

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет транспорта (МИИТ)»  
РУТ (МИИТ)

На правах рукописи



**Косауров Артем Петрович**

**МЕТОД ПАССИВНОГО МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ МОСТОВЫХ  
СООРУЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЛАБЫХ ПРИРОДНЫХ И  
ТЕХНОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

05.23.11 – Проектирование и строительство дорог, метрополитенов, аэродромов,  
мостов и транспортных тоннелей

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук, профессор  
**Курбацкий Евгений Николаевич**

Москва – 2018

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1 ПОСТОЯННЫЙ ПАССИВНЫЙ ВИБРАЦИОННЫЙ МОНИТОРИНГ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ .....	11
1.1. Общие замечания .....	11
1.2. Методы оценки технического состояния мостовых сооружений по данным пассивного и активного мониторингов.....	13
1.3. Положения современных нормативных документов, регулирующих проведение пассивного вибрационного мониторинга состояния мостов.....	17
1.4. Анализ мирового опыта применения активного и пассивного методов вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений .	20
1.5. Виды и степень повреждений мостовых сооружений, определяемые при проведении постоянного вибрационного пассивного мониторинга. ....	26
1.6. Основные подходы, применяемые при проведении постоянного пассивного мониторинга.....	27
1.7. Выводы .....	28
ГЛАВА 2 МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛАБЫХ ПРИРОДНЫХ И ТЕХНОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ..	31
2.1. Общие положения .....	31
2.2. Поперечные колебания балочного конечного элемента на упругом основании.....	32
2.2.1. Моделирование грунтового массива на боковой поверхности одиночной сваи .....	34
2.2.2. Определение значения коэффициента постели основания Винклера...	36

2.2.3. Система уравнений, описывающая поперечные колебания одиночной сваи .....	37
2.3. Продольные колебания балочного конечного элемента.....	43
2.3.1. Продольные колебания балки пролетного строения.....	44
2.4. Моделирование работы фундаментов опор мостов с использованием трехмерных конечных элементов.....	45
2.4.1. Трехмерный конечный элемент.....	47
2.5. Учет давления воды на боковую поверхность опор.....	58
2.6. Учет воздействия ветра на мостовое сооружение .....	60
2.7. Моделирование автомобильной нагрузки, действующей на мостовое сооружение при движении случайного автомобильного потока по проезжей части.....	62
2.8. Выводы .....	65
<b>ГЛАВА 3    ОЦЕНКА ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ ПО ДАННЫМ ПОСТОЯННОГО ПАССИВНОГО ВИБРАЦИОННОГО МОНИТОРИНГА .....</b>	<b>66</b>
3.1. Общие замечания .....	66
3.2. Уровень колебаний автомобильных мостов в случае действия слабых транспортных и ветровых нагрузок .....	67
3.3. Влияние годовых температурных изменений