая опорная точка с вектором перемещений \mathbf{q}_1^0 и ускорений $\ddot{\mathbf{q}}_1^0$ (4.1). Вектор ускорений (4.9) в первой точке равен

$$\ddot{\mathbf{q}}_1^0(t, x_1, x_2, x_3) = |\ddot{\mathbf{q}}_1^0| \mathbf{v}_1(t) = I \mathbf{v}_1(t), \quad (4.10)$$

где $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(t)$ - вектор направляющих косинусов сейсмического воздействия (4.8) в точке привязки.

Для описания полей ускорений введем скалярные функции координат и времени, задающие пространственное изменение поля ускорений по отношению к точке

привязки [76]. Для i -той опорной точки, координаты которой заданы вектором $\mathbf{r}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$

$$\begin{aligned} \Gamma_{1i} &= \Gamma_1(t, \mathbf{r}_i) = \ddot{X}_{1i}^0 / \ddot{X}_{11}^0, & \Gamma_{4i} &= \Gamma_4(t, \mathbf{r}_i) = \ddot{\alpha}_{1i}^0 / \ddot{\alpha}_{11}^0, \\ \Gamma_{2i} &= \Gamma_2(t, \mathbf{r}_i) = \ddot{X}_{2i}^0 / \ddot{X}_{21}^0, & \Gamma_{5i} &= \Gamma_5(t, \mathbf{r}_i) = \ddot{\alpha}_{2i}^0 / \ddot{\alpha}_{21}^0, \\ \Gamma_{3i} &= \Gamma_3(t, \mathbf{r}_i) = \ddot{X}_{3i}^0 / \ddot{X}_{31}^0, & \Gamma_{6i} &= \Gamma_6(t, \mathbf{r}_i) = \ddot{\alpha}_{3i}^0 / \ddot{\alpha}_{31}^0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Функции Γ зависят от типа, направления и длин сейсмических волн; из них сформируем $\mathbf{T}_i^{[6 \times 6]} = \mathbf{T}_i(t, \mathbf{r}_i) = \text{diag}(\Gamma_{1i}, \Gamma_{2i}, \dots, \Gamma_{6i})$ - матрицу функций изменения поля ускорений в i -той опоре. Матрица \mathbf{T}_i применяется для задания 6-мерного вектора ускорений в i -той опорной точке

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0(t) = \mathbf{T}_i(t, \mathbf{r}_i) \ddot{\mathbf{q}}_1^0(t) = I \Gamma_i(t, \mathbf{r}_i) \mathbf{v}_1(t), \quad (4.12)$$

где I - интенсивность сейсмического воздействия, \mathbf{v}_1 - вектор направляющих косинусов в первой опорной точке.

Полный $6p$ -мерный вектор ускорений также выражается через нормативную интенсивность, матрицу пространственного изменения поля ускорений $\mathbf{T}^{[6 \times 6]}$ и вектор направляющих косинусов сейсмического воздействия в точке привязки

$$\ddot{\mathbf{q}}^0(t) = \mathbf{T}(t, \mathbf{r}) \ddot{\mathbf{q}}_1^0(t) = I \Gamma(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}_1(t). \quad (4.13)$$

Матрица $\mathbf{T}^{[6 \times 6]}$ составлена из блоков $\mathbf{T}_i^{[6 \times 6]}$ и зависит от времени и координат всех опорных точек

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{r}) = (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_p)^T, \quad \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_p). \quad (4.14)$$

Формула (4.13) задает ускорение в любой опорной точке через характеристики сейсмического воздействия в точке привязки – интенсивность и направляющие косинусы.

4.3. Расширенная матрица жесткости. Матрица жесткости системы опорных элементов

Дифференцированное сейсмическое воздействие задается перемещениями грунта в окрестностях опорных точек и представляет собой кинематические краевые условия для системы дифференциальных уравнений равновесия. Допустим, система имеет n степеней свободы плюс степени свободы её p опорных точек, в которых заданы в общем случае три поступательных и три угловых перемещения. Динамическое поведение такой системы будем описывать полным вектором абсолютных обобщенных координат $\mathbf{q}_{all}^{[n+6p]}$

$$\mathbf{q}_{all} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{abs} \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где $\mathbf{q}_{abs}^{[n]}$ - вектор абсолютных обобщенных координат системы, $\mathbf{q}^{0[6p]}$ - вектор кинематических краевых условий (опорных перемещений). Опорные точки принадлежат опорным элементам и являются частью динамической системы. В методе конечных элементов опорные точки являются узлами конечно-элементной сетки, а опорные перемещения имеют смысл заданных узловых перемещений. Вектору \mathbf{q}_{all} соответствует общая глобальная матрица жесткости $\mathbf{K}_{all}^{[(n+6p) \times (n+6p)]}$, построенная путем объединения матриц жесткости отдельных элементов без учета условий закрепления. Произведение $\mathbf{K}_{all} \mathbf{q}_{all}$ дает вектор всех активных и реактивных сил (то есть внешних сил и опорных реакций) в направлении узловых перемещений.

Строки матрицы \mathbf{K}_{all} , соответствующие компонентам вектора \mathbf{q}_{abs} , формируют расширенную матрицу жесткости $\tilde{\mathbf{K}}^{[n \times (n+6p)]}$. Если элементы вектора \mathbf{q}_{all} упорядочены в соответствии с (4.15), левый блок матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ размерности $[n \times n]$ соответствует матрице жесткости \mathbf{K} для системы с жесткими заделками в опорных точках. Правый блок размерности $[n \times 6p]$ представляет собой \mathbf{K}_s - матрицу жесткости системы опорных элементов, преобразующую кинематическое воз-

действие в сейсмические силы. Таким образом, при выполнении (4.15) расширенная матрица жесткости $\tilde{\mathbf{K}}$ состоит из блоков \mathbf{K} и \mathbf{K}_s :

$$\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_s). \quad (4.16)$$

Произведение $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{all}$ представляет собой вектор внешних сил, приложенных к системе, включая сейсмические силы. В силу (4.15) и (4.16)

$$\tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{abs} \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix} = (\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_s) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{abs} \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0. \quad (4.17)$$

В (4.17) $\mathbf{K}\mathbf{q}_{abs}$ - восстанавливающие силы, $\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0$ - внешние сейсмические силы. Эти силы вместе с даламберовыми силами инерции входят в уравнения динамического равновесия. Таким образом, представление (4.17) отражает преобразование кинематического воздействия в силовое, действующее на систему через опорные элементы.

Случай плоской системы. Для случая двумерной задачи в формулах (4.15-4.17) меняются размерности векторов и матриц. Пусть плоская система имеет n степеней свободы и p опорных точек. В опорных точках, принадлежащих опорным элементам, заданы $3p$ перемещений (две поступательных и одна угловая). Полный вектор абсолютных обобщенных координат $\mathbf{q}_{all}^{[n+3p]}$

$$\mathbf{q}_{all} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{abs} \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix}, \quad (4.15')$$

где $\mathbf{q}_{abs}^{[n]}$ - вектор абсолютных обобщенных координат системы, $\mathbf{q}^{0[3p]}$ - вектор известных опорных перемещений. Вектору \mathbf{q}_{all} соответствует общая глобальная матрица жесткости $\mathbf{K}_{all}^{[(n+3p) \times (n+3p)]}$; n строк матрицы \mathbf{K}_{all} , соответствующие компонентам вектора \mathbf{q}_{abs} , формируют *расширенную матрицу жесткости* $\tilde{\mathbf{K}}^{[n \times (n+3p)]}$.

Если элементы вектора \mathbf{q}_{all} упорядочены в соответствии с (4.15'), левый блок

матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ размерности $[n \times n]$ соответствует обычной матрице жесткости \mathbf{K} . Матрица жесткости системы опорных элементов \mathbf{K}_s - правый блок матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ размерности $[n \times 3p]$.

4.4. Уравнения абсолютного и относительного движения при дифференцированном воздействии. Матрица влияния.

Движение грунта передается на конструкцию через опорные элементы и является причиной её вынужденных колебаний. Обобщенные переменные, описывающие колебательный процесс динамической системы, могут быть абсолютными, то есть задавать движение в неподвижной (неинерциальной) системе координат, и относительными – если система координат подвижная (инерциальная). Подвижная система координат сама совершает движение относительно неподвижных осей, это движение называется *переносным*.

По принципу Даламбера для консервативных систем сумма всех инерционных и упругих восстанавливающих сил равна нулю, следовательно, уравнения движения системы в абсолютных координатах с учетом (4.17) имеют вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (4.18)$$

где $\mathbf{M}^{[n \times n]}$ и $\mathbf{K}^{[n \times n]}$ - матрицы инерции и жесткости конструкции, $\mathbf{K}_s^{[n \times 6p]}$ – матрица жесткости системы опорных элементов, \mathbf{q}^0 - $6p$ -мерный вектор опорных перемещений (для плоской системы $\mathbf{q}^{0[3p]}$ и $\mathbf{K}_s^{[n \times 3p]}$).

Важно заметить, что для проведения нормативных расчетов на сейсмостойкость уравнения движения необходимо записать в относительных координатах. В этом случае в уравнениях движения появятся переносные инерционные сейсмические силы, зависящие от ускорений точек грунта, а параметры динамической реакции будут выражаться через интенсивность.

Вывод уравнений относительного движения во многом повторяет подход, примененный в п.3.1 для случая интегрального сейсмического воздействия; исключение составляет только определение переносного движения.

Введем неподвижную систему координат $O123$, пусть она совпадает с основными осями РДМ. Центр тяжести тела массой m расположен в точке C с радиус-вектором $\mathbf{r} = (x_{1C}, x_{2C}, x_{3C})$, для простоты примем, что оси $O123$ являются для этого тела главными осями инерции, а параллельные им оси $C123$ - главными центральными. Моменты инерции в осях $C123$ обозначим $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Тело имеет 6 степеней свободы – три линейные вдоль осей $O123$ и три угловые относительно этих осей. Определим 6-мерный вектор переносного движения \mathbf{q}_{tr} как вектор обобщенных перемещений, возникающих в конструкции от статических опорных перемещений \mathbf{q}^0 . Относительные обобщенные координаты \mathbf{q}_r будем отсчитывать от перемещений \mathbf{q}_{tr} . Вектора переносного движения (перемещений, скоростей, ускорений) содержат линейные и угловые перемещения:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{tr}(t) &= (X_{10} \quad X_{20} \quad X_{30})^T, & \mathbf{\alpha}_{tr}(t) &= (\alpha_{10} \quad \alpha_{20} \quad \alpha_{30})^T \\ \dot{\mathbf{X}}_{tr}(t) &= (\dot{X}_{10} \quad \dot{X}_{20} \quad \dot{X}_{30})^T, & \dot{\mathbf{\alpha}}_{tr}(t) &= (\dot{\alpha}_{10} \quad \dot{\alpha}_{20} \quad \dot{\alpha}_{30})^T \\ \ddot{\mathbf{X}}_{tr}(t) &= (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{20} \quad \ddot{X}_{30})^T, & \ddot{\mathbf{\alpha}}_{tr}(t) &= (\ddot{\alpha}_{10} \quad \ddot{\alpha}_{20} \quad \ddot{\alpha}_{30})^T,\end{aligned}$$

или

$$\mathbf{q}_{tr}(t) = (\mathbf{X}_{tr} \quad \mathbf{\alpha}_{tr})^T, \quad \dot{\mathbf{q}}_{tr}(t) = (\dot{\mathbf{X}}_{tr} \quad \dot{\mathbf{\alpha}}_{tr})^T, \quad \ddot{\mathbf{q}}_{tr}(t) = (\ddot{\mathbf{X}}_{tr} \quad \ddot{\mathbf{\alpha}}_{tr})^T.$$

Введем вектора относительных линейных и угловых перемещений, скоростей и ускорений (относительно перемещений \mathbf{q}_{tr}):

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= (X_1 \quad X_2 \quad X_3)^T, & \boldsymbol{\varphi} &= (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^T, \\ \dot{\mathbf{X}} &= (\dot{X}_1 \quad \dot{X}_2 \quad \dot{X}_3)^T, & \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= (\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2 \quad \dot{\varphi}_3)^T,\end{aligned}$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = (\ddot{X}_1 \quad \ddot{X}_2 \quad \ddot{X}_3)^T, \quad \ddot{\boldsymbol{\phi}} = (\ddot{\phi}_1 \quad \ddot{\phi}_2 \quad \ddot{\phi}_3)^T,$$

или в виде шестикомпонентных векторов

$$\mathbf{q} = (\mathbf{X} \quad \boldsymbol{\phi})^T, \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{X}} \quad \dot{\boldsymbol{\phi}})^T, \quad \ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{\mathbf{X}} \quad \ddot{\boldsymbol{\phi}})^T,$$

а также *абсолютных* перемещений, скоростей и ускорений (относительно начального положения $O123$):

$$\mathbf{X}_{abs} = (X_{1abs} \quad X_{2abs} \quad X_{3abs})^T, \quad \boldsymbol{\phi}_{abs} = (\phi_{1abs} \quad \phi_{2abs} \quad \phi_{3abs})^T.$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{abs} = (\dot{X}_{1abs} \quad \dot{X}_{2abs} \quad \dot{X}_{3abs})^T, \quad \dot{\boldsymbol{\phi}}_{abs} = (\dot{\phi}_{1abs} \quad \dot{\phi}_{2abs} \quad \dot{\phi}_{3abs})^T.$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{abs} = (\ddot{X}_{1abs} \quad \ddot{X}_{2abs} \quad \ddot{X}_{3abs})^T, \quad \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{abs} = (\ddot{\phi}_{1abs} \quad \ddot{\phi}_{2abs} \quad \ddot{\phi}_{3abs})^T.$$

Абсолютная скорость поступательного движения $\dot{\mathbf{X}}_{abs}$ есть сумма относительной и переносной скоростей:

$$\dot{\mathbf{X}}_{abs} = \dot{\mathbf{X}} + \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{X}}_{tr} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{tr} \times \mathbf{r},$$

где $\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r}$ и $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{tr} \times \mathbf{r}$ - векторные произведения

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} k & l & m \\ \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ x_{1C} & x_{2C} & x_{3C} \end{vmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{tr} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} k & l & m \\ \dot{\alpha}_{10} & \dot{\alpha}_{20} & \dot{\alpha}_{30} \\ x_{1C} & x_{2C} & x_{3C} \end{vmatrix},$$

k, l, m - тройка направляющих ортов радиус-вектора \mathbf{r} .

Угловая скорость при малых ротациях равна $\dot{\boldsymbol{\phi}}_{abs} = \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{tr}$.

Далее выкладки ничем не отличаются от приведенных в п.3.1. В результате вектор инерционных сил разделяется на два слагаемых:

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}_O \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_O \ddot{\mathbf{q}}_{tr} = \mathbf{M}_O (\ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}}_{tr}), \quad (4.19)$$

здесь \mathbf{M}_O - матрица инерции твердого тела при относительном движении:

$$\mathbf{M}_O = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mx_{3C} & -mx_{2C} \\ 0 & m & 0 & -mx_{3C} & 0 & mx_{1C} \\ 0 & 0 & m & mx_{2C} & -mx_{1C} & 0 \\ 0 & -mx_{3C} & mx_{2C} & \theta_1 + m(x_{3C}^2 + x_{2C}^2) & -mx_{1C}x_{2C} & -mx_{1C}x_{3C} \\ mx_{3C} & 0 & -mx_{1C} & -mx_{1C}x_{2C} & \theta_2 + m(x_{1C}^2 + x_{3C}^2) & -mx_{2C}x_{3C} \\ -mx_{2C} & mx_{1C} & 0 & -mx_{1C}x_{3C} & -mx_{2C}x_{3C} & \theta_3 + m(x_{2C}^2 + x_{1C}^2) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{M}_O \ddot{\mathbf{q}}_{tr}$ - переносные инерционные сейсмические силы.

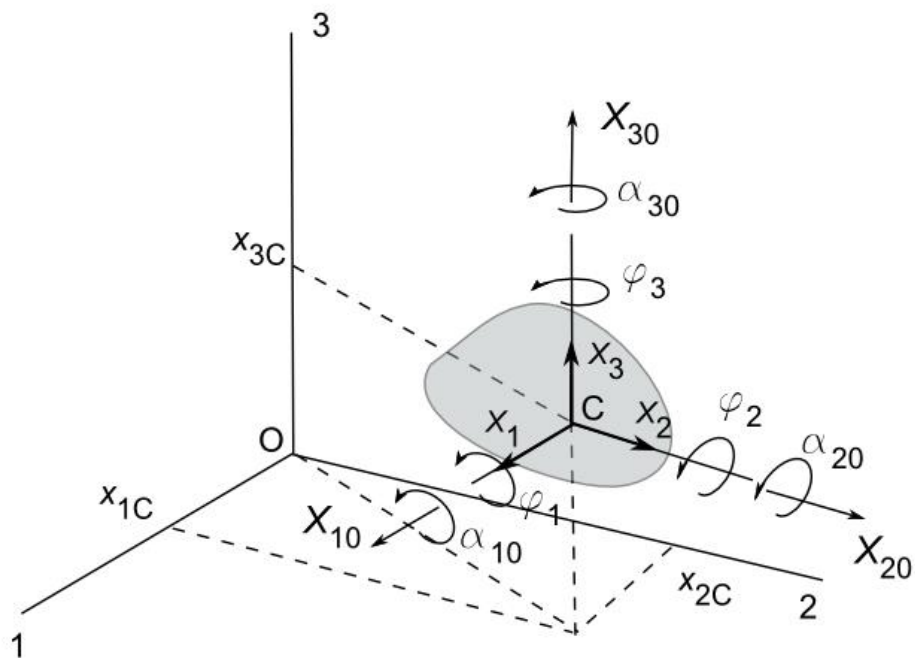


Рисунок 4.1. Относительное и переносное движение твердого тела

Рассмотрим относительное движение системы с n степенями свободы под многомерным кинематическим воздействием. Определим n -мерный *вектор переносного движения* \mathbf{q}_{tr} как вектор обобщенных перемещений, возникающих в конструкции от статических опорных перемещений \mathbf{q}^0 . Для системы с n степенями свободы вектор абсолютных обобщенных координат $\mathbf{q}_{abs}^{[n]}$ есть сумма векторов относительных обобщенных координат $\mathbf{q}^{[n]}$ и переносного движения $\mathbf{q}_{tr}^{[n]}$:

$$\mathbf{q}_{abs} = \mathbf{q} + \mathbf{q}_{tr}. \quad (4.20)$$

Перепишем уравнение абсолютного движения (4.18), заменив инерционные силы в соответствии с (4.19) и учитывая, что суммарные восстанавливающие силы равны сумме упругих сил при переносном и относительном движениях:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{tr} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0. \quad (4.21)$$

Вектор упругих усилий в опорных элементах $\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr}$ уравновешен вектором опорных реакций $\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0$:

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}, \quad (4.22)$$

откуда

$$\mathbf{q}_{tr} = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (4.23)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ - матрица податливости системы. С учетом (4.22) и (4.23) запишем уравнения движения в относительных координатах:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{tr}, \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{K}_s\ddot{\mathbf{q}}^0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Отметим, что в случае переносного движения для многомерного пространственного кинематического воздействия сложно представить какую-то определенную подвижную систему координат, привычную для динамики твердого тела. Приведенное выше формальное определение переносного движения дает возможность автоматически получить в правой части уравнений относительного движения (4.23) переносные инерционные силы, зависящие только от вектора ускорений $\ddot{\mathbf{q}}^0$.

Очевидно, что расчет правой части формулы (4.23) сопряжен с вычислительными трудностями, возрастающими с ростом числа степеней свободы динамической системы. Несколько упростить задание правой части уравнения движения можно с помощью матрицы влияния $\mathbf{F}_s^{[n \times 6p]}$ (для плоской системы $\mathbf{F}_s^{[n \times 3p]}$), связывающей перемещения вдоль обобщенных координат с перемещениями опорных точек [72]. Матрицу влияния \mathbf{F}_s введем как взятое со знаком минус произведение мат-

рицы податливости системы $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ на матрицу жесткости системы опор \mathbf{K}_s (см. (4.21)):

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s. \quad (4.24)$$

Тогда вектор переносного движения равен

$$\mathbf{q}_{tr} = \mathbf{F}_s \mathbf{q}^0, \quad (4.25)$$

а уравнение движения будет иметь вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}\mathbf{F}_s \ddot{\mathbf{q}}^0. \quad (4.26)$$

Для вычисления матрицы влияния \mathbf{F}_s решают b_p статических задач, в ходе которых определяется вектор перемещений системы на единичное смещение (осадку) каждой из опор. Таким образом, i -тый столбец матрицы влияния \mathbf{F}_s в (4.25) — это n обобщенных перемещений системы от единичного i -того компонента вектора \mathbf{q}^0 .

4.5. Оценка внутренних усилий от переносного движения

Когда уравнения динамического равновесия записываются в относительном движении, решение уравнения (4.26) соответствует относительному отклонению системы от подвижной системы координат. Обобщенные координаты подвижной системы \mathbf{q}_{tr} также зависят от времени. При мгновенном изменении осадок опор \mathbf{q}^0 РДМ получает перемещения $\mathbf{q}_{tr} = \mathbf{F}_s \mathbf{q}^0$, другими словами, занимает положение мгновенного равновесия, относительно которого решается динамическая задача. Для описания такого состояния системы применяют термин «деформированная» расчетная схема. Следует отметить, что колебания системы относительно деформированного состояния рассматривают во всех случаях, когда решение динамической задачи привязано к подвижной системе координат, в которой из-за переносного движения появляются дополнительные силы и моменты (от изменения эксцентриситетов статических нагрузок, от неравномерных осадок опор, и т.д.). РДМ

«подстраивается» под них, деформируясь и приходя в состояние мгновенного равновесия с соответствующими внутренними усилиями:

$$\mathbf{S}_{tr} = \mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} = \mathbf{K}\mathbf{F}_s\mathbf{q}^0 = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0. \quad (4.27)$$

Полные расчетные усилия \mathbf{S}_Σ вычисляются как сумма усилий, возникающих при переносном и относительном движениях: $\mathbf{S}_\Sigma = \mathbf{S}_{tr} + \mathbf{S}$.

Проведем оценку вклада усилий от переносного движения \mathbf{S}_{tr} и от относительного движения \mathbf{S} в общую сумму. Усилия \mathbf{S}_{tr} пропорциональны вектору перемещений грунта по формуле (4.27). Для оценки усилий от относительного движения рассмотрим статическое решение уравнения (4.26) $\mathbf{q}_{st} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{F}_s\ddot{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{K}_s\ddot{\mathbf{q}}^0$.

Статическому решению соответствуют усилия $\mathbf{S}_{st} = \mathbf{K}\mathbf{q}_{st} = -\mathbf{M}\mathbf{F}_s\ddot{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_s\ddot{\mathbf{q}}^0$.

В силу свойства матрицы собственных форм \mathbf{V} и диагональной матрицы собственных частот $\mathbf{\Omega}^2 \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{\Omega}^2$, откуда $\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{V}(\mathbf{\Omega}^2)^{-1}\mathbf{V}^{-1}$. Тогда

$$\mathbf{S}_{st} = \mathbf{V}(\mathbf{\Omega}^2)^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{K}_s\ddot{\mathbf{q}}^0.$$

Рассмотрим разложение вектора сейсмических перемещений \mathbf{q}^0 в тригонометрический ряд Фурье:

$$\mathbf{q}^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad \omega_k = k\pi/T,$$

где $2T$ - период функции $\mathbf{q}^0(t)$, T - длительность реализации, \mathbf{a}_k - вектор коэффициентов Фурье, φ_k - фаза k -той спектральной составляющей. Вектор ускорений определим дифференцированием $\mathbf{q}^0(t)$ по времени:

$$\ddot{\mathbf{q}}^0(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k \omega_k^2 \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

Проведем оценку максимальных по модулю значений векторов \mathbf{q}^0 и $\ddot{\mathbf{q}}^0$:

$$\max|\mathbf{q}^0| \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k \quad \max|\ddot{\mathbf{q}}^0| \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k \omega_k^2,$$

и максимальных статических усилий от переносных и от относительных сил:

$$\mathbf{S}_{tr} \sim \mathbf{K}_s \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{S}_{st} \sim \mathbf{V}(\mathbf{\Omega}^2)^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{K}_s \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k \omega_k^2.$$

Возможны следующие случаи:

- 1) Низкочастотное воздействие и очень жесткая конструкция ($\forall k: \omega_k \ll \Omega_k$), тогда $\mathbf{S}_{st} \ll \mathbf{S}_{tr}$, а так как вне резонансной зоны коэффициенты динамичности будут невелики, то и динамические усилия от относительных перемещений будут малы по сравнению с усилиями от переносных сил: $\mathbf{S} < \mathbf{S}_{tr}$.
- 2) Высокочастотное воздействие и нежесткая конструкция ($\forall k: \Omega_k \ll \omega_k$), тогда $\mathbf{S}_{tr} \ll \mathbf{S}_{st}$, при небольших коэффициентах динамичности вне зоны резонанса $\mathbf{S}_{tr} < \mathbf{S}$.
- 3) Резонансный случай ($\forall k: \Omega_k \sim \omega_k$), тогда $\mathbf{S}_{tr} \sim \mathbf{S}_{st}$, но резонансные коэффициенты динамичности велики, так что $\mathbf{S}_{tr} < \mathbf{S}$.

В особых случаях, например, в эпицентральных зонах при сильных землетрясениях (более 9 баллов) перемещения грунта и соответствующие им деформации РДМ могут быть настолько велики, что потребуются учет усилий в деформированной схеме. Такие расчеты должны опираться на результаты детального сейсмического районирования, чтобы максимально правдоподобно задать величины и направления вектора \mathbf{q}^0 .

Далее при вычислении полных расчетных усилий \mathbf{S}_{Σ} не будем принимать во внимание усилия \mathbf{S}_{tr} . При статической постановке задачи усилия \mathbf{S}_{tr} определяются простым статическим расчетом.

Ниже приведены примеры составления уравнений движения в абсолютных и относительных координатах при дифференцированном сейсмическом воздействии.

4.6. Плоская рама под дифференцированным сейсмическим воздействием

Сейсмическое воздействие на плоскую раму задано поступательными и угловыми перемещениями основания в опорах (Рисунок 4.1). Запишем уравнения движения при условии, что массы ригелей m_1, m_2, m_3 сосредоточены в узлах рамы.

Обозначим EI, EF - изгибная жесткость и жесткость на растяжение-сжатие каждой стойки и ригеля, h - высота рамы, B - ширина пролета. Стержневая система состоит из 6 узлов и 5 элементов, общее количество степеней свободы – 18, включая 9 узловых перемещений ригелей и 9 кинематических краевых условий (опорных перемещений); нумерация узловых перемещений и стержневых конечных элементов показана на Рисунке 4.1.

Введем вектор абсолютных обобщенных координат, описывающих движение масс в горизонтальном и вертикальном направлениях

$$\mathbf{q}_{abs} = (U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3)^T,$$

и вектор кинематических краевых условий

$$\mathbf{q}^0 = (U_4 \quad V_4 \quad \alpha_4 \quad U_5 \quad V_5 \quad \alpha_5 \quad U_6 \quad V_6 \quad \alpha_6)^T,$$

который будем считать известным.

Сформируем вектор узловых перемещений, разделяя перемещения ригелей и опор

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{f}_1 = (U_1 \quad V_1 \quad \alpha_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \alpha_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad \alpha_3)^T -$$

абсолютные перемещения ригелей в глобальной системе координат.

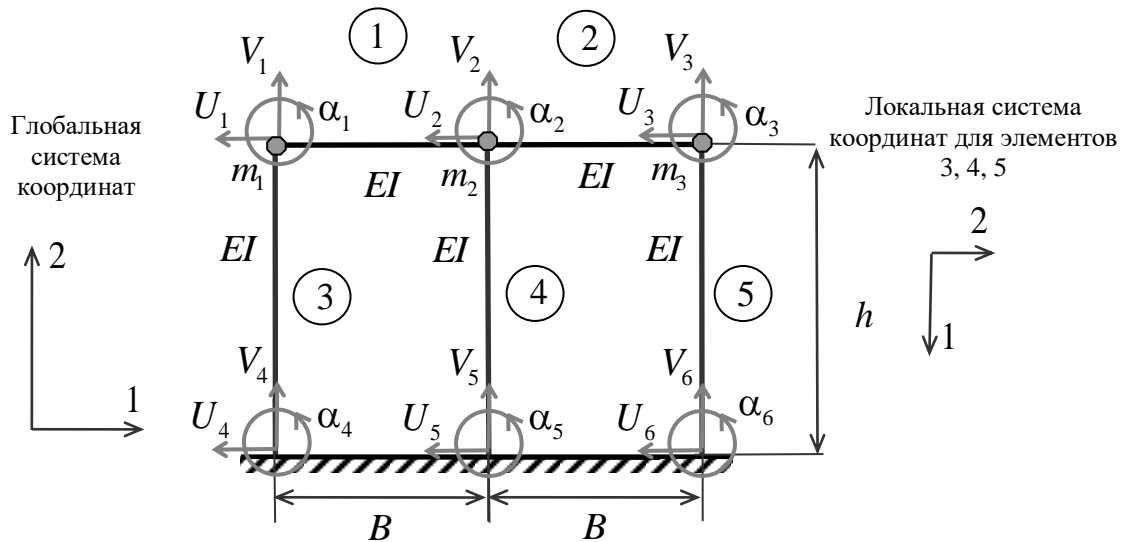


Рисунок 4.2. Конечно-элементная схема рамы

Матрицы жесткости горизонтальных ригелей длиной B (стержневые конечные элементы 1 и 2) в глобальной системе координат представим в блочном виде

$$\mathbf{K}^H = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^H & \mathbf{K}_{12}^H \\ \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{K}_{11}^H = \begin{pmatrix} EF/B & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/B^3 & 6EI/B^2 \\ 0 & 6EI/B^2 & 4EI/B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{12}^H = \begin{pmatrix} -EF/B & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/B^3 & 6EI/B^2 \\ 0 & -6EI/B^2 & 2EI/B \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{21}^H = \begin{pmatrix} -EF/B & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/B^3 & -6EI/B^2 \\ 0 & 6EI/B^2 & 2EI/B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{22}^H = \begin{pmatrix} EF/B & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/B^3 & -6EI/B^2 \\ 0 & -6EI/B^2 & 4EI/B \end{pmatrix}.$$

Для горизонтальных элементов локальная и глобальная системы координат совпадают.

Для вертикальных стоек длиной h (элементы 3, 4, 5) матрица жесткости в глобальной системе имеет вид

$$\mathbf{K}^V = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^V \\ \mathbf{K}_{21}^V & \mathbf{K}_{22}^V \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{11}^V = \begin{pmatrix} 12EI/h^3 & 0 & 6EI/h^2 \\ 0 & EF/h & 0 \\ 6EI/h^2 & 0 & 4EI/h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{12}^V = \begin{pmatrix} -12EI/h^3 & 0 & 6EI/h^2 \\ 0 & -EF/h & 0 \\ -6EI/h^2 & 0 & 2EI/h \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{21}^V = \begin{pmatrix} -12EI/h^3 & 0 & -6EI/h^2 \\ 0 & -EF/h & 0 \\ 6EI/h^2 & 0 & 2EI/h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{22}^V = \begin{pmatrix} 12EI/h^3 & 0 & -6EI/h^2 \\ 0 & EF/h & 0 \\ -6EI/h^2 & 0 & 4EI/h \end{pmatrix}.$$

Здесь учтено, что для стоек локальная система координат не совпадает с глобальной, ориентация локальной системы показана на Рисунке 4.2.

Глобальная матрица жесткости \mathbf{K}_{all} получается путем объединения матриц жесткости отдельных элементов, причем компоненты, соответствующие общим степеням свободы соседних элементов, суммируются [67]:

$$\mathbf{K}_{all} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^H & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H + \mathbf{K}_{11}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^H & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V \\ \mathbf{K}_{21}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^V \end{pmatrix},$$

здесь $\mathbf{0}^{[3 \times 3]}$ - нулевая матрица. Матрица \mathbf{K}_{all} имеет размерность [18x18], по числу степеней свободы стержневой системы.

Произведение $\mathbf{K}_{all} \mathbf{f}$ дает вектор активных и реактивных сил в направлении узловых перемещений (то есть внешних сил и опорных реакций).

Левый верхний блок матрицы \mathbf{K}_{all} размерности [9x9] соответствует матрице жесткости рамы, жестко заделанной в основание

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H + \mathbf{K}_{11}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^H \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H + \mathbf{K}_{11}^V \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Правый верхний блок размерности $[9 \times 9]$ представляет собой матрицу жесткости системы опорных элементов, преобразующую кинематическое воздействие в сейсмические силы

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{12}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Расширенная матрица жесткости $\tilde{\mathbf{K}}^{[9 \times 18]}$ состоит из строк, соответствующих перемещениям \mathbf{f}_1 , то есть из блоков \mathbf{K} и \mathbf{K}_s :

$$\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_s).$$

Уравнения движения запишем по принципу Даламбера: к уравнениям статического равновесия добавим даламберовы силы инерции. Заметим, что в данном примере все массы сосредоточенные, не имеют угловых степеней свободы, поэтому вектор обобщенных координат \mathbf{q}_{abs} не содержит угловых перемещений и не равен вектору \mathbf{f}_1 . Для записи уравнений движения из расширенной матрицы жесткости вычеркнем строчки и столбцы с номерами 3, 6 и 9. Это угловые направления, по которым не действуют инерционные силы, и которым не соответствуют уравнения динамического равновесия. Матрица жесткости стержневой системы (4.28) в развернутом виде

Уравнения движения в абсолютных координатах имеют вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (4.30)$$

где $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$. Матрица инерции не содержит недиагональных элементов, так как РДМ не имеет угловых степеней свободы.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{EF}{B} + \frac{12EI}{h^3} & 0 & -\frac{EF}{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{B^3} + \frac{EF}{h} & 0 & -\frac{12EI}{B^3} & 0 & 0 \\ -\frac{EF}{B} & 0 & \frac{2EF}{B} + \frac{12EI}{h^3} & 0 & -\frac{EF}{B} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{B^3} & 0 & \frac{24EI}{B^3} + \frac{EF}{h} & 0 & -\frac{12EI}{B^3} \\ 0 & 0 & -\frac{EF}{B} & 0 & \frac{EF}{B} + \frac{12EI}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{B^3} & 0 & \frac{12EI}{B^3} + \frac{EF}{h} \end{pmatrix},$$

матрица жесткости опорных элементов (4.29)

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} -\frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EF}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{h} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор переносного движения – это вектор перемещений $\mathbf{q}_r = -\mathbf{FK}_s\mathbf{q}^0$, возникающих в конструкции от статических опорных перемещений \mathbf{q}^0 . Движение в относительных координатах по формуле (4.23) записывается в виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{MK}^{-1}\mathbf{K}_s\ddot{\mathbf{q}}^0, \quad (4.31)$$

через матрицу влияния $\mathbf{F}_s = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_s$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{MF}_s\ddot{\mathbf{q}}^0. \quad (4.32)$$

4.7. Плоская модель каркасного здания

Модель каркасного здания с двумя перекрытиями под сейсмическим воздействием, заданным горизонтальными и вертикальными перемещениями основания в

опорах u_A, v_A и u_B, v_B , а также ротациями α_A, α_B (Рисунок 4.3). Запишем уравнения абсолютного и относительного движения здания.

Введем шесть обобщенных координат: абсолютные линейные перемещения X_1, Y_1, X_2, Y_2 и угловые φ_1, φ_2 . Обозначим m_1, θ_1 и m_2, θ_2 - массы и моменты инерции перекрытий в главных центральных осях, EI, EF - изгибная жесткость и жесткость на растяжение-сжатие каждой стойки, h - высота этажа, B - ширина перекрытия.

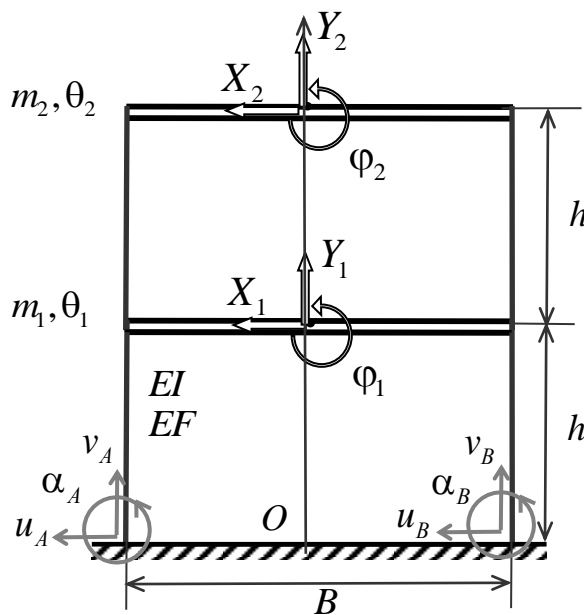


Рисунок 4.3. Кинематическое воздействие

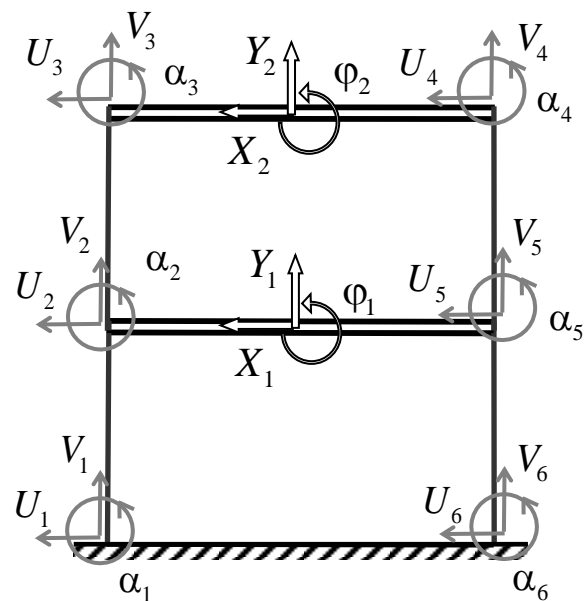


Рисунок 4.4. Координаты конечных элементов и обобщенные координаты

Уравнения движения получим по принципу Даламбера, рассматривая условия равновесия перекрытий. Введем узловые перемещения конечных элементов - стоек U_i, V_i, α_i , ($i=1, \dots, 6$) (Рисунок 4.4). Из условия абсолютной жесткости перекрытий и малости углов поворотов следует связь между узловыми перемещениями и обобщенными координатами:

$$\begin{aligned} U_2 = U_5 = X_1, \quad U_3 = U_4 = X_2, \quad \alpha_2 = \alpha_5 = \varphi_1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \varphi_2, \\ V_2 = Y_1 - \varphi_1 \frac{B}{2}, \quad V_3 = Y_2 - \varphi_2 \frac{B}{2}, \quad V_5 = Y_1 + \varphi_1 \frac{B}{2}, \quad V_4 = Y_2 + \varphi_2 \frac{B}{2}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

граничные условия:

$$U_1 = u_A, V_1 = v_A, \alpha_1 = \alpha_A, U_6 = u_B, V_6 = v_B, \alpha_6 = \alpha_B. \quad (4.34)$$

Матрица жесткости плоского стержневого элемента, работающего на растяжение-сжатие и изгиб

$$\mathbf{K}_{el} = \begin{pmatrix} EF/h & 0 & 0 & -EF/h & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/h^3 & 6EI/h^2 & 0 & -12EI/h^3 & 6EI/h^2 \\ 0 & 6EI/h^2 & 4EI/h & 0 & -6EI/h^2 & 2EI/h \\ -EF/h & 0 & 0 & EF/h & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/h^3 & -6EI/h^2 & 0 & 12EI/h^3 & -6EI/h^2 \\ 0 & 6EI/h^2 & 2EI/h & 0 & -6EI/h^2 & 4EI/h \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

связывает внутренние усилия N_i, Q_i, L_i ($i=2,3,4,5$) с узловыми перемещениями.

Пусть \mathbf{k}_j - j -тая строка матрицы \mathbf{K}_{el} ($j=1, \dots, 6$). Тогда с учетом (4.33) - (4.35)

продольные силы равны:

$$N_2 = \mathbf{k}_4 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = (EF/h)(V_2 - V_1) = (EF/h)(Y_1 - B\phi_1/2 - v_A),$$

$$N_3 = \mathbf{k}_4 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = (EF/h)(V_3 - V_2) = \\ = (EF/h)(Y_2 - Y_1 - B(\phi_2 - \phi_1)/2),$$

$$N_4 = \mathbf{k}_4 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = (EF/h)(V_4 - V_5) = \\ = (EF/h)(Y_2 - Y_1 + B(\phi_2 - \phi_1)/2),$$

$$N_5 = \mathbf{k}_4 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = (EF/h)(V_5 - V_6) = (EF/h)(Y_1 + B\phi_1/2 - v_B), \text{ по}$$

перечные силы:

$$Q_2 = \mathbf{k}_5 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = (12EI/h^3)(U_2 - U_1) - (6EI/h^2)(\alpha_1 + \alpha_2) = \\ = (12EI/h^3)(X_1 - u_A) - (6EI/h^2)(\alpha_A + \phi_1),$$

$$Q_3 = \mathbf{k}_5 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = (12EI/h^3)(U_3 - U_2) - (6EI/h^2)(\alpha_2 + \alpha_3) = \\ = (12EI/h^3)(X_2 - X_1) - (6EI/h^2)(\phi_1 + \phi_2),$$

$$Q_4 = \mathbf{k}_5 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = (12EI/h^3)(U_4 - U_5) - (6EI/h^2)(\alpha_4 + \alpha_5) = \\ = (12EI/h^3)(X_2 - X_1) - (6EI/h^2)(\phi_1 + \phi_2),$$

$$Q_5 = \mathbf{k}_5 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = (12EI/h^3)(U_5 - U_6) - (6EI/h^2)(\alpha_5 + \alpha_6) = \text{из-}$$

$$= (12EI/h^3)(X_1 - u_B) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \alpha_B),$$

гибающие моменты:

$$L_2 = \mathbf{k}_6 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = (6EI/h^2)(U_1 - U_2) + (2EI/h)(\alpha_1 + 2\alpha_2) =$$

$$= (6EI/h^2)(u_A - X_1) + (2EI/h)(\alpha_A + 2\varphi_1),$$

$$L_3 = \mathbf{k}_6 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = (6EI/h^2)(U_2 - U_3) + (2EI/h)(\alpha_2 + 2\alpha_3) =$$

$$= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(\varphi_1 + 2\varphi_2),$$

$$L'_3 = \mathbf{k}_3 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = (6EI/h^2)(U_2 - U_3) + (2EI/h)(2\alpha_2 + \alpha_3) =$$

$$= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$L_4 = \mathbf{k}_6 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = (6EI/h^2)(U_5 - U_4) + (2EI/h)(\alpha_5 + 2\alpha_4) =$$

$$= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(\varphi_1 + 2\varphi_2),$$

$$L'_4 = \mathbf{k}_3 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = (6EI/h^2)(U_5 - U_4) + (2EI/h)(2\alpha_5 + \alpha_4) =$$

$$= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$L_5 = \mathbf{k}_6 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = (6EI/h^2)(U_6 - U_5) + (2EI/h)(\alpha_B + 2\alpha_5) =$$

$$= (6EI/h^2)(u_B - X_1) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \alpha_B).$$

Отметим, что внутренние усилия направлены против соответствующих им перемещений, кроме того, внутренние поперечная и продольная силы равны и противоположно направлены на концах элемента (Рисунок 4.5), а изгибающие моменты на концах элемента имеют разные значения (например, L_3 и L'_3).

Условия равновесия первого перекрытия дают три уравнения движения (Рисунок 4.5, часть сил инерции, связанных с взаимными перемещениями, не показана, но учтена в уравнениях равновесия).

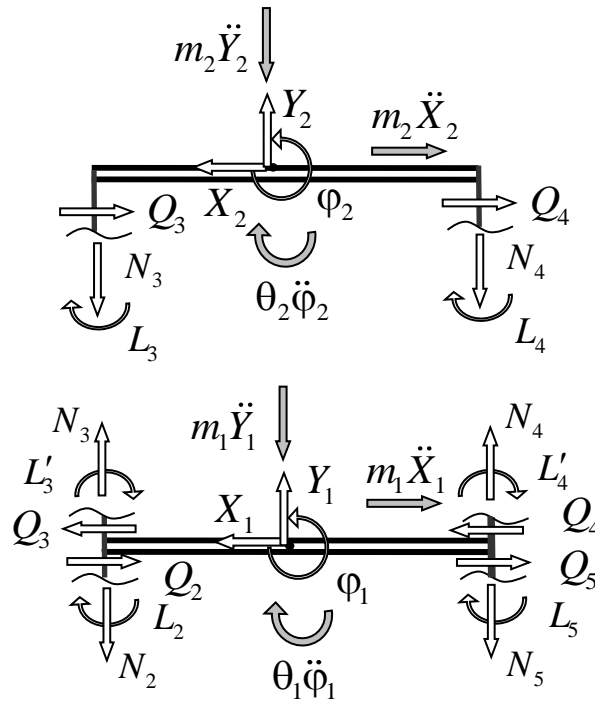


Рисунок 4.5. К условию равновесия перекрытий.

Суммы сил, действующих на перекрытия по горизонтали и по вертикали равны нулю; кроме того, равна нулю сумма моментов всех сил относительно центра O :

$$m_1 \ddot{X}_1 + m_1 h \ddot{\phi}_1 + Q_2 + Q_5 - Q_3 - Q_4 = 0,$$

$$m_1 \ddot{Y}_1 + N_2 + N_5 - N_3 - N_4 = 0,$$

$$\theta_{1O} \ddot{\phi}_1 + m_1 h \ddot{X}_1 + L_2 + L_5 + L'_3 + L'_4 + (B/2)(N_5 - N_2 + N_3 - N_4) = 0.$$

Те же условия для второго перекрытия:

$$m_2 \ddot{X}_2 + 2m_2 h \ddot{\phi}_2 + Q_3 + Q_4 = 0,$$

$$m_2 \ddot{Y}_2 + N_3 + N_4 = 0,$$

$$\theta_{2O} \ddot{\phi}_2 + 2m_2 h \ddot{X}_2 + L_3 + L_4 + (B/2)(N_4 - N_3) = 0.$$

Подставляя выражения для внутренних усилий через обобщенные координаты, получим уравнения движения системы в неподвижных осях:

$$m_1 \ddot{Y}_1 + 4Y_1 (EF/h) - 2Y_2 (EF/h) = (EF/h)(v_A + v_B),$$

$$\begin{aligned}
& m_1 \ddot{X}_1 + m_1 h \ddot{\phi}_1 + 4(12EI/h^3)X_1 - 2(12EI/h^3)X_2 + 2(6EI/h^2)\phi_2 = \\
& = (12EI/h^3)(u_A + u_B) + (6EI/h^2)(\alpha_A + \alpha_B), \\
& \theta_{1O} \ddot{\phi}_1 + m_1 h \ddot{X}_1 - 2(6EI/h^2)X_2 + [B^2(EF/h) + 4(4EI/h)]\phi_1 - \\
& + [(4EI/h) - (B^2/2)(EF/h)]\phi_2 = (BEF/2h)(v_A - v_B) - \quad (4.36) \\
& - (6EI/h^2)(u_A + u_B) - (2EI/h)(\alpha_A + \alpha_B),
\end{aligned}$$

$$m_2 \ddot{Y}_2 + 2(EF/h)Y_2 - 2(EF/h)Y_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& m_2 \ddot{X}_2 + 2m_2 h \ddot{\phi}_2 - 2(12EI/h^3)X_1 + 2(12EI/h^3)X_2 - 2(6EI/h^2)\phi_1 - \\
& - 2(6EI/h^2)\phi_2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \theta_{2O} \ddot{\phi}_2 + 2m_2 h \ddot{X}_2 + 2(6EI/h^2)X_1 - 2(6EI/h^2)X_2 + \\
& + [(4EI/h) - (B^2/2)(EF/h)]\phi_1 + [(B^2/2)(EF/h) + 2(4EI/h)]\phi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Уравнения абсолютного движения в матричном виде запишем в форме (4.19):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K} \mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s \mathbf{q}^0, \quad (4.37)$$

где $\mathbf{q}_{abs} = (Y_1 \quad X_1 \quad \phi_1 \quad Y_2 \quad X_2 \quad \phi_2)^T$ - вектор абсолютных обобщенных координат, \mathbf{M} - матрица инерции (3.28)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_1 h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 h & \theta_{1O} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 2m_2 h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_2 h & \theta_{2O} \end{pmatrix},$$

$$\theta_{1O} = \theta_1 + m_1 h^2, \quad \theta_{2O} = \theta_2 + 4m_2 h^2,$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{4EF}{h} & 0 & 0 & -\frac{2EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{48EI}{h^3} & 0 & 0 & -\frac{24EI}{h^3} & \frac{12EI}{h^2} \\ 0 & 0 & \frac{(16EI + B^2EF)}{h} & 0 & -\frac{12EI}{h^2} & \frac{(8EI - B^2EF)}{2h} \\ -\frac{2EF}{h} & 0 & 0 & \frac{2EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{24EI}{h^3} & -\frac{12EI}{h^2} & 0 & \frac{24EI}{h^3} & -\frac{12EI}{h^2} \\ 0 & \frac{12EI}{h^2} & \frac{(8EI - B^2EF)}{2h} & 0 & -\frac{12EI}{h^2} & \frac{(16EI + B^2EF)}{2h} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

- матрица жесткости, $\mathbf{K}_s \mathbf{q}^0$ - вектор сейсмических сил,

$\mathbf{q}^0 = (v_A \ u_A \ \alpha_A \ v_B \ u_B \ \alpha_B)^T$ - вектор перемещений опорных точек,

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} \frac{EF}{h} & 0 & 0 & \frac{EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} \\ -\frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{2EI}{h} & \frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{2EI}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

- матрица жесткости системы опор, формирующая сейсмическое воздействие на конструкцию. Матрица \mathbf{K}_s преобразует вектор сейсмических перемещений в силы, действующие по направлениям ближайших к опорам обобщенных координат.

Уравнения относительного движения системы в подвижной системе координат в форме (4.26):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}\mathbf{F}_s\ddot{\mathbf{q}}^0,$$

где $\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s$ - матрица влияния, $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ - матрица податливости.

4.8. Упрощение угловых граничных условий

В примере, рассмотренном в п.4.6, каждая опорная точка совершает движение совместно с примыкающей к ней малой областью основания (Рисунок 4.6а), это отражено в граничных условиях (4.33).

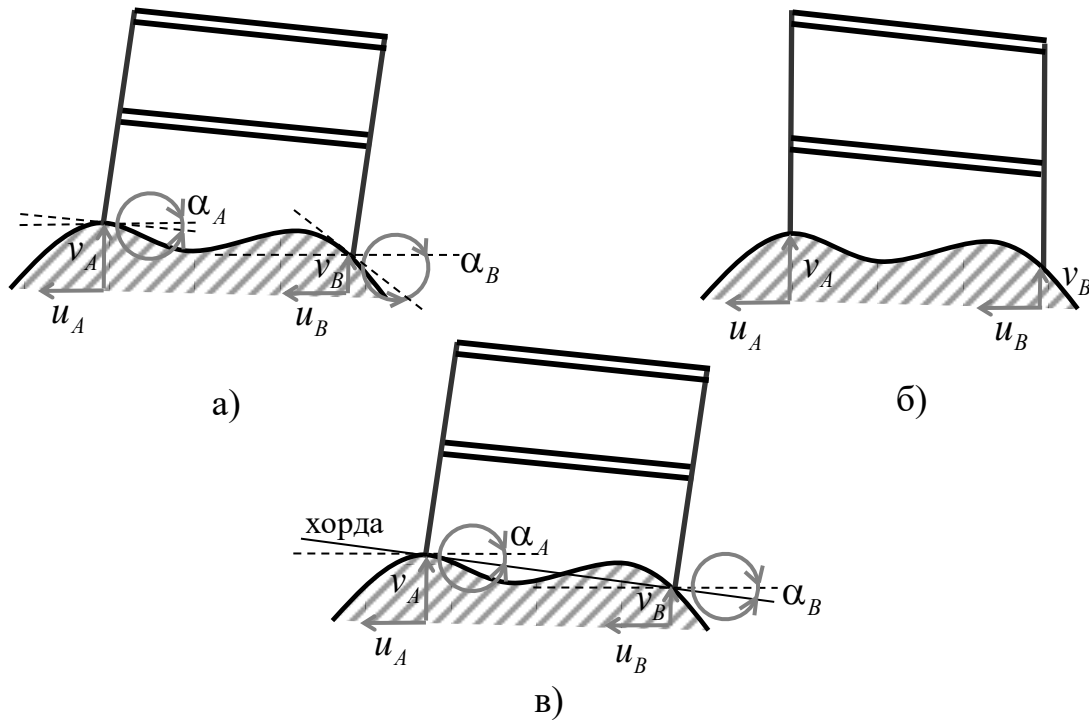


Рисунок 4.6. Варианты граничных условий

Рассмотрим два возможных варианта упрощения граничных условий:

1) основание в окрестности опорных точек двигается только поступательно без каких-либо угловых движений (Рисунок 4.6б), граничные условия имеют вид

$$U_1 = u_A, V_1 = v_A, U_6 = u_B, V_6 = v_B, \alpha_A = \alpha_B = 0. \quad (4.40)$$

2) основание поворачивается как твердое тело (Рисунок 4.6в), хотя и может деформироваться в горизонтальном направлении (модель хордовой ротации), при этом граничные условия:

$$U_1 = u_1, V_1 = v_1, U_6 = u_2, V_6 = v_2, \alpha_A = \alpha_B = \alpha_1 = \alpha_6 = (v_2 - v_1)/B. \quad (4.41)$$

Вектор кинематического воздействия для обоих случаев становится четырехкомпонентным:

$$\mathbf{q}^0 = (v_A \quad u_A \quad v_B \quad u_B)^T,$$

Граничные условия влияют только на правую часть первых трех уравнений (4.36), (4.37), поэтому изменится только матрица \mathbf{K}_s .

Для варианта 1):

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} EF/h & 0 & EF/h & 0 \\ 0 & 12EI/h^3 & 0 & 12EI/h^3 \\ -BEF/(2h) & -6EI/h^2 & BEF/(2h) & -6EI/h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Для варианта 2), с учетом, что $\alpha_A + \alpha_B = 2(v_B - v_A)/B$

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} \frac{EF}{h} & 0 & \frac{EF}{h} & 0 \\ -\frac{12EI}{Bh^2} & \frac{12EI}{h^3} & \frac{12EI}{Bh^2} & \frac{12EI}{h^3} \\ \frac{4EI}{Bh} - \frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{4EI}{Bh} + \frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Изучим влияние упрощений угловых условий (4.40) и (4.41) на решение, проведя численный эксперимент. Рассмотрим три идентичные РДМ при дифференцированном задании сейсмического воздействия в виде волны Рэлея. Отличие будет только в постановке угловых граничных условий. Параметры всех трех РДМ такие же, как для модели «Рядовое здание» из п.3.12. Уравнения движения будем записывать в относительных координатах.

Описание РДМ

Модель «Поступательное движение опор» - граничные условия (4.40), учитывается только поступательное движение опор (Рисунок 4.6б).

Модель «Хордовые ротации» - граничные условия (4.41), хордовые ротации вычисляются по взаимному поступательному движению опор (Рисунок 4.6в).

Модель «Истинные ротации» - граничные условия (4.33) с учетом рассчитанных истинных ротаций, своих в каждой опоре (Рисунок 4.6а). Модель может рассматриваться как здание на абсолютно податливом фундаменте.

Описание входных воздействий

Дифференцированное воздействие задается в каждой опорной точке путем моделирования пространственно-временного поля распространения волны Рэлея [81], включающего две поступательные и одну угловую компоненты (Рисунок 4.7 показывает вид акселерограмм поступательного и ротационного воздействия для входного воздействия 1). Числовые характеристики воздействий 0-5 для грунтов различной степени жесткости приведены в Таблице 4.1.

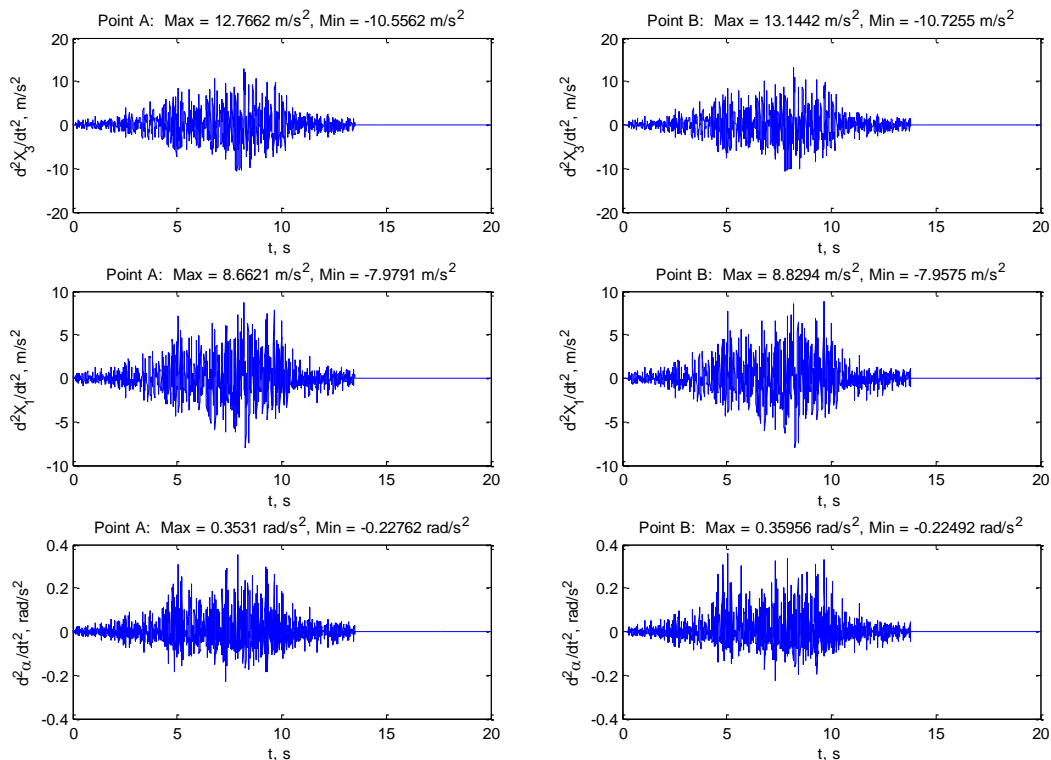


Рисунок 4.7. Вход 1. Акселерограммы вертикального \ddot{X}_3^0 , горизонтального \ddot{X}_1^0 и ротационного движения $\ddot{\alpha}^0$ в опорах A и B

Моделирование осуществлялось в среде Simulink математического пакета MATLAB. Для решения системы ОДУ во временной области применялся решатель ode14x с фиксированным шагом. Максимальные перемещения моделей для входов 0-4 приведены в Таблице 4.2. Максимальные перемещения для входа 5 (абсолютно жесткий грунт, полное отсутствие ротаций) составили $X_2 = 0.08797$ м, $\varphi_2 = 0.00025$ рад.

Таблица 4.1

Параметры входных воздействий

Input	E, МПа	c _R м/с	$\chi(10)$	Точка А		Точка В	
				$\ddot{X}_{3\max}^0$, м/с ²	$\ddot{X}_{3\min}^0$, м/с ²	$\ddot{X}_{3\max}^0$, м/с ²	$\ddot{X}_{3\min}^0$, м/с ²
				$\ddot{X}_{1\max}^0$, м/с ²	$\ddot{X}_{1\min}^0$, м/с ²	$\ddot{X}_{1\max}^0$, м/с ²	$\ddot{X}_{1\min}^0$, м/с ²
				$\ddot{\alpha}_{\max}^0$, рад/с ²	$\ddot{\alpha}_{\min}^0$, рад/с ²	$\ddot{\alpha}_{\max}^0$, рад/с ²	$\ddot{\alpha}_{\min}^0$, рад/с ²
0	0.1	5	0.094	12.766	-10.556	12.919	-10.640
				8.662	-7.979	8.656	-7.998
				2.496	-1.610	2.477	-1.645
1	5	32	0.237	12.766	-10.556	13.144	-10.726
				8.662	-7.979	8.829	-7.958
				0.353	-0.228	0.360	-0.225
2	50	103	0.500	12.766	-10.556	12.757	-10.537
				8.662	-7.979	8.672	-8.000
				0.112	-0.072	0.112	-0.0736
3	160	183	0.750	12.766	-10.556	12.664	-10.516
				8.662	-7.979	8.672	-7.994
				0.062	-0.040	0.063	-0.041
4	300	251	0.840	12.766	-10.556	12.634	-10.527
				8.662	-7.979	8.671	-7.991
				0.046	-0.029	0.046	-0.030
5	-	-	1	12.766	-10.556	12.766	-10.556
				8.662	-7.979	8.662	-7.979
				0	0	0	0

Таблица 4.2

Максимальные перемещения моделей

Мод.	Вход 0		Вход 1		Вход 2		Вход 3		Вход 4	
	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад
1	0.07235	0.00024	0.08509	0.00025	0.08705	0.00025	0.08750	0.00025	0.08760	0.00025
2	0.07003	0.00023	0.08454	0.00025	0.08687	0.00025	0.08741	0.00025	0.08753	0.00025
3	0.07476	0.00025	0.08556	0.00025	0.08719	0.00025	0.08758	0.00025	0.08766	0.00025
%	6.3%	8%	1.2%	0%	0.3%	0%	0.2%	0%	0.1%	0%

*: 1 - модель «Поступательное движение опор», 2 - модель «Хордовые ротации», 3 - модель «Истинные ротации».

На Рисунке 4.8, 4.9 показаны графики изменения параметров динамической реакции во времени для модели с истинными ротациями для входов 0 и 5, в последней строке указана разница между максимальным и минимальным значениями в процентах.

При исследовании трех расчетных схем, отличающихся только способом задания угловых граничных условий, было установлено, что максимальная разница между параметрами динамической реакции при одинаковых входных воздействиях не превышает 8% (Таблица 4.2). Исследование показало, что при обычных грунтовых условиях (мягкие, средние и жесткие грунты) наличие угловых граничных условий при кинематическом воздействии в опорных точках не играет существенной роли (изменение динамической реакции порядка 1%). Оказалось, что только для сверхмягкого грунта (вход 0) влияние угловых граничных условий может изменить динамическую реакцию в пределах 6-8%. Таким образом, для расчетных схем со стандартными грунтовыми условиями, по-видимому, достаточно ограничиться только поступательными опорными перемещениями.

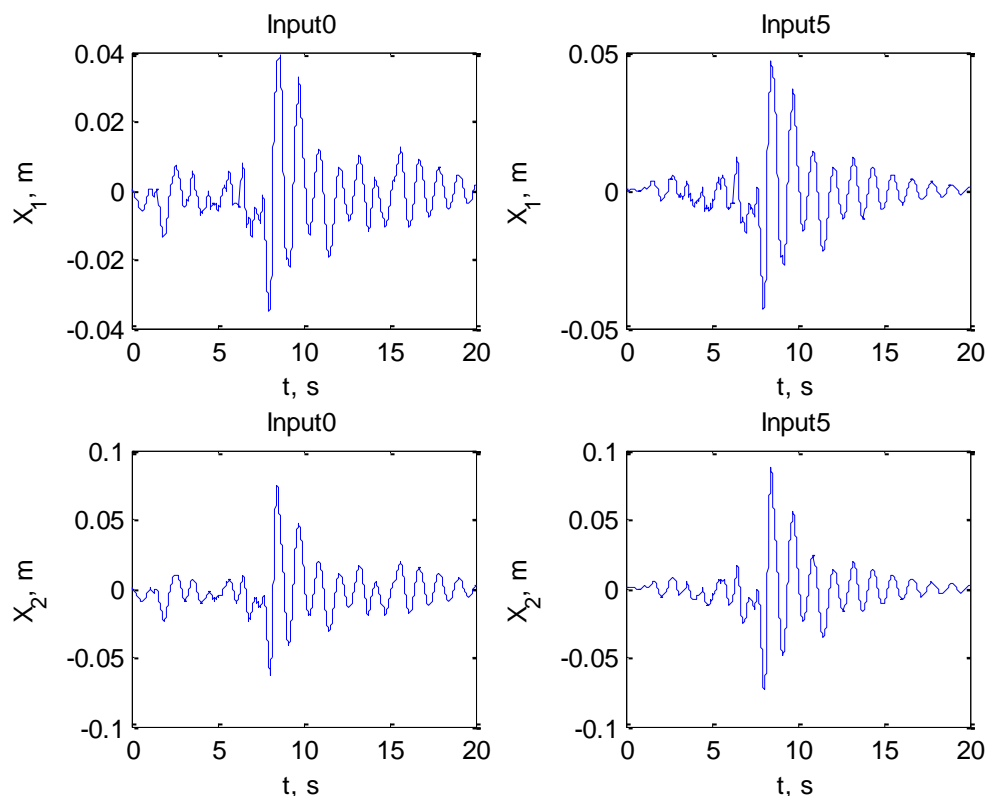


Рисунок 4.8. Модель «Истинные ротации».

Горизонтальная реакция для входов 0 и 5.

В практических расчетах [76] ротациями грунта в зонах опирания пренебрегают, задавая в них только поступательные перемещения, как на Рисунке 4.6б. В этом случае углы поворотов грунтового основания вводятся опосредованно, в виде учета взаимных перемещений опор. Это оправдано при небольших углах ротаций для средних и жестких грунтов, как показано в п.3.12 для интегрального воздействия. Однако для очень мягких грунтов с малыми фазовыми скоростями, или при специфических, резко неоднородных, грунтовых условиях ротации могут быть значительными.

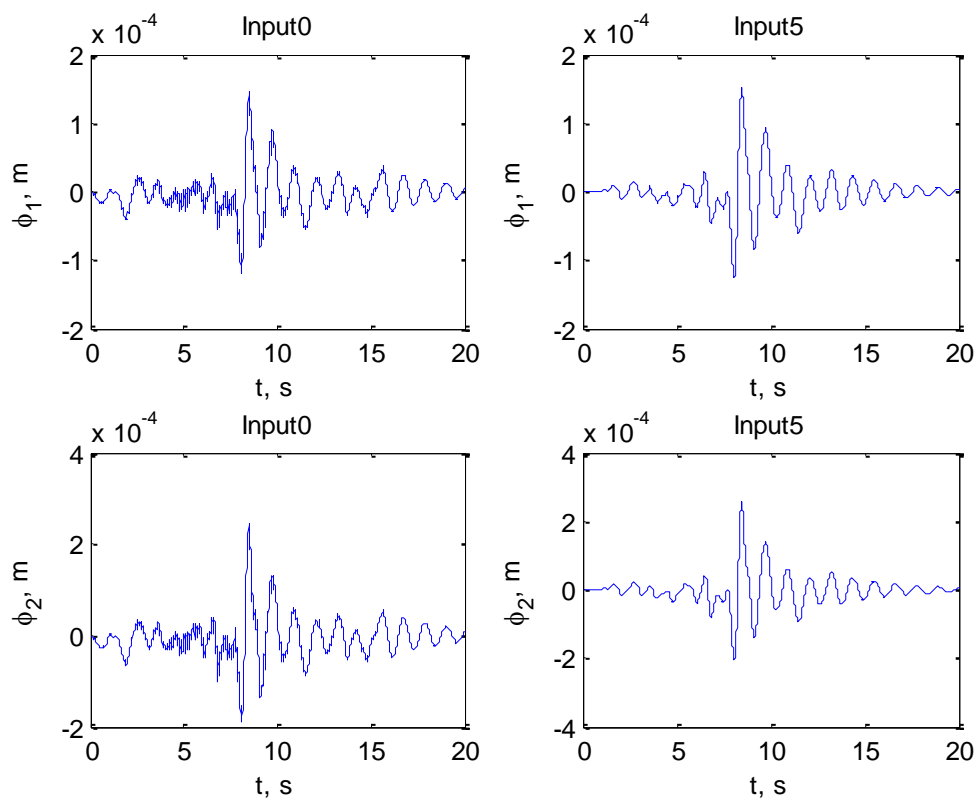


Рисунок 4.9. Модель «Истинные ротации».
Угловая реакция для входов 0 и 5.

4.9. Уравнения движения диссипативной системы

В диссипативной системе происходит рассеяние энергии; при движении такой системы, помимо инерционных и упругих восстанавливающих сил, возникают силы трения. Силы трения обычно представляют в виде сил вязкого сопротивления, прямо пропорциональных обобщенным скоростям (см. п.3.5 Характеристики

демпфирования. Матрица демпфирования). Для системы с n степенями свободы и $6p$ перемещениями в p опорных точках полный вектор абсолютных обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}_{all}^{[n+6p]}$ равен (см. (4.15))

$$\dot{\mathbf{q}}_{all} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abs} \\ \dot{\mathbf{q}}^0 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

где $\dot{\mathbf{q}}_{abs}^{[n]}$ - вектор абсолютных обобщенных скоростей системы, $\dot{\mathbf{q}}^{0[6p]}$ - вектор скоростей в опорных точках. Вектору $\dot{\mathbf{q}}_{all}$ соответствует общая глобальная матрица демпфирования $\mathbf{V}_{all}^{[(n+6p) \times (n+6p)]}$, построенная путем объединения матриц демпфирования отдельных элементов. Произведение $\mathbf{V}_{all} \dot{\mathbf{q}}_{all}$ - вектор сил вязкого сопротивления в направлении узловых перемещений.

Строки матрицы \mathbf{V}_{all} , соответствующие компонентам вектора $\dot{\mathbf{q}}_{abs}$, формируют *расширенную матрицу демпфирования* $\tilde{\mathbf{V}}^{[n \times (n+6p)]}$. Если элементы вектора $\dot{\mathbf{q}}_{all}$ упорядочены в соответствии с (4.38), левый блок матрицы $\tilde{\mathbf{V}}$ размерности $[n \times n]$ соответствует матрице демпфирования \mathbf{V} системы. Правый блок размерности $[n \times 6p]$ представляет собой \mathbf{V}_s - *матрицу демпфирования системы опорных элементов*.

Произведение $\tilde{\mathbf{V}} \dot{\mathbf{q}}_{all}$ представляет собой вектор сил вязкого сопротивления, приложенных к системе. По аналогии с (4.17) произведение расширенной матрицы демпфирования на полный вектор обобщенных скоростей распадается на сумму сил сопротивления $\mathbf{V} \dot{\mathbf{q}}_{abs}$, действующих по направлениям обобщенных перемещений \mathbf{q}_{abs} , и сил сопротивления в системе опорных элементов $\mathbf{V}_s \dot{\mathbf{q}}^0$

$$\tilde{\mathbf{V}} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abs} \\ \dot{\mathbf{q}}^0 \end{pmatrix} = (\mathbf{V} \quad \mathbf{V}_s) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abs} \\ \dot{\mathbf{q}}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{V}_s \dot{\mathbf{q}}^0. \quad (4.39)$$

Случай плоской системы. Для случая двумерной задачи в формулах (4.38-4.39) поменяются размерности векторов и матриц: полный вектор абсолютных обоб-

щенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}_{all}^{[n+3p]}$, вектор известных опорных скоростей $\mathbf{q}^{0[3p]}$, полная глобальная матрица демпфирования $\mathbf{V}_{all}^{[(n+3p) \times (n+3p)]}$, расширенная матрица демпфирования $\tilde{\mathbf{V}}^{[n \times (n+3p)]}$, матрица демпфирования системы опорных элементов $\mathbf{V}_s^{[n \times 3p]}$.

Продолжая рассматривать системы с n степенями свободы, представим вектор абсолютных обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}_{abs}^{[n]}$ в виде суммы векторов относительных обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}^{[n]}$ и скоростей переносного движения $\dot{\mathbf{q}}_{tr}^{[n]}$:

$$\dot{\mathbf{q}}_{abs} = \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_{tr}. \quad (4.40)$$

Для диссипативных систем, находящихся под действием кинематического воздействия, уравнения движения в абсолютных координатах с учетом (4.39) имеют вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{V}_s\dot{\mathbf{q}}^0 - \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (4.41)$$

где $\mathbf{M}^{[n \times n]}$, $\mathbf{V}^{[n \times n]}$ и $\mathbf{K}^{[n \times n]}$ - матрицы инерции демпфирования и жесткости конструкции, $\mathbf{V}_s^{[n \times 6p]}$ и $\mathbf{K}_s^{[n \times 6p]}$ - матрицы демпфирования и жесткости системы опорных элементов, \mathbf{q}^0 - $6p$ -мерный вектор опорных перемещений (для плоской системы $\mathbf{q}^{0[3p]}$, $\mathbf{V}_s^{[n \times 3p]}$ и $\mathbf{K}_s^{[n \times 3p]}$).

Уравнения движения (4.41) записаны в абсолютной системе координат, в них сейсмические силы зависят не от ускорений грунта, а от перемещений и скоростей, что не позволяет напрямую выразить динамическую реакцию через интенсивность и провести расчет по нормам. Поэтому перейдем к уравнениям относительного движения. Вектор переносного движения \mathbf{q}_{tr} был определен в п.4.4 как вектор перемещений, возникающих в конструкции от статических опорных перемещений \mathbf{q}^0 . Из условия равновесия в опорных точках следует, что опорные реакции $\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 + \mathbf{V}_s\dot{\mathbf{q}}^0$ уравновешены силами $\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}_{tr}$, возникающими в опорных элементах конструкции ($\dot{\mathbf{q}}_{tr}$ - вектор переносных скоростей):

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 + \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}_{tr} + \mathbf{V}_s\dot{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{0}. \quad (4.42)$$

При подстановке (4.18), (4.40) в уравнение (4.41) с учетом (4.42) получаются уравнения движения в относительных координатах:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{tr}. \quad (4.43)$$

Полагая внутреннее демпфирование в конструкции малым, то есть

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 \gg \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_{tr} + \mathbf{B}_s\dot{\mathbf{q}}^0,$$

(4.42) перепишем в виде (4.20)

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 = \mathbf{0},$$

откуда следует определение вектора переносного движения через матрицу податливости системы $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$

$$\mathbf{q}_{tr} = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0.$$

С учетом вектора переносного движения уравнение (4.43) принимает вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{K}_s\ddot{\mathbf{q}}^0.$$

Используя матрицу влияния $\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s$ (4.24), получим уравнение движения в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}\mathbf{F}_s\ddot{\mathbf{q}}^0.$$

Введем матрицу переносных инерционных коэффициентов для дифференцированного воздействия

$$\mathbf{M}_s^{[n \times 6p]} = \mathbf{M}\mathbf{F}_s = -\mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{K}_s. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.43) принимает такой же вид, как в относительном движении при интегральном воздействии (3.12), (3.10):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}^0. \quad (4.45)$$

Уравнение (4.45) подходит для случая малого конструкционного демпфирования. Если в динамической системе установлены локальные демпферы, то в уравнение

следует добавить обобщенные силы вязкого сопротивления по соответствующим степеням свободы.

Уравнение относительного движения в виде (4.45) позволяет применить модальный анализ, линейно-спектральный метод и найти весь набор присущих системе динамических параметров: модальные перемещения, усилия, опасные направления сейсмического воздействия, коэффициенты динамичности формы, эффективные модальные массы и т.д.

4.10. Модальные перемещения и усилия при дифференцированном воздействии

Запишем уравнение (4.45) в покомпонентном виде в главных координатах, процедура перехода к главным координатам ничем не отличается от описанной в п.3.4:

$$\ddot{u}_k + 2\varepsilon_k \dot{u}_k + \Omega_k^2 u_k = Q_k, \quad (4.46)$$

где $Q_k = -\frac{1}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}^0$, здесь \mathbf{v}_k и $M_{\text{mod},k}$ - вектор и модальная масса k -той собственной формы, $\mathbf{M}_s^{[n \times 6p]}$ - матрица переносных инерционных коэффициентов, $\ddot{\mathbf{q}}^{0[6p]}$ - вектор дифференцированного сейсмического воздействия. Решение уравнения (4.46) найдем с помощью интеграла Дюамеля для случая малого демпфирования:

$$u_k = \frac{1}{\Omega_k} \int_0^t Q_k \exp[-\varepsilon_k(t-\tau)] \sin \Omega_k(t-\tau) d\tau.$$

Множитель в подынтегральном выражении, не зависящий от времени, вынесем за знак интеграла:

$$u_k = -\frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{\Omega_k M_{\text{mod},k}} \int_0^t \ddot{\mathbf{q}}^0(\tau) \exp[-\varepsilon_k(t-\tau)] \sin \Omega_k(t-\tau) d\tau. \quad (4.47)$$

Обозначим $\mathbf{w}_k^{[6p]}$ - вектор по k -той собственной форме, имеющий смысл ускорения, приведенного к k -той форме колебаний.

$$\mathbf{w}_k(t, \dot{\mathbf{q}}_0) = -\Omega_k \int_0^t \ddot{\mathbf{q}}^0(\tau) \exp[-\varepsilon_k(t-\tau)] \sin \Omega_k(t-\tau) d\tau,$$

тогда решение в главных координатах принимает вид, по форме совпадающий с (3.41):

$$u_k = \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{w}_k}{\Omega_k^2 M_{\text{mod},k}}. \quad (4.48)$$

Решение в исходном базисе определяют, используя разложение перемещений \mathbf{q} по собственным формам \mathbf{v}_k :

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n u_k \mathbf{v}_k.$$

Перемещениям \mathbf{q} соответствуют обобщенные внутренние усилия $\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{q}$. Учитывая, что $\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{M}\mathbf{V}\Omega^2$, получим вектор отклика системы на сейсмическое воздействие

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{V}\Omega^2\mathbf{u}. \quad (4.49)$$

Вектор внутренних усилий \mathbf{S} равен сумме векторов модальных откликов \mathbf{S}_k , соответствующих реакции конструкции по k -той форме колебаний:

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n u_k \mathbf{K}\mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n u_k \Omega_k^2 \mathbf{M}\mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_k, \quad (4.50)$$

здесь $\mathbf{S}_k = u_k \Omega_k^2 \mathbf{M}\mathbf{v}_k$ - вектор модальных усилий по k -той форме, u_k - модальное перемещение в главных координатах по этой форме. Вектор \mathbf{S}_k в покомпонентной форме

$$S_{ik} = \Omega_k^2 \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k u_k, \quad (4.51)$$

здесь S_{ik} - модальное внутреннее усилие по k -той собственной форме, действующее в направлении i -той обобщенной координаты, $\mathbf{m}_i^{[n]}$ - i -тая строка матрицы инерции \mathbf{M} , $i = 1, \dots, n$.

С учетом (4.48) получим формулу для расчета величины модального внутреннего усилия, возникающего при относительном движении

$$S_{ik} = \frac{\mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{w}_k. \quad (4.52)$$

4.11. Статическое решение

При статическом подходе интенсивность сейсмического воздействия задается постоянной величиной. Все переменные во времени силы прикладываются к конструкции как статические, а для учета динамических эффектов перемещения от действия статических сил умножаются на коэффициент динамичности.

Напомним, что полный $6p$ -мерный вектор ускорений $\ddot{\mathbf{q}}^0$ в (4.13) выражается через интенсивность I , матрицу пространственного изменения поля ускорений $\mathbf{T}^{[6p \times 6]} = \mathbf{T}(t, \mathbf{r})$ (4.14) и вектор направляющих косинусов сейсмического воздействия в точке привязки $\mathbf{v}_1^{[6]} = \mathbf{v}_1(t)$ (4.8):

$$\ddot{\mathbf{q}}^0(t) = I \mathbf{T}(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}_1(t).$$

В статической постановке вектор $\ddot{\mathbf{q}}^0$ не зависит от времени, поэтому вектор \mathbf{v}_1 будем считать соответствующим известному постоянному направлению, а элементы матрицы \mathbf{T}_i определим как отношение *постоянных* ускорений в каждой из опорных точек и в точке привязки. В i -той опорной точке с координатами $\mathbf{r}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$

$$\begin{aligned} T_{1i} = T_1(\mathbf{r}_i) &= \ddot{X}_{1i}^0 / \ddot{X}_{11}^0, & T_{4i} = T_4(\mathbf{r}_i) &= \ddot{\alpha}_{1i}^0 / \ddot{\alpha}_{11}^0, \\ T_{2i} = T_2(\mathbf{r}_i) &= \ddot{X}_{2i}^0 / \ddot{X}_{21}^0, & T_{5i} = T_5(\mathbf{r}_i) &= \ddot{\alpha}_{2i}^0 / \ddot{\alpha}_{21}^0, \\ T_{3i} = T_3(\mathbf{r}_i) &= \ddot{X}_{3i}^0 / \ddot{X}_{31}^0, & T_{6i} = T_6(\mathbf{r}_i) &= \ddot{\alpha}_{3i}^0 / \ddot{\alpha}_{31}^0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Из функций \mathbf{T} сформируем $\mathbf{T}_i^{[6 \times 6]} = \text{diag}(T_{1i}, T_{2i}, \dots, T_{6i})$ - матрицу функций пространственного изменения ускорений в i -той опоре. Тогда вектор ускорений в i -

той опорной точке равен $\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = \mathbf{T}_i \ddot{\mathbf{q}}_1^0 = \mathbf{T}_i \mathbf{v}_1 = const$. Полный $6p$ -мерный вектор ускорений $\ddot{\mathbf{q}}^0$ не будет зависеть ни от времени, ни от координат:

$$\ddot{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{T} \ddot{\mathbf{q}}_1^0 = \mathbf{T} \mathbf{v}_1 = const, \quad \mathbf{T}^{[6p \times 6]} = (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_p)^T.$$

Матрица \mathbf{T} не только задает пространственное изменение интенсивности, но и формирует ориентацию статического пространственного сейсмического воздействия в различных точках. Проиллюстрируем это на примере: пусть конструкция имеет 4 опорные точки, движение грунта поступательное горизонтальное. В каждой опорной точке зададим свой вектор сейсмического ускорения (Рисунок 4.10а):

$$\ddot{\mathbf{q}}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_2^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_3^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_4^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

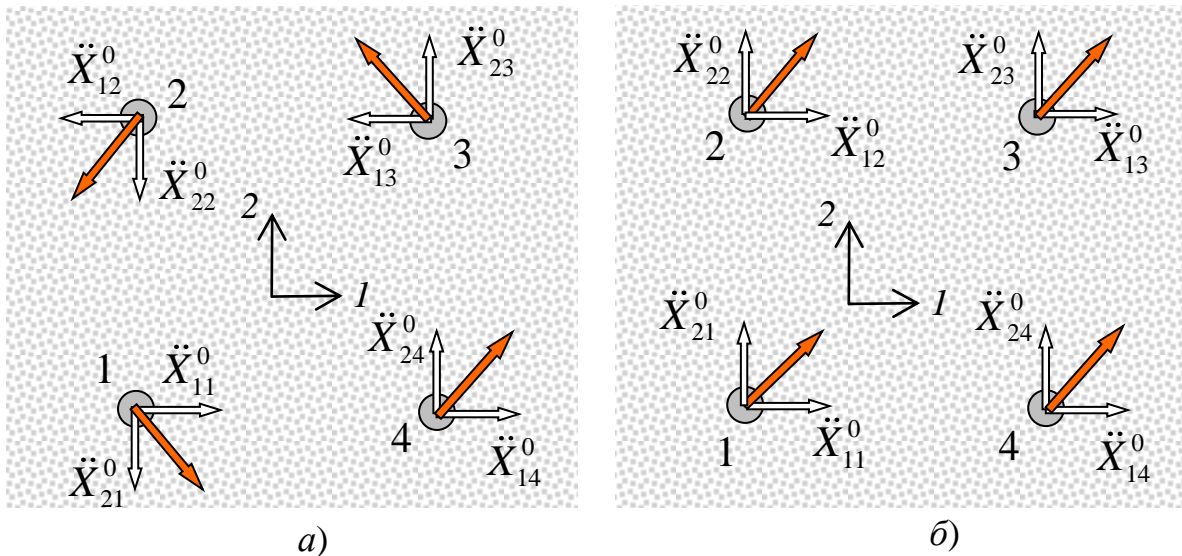


Рисунок 4.10. Направления дифференцированного сейсмического воздействия

Найдем элементы матрицы \mathbf{T} :

точка 1: $\mathbf{T}_{11} = \ddot{X}_{11}^0 / \ddot{X}_{11}^0 = 1, \quad \mathbf{T}_{21} = \ddot{X}_{21}^0 / \ddot{X}_{21}^0 = 1,$

точка 2: $\mathbf{T}_{12} = \ddot{X}_{12}^0 / \ddot{X}_{11}^0 = (-1)/1 = -1, \quad \mathbf{T}_{22} = \ddot{X}_{22}^0 / \ddot{X}_{21}^0 = (-1)/(-1) = 1,$

точка 3: $\mathbf{T}_{13} = \ddot{X}_{13}^0 / \ddot{X}_{11}^0 = (-1)/1 = -1, \quad \mathbf{T}_{23} = \ddot{X}_{23}^0 / \ddot{X}_{21}^0 = 1/(-1) = -1,$

точка 4: $\Gamma_{14} = \ddot{X}_{14}^0 / \ddot{X}_{11}^0 = 1/1 = 1$, $\Gamma_{24} = \ddot{X}_{24}^0 / \ddot{X}_{21}^0 = 1/(-1) = -1$,

матрица \mathbf{T} и вектор направляющих косинусов в первой точке равны:

$$\mathbf{T}^{[8 \times 2]} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^T, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Интенсивность воздействия в первой точке (и во всех остальных) $I = \sqrt{2} \text{ м/с}^2$, полный вектор ускорений в опорных точках

$$\ddot{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{T} \ddot{\mathbf{q}}_1^0 = I \mathbf{T} \mathbf{v}_1, \quad \ddot{\mathbf{q}}^0 = (1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T.$$

Если волна имеет плоский фронт, направления воздействия в каждой опоре будут такими же, как в точке привязки, и матрица \mathbf{T} будет состоять из единичных блоков (Рисунок 4.10б).

Рассмотрим теперь более общий подход, связанный с представлением компонент вектора сейсмического воздействия в виде произведения модуля (интенсивности) на направляющие косинусы. В статической постановке вектор $\ddot{\mathbf{q}}_i^0$ не зависит от времени и определяется интенсивностью воздействия и постоянным во времени вектором направлений (в этом случае интенсивность и вектор направлений необходимо задавать каждой опорной точке). В статической постановке векторы сейсмического воздействия в точке привязке и в i -той опорной точке имеют вид

$$\ddot{\mathbf{q}}_1^0 = I \cdot \mathbf{v}_1, \quad \ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I_i^X \cdot \mathbf{v}_i,$$

а функции (4.11) принимают постоянные значения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1i} &= I_i^X \mathbf{v}_{1i}^X / (I_1^X \mathbf{v}_{11}^X), & \Gamma_{4i} &= I_i^X w_i \mathbf{v}_{1i}^\alpha / (I_1^X w_i \mathbf{v}_{11}^\alpha), \\ \Gamma_{2i} &= I_i^X \mathbf{v}_{2i}^X / (I_1^X \mathbf{v}_{21}^X), & \Gamma_{5i} &= I_i^X w_i \mathbf{v}_{2i}^\alpha / (I_1^X w_i \mathbf{v}_{21}^\alpha), \\ \Gamma_{3i} &= I_i^X \mathbf{v}_{3i}^X / (I_1^X \mathbf{v}_{31}^X), & \Gamma_{6i} &= I_i^X w_i \mathbf{v}_{3i}^\alpha / (I_1^X w_i \mathbf{v}_{31}^\alpha). \end{aligned}$$

Из функций Γ формируется $\bar{\mathbf{T}}_i = \text{diag}(\Gamma_{1i}, \Gamma_{2i}, \dots, \Gamma_{6i})$. С учетом того, что $\ddot{\mathbf{q}}_1^0 = I \cdot \mathbf{v}_1$, получим

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = \bar{\mathbf{T}}_i \cdot \ddot{\mathbf{q}}_1^0 = I \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{v}_i,$$

где $\mathbf{T}_i^{[6 \times 6]} = (I_i^X / I) \mathbf{E}$ - матрица пространственного изменения ускорений в i -той опоре, $I = I_1^X$, $\mathbf{E}^{[6 \times 6]}$ - единичная матрица.

Тогда полный $6p$ -мерный вектор ускорений $\ddot{\mathbf{q}}^0$ равен:

$$\ddot{\mathbf{q}}^0 = I \mathbf{T} \mathbf{v} = const, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{T}^{[6p \times 6p]} = \text{diag}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_p), \quad \mathbf{v}^{[6p]} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_p)^T.$$

Таким образом, при статическом подходе необходимо определить интенсивности и направления сейсмических воздействий во всех опорных точках, в то время как в формуле (4.13), при задании воздействия во временной области, достаточно направлений в точке привязки.

Модальные сейсмические силы в уравнении (4.46) выражаются через матрицу \mathbf{T} (4.54) и вектор направляющих косинусов в точке привязки:

$$Q_k = -I M_{\text{mod},k}^{-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{T} \mathbf{v},$$

или в виде вектора статической модальной нагрузки

$$\mathbf{Q} = -I \mathbf{M}_{\text{mod},k}^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M}_s \mathbf{T} \mathbf{v}.$$

Модальное перемещение от статической нагрузки (статическое перемещение) в тех же обозначениях равно

$$u_k^{cm} = -\frac{I}{M_{\text{mod},k} \Omega_k^2} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{T} \mathbf{v}.$$

Минус показывает, что перемещение направлено против направления движения грунта. Динамические перемещения получим, умножив статические u_k^{cm} на модальный коэффициент динамичности³⁴

$$u_k = \beta_k u_k^{cm} = -\frac{\beta_k I}{M_{\text{mod},k} \Omega_k^2} \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{T} \mathbf{v}. \quad (4.55)$$

³⁴ О коэффициентах динамичности для дифференцированного воздействия см. п.4.12

Перемещения в исходных обобщенных координатах определяются по формуле $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{u}$, где вектор-столбец \mathbf{u} состоит из элементов u_k .

4.12. Модальные коэффициенты динамичности

Коэффициенты динамичности для дифференцированной модели определяются в каждой опорной точке по акселерограммам поступательного и углового движения, то есть по компонентам вектора $\ddot{\mathbf{q}}_i^0(t)$ (4.1). Так, движению i -той опорной точки соответствует шестикомпонентный вектор спектральных коэффициентов динамичности

$$\boldsymbol{\beta}_i(\Omega) = (\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i} \ \beta_{5i} \ \beta_{6i})^T. \quad (4.56)$$

В первой опорной точке (в точке привязки) вектор спектральных коэффициентов динамичности равен

$$\boldsymbol{\beta}_1(\Omega) = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5 \ \beta_6)^T. \quad (4.57)$$

Для описания пространственного изменения спектрального состава воздействия относительно точки привязки введем функции Θ_{ji} ($j=1,2,\dots,6$ - номер компоненты вектора ускорений $\ddot{\mathbf{q}}_i^0$, $i=1, \dots, p$) [76]. В каждой i -той опорной точке с координатами $\mathbf{r}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ будут свои коэффициенты динамичности:

$$\begin{aligned} \beta_{1i}(\Omega, \mathbf{r}_i) &= \beta_1(\Omega)\Theta_{1i}(\Omega, \mathbf{r}_i), & \beta_{4i}(\Omega, \mathbf{r}_i) &= \beta_4(\Omega)\Theta_{4i}(\Omega, \mathbf{r}_i), \\ \beta_{2i}(\Omega, \mathbf{r}_i) &= \beta_2(\Omega)\Theta_{2i}(\Omega, \mathbf{r}_i), & \beta_{5i}(\Omega, \mathbf{r}_i) &= \beta_5(\Omega)\Theta_{5i}(\Omega, \mathbf{r}_i), \\ \beta_{3i}(\Omega, \mathbf{r}_i) &= \beta_3(\Omega)\Theta_{3i}(\Omega, \mathbf{r}_i), & \beta_{6i}(\Omega, \mathbf{r}_i) &= \beta_6(\Omega)\Theta_{6i}(\Omega, \mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (4.58)$$

в векторном виде

$$\boldsymbol{\beta}_i(\Omega, \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\Theta}_i(\Omega, \mathbf{r}_i)\boldsymbol{\beta}_1(\Omega), \quad (4.59)$$

где $\boldsymbol{\Theta}_i^{[6 \times 6]} = \text{diag}(\Theta_{1i}, \dots, \Theta_{6i})$ - матрица функций пространственного изменения КД относительно точки привязки. Функции пространственного изменения спектра воздействия Θ_{ji} учитывают эффекты рассеяния волн коротковолновой части

спектра и определяется экспериментально путем анализа функции когерентности [82].

Совокупность коэффициентов динамичности во всех опорных точках задается вектором β

$$\beta^{[6p]} = \beta(\Omega) = (\beta_1 \dots \beta_p)^T. \quad (4.60)$$

Введем блочную матрицу функций изменения спектрального состава $\Theta^{[6p \times 6]} = \Theta(\Omega, \mathbf{r}) = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p)^T$, где $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_p)$, тогда вектор коэффициентов динамичности во всех опорных точках выражается через вектор динамических коэффициентов в точке привязки $\beta_1^{[6]}$ (4.57):

$$\beta = \Theta \beta_1. \quad (4.62)$$

Если спектральный состав воздействия не меняется в зависимости от пространственной координаты, то $\Theta_i^{[6 \times 6]}$ - единичные матрицы, $i = 1, \dots, p$ - номер опорной точки.

В прикладных сейсмических расчетах за модальный коэффициент динамичности β_k в формуле (4.55) договоримся принимать максимальный элемент вектора $\beta(\Omega_k)$:

$$\beta_k = \max(\beta(\Omega_k)), \quad (4.63)$$

где Ω_k - собственная частота k -той формы колебаний.

4.13. Модальные усилия и перемещения. Коэффициенты формы и участия

Величины модальных внутренних усилий S_{ik} (модальное усилие по k -той собственной форме, действующее в направлении i -той обобщенной координаты) для интегрального воздействия находят по формуле (3.51), применяя стандартный прием (3.42) - (3.44). Переписав (4.51) для дифференцированного воздействия и принимая во внимание (4.54) и (4.63), получим

$$S_{ik} = \beta_k I \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}. \quad (4.64)$$

где β_k - модальный коэффициент динамичности (4.63), I - интенсивность сейсмического воздействия, \mathbf{m}_i - i -тая строка матрицы инерции, \mathbf{v}_k - вектор k -той собственной формы, \mathbf{M}_s - матрица переносных инерционных коэффициентов (4.44), \mathbf{T} - матрица пространственного изменения ускорений (4.54), \mathbf{v} - вектор направлений сейсмического воздействия.

Коэффициентом участия k -той собственной формы колебаний по аналогии с (3.52) назовем скалярную величину

$$\Gamma_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s \mathbf{T} \mathbf{v}. \quad (4.65)$$

Тогда внутреннее усилие по k -той собственной форме, действующее в направлении i -той обобщенной координаты равно

$$S_{ik} = \beta_k I \frac{\Gamma_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k.$$

Вектор коэффициентов формы колебаний $\boldsymbol{\eta}_k^{[n]}$ для дифференцированного воздействия принимает вид

$$\boldsymbol{\eta}_k = \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v} = \frac{\Gamma_k}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}_k, \quad (4.66)$$

тогда

$$S_{ik} = \beta_k I \mathbf{m}_i \boldsymbol{\eta}_k.$$

Вектор модальных усилий, соответствующий k -той собственной форме, состоит из элементов S_{ik} (4.64):

$$\mathbf{S}_k = \beta_k I \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_k. \quad (4.67)$$

Модальные перемещения по k -той собственной форме в исходном базисе равны

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}_k = \beta_k \mathbf{L} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_k = \beta_k I \frac{1}{\Omega_k^2} \boldsymbol{\eta}_k. \quad (4.68)$$

4.14. Опасные направления сейсмического воздействия и коэффициент динамичности формы

Сформулируем задачу о поиске опасных направлений сейсмического воздействия для дифференцированного воздействия: требуется найти такие компоненты объединенного вектора направляющих косинусов поступательного и ротационного движения

$$\mathbf{v}_k^{[6p]} = (\mathbf{v}_{k,1} \quad \mathbf{v}_{k,2} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{k,j} \quad \dots \quad \mathbf{v}_p)^T,$$

где

$$\mathbf{v}_{k,j} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k,j}^X \\ w_j \mathbf{v}_{k,j}^\alpha \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_{k,1j}^X \quad \mathbf{v}_{k,2j}^X \quad \mathbf{v}_{k,3j}^X \quad w_j \mathbf{v}_{k,1j}^\alpha \quad w_j \mathbf{v}_{k,2j}^\alpha \quad w_j \mathbf{v}_{k,3j}^\alpha)^T$$

- вектор направляющих косинусов в j -той опорной точке ($j=1, \dots, p$), которые бы доставляли максимум динамической реакции по k -той собственной форме колебаний.

Будем оценивать динамическую реакцию конструкции по компонентам векторов модальных откликов. Рассмотрим i -тую компоненту вектора \mathbf{S}_k , то есть модальный отклик по i -той обобщенной координате и k -той форме колебаний

$$S_{ik} = \beta_k \mathbf{I} m_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}_k.$$

Выделим множитель, общий для всех компонент вектора \mathbf{S}_k (не меняющийся в зависимости от номера обобщенной координаты):

$$\theta_k = \beta_k \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}_k.$$

Скалярная функция θ_k отвечает за величину динамической реакции по k -той форме колебаний и называется *коэффициентом динамичности k -той формы колебаний* для дифференцированной модели сейсмического воздействия [75]. θ_k линейно зависит от модального коэффициента динамичности β_k и компонент объединенного вектора направления \mathbf{v}_k , связанных двумя нелинейными условиями нормировки

$$\left(v_{k,1j}^X\right)^2 + \left(v_{k,2j}^X\right)^2 + \left(v_{k,3j}^X\right)^2 = 1 \quad \text{и} \quad \left(v_{k,1j}^\alpha\right)^2 + \left(v_{k,2j}^\alpha\right)^2 + \left(v_{k,3j}^\alpha\right)^2 = 1.$$

Опасные направления сейсмического воздействия для k -той формы колебаний определяются вектором \mathbf{v}_k , который доставляет условный максимум функции θ_k . Все компоненты вектора \mathbf{S}_k умножаются на коэффициент динамичности формы θ_k , поэтому реакция по k -той форме будет максимальной.

Общее количество неизвестных компонент вектора \mathbf{v}_k равно $8p$ (p - общее количество опорных точек). Они могут быть определены методом неопределенных множителей Лагранжа так же, как в [75]. Составим функцию Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}_k, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \dots, \lambda_{1p}, \lambda_{2p}) = & \theta_k + \\ & + \lambda_{11} \left(\left(v_{k,11}^X\right)^2 + \left(v_{k,21}^X\right)^2 + \left(v_{k,31}^X\right)^2 - 1 \right) + \lambda_{21} \left(\left(v_{k,11}^\alpha\right)^2 + \left(v_{k,21}^\alpha\right)^2 + \left(v_{k,31}^\alpha\right)^2 - 1 \right) + \dots + \\ & + \lambda_{1j} \left(\left(v_{k,1j}^X\right)^2 + \left(v_{k,2j}^X\right)^2 + \left(v_{k,3j}^X\right)^2 - 1 \right) + \lambda_{2j} \left(\left(v_{k,1j}^\alpha\right)^2 + \left(v_{k,2j}^\alpha\right)^2 + \left(v_{k,3j}^\alpha\right)^2 - 1 \right) + \dots + \\ & + \lambda_{1p} \left(\left(v_{k,1p}^X\right)^2 + \left(v_{k,2p}^X\right)^2 + \left(v_{k,3p}^X\right)^2 - 1 \right) + \lambda_{2p} \left(\left(v_{k,1p}^\alpha\right)^2 + \left(v_{k,2p}^\alpha\right)^2 + \left(v_{k,3p}^\alpha\right)^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Приравняем к нулю частные производные функции Лагранжа по неизвестным направляющим косинусам и множителям Лагранжа. Получим $8p$ уравнений относительно такого же количества неизвестных ($j = 1, \dots, p$):

$$\frac{\partial L}{\partial v_{k,1j}^X} = \frac{\partial \theta_k}{\partial v_{k,1j}^X} + 2\lambda_{1j} v_{k,1j}^X = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial v_{k,1j}^\alpha} = \frac{\partial \theta_k}{\partial v_{k,1j}^\alpha} + 2\lambda_{2j} v_{k,1j}^\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{k,2j}^X} = \frac{\partial \theta_k}{\partial \mathbf{v}_{k,2j}^X} + 2\lambda_{1j} \mathbf{v}_{k,2j}^X = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{k,2j}^\alpha} = \frac{\partial \theta_k}{\partial \mathbf{v}_{k,2j}^\alpha} + 2\lambda_{2j} \mathbf{v}_{k,2j}^\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{k,3j}^X} = \frac{\partial \theta_k}{\partial \mathbf{v}_{k,3j}^X} + 2\lambda_{1j} \mathbf{v}_{k,3j}^X = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{k,3j}^\alpha} = \frac{\partial \theta_k}{\partial \mathbf{v}_{k,3j}^\alpha} + 2\lambda_{2j} \mathbf{v}_{k,3j}^\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{1j}} = \left(\mathbf{v}_{k,1j}^X\right)^2 + \left(\mathbf{v}_{k,2j}^X\right)^2 + \left(\mathbf{v}_{k,3j}^X\right)^2 - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{2j}} = \left(\mathbf{v}_{k,1j}^\alpha\right)^2 + \left(\mathbf{v}_{k,2j}^\alpha\right)^2 + \left(\mathbf{v}_{k,3j}^\alpha\right)^2 - 1 = 0.$$

Таким образом, приходим к той же системе уравнений (3.60), что и при поиске опасных направлений для интегрального воздействия.

Структурируем матрицу $\mathbf{M}^s = \mathbf{M}_s^{[n \times 6p]} \mathbf{T}^{[6p \times 6p]}$, выделив в ней p матриц-блоков $\mathbf{M}_j^{s[n \times 6]}$

$$\mathbf{M}^s = \left(\mathbf{M}_1^s \quad \dots \quad \mathbf{M}_j^s \quad \dots \quad \mathbf{M}_p^s \right).$$

Каждую матрицу \mathbf{M}_j^s представим в виде шести n -мерных столбцов

$$\mathbf{M}_j^s = \left(\mathbf{m}_{1j}^{s,X} \quad \mathbf{m}_{2j}^{s,X} \quad \mathbf{m}_{3j}^{s,X} \quad \mathbf{m}_{1j}^{s,\alpha} \quad \mathbf{m}_{2j}^{s,\alpha} \quad \mathbf{m}_{3j}^{s,\alpha} \right).$$

Действуя по тому же алгоритму, что и при поиске опасных направлений для интегрального воздействия, получим формулы для направляющих косинусов

в j -той опорной точке: для поступательного и ротационного движения грунта

$$\mathbf{v}_{k,j}^X = k_1 \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{1j}^{s,X} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{2j}^{s,X} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{3j}^{s,X} \right)^T, \quad \text{где } k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{1j}^{s,X}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{2j}^{s,X}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{3j}^{s,X}\right)^2}};$$

$$\mathbf{v}_{k,j}^\alpha = k_2 \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{1j}^{s,\alpha} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{2j}^{s,\alpha} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{3j}^{s,\alpha} \right), \quad \text{где } k_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{1j}^{s,\alpha}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{2j}^{s,\alpha}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{3j}^{s,\alpha}\right)^2}}. \quad (4.69)$$

Здесь $\mathbf{m}_{1j}^{s,X}$, $\mathbf{m}_{2j}^{s,X}$, $\mathbf{m}_{3j}^{s,X}$ - 1, 2 или 3 столбец матрицы \mathbf{M}_j^s ; $\mathbf{m}_{1j}^{s,\alpha}$, $\mathbf{m}_{2j}^{s,\alpha}$, $\mathbf{m}_{3j}^{s,\alpha}$ - 4, 5 или 6 столбец матрицы \mathbf{M}_j^s .

Для каждой опасной ориентации воздействия необходимо определить свое количество учитываемых собственных форм. При этом можно применять универсаль-

ный алгоритм Ю.П. Назарова (см. п.3.11), подходящий как для интегрального, так и для дифференцированного воздействия.

4.15. Модальный отклик на отдельные компоненты сейсмического движения и опорные реакции

Модальный отклик на отдельные компоненты сейсмического воздействия и модальные опорные реакции в основании определяются так же, как в п. 3.9, 3.10, следует только принять во внимание способ задания дифференцированного воздействия (4.54). Модальный отклик в направлении i -той обобщенной координаты от поступательного движения грунта вдоль оси $O1$ (Рисунок 3.1), равен

$$S_{ik}^{X1} = \beta_k \text{Im}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}^{X1},$$

$$\mathbf{v}^{X1[6p]} = \left(\mathbf{v}_{k,1}^{X1} \quad \mathbf{v}_{k,2}^{X1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{k,j}^{X1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_p^{X1} \right)^T, \quad \mathbf{v}_{k,j}^{X1} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \quad j=1, \dots, p,$$

здесь \mathbf{v}^{X1} - объединенный вектор направлений, при котором в каждой опорной точке сейсмическое воздействие направлено вдоль оси $O1$. Аналогично модальные отклики от сейсмических сил, действующих вдоль осей $O2$ и $O3$:

$$S_{ik}^{X2} = \beta_k \text{Im}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}^{X2}, \quad S_{ik}^{X2} = \beta_k \text{Im}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}^{X2} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{v}^{X2} = \left(\mathbf{v}_{k,1}^{X2} \quad \mathbf{v}_{k,2}^{X2} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{k,j}^{X2} \quad \dots \quad \mathbf{v}_p^{X2} \right)^T, \quad \mathbf{v}_{k,j}^{X2} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\mathbf{v}^{X3} = \left(\mathbf{v}_{k,1}^{X3} \quad \mathbf{v}_{k,2}^{X3} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{k,j}^{X3} \quad \dots \quad \mathbf{v}_p^{X3} \right)^T, \quad \mathbf{v}_{k,j}^{X3} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

Аналогично получаются модальные усилия S_{ik}^α от переносных сейсмических моментов, приложенных относительно осей $O1$, $O2$ и $O3$:

$$S_{ik}^{\alpha1} = \beta_k \text{Im}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}^{\alpha1}, \quad S_{ik}^{\alpha2} = \beta_k \text{Im}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}^{\alpha2}, \quad S_{ik}^{\alpha3} = \beta_k \text{Im}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}^{\alpha3}, \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{\alpha 1[6p]} &= \left(\mathbf{v}_{k,1}^{\alpha 1} \quad \mathbf{v}_{k,2}^{\alpha 1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{k,j}^{\alpha 1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_p^{\alpha 1} \right)^T, & \mathbf{v}_{k,j}^{\alpha 1} &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad w_i \quad 0 \quad 0)^T, \\ \mathbf{v}^{\alpha 2} &= \left(\mathbf{v}_{k,1}^{\alpha 2} \quad \mathbf{v}_{k,2}^{\alpha 2} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{k,j}^{\alpha 2} \quad \dots \quad \mathbf{v}_p^{\alpha 2} \right)^T, & \mathbf{v}_{k,j}^{\alpha 2} &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad w_i \quad 0)^T, \\ \mathbf{v}^{\alpha 3} &= \left(\mathbf{v}_{k,1}^{\alpha 3} \quad \mathbf{v}_{k,2}^{\alpha 3} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{k,j}^{\alpha 3} \quad \dots \quad \mathbf{v}_p^{\alpha 3} \right)^T, & \mathbf{v}_{k,j}^{\alpha 3} &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad w_i)^T, \end{aligned}$$

$j=1, \dots, p.$

Расчет модальных опорных реакций в основании описан в п. 3.10. Запишем соответствующие формулы для дифференцированного сейсмического воздействия (матрицы \mathbf{M}_s^X и \mathbf{M}_s^φ формируются так же, как это описано в п. 3.10):

$$S_{ik}^Q = \beta_k I m_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}_k. \quad (4.72)$$

Опорная реакция S_k^Q при движении по k -той собственной форме равна сумме сил S_{ik}^Q по каждой обобщенной координате:

$$S_k^Q = \frac{\beta_k I}{M_{\text{mod},k}} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \right) \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^X \mathbf{T} \mathbf{v}_k. \quad (4.73)$$

Моменты в основании относительно основных осей РДМ равны сумме переносных сейсмических моментов и моментов от переносных сейсмических сил. Внутренний момент по k -той собственной форме, действующий в направлении i -той обобщенной координаты, равен

$$S_{ik}^L = \beta_k I m_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s^\varphi}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T} \mathbf{v}_k.$$

Добавим к внутреннему моменту S_{ik}^L моменты от сил S_{ik}^Q в виде векторного произведения радиус-вектора \mathbf{r}_i i -той обобщенной координаты (см. п. 3.1) на вектор силы. Окончательно получим внутренний момент в основании от i -той обобщенной координаты по k -той собственной форме:

$$S_{ik}^L = \frac{\beta_k I}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T (\mathbf{M}_s^{\text{фр}} \mathbf{T} \mathbf{v}_k + \mathbf{M}_s^X \mathbf{T} \boldsymbol{\Psi}_k), \quad (4.74)$$

где

$$\boldsymbol{\Psi}_k^{[6p]} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{k,1} & \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{k,2} & \dots & \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{k,j} & \dots & \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_p \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{v}_{k,j} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k,j}^X \\ w_j \mathbf{v}_{k,j}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k,1j}^X & \mathbf{v}_{k,2j}^X & \mathbf{v}_{k,3j}^X & w_j \mathbf{v}_{k,1j}^\alpha & w_j \mathbf{v}_{k,2j}^\alpha & w_j \mathbf{v}_{k,3j}^\alpha \end{pmatrix}^T.$$

где вектора направляющих косинусов $\mathbf{v}_{k,j}^X$ и $\mathbf{v}_{k,j}^\alpha$ задаются формулами (4.69).

Сумма моментов S_{ik}^L по каждой обобщенной координате равна опорной реакции S_k^L в основании при движении по k -той собственной форме:

$$S_k^L = \frac{\beta_k I}{M_{\text{mod},k}} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T (\mathbf{M}_s^{\text{фр}} \mathbf{T} \mathbf{v}_k + \mathbf{M}_s^X \mathbf{T} \boldsymbol{\Psi}_k). \quad (4.75)$$

Проекции опорных реакций (4.73) и (4.75) на основные оси РДМ получаются при задании соответствующих направляющих косинусов, как в формулах (4.70), (4.71).

4.16. Применение линейно-спектрального метода

Рассмотрим квадратную бетонную плиту на четырех стальных угловых колоннах кольцевого сечения (пример 4 из п. 3.2, Рисунок 3.6). Дифференцированное сейсмическое воздействие зададим горизонтальными поступательными перемещениями и ускорениями опор

$$\mathbf{q}^0 = \begin{pmatrix} X_{11}^0 & X_{21}^0 & X_{12}^0 & X_{22}^0 & X_{13}^0 & X_{23}^0 & X_{14}^0 & X_{24}^0 \end{pmatrix}^T, \quad (4.76)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^0 = \begin{pmatrix} \ddot{X}_{11}^0 & \ddot{X}_{21}^0 & \ddot{X}_{12}^0 & \ddot{X}_{22}^0 & \ddot{X}_{13}^0 & \ddot{X}_{23}^0 & \ddot{X}_{14}^0 & \ddot{X}_{24}^0 \end{pmatrix}^T. \quad (4.77)$$

Введем абсолютные обобщенные координаты (Рисунок 4.11), описывающие движение центра жесткости плиты O : линейные перемещения X_{1abs} , X_{2abs} вдоль не-

подвижных осей $O1, O2$ и угловое φ_{abs} в горизонтальной плоскости относительно точки O :

$$\mathbf{q}_{abs} = (X_{1abs} \quad X_{2abs} \quad \varphi_{abs})^T.$$

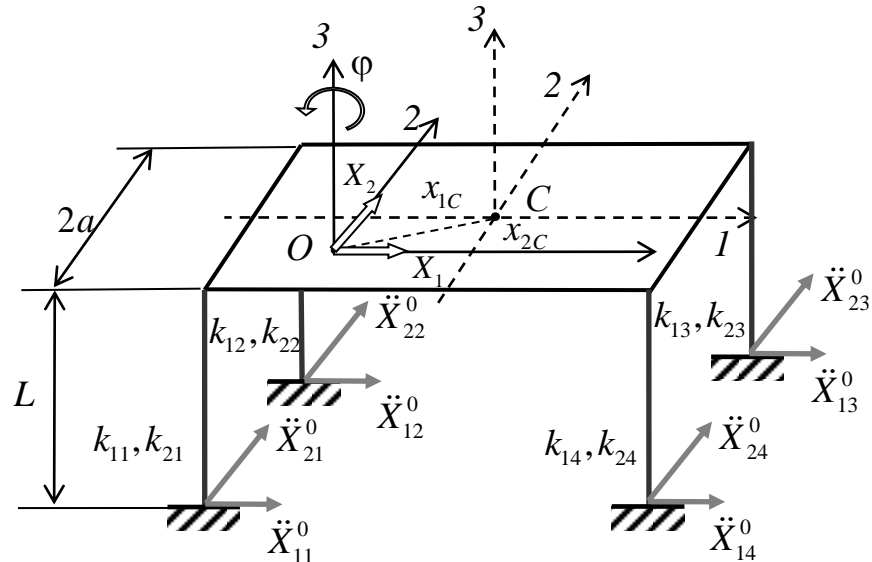


Рисунок 4.11. Пространственная РДМ

Определим матрицу жесткости опорных элементов. Суммарные поперечные силы в направлениях $O1$ и $O2$ равны (учитываем, что точка O - центр жесткости):

$$Q_1 = \sum_{i=1}^4 Q_{1i} = \sum_{i=1}^4 k_{1i} (X_{1i} - X_{1i}^0) = K_1 X_{1abs} - \sum_{i=1}^4 k_{1i} X_{1i}^0,$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^4 Q_{2i} = \sum_{i=1}^4 k_{2i} (X_{2i} - X_{2i}^0) = K_2 X_{2abs} - \sum_{i=1}^4 k_{2i} X_{2i}^0,$$

здесь X_{1i}, X_{2i} - абсолютные перемещения верхних торцов i -той стойки в направлениях $O1$ и $O2$, $K_1 = \sum_{i=1}^4 k_{1i}$, $K_2 = \sum_{i=1}^4 k_{2i}$ - общие жесткости перекрытия в направлениях $O1$ и $O2$,

причем $k_{11} = k_{12} = k_{14} = k_{21} = k_{22} = k_{24} = \frac{12EI}{L^3}$, $k_{13} = k_{23} = 0.8 \frac{12EI}{L^3}$.

Момент от поперечных сил относительно вертикальной оси $O3$ равен

$$L_3 = \sum_{i=1}^4 (Q_{2i}x_{1i} - Q_{1i}x_{2i}) = \sum_{i=1}^4 k_{2i}x_{1i} (X_{2i} - X_{2i}^0) - \sum_{i=1}^4 k_{1i}x_{2i} (X_{1i} - X_{1i}^0),$$

где (x_{1i}, x_{2i}) - координаты i -той стойки в осях плоскости $O12$ (длина стороны квадратной плиты равна $2a$)

$$(x_{11}, x_{21}) = (-a + x_{1C}, -a + x_{2C}), \quad (x_{12}, x_{22}) = (-a + x_{1C}, a + x_{2C}),$$

$$(x_{13}, x_{23}) = (a + x_{1C}, a + x_{2C}), \quad (x_{14}, x_{24}) = (a + x_{1C}, -a + x_{2C}).$$

Перемещения i -той стойки с координатами при повороте на малый угол φ_{abs} равны $X_{1i} = -\varphi_{abs}x_{2i}$ и $X_{2i} = \varphi_{abs}x_{1i}$. После подстановки перемещений в формулу для L_3 получим

$$\begin{aligned} L_3 &= \left(\sum_{i=1}^N k_{2i}x_{1i}^2 + \sum_{i=1}^N k_{1i}x_{2i}^2 \right) \varphi_{abs} - \left(\sum_{i=1}^N k_{2i}x_{1i}X_{2i}^0 - \sum_{i=1}^N k_{1i}x_{2i}X_{1i}^0 \right) = \\ &= K_{12}\varphi_{abs} - \left(\sum_{i=1}^N k_{2i}x_{1i}X_{2i}^0 - \sum_{i=1}^N k_{1i}x_{2i}X_{1i}^0 \right), \end{aligned}$$

где $K_{12} = \sum_{i=1}^N k_{i2}x_{i1}^2 + \sum_{i=1}^N k_{i1}x_{i2}^2$ - общая угловая жесткость перекрытия.

Матрицы \mathbf{M} и \mathbf{M}_s формируются на основе матрицы \mathbf{M}_0 так же, как в примере 4 в п. 3.2:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & -mx_{2C} \\ 0 & m & mx_{1C} \\ -mx_{2C} & mx_{1C} & \theta_{30} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \\ -mx_{2C} & mx_{1C} \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

$$\theta_{30} = \theta_3 + m(x_{1C}^2 + x_{2C}^2).$$

Суммируя силы инерции и упругие силы и рассматривая сумму моментов относительно вертикальной оси, запишем уравнения абсолютного движения в виде (4.18) относительно вектора обобщенных координат \mathbf{q}_{abs} :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (4.79)$$

где $\mathbf{K} = \text{diag}(K_1 \quad K_2 \quad K_{12})$ - матрица жесткости, \mathbf{q}^0 - вектор опорных перемещений (4.76), матрицы \mathbf{M} и \mathbf{M}_s определяются по (4.78), \mathbf{K}_s - матрица жесткости системы опорных элементов:

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & k_{12} & 0 & k_{13} & 0 & k_{14} & 0 \\ 0 & k_{21} & 0 & k_{22} & 0 & k_{23} & 0 & k_{24} \\ k_{11}x_{21} & -k_{21}x_{11} & k_{12}x_{22} & -k_{22}x_{12} & k_{13}x_{23} & -k_{23}x_{13} & k_{14}x_{24} & -k_{24}x_{14} \end{pmatrix},$$

Уравнения относительного движения (4.26)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}\mathbf{F}_s\ddot{\mathbf{q}}^0, \quad (4.80)$$

где $\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_s$ матрица влияния.

Опасные направления сейсмического воздействия примем те же, что были вычислены в п. 3.8 и использованы при расчете модальных усилий в п. 3.11:

$$\mathbf{v}_1 = (-0.7053 \quad 0.7089)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (0.7204 \quad 0.6935)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (0.5800 \quad -0.8146)^T,$$

$$\mathbf{T}^{[8 \times 2]} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^T,$$

а также разнонаправленное движение грунта (Рисунок 4.10а).

Модальные усилия по трем формам, соответствующие опасным направлениям, вычислим³⁵ по формуле (4.45):

$$\mathbf{S}_{diff} = \begin{pmatrix} -68.709 \text{ кН} & 67.338 \text{ кН} & -0.242 \text{ кН} \\ 68.709 \text{ кН} & 67.338 \text{ кН} & 0.242 \text{ кН} \\ -32.524 \text{ кНм} & 0 & 18.387 \text{ кНм} \\ \text{1 форма} & \text{2 форма} & \text{3 форма} \end{pmatrix}$$

³⁵ Подробные расчетные данные и программный код ПК MATLAB приведены в учебном пособии: Позняк Е.В. Основы теории сейсмостойкости строительных конструкций. М.: Изд-во МЭИ, 2016, 92 с.

В столбцах матрицы \mathbf{S}_{diff} расположены значения модальных усилий по каждой из трех форм колебаний. Как видно, полученные значения, а также полные расчетные усилия полностью совпадают с результатами в п. 3.11. Таким образом, два варианта задания сейсмического движения грунта дают идентичные результаты, если дифференцированное воздействие совпадает с интегральным.

Рассмотрим случай разнонаправленного движения опор (Рисунок 4.10а, п.4.11)

$$\mathbf{T}^{[8 \times 2]} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^T, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Соответствующие модальные усилия равны \mathbf{S}_{diff1}

$$\mathbf{S}_{diff1} = \begin{pmatrix} -9.205 \text{ кН} & -9.214 \text{ кН} & 1.769 \text{ кН} \\ -9.205 \text{ кН} & -9.214 \text{ кН} & 1.769 \text{ кН} \\ -4.357 \text{ кНм} & 0 & -134.160 \text{ кНм} \\ \text{1 форма} & \text{2 форма} & \text{3 форма} \end{pmatrix}.$$

Видно, что при «круговом» движении опор наибольшая нагрузка соответствует угловому перемещению. Заметим, что моделирование такой ситуации невозможно в рамках интегральной модели сейсмического воздействия.

Рассмотрим теперь пример с более общей постановкой задачи с применением формул (4.54).

Модель каркасного здания с двумя перекрытиями под сейсмическим воздействием, заданным горизонтальными и вертикальными перемещениями основания в опорах u_A, v_A и u_B, v_B , а также ротациями α_A, α_B (Рисунок 4.12). РДМ включает шесть обобщенных координат: абсолютные линейные перемещения X_1, Y_1, X_2, Y_2 и угловые φ_1, φ_2 . Пусть m_1, θ_1 и m_2, θ_2 - массы и моменты инерции перекрытий в их главных центральных осях, EI, EF - изгибная и продольная жесткость каждой стойки, h - высота этажа, B - ширина перекрытия.

Как было показано в п.4.7, уравнения движения получаются по принципу Даламбера при рассмотрении условий равновесия перекрытий.

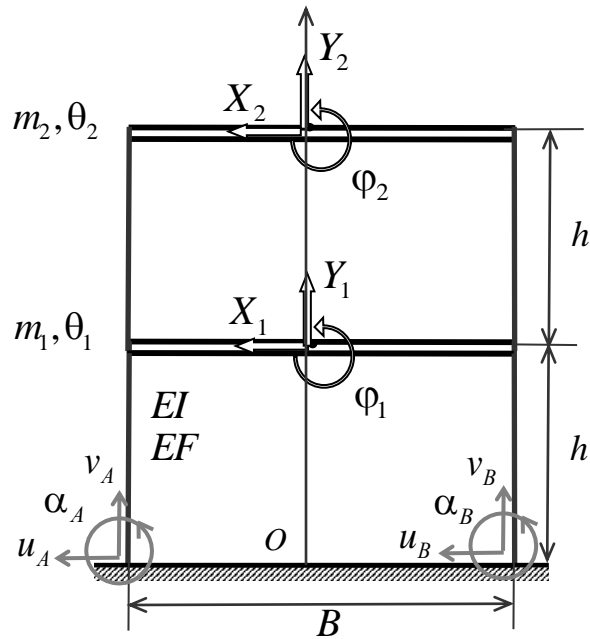


Рисунок 4.12. Расчетная динамическая модель под дифференцированным воздействием

В матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (4.81)$$

где $\mathbf{q} = (Y_1 \ X_1 \ \varphi_1 \ Y_2 \ X_2 \ \varphi_2)^T$ – вектор абсолютных обобщенных координат,

$\mathbf{q}^0 = (v_A \ u_A \ \alpha_A \ v_B \ u_B \ \alpha_B)^T$ – вектор перемещений опорных точек, \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K}

– матрицы инерции, демпфирования и жесткости:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_1 h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 h & \theta_{1O} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 2m_2 h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_2 h & \theta_{2O} \end{pmatrix},$$

$$\theta_{1O} = \theta_1 + m_1 h^2, \quad \theta_{2O} = \theta_2 + 4m_2 h^2,$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4EF/h & 0 & 0 & -2EF/h & 0 & 0 \\ 0 & 48EI/h^3 & 0 & 0 & -24EI/h^3 & 12EI/h^2 \\ 0 & 0 & (16EI + B^2EF)/h & 0 & -12EI/h^2 & (4EI - B^2EF/2)/h \\ -2EF/h & 0 & 0 & 2EF/h & 0 & 0 \\ 0 & -24EI/h^3 & -12EI/h^2 & 0 & 24EI/h^3 & -12EI/h^2 \\ 0 & 12EI/h^2 & (4EI - B^2EF/2)/h & 0 & -12EI/h^2 & (8EI + B^2EF/2)/h \end{pmatrix},$$

Матрица демпфирования \mathbf{B} задается по модели внешнего демпфирования $\mathbf{B} = \eta\mathbf{K}$, $\eta=0.02$ так, чтобы обеспечить 5% демпфирование по первой форме колебаний.

Вектор сейсмических сил $-\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0$ в правой части (4.81) в развернутом виде:

$$-\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 = - \begin{pmatrix} EF/h & 0 & 0 & EF/h & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/h^3 & 6EI/h^2 & 0 & 12EI/h^3 & 6EI/h^2 \\ -BEF/(2h) & -6EI/h^2 & -2EI/h & BEF/(2h) & -6EI/h^2 & -2EI/h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A \\ u_A \\ \alpha_A \\ v_B \\ u_B \\ \alpha_B \end{pmatrix}.$$

Уравнение относительного движения записывается в виде (4.45), где $\mathbf{M}_s = -\mathbf{MK}^{-1}\mathbf{K}_s$.

В качестве пространственного сейсмического воздействия примем волны Рэлея, моделируя процесс распространения по заданной акселерограмме (запись вертикального движения землетрясения в Газли в 1976 г.) по методике, изложенной в п.2.8. Грунтовое основание – рыхлый песок с модулем упругости $E=5$ МПа. На Рисунке 4.13 показаны графики изменения во времени ускорений компонент вектора \mathbf{q}^0 , входящего в уравнение (4.81), а также приведены графики интенсивности поступательного движения.

По Рисунку 4.13 определим параметры сейсмического воздействия для расчета в частотной области. Левая опорная точка - точка A на Рисунке 4.12 – принимается за точку привязки. В точке A : $I_1^X = \max|\ddot{\mathbf{X}}_1^0| = 14.04$, м/с² - интенсивность поступа-

тельного движения, $I_1^\alpha = \max|\ddot{\mathbf{a}}_1^0| = 0.3531$, рад/с² - интенсивность ротационного движения, $w_1 = I_1^\alpha / I_1^X = 0.0251$, м⁻¹ - относительная интенсивность ротационного движения. Те же параметры в точке B: $I_2^X = \max|\ddot{\mathbf{X}}_2^0| = 13.51$ м/с², $I_2^\alpha = \max|\ddot{\mathbf{a}}_2^0| = 0.3596$ рад/с², $w_2 = I_2^\alpha / I_2^X = 0.0266$ м⁻¹.

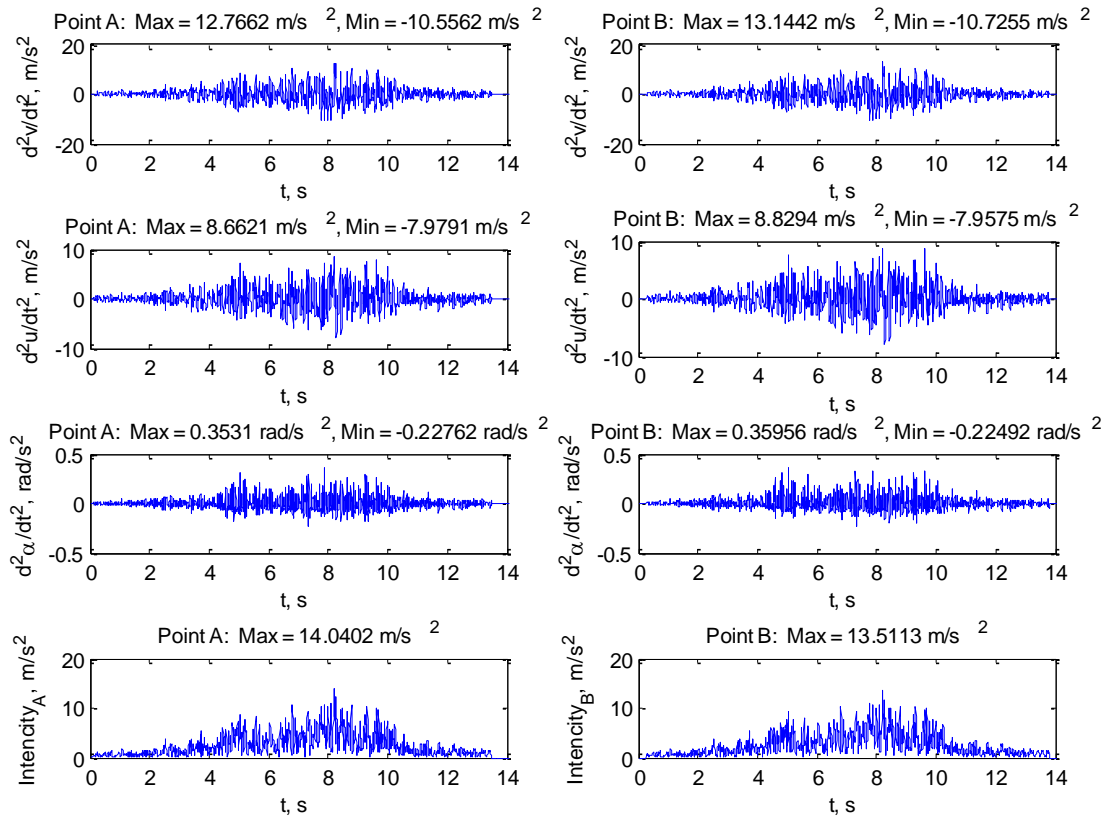


Рисунок 4.13. Дифференцированное сейсмическое воздействие (слева – компоненты вектора $\ddot{\mathbf{a}}_0$ в точке A, справа – в точке B)

Матрица пространственного изменения интенсивности (4.54) в точке привязки единичная: $\mathbf{T}_1^{[3 \times 3]} = \mathbf{E}^{[3 \times 3]}$, во второй точке $\mathbf{T}_2^{[3 \times 3]} = \left(I_2^X / I_1^X \right) \mathbf{E}^{[3 \times 3]}$, $I_2^X / I_1^X = 0.96$.

Полная матрица \mathbf{T} равна

$$\mathbf{T} = \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 0.96 \ 0.96 \ 0.96).$$

Объединенный вектор опасных направлений для $\mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_{k,A} \quad \mathbf{v}_{k,B})^T$ состоит из векторов направляющих косинусов в двух опорных точках:

$$\mathbf{v}_{k,A} = (v_{k,1A}^X \quad v_{k,3A}^X \quad w_1 v_{k,2A}^\alpha)^T \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_{k,B} = (v_{k,1B}^X \quad v_{k,3B}^X \quad w_1 v_{k,2B}^\alpha)^T.$$

Значения опасных направлений, рассчитанные по формулам (4.69), приведены в Таблице 4.3 и показаны на Рисунке 4.14 вместе с соответствующими собственными частотами Ω_k и модальными динамическими коэффициентами β_k .

Модальные внутренние усилия S_{ik} в виде вертикальных и горизонтальных сил $N_{1,2}$, $Q_{1,2}$ и моментов $M_{1,2}$, приложенных к центрам перекрытий, определены по формуле (4.64). При этом было рассмотрено воздействие с ротациями ($w_{1,2} \neq 0$, Таблица 4.4) и без ротаций ($w_{1,2} = 0$, Таблица 4.5). В последних строках Таблиц 4.4 и 4.5 приведены величины внутренних усилий по каждому направлению, рассчитанные по правилу «Корень квадратный из суммы квадратов».

Таблица 4.3.

Опасные направления сейсмического воздействия

Направляющие косинусы		Формы собственных колебаний					
		$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
Точка А	$v_{k,1A}^X$	0.940	-0.844	-1.	1.	-1.	-1.
	$v_{k,3A}^X$	-0.342	-0.537	0.	0.	0.	0.
	$v_{k,2A}^\alpha$	-1.	-1.	1.	1.	-1.	-1.
Точка В	$v_{k,1B}^X$	-0.940	0.843	-1.	-1.	-1.	1.
	$v_{k,3B}^X$	-0.342	-0.537	0.	0.	0.	0.
	$v_{k,2B}^\alpha$	-1.	-1.	1.	1.	-1.	-1.

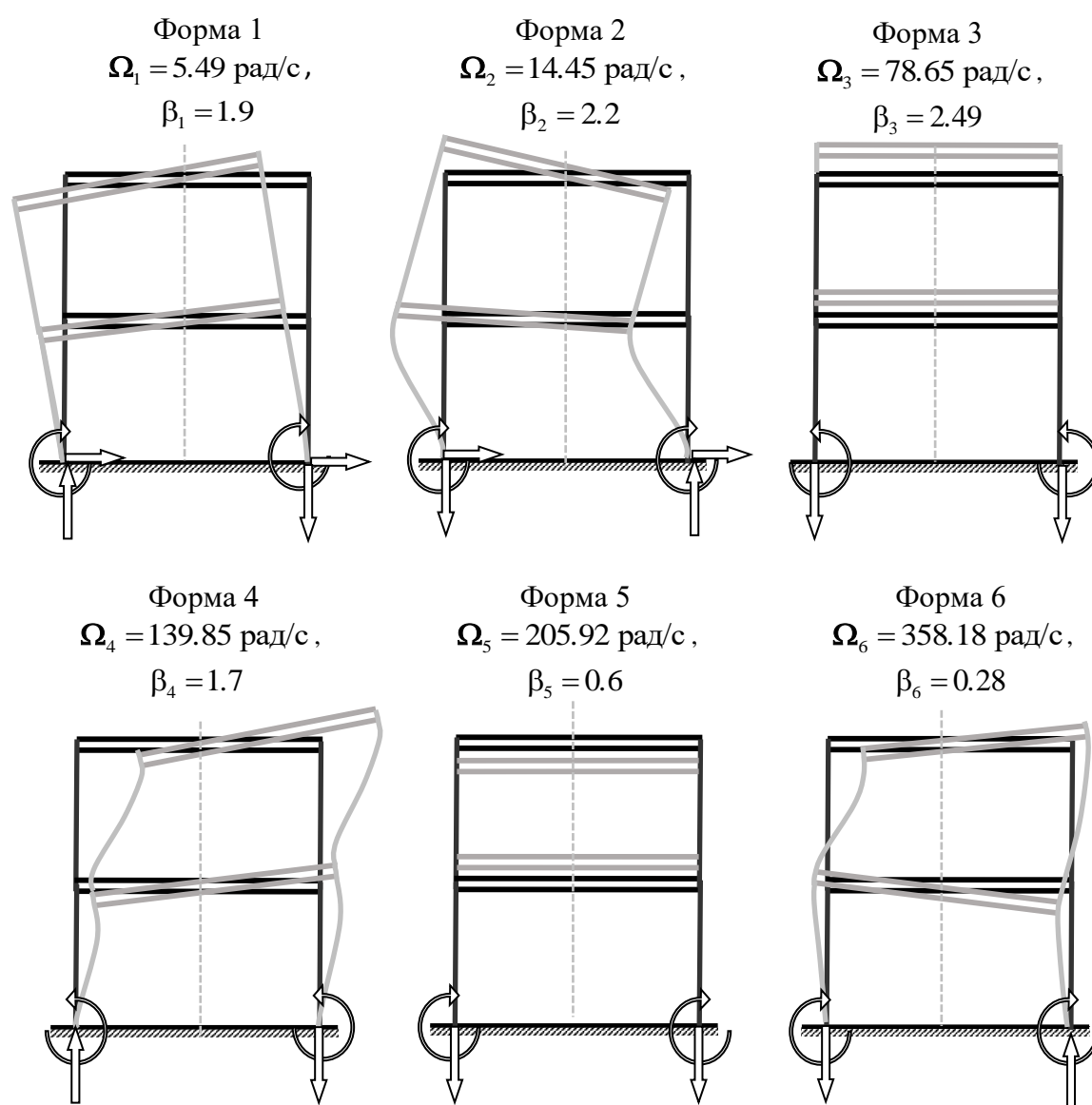


Рисунок 4.14. Частоты и формы собственных колебаний, модальные коэффициенты динамичности и опасные направления сейсмического воздействия

Результаты расчета показывают значительные сейсмические моменты, действующие на перекрытия, причем основная причина больших нагрузок по угловым степеням свободы – взаимные линейные перемещения опор. Ротации грунта в зонах опирания не дают серьезного прироста динамической реакции (учет ротаций в точках опирания привел к возрастанию сейсмического момента M_2 всего на 2%, с 40846 кНм до 41765 кНм).

Таблица 4.4.

Внутренние усилия. Модель с учетом ротаций грунта

№ формы, модальное усилие	Внутренние усилия по обобщенной координате i					
	$i=1$ N_1 , кН	$i=2$ Q_1 , кН	$i=3$ M_1 , кНм	$i=4$ N_2 , кН	$i=5$ Q_2 , кН	$i=6$ M_2 , кНм
Форма 1, S_{i1}	0.	2496.	12535.	0.	4137.	41454.
Форма 2, S_{i2}	0.	763.	3804.	0.	-460.	-4637.
Форма 3, S_{i3}	1116.	0.	0.	1805.	0.	0.
Форма 4, S_{i4}	0.	6.	1293.	0.	-11.	1906.
Форма 5, S_{i5}	103.	0.	0.	-63.	0.	0.
Форма 6, S_{i6}	0.	0.	78.	0.	0.	49.
S_i	1120.	2610.	13163.	1806.	4162.	41756.

Таблица 4.5.

Внутренние усилия. Модель без учета ротаций

№ формы, модальное усилие	Внутренние усилия по обобщенной координате i					
	$i=1$ N_1 , кН	$i=2$ Q_1 , кН	$i=3$ M_1 , кНм	$i=4$ N_2 , кН	$i=5$ Q_2 , кН	$i=6$ M_2 , кНм
Форма 1, S_{i1}	0.	2442.	12263.	0.	-4047.	-40557.
Форма 2, S_{i2}	0.	737.	3677.	0.	-445.	-4481.
Форма 3, S_{i3}	1116.	0.	0.	1805.	0.	0.
Форма 4, S_{i4}	0.	6.	1292.	0.	-11	1905.
Форма 5, S_{i5}	103.	0.	0.	-63	0.	0.
Форма 6, S_{i6}	0.	0.	-78	0.	0.	48
S_i	1120.	2551.	12868.	1806.	4071.	40848.

Заключение

Представленная работа обеспечивает преемственность ведущих советских и российских научных школ в области теории сейсмостойкости, расширяя теоретическую базу для решения современных прикладных задач в строительной области.

В диссертации рассмотрена проблема учета волнового характера сейсмического воздействия на динамику пространственных строительных конструкций. При волновом сейсмическом воздействии изменяется движение конструкции, происходит перераспределение внутренних усилий. Цифровые модели пространственных конструкций, генерируемые современными программными комплексами, позволяют учесть эти особенности, но при этом требуют задания пространственных воздействий и усовершенствования инженерных расчетных методов. К ним относятся методики анализа волнового воздействия, получения расчетных параметров воздействий и обобщения линейно-спектрального метода на случаи пространственных интегрального и дифференцированного сейсмических движений грунта. На решение этих проблем и была нацелена настоящая работа.

При работе над диссертацией были проанализированы некоторые аспекты проблемы, мало известные российским специалистам, но активно исследуемые за рубежом: предельные состояния конструкций при сейсмических расчетах; изменчивость сейсмического движения грунта; фильтрация коротких сейсмических волн жесткими фундаментами. Эти вопросы исследованы соискателем и отражены в диссертации как часть общей методологии современной теории сейсмостойкости.

В ходе выполнения диссертационной работы были достигнуты научные результаты, в основном касающиеся развития инженерных методов теории сейсмостойкости. Эти методы были обоснованы расчетами на ряде моделей – от простых, доступных для анализа в математических пакетах, до сложных, с сотнями тысяч степеней свободы, для исследования которых применялись специализированные программные комплексы. Расчеты показали надежность новых подходов.

Работа над модификацией инженерных приемов и методов начинается с научного сопровождения уникальных проектов, и находит продолжение в усовершенствовании специализированного программного обеспечения, а также в обратной связи с проектировщиками-пользователями этого ПО, задающими порой непростые вопросы. Еще предстоит решить ряд сложнейших проблем теории сейсмостойкости, связанных с расчетами на максимальное расчетное землетрясение (МРЗ), с заданием параметров МРЗ и определением уровней предельных состояний поврежденной конструкции.

Несмотря ни на что, наука идет вперед, заметно отрываясь от нормативного обеспечения сейсмических расчетов. Основная рекомендация автора – отражение опыта работы ведущих проектных институтов и лабораторий в новых строительных нормах, внедрение новых подходов в практику инженерного проектирования и в расчетные программные комплексы.

Работа над развитием инженерных методов сейсмического расчета, несомненно, должна быть продолжена в направлении анализа нелинейного деформирования конструкций, определения предельных состояний, изучения механизмов разрушения, формирования надежной (и по возможности простой) методики расчета на максимальное расчетное землетрясение. Новые инженерные методы должны разрабатываться в сотрудничестве со специалистами-сейсмологами, обязательно проходить экспериментальную проверку, опираться на данные о последствиях сильных землетрясениях. При этом нельзя полагаться на энтузиазм отдельных ученых, столь серьезная работа должна находиться в рамках единой государственной стратегии обеспечения сейсмической безопасности.

Обозначения

\mathbf{X}_0 - вектор поступательных перемещений точки грунта,

$\ddot{\mathbf{X}}_i^0$ - вектор ускорения поступательного движения в i -той опорной точке,

$\boldsymbol{\alpha}_0$ - вектор угловых (ротационных) перемещений основания в окрестности точки,

$\dot{\mathbf{X}}_0$ - вектор поступательных скоростей точки основания,

$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_0$ - вектор угловых (ротационных) скоростей основания в окрестности точки,

$\ddot{\mathbf{X}}_0$ - вектор поступательных ускорений точки основания,

$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_0$ - вектор угловых (ротационных) ускорений основания в окрестности точки,

$\ddot{\mathbf{a}}_i^0$ - вектор угловых (ротационных) ускорений i -той опорной точки,

$\ddot{\mathbf{q}}_0$ - вектор интегрального сейсмического воздействия,

$\dot{\mathbf{q}}^0$ - вектор дифференцированного сейсмического воздействия,

$\ddot{\mathbf{q}}_i^0$ - вектор дифференцированного сейсмического воздействия в i -той опорной точке,

\mathbf{q} - вектор перемещений в исходных координатах,

q_i - перемещение по i -той исходной обобщенной координате,

\mathbf{q}_k - вектор модальных перемещений в исходных координатах по k -той форме,

$\mathbf{q}_{tr}, \dot{\mathbf{q}}_{tr}$ - векторы переносных перемещений и скоростей,

$\mathbf{q}_{abs}, \dot{\mathbf{q}}_{abs}$ - векторы абсолютных перемещений и скоростей,

$\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r$ - векторы относительных перемещений и скоростей,

$\mathbf{q}_{all}, \dot{\mathbf{q}}_{all}$ - полные векторы абсолютных обобщенных перемещений и скоростей,

$\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0$ - вектор обобщенных перемещений и скоростей в опорных точках,

u_k - модальное перемещение в главных координатах по k -той форме,

\mathbf{u} - вектор модальных перемещений в главных координатах,

n - число степеней свободы РДМ,

p - число опорных точек РДМ при дифференцированном воздействии,

- \mathbf{M}_s - матрица переносных инерционных коэффициентов,
 \mathbf{P}_s - вектор переносных инерционных сейсмических сил,
 \mathbf{F}_s - матрица коэффициентов влияния,
 \mathbf{M} - матрица инерции РДМ,
 \mathbf{M}_O - матрица инерции тела при относительном движении в основных осях РДМ,
 \mathbf{K} - матрица жесткости РДМ,
 \mathbf{K}_{all} - общая глобальная матрица жесткости (без учета краевых условий),
 $\tilde{\mathbf{K}}$ - расширенная матрица жесткости,
 \mathbf{B} - матрица демпфирования РДМ,
 \mathbf{B}_s - матрица демпфирования системы опорных элементов,
 \mathbf{B}_{all} - общая глобальная матрица демпфирования,
 $\tilde{\mathbf{B}}$ - расширенная матрица демпфирования,
 \mathbf{V} - матрица собственных форм колебаний,
 \mathbf{v}_k - вектор k -той формы собственных колебаний,
 θ_k - коэффициент динамичности k -той формы колебаний,
 \mathbf{r} - радиус-вектор узловой массы или центра тяжести твердого тела,
 \mathbf{S}_k - вектор модальных внутренних усилий по k -той форме колебаний,
 \mathbf{S}_Σ - полные расчетные усилия,
 $S_{i\Sigma}$ - полное расчетное усилие, действующее в направлении i -той обобщенной координаты,
 \mathbf{S}_{tr} - вектор усилий от переносного движения,
 μ_k - эффективная модальная масса по k -той форме колебаний,
 S_{ik} - внутреннее усилие по k -той собственной форме колебаний, действующее в направлении i -той обобщенной координаты,
 S_k - опорная реакция в основании при движении по k -той собственной форме,
 S_{ik}^O - сила по k -той собственной форме, действующая в направлении i -той обобщенной координаты,

S_{ik}^L - момент по k -той собственной форме, действующий в направлении i -той обобщенной координаты,

S_k^Q - сила в основании (опорная реакция) при движении по k -той собственной форме

S_k^L - момент в основании (опорная реакция) при движении по k -той собственной форме

W_k - потенциальная энергия деформации k -той формы колебаний,

η_k - вектор коэффициентов k -той формы колебаний,

η_{ik} - коэффициент k -той собственной формы колебаний в направлении i -той обобщенной координаты,

β_k - модальный (спектральный) коэффициент динамичности, соответствующий k -той собственной частоте,

I - нормативная интенсивность сейсмического воздействия,

I_x - интенсивность поступательного сейсмического движения,

I_α - интенсивность ротационного сейсмического движения,

I_i^X - интенсивность поступательного сейсмического движения в i -той опорной точке,

I_i^α - интенсивность ротационного сейсмического движения в i -той опорной точке,

Ω_k - k -тая частота собственных колебаний,

\mathbf{P}_s - вектор переносных инерционных сейсмических сил,

\mathbf{Q} - вектор переносных инерционных сейсмических сил в главных координатах,

Q_k - переносные инерционные сейсмические силы, приведенные к k -той собственной форме,

\mathbf{v}_k - вектор направляющих косинусов для k -той собственной формы,

$\mathbf{v}^{[6]}$ - шестимерный вектор направляющих косинусов сейсмического движения,

$\mathbf{v}^{[n]}$ - n -мерный вектор направляющих косинусов сейсмического движения,

$\mathbf{v}_{k,x}$ - вектор направляющих косинусов поступательного движения грунта,

$\mathbf{v}_{k,\alpha}$ - вектор направляющих косинусов углового движения грунта,

\mathbf{v}_i^x - вектор направляющих косинусов поступательного движения грунта в i -той опорной точке,

\mathbf{v}_i^α - вектор направляющих косинусов ротационного движения грунта в i -той опорной точке,

\mathbf{v}_i - вектор направляющих косинусов движения грунта в i -той опорной точке,

w - относительная интенсивность углового ускорения,

$T_i = T(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ - функция пространственного изменения поля ускорений в i -той опорной точке по отношению к точке привязки,

\mathbf{T}_i - матричная функция изменения поля ускорений в i -той опорной точке,

\mathbf{T} - матричная функция пространственного изменения поля ускорений,

Θ_i - матрица функций пространственного изменения КД в i -той опорной точке относительно точки привязки.

Список литературы

1. Abrahamson N.A. Generation of spatially incoherent strong motion time histories. *Earthquake Engineering, 10th World Conf.*, 1992.
2. Abrahamson N.A., Schneider J.F., Stepp C. The spatial variation of earthquake ground motion and effects of local site conditions. *Earthquake Engineering, 10th World Conf.*, 1992.
3. Alford J.L., Housner G.W., Martel R.R. Spectrum analysis of strong-motion earthquakes. Pasadena, CA: Earthq. Eng. Res. Lab., Calif. Inst. of Tech. (originally published in 1951, revised in 1964).
4. Ancheta T.D., Stewart J.P., Abrahamson N.A. Engineering Characterization of Earthquake Ground Motion Coherency and Amplitude Variability//4th IASPEI/ IAEE International Symposium: Effects of Surface Geology on Seismic Motion August 23–26, 2011.
5. Biot MS. Theory of elastic systems vibrating under transient impulse with an application to earthquake-proof buildings. *Proc Nat Acad Sci* 1933;19(2): 262–268.
6. Ghiocel D.M., Short S. and Hardy G. Seismic Motion Incoherency Effects on SSI Response of Nuclear Islands with Significant Mass Eccentricities and Different Embedment Levels//20th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 20), Espoo, Finland, August 9-14, 2009.
7. Hudson DE. Response spectrum techniques in engineering seismology. *Proceedings of the First World Conference on Earthquake Engineering*, Paper No. 14, 1956, pp. 1–12.
8. Konakli K., Kiureghian A.D. Stochastic Dynamic Analysis of Bridges Subjected to Spatially Varying Ground Motions//PEER Report 2011/105, Pacific Earthquake Engineering Research Center College of Engineering University of California, Berkeley, August 2011.
9. Lee V.W., Liang J. Rotational Components of Strong-motion Earthquakes. *The 14th World Conf. on Earthquake Engineering*, 2008, Beijing, China.
10. Lee V.W., Trifunac M.D. Torsional accelerograms. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 1985; 4, 3, 132-138.
11. Lee, V.W., Trifunac, M.D., Rocking strong earthquake accelerations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 1987. V. 6, P. 75-89.
12. Luco J.E. Torsional response of structures for SH-waves: The case of hemispherical foundations//*Bull. Seism. Soc. Amer.* 1976; 66, 109-123.
13. Mononobe N. Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichen Querschnitt, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 1, Heft 6, 1921.

14. Nazarov Yuri P., Poznyak Elena V., Filimonov Anton V. Seismic Data Analysis in Odyssey Software. International Journal of Emerging Technologies in Computational and Applied Sciences (IJETCAS), ISSN (Online): 2279-0055, ISSN (Print): 2279-0047, December 2013 - February 2014, Issue 7, Volume 1, pp. 75-77.
15. Nazarov Yuri P., Poznyak Elena, Filimonov Anton V. A brief theory and computing of seismic ground rotations for structural analyses. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 71 (2015), p.31-41.
16. Nazarov Yu. P., Poznyak E. V. Estimate of Rotational Components of Seismic Ground Motion. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 2016, Volume 52, Issue 6, pp 355-360.
17. Nazarov Y.P. Poznyak E.V. On the Filtering Properties of Foundations of Earthquake-Resistant Buildings. Soil Mechanics and Foundation Engineering, November 2016, Volume 53, Issue 5, pp 352–356.
18. Nazarov Yu. P., Poznyak E. V. Spatial Variability of Seismic-Ground Movements in Structure Analysis. Soil Mechanics and Foundation Engineering, November 2014, Volume 51, Issue 5, pp 242-247.
19. Newmark N.M. Torsion in symmetrical building// Proc. 4th World Conf. Earthquake Engineering, Santiago 1969; 19-32.
20. NS-G-1.6. Проектирование и аттестация сейсмостойких конструкций для атомных электростанций. Руководство. Серия норм МАГАТЭ по безопасности. МАГАТЭ ВЕНА, 2008, 67 с.
21. Omori F. Seismic Experiments on the Fracturing and Overturning of Columns. Publ. Earthquake Invest. Comm. In Foreign Languages, N.4, Tokyo, 1900.
22. Schneider J.F., Stepp J.C., Abrahamson N.A. The spatial variation of earthquake ground motion and effects of local site conditions//Earthquake Engineering, Tenth World Conference, 1992.
23. Shibata H.T., Onose J., Shiga T. Torsional response of buildings to strong Earthquake motions// Proc. 4th World Conf. Earthquake Engineering, Santiago, 1976.
24. Shibata H.T., Shigeta T., Sone A. A note of some results of observation of torsional ground motions and their response analysis// Bull. Earthquake Resist. 1976; 10, 43-47.
25. Todorovska M.I., Igel H., Trifunac M.D., Lee W.H.K. ROTATIONAL EARTHQUAKE MOTIONS–INTERNATIONAL WORKING GROUP AND ITS ACTIVITIES. The 14th World Conf. on Earthquake Engineering, 2008, Beijing, China.

26. Towhata I. HISTORY OF GEOTECHNICAL EARTHQUAKE ENGINEERING IN JAPAN. The 14th World Conference on Earthquake Engineering, 2008, Beijing, China
27. Trifunac M.D., Ivanovć S.S., Todorovska M.I., Novikova E.I., Gladkov A.A. Experimental evidence for flexibility of a building foundation supported by concrete friction piles. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. Volume 18, Issue 3, April 1999, Pages 169–187.
28. Trifunac M.D. 75th anniversary of strong motion observation—A historical review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29 (2009) 591–606.
29. Trifunac M.D. Brief history of computation of earthquake response spectra. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 26 (2006) 501–508.
30. Trifunac M.D. Selected notes on rotations in structural response. Report CE 07-04 Dept. of Civil Eng. Univ. of Southern California, Los Angeles, California 2007.
31. Trifunac M.D. The role of strong motion rotations in the response of structures near earthquake faults. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29, 2, 2009; 382-393.
32. Zerva A., Zervas V. Spatial variation of seismic ground motions//*Appl. Mech. Rev.* vol. 55, no. 3, May 2002.
33. Айзенберг Я.М. Сооружения с выключающимися связями для сейсмических районов. М.: Стройиздат, 1976. 246 с.
34. Барштейн М.Ф. Колебания протяженных в плане сооружений при землетрясениях // *Строительная механика и расчет сооружений*. –1968. – №6. –С.30-36.
35. Барштейн М.Ф. Приложение вероятностных методов к расчету сооружений на сейсмические воздействия // *Строительная механика и расчет сооружений*. –1960. –№2. – С.6-14.
36. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб.: Наука, 1998.
37. Болотин В.В. К статистической интерпретации норм расчета строительных конструкций // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1977. – № 1. – С. 8-11.
38. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. -М.: Стройиздат, 1981. -351 с.
39. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1982. 352 с.

40. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971. 254 с.
41. Болотин В.В. Применение статистических методов для оценки прочности конструкций при сейсмических воздействиях // Известия АН СССР. Инженерный сборник, 1960, т. 27, с. 58-69.
42. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
43. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1961. 160 с.
44. Болотин В.В., Радин В.П., Чирков В.П. Динамика конструкций при многокомпонентных сейсмических воздействиях // Известия академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – №3. – С.149-157.
45. Болт Б. Землетрясения. Общедоступный очерк. -М.: Мир, 1981.
46. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. –М.: Машиностроение. Колебания линейных систем. Т. 1. 1999.
47. Волновые процессы в конструкциях зданий при сейсмических воздействиях. /А.П. Синицын, Е.С. Медведева, Э.Е. Хачиян и др. М.: Наука, 1987.
48. Воронцов А.Н., Трифонов О.В. Вычислительные методы в механике материалов и конструкций. М.: Издательство МЭИ, 2001.
49. Гаскин В.В., Снитко А.Н., Соболев В.И. Динамика и сейсмостойкость зданий и сооружений. - Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1992.
50. Гольденблат И.И. Динамическая устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1948.
51. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1969.
52. Гольденблат И.И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. М.: Стройиздат, 1947. 133 с.
53. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил. М.: Стройиздат, 1961.
54. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Поляков С.В., Ульянов С.В. Модели сейсмостойкости сооружений. М.: Наука, 1979.
55. Гольденблат И.И., Поляков С.В. Актуальные вопросы теории сейсмостойкости //Строительная механика и расчет сооружений. – 1967. – №6 (54) – С.1-4.
56. ГОСТ Р 54257-2010 «Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения и требования»

57. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Спектральный анализ случайных процессов. -: М. Энергия, 1974. 240 с.
58. Джинчвелашвили Г.А., Колесников А.В., Шаметай А.А., Урожаев А.В. Расчет каркасных зданий на сейсмические воздействия с учетом развития неупругих деформаций. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2012. Т. 8. № 4. С. 53-60.
59. Завриев К.С. Динамика сооружений. Тбилиси, Трансжелдориздат, 1946.
60. Завриев К.С. Расчет инженерных сооружений на сейсмостойкость. Известия Тифлисского политехнического института, 1928, с. 115-132.
61. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений /Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1979.
62. Корчинский И.Л. Колебания высотных зданий. – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1953.
63. Корчинский И.Л. Основы проектирования зданий и сооружений в сейсмических районах. –М.: Стройиздат, 1961. -488 с.
64. Корчинский И.Л. Сейсмостойкое строительство зданий. – М.: Высшая школа, 1971. - 320 с.
65. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. -М.: Мир, 1990.
66. Медведев С.В. Инженерная сейсмология. М.: Гос. изд-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1962.
67. Мишенков Г.В., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. Метод конечных элементов в курсе сопротивления материалов. -М.: Физматлит. – 2015. – 472 с.
68. Мкртычев О.В., Джинчвелашвили Г., Климова Д.В. Вероятностная оценка надежности системы сооружение-основание при случайном сейсмическом воздействии // Вестник МГСУ. – 2007. – № 1. – С. 101-104.
69. Мкртычев О.В., Келешев М.Ф., Джинчвелашвили Г.А. Учет нелинейности при расчете многоэтажного монолитного здания на интенсивное сейсмическое воздействие. В сборнике: Бетон и железобетон - взгляд в будущее научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону: 2014. – С. 124-132.
70. Мкртычев О.В., Джинчвелашвили Г.А. Проблемы учета нелинейностей в теории сейсмостойкости (гипотезы и заблуждения). М.: Изд-во Московского государственного строительного университета, 2014. 192 с.
71. Назаров А.Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1959.

72. Назаров Ю.П. Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. - М.: Наука, 2010. - 468 с.
73. Назаров Ю.П. Динамика спортивных сооружений. -М.: Наука, 2014, 222 с.
74. Назаров Ю.П. и др. Рекомендации по определению расчетной сейсмической нагрузки для сооружений с учетом пространственного характера воздействия и работы конструкций. М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1989. 142 с.
75. Назаров Ю.П. Расчетные модели сейсмических воздействий. -М.: Наука, 2012, 414 с.
76. Назаров Ю.П. Расчетные параметры волновых полей сейсмических движений грунта. -М.: Наука, 2015, 401 с.
77. Назаров Ю.П., Жук Ю.Н., Симбиркин В.Н., Егоров М.И. Басманный рынок: анализ конструктивных решений и возможных механизмов разрушения здания // Строительная механика и расчет сооружений. – 2007. – №2. – С. 49-55.
78. Назаров Ю.П., Жук Ю.Н., Позняк Е.В., Панасенко Ю.В., Курнавин В.В. Теория и практика расчета строительных сооружений по акселерограммам. Труды XI Российской национальной конференции по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию. С.131-132.
79. Назаров Ю.П., Ойзерман В.И. Метод трех моделей в расчетах сооружений на сейсмические воздействия // Строительная механика и расчет сооружений. – 2007. – №6. – С. 6-8.
80. Назаров Ю.П., Ойзерман В.И. Предложения по корректировке СНиП II-2-87*// Строительная механика и расчет сооружений. – 2007. – №6. – С. 2-5.
81. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Моделирование процесса распространения волн Рэлея в пространстве по заданной акселерограмме // Строительство и реконструкция. – 2015. – №2 (58). – С. 20-26.
82. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. О пространственной изменчивости сейсмических движений грунта при расчете сооружений // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2014. – №5. – С.17-20.
83. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Определение коэффициента динамичности в расчетах на сейсмостойкость [Электронный ресурс] // Строительство: наука и образование. 2015. № 1. Ст. 2. Режим доступа: <http://www.nso-journal.ru>.
84. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Оценка ротационных компонент сейсмического движения грунта. Основания, фундаменты и механика грунтов // 2015. – №6. – С. 22-26.

85. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. О фильтрующих свойствах фундаментов сейсмостойких зданий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2016. – №5. – С.31-34.
86. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Современная концепция интегральной модели сейсмического движения грунта в строительных расчетах на сейсмостойкость // Промышленное и гражданское строительство. – 2016. – № 9. – С. 74-80.
87. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Анализ динамической реакции трибун спортивных сооружений на согласованные действия зрителей. Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2015 году: сб. науч. тр. РААСН. – М.: АСВ, 2016. – 621 с.
88. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Теория квазистатического расчета трибун спортивных сооружений на согласованные действия зрителей // Научный вестник строительства и архитектуры. – 2017. – № 1 (45). – С.100-113.
89. Назаров Ю.П., Позняк Е.В., Филимонов А.В. Анализ вида волновой модели и получение расчетных параметров сейсмического воздействия для высотного здания // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – №5. – С.40-45.
90. Назаров Ю.П., Попов Н.А., Лебедева И.В. Стандарт организации ФГУП НИЦ «Строительство» СТО 36554501-015-2008 «Нагрузки и воздействия»//Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. – №4. – С. 73-78.
91. Назаров Ю.П., Попов Н.А., Лебедева И.В., Чекашев В.В. Учет сейсмических воздействий при расчете многофункциональных высотных зданий и комплексов в Москве // Строительная механика и расчет сооружений. – 2006. – №2. – С. 3-7.
92. Назаров Ю.П., Симбиркин В.Н. Анализ и ограничение колебаний конструкций при воздействии людей// Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Исследования по теории сооружений. – 2009. – № 1 (XXVI). – С. 10-18.
93. Напетваридзе Ш.Г. Вероятностные задачи инженерной сейсмологии и теория сейсмостойкости. Тбилиси, Изд-во Мецниереба. 1985.
94. Напетваридзе Ш.Г., Кириков Б.А., Абакаров А.Б. Вероятностные оценки сейсмических нагрузок на сооружения. -М.: Наука, 1987. 120 с.
95. Николаенко Н.А. Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1967.

96. Николаенко Н.А., Назаров Ю.П. Динамика и сейсмостойкость сооружений. - М.: Стройиздат, 1988. 308 с.
97. Николаенко Н.А., Ульянов С.В. Статистическая динамика машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1977.
98. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Издательство «Мир», 1975.
99. Ньюмарк Н., Розенблюэт Э. Основы сейсмостойкого строительства. / Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1980.
100. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев, Изд-во «Сталь», 2002. -600 с.
101. Позняк Е.В. Оценка вероятности безотказной работы глубоководных стационарных платформ// Динамика, прочность и износостойкость машин, 1999, вып.6, с.32-37.
102. Позняк Е.В. Оценка дефектов в соединениях модели каркасного здания как инициаторов прогрессирующего обрушения // Справочник. Инженерный журнал. –2012. –№10. – С.18-22.
103. Позняк Е.В. О расчетах на сейсмостойкость с программным обеспечением «Еврософт Одиссей»// Приложение к журналу «Справочник. Инженерный журнал». 2013. – №5. – С.22-24.
104. Позняк Е.В. Состоятельная оценка спектральной плотности мощности сейсмического ускорения грунта // Вестник МЭИ. –2015. –№5. – С.30-36.
105. Позняк Е.В. Основы теории сейсмостойкости строительных конструкций. Учебное пособие по дисциплинам Аналитическая динамика и теория колебаний, Статистическая механика и надежность, Управление техническими системами, направления 15.03.03, 15.04.03 Прикладная механика, профиль Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры). М.: Изд-во МЭИ, 2016, 92 с.
106. Позняк Е.В., Новикова О.В. Оценка спектральной плотности сейсмического ускорения грунта по природным акселерограммам. Труды Международной научно-практической конференции «Информатизация инженерного образования» — ИНФОРИНО-2016 (Москва, 12—13 апреля 2016 г.). — М.: Издательский дом МЭИ, 2016. — 706 с.: с. 403-406.
107. Позняк Е.В., Новикова О.В. Модели сейсмического движения грунта в инженерных расчетах на сейсмостойкость, с.186-189. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию В.И.Феодосьева: сборник тезисов / Российская академия наук, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, МГТУ им.

- Н.Э.Баумана, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. -Москва: Издательство МГТУ им.Н.Э. Баумана, 2016. -364 с.
108. Позняк Е.В. О связи уравнений относительного и абсолютного движения при дифференцированном сейсмическом воздействии // Вестник МЭИ. –2017. – №1. – С.31-37.
109. Позняк Е.В., Новикова О.В. Обобщение линейно-спектрального метода для общего случая пространственного интегрального сейсмического воздействия // Вестник МЭИ. – 2017. – №4. – С. 28-35.
110. Позняк Е.В., Новикова О.В. Линейно-спектральный метод для дифференцированной модели сейсмического движения грунта // Вестник МЭИ. –2017. – №5. – С. 48-56.
111. Позняк Е.В. Моделирование пространственно-временного поля волн Лява по акселерограмме // Строительство и реконструкция. – 2017. – №6. – С. 32-41.
112. Позняк Е.В. Применение обобщенного линейно-спектрального метода. Часть 1. Интегральное сейсмическое воздействие // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. – №3. – С. 63-69.
113. Позняк Е.В. Применение обобщенного линейно-спектрального метода. Часть 2. Дифференцированное сейсмическое воздействие // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. – №4. – С. 61-68.
114. Позняк Е.В. О граничных условиях при расчетах на сейсмостойкость при дифференцированном движении грунта // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 3 (29). Ст. 1. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.3.1. Режим доступа: <http://www.nso-journal.ru>
115. Пособие по проектированию каркасных промзданий для строительства в сейсмических районах (к СНиП II-7-81). Москва, Стройиздат, 1984.
116. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. -М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. -744 с.
117. Радин В. П., Самогин Ю. Н., Чирков В. П. Метод конечных элементов в динамических задачах сопротивления материалов. – М : Физматлит, 2013 . – 316 с.
118. Рассказовский В.Т. Локальная модель сейсмического поля и угловые перемещения сооружений//Бюлл. инж. сейсмологии, 1989. №13, С.5-13.
119. Рассказовский В.Т. Основы физических методов определения сейсмических воздействий. Ташкент, Издательство Фан, 1973. 160 с.
120. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973.

121. Саваренский Е.Ф. Сейсмические волны. -М.: Недра, 1972.
122. Самогин Ю. Н., Серков С. А., Чирков В. П. Метод конечных элементов в динамических расчетах турбомашин: учебное пособие для вузов по направлению "Энергетическое машиностроение" /ред. В. П. Чирков; Нац. исслед. ун-т "МЭИ". – М.: Физматлит, 2016. – 212 с.
123. Сейсмическая шкала и методы измерения сейсмической интенсивности. Под ред. А.Г. Назарова, Н.В. Шебалина. М.: Наука. 1975.
124. Симбиркин В.Н., Филимонов А.В. Определение опасных направлений сейсмического воздействия для пространственных сооружений. Вестник НИЦ «Строительство». Исследования по теории сооружений: Сб. статей. Вып. 6 (XXXI). – М.: НИЦ «Строительство», 2012. – С. 23-30.
125. Сеницын А.П. Влияние бегущей сейсмической волны на массивные сооружения// Тр. ИФЗ им. О.Ю.Шмидта АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1961. №7 (184).
126. Сеницын А.П. Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки. М.: Стройиздат, 1967.
127. Смирнов А.Ф. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат. 1984.
128. СНиП II-7-81* Строительные нормы и правила. Строительство в сейсмических районах. М., 2002, 44 с.
129. СНиП II-7-81* Строительство в сейсмических районах
130. СП 20.13330.2011 СНиП 2.01.07-85* «Нагрузки и воздействия»
131. Справочник проектировщика. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия/Барштейн М.Ф., Бородачев Н.М., Блюмина Л.Х. и др.-М.: Стройиздат, 1981. -215 с.
132. Тяпин А.Г. Расчет сооружений на сейсмические воздействия с учетом взаимодействия с грунтовым основанием. М.: Издательство АСВ, 2013.
133. Уломов В.И. Вероятностно-детерминированная оценка сейсмических воздействий на основе карт ОСР-97 и сценарных землетрясений// Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №4, 2005. С.60-68.
134. Уломов В.И. Общее сейсмическое районирование территории Российской Федерации ОСР-97. Список населенных пунктов Российской Федерации, расположенных в сейсмических районах. Карты общего сейсмического районирования ОСР-97 (вкладка). // СНиП II-7-81*. Издание официальное. -М.: Госстрой России, 2000, с.25-44.

135. Уломов В.И., Шумилина Л.С. Комплект карт Общего сейсмического районирования территории Российской Федерации ОСР-97. -М.: Роскартография, 2000.
136. Федеральный закон от 30 декабря 2009 г. № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений»;
137. Хачиян Э.Е. Амбарцумян В.А. Динамические модели сооружений в теории сейсмостойкости. М.: Наука, 1981.
138. Хачиян Э.Е. Прикладная сейсмология. Ереван: Гитутюн НАН РА, 2008, 491 с.



АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО «НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «СТРОИТЕЛЬСТВО»
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ИМЕНИ В. А. КУЧЕРЕНКО

№ 15-119 от «31» 01 2018 г.

на № _____ от «___» _____ 20__ г.

СПРАВКА

о практическом использовании результатов
диссертации Позняк Елены Викторовны на тему
«Развитие методов волновой теории сейсмостойкости строительных конструкций»,
представляемой на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности
05.23.17 – Строительная механика

Настоящим подтверждаем, что результаты диссертационной работы Позняк Елены Викторовны «Развитие методов волновой теории сейсмостойкости строительных конструкций», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук, использованы в научно-исследовательской и проектной деятельности Лаборатории автоматизации исследований и проектирования сооружений ЦНИИСК им В. А. Кучеренко АО «НИЦ «Строительство» в виде методик расчета на волновые сейсмические воздействия, рекомендаций по проектированию уникальных объектов, требующих специальных технических условий, математических моделей пространственного сейсмического движения. Расчетные методики по определению моделей сейсмического движения грунта и параметров волнового сейсмического воздействия применялись при научном сопровождении: проекта Многофункционального гостиничного комплекса 5 звезд Ойстер Гранд отель энд СПА в станице Благовещенской, г. Анапа; проекта Российского Международного Олимпийского Университета и Многофункционального гостинично-рекреационного комплекса в г. Сочи, проекта Аэропорта в г. Симферополь и других объектов, расположенных в сейсмических зонах.

Результаты работы Позняк Е.В. позволяют учесть влияние волнового характера сейсмического воздействия при проектировании ответственных зданий и сооружений и снизить их сейсмические риски, повысить качество и научный уровень проектирования сейсмостойких строительных конструкций.

Директор ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко,
НИЦ «Строительство», д.т.н., профессор

Ведяков И.И.

Заведующий лабораторией
автоматизации исследований и проектирования
сооружений ЦНИИСК им В. А. Кучеренко,
НИЦ «Строительство», к.т.н.

Жук Ю.Н.

СК6012

АО «НИЦ «СТРОИТЕЛЬСТВО»:
109428, Москва, 2-я Институтская ул. 6,
тел.: +7 (499) 170-1548; +7 (495) 602-0070;
факс: +7 (499) 171-2250
inf@cstroy.ru | www.cstroy.ru

ЦНИИСК ИМ. В. А. КУЧЕРЕНКО:
109428, Москва, 2-я Институтская ул. 6,
тел.: +7 (499) 171-2650,
факс: +7 (499) 170-1023, +7 (499) 171-2858;
dtsniisk@rambler.ru, tsnisk@rambler.ru | www.tsnisk.ru

ИНН 5042109739, КПП 504201001,
ОГРН 1095042005255
Юридический адрес: 141367,
Московская область, Сергиево-Посадский р-н
пос. Загорские Дали, дом 6-11



Адрес: Россия, 117393, Москва, ул. Архитектора Власова, 51
 Факт адрес: 109428, г. Москва, 2я Институтская ул., д. 6, стр. 1
 Тел. (499) 170-10-80, 170-10-84, 174-79-91

СПРАВКА

о практическом использовании результатов
 диссертации Позняк Елены Викторовны на тему
 «Развитие методов волновой теории сейсмостойкости строительных конструкций»,
 представляемой на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности
 05.23.17 – Строительная механика

Настоящим подтверждаем, что результаты диссертационной работы Позняк Елены Викторовны «Развитие методов волновой теории сейсмостойкости строительных конструкций», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук, были использованы при разработке специализированного программного обеспечения «ЕВРОСОФТ Одиссей». Указанное приложение к программному комплексу STARKON (разработчик ООО «ЕВРОСОФТ», г. Москва), предназначенному для выполнения прочностных расчетов и проектирования строительных конструкций, выполняет обработку акселерограмм и определяет параметры волнового сейсмического воздействия. В ПО «ЕВРОСОФТ Одиссей» реализованы алгоритмы определения спектральных коэффициентов динамичности ротационных компонент сейсмического воздействия с построением графиков в осях частот/периодов и расчетом общей огибающей, разработанные Позняк Е.В. и отраженные в её диссертации.

Внедрение методик, разработанных Позняк Е.В., дает возможность повысить качество выполнения прочностных расчетов при проектировании строительных конструкций путем учета угловых движений грунта при сейсмическом воздействии.

Главный инженер ООО «ЕВРОСОФТ», к.т.н.



В.Н. Симбиркин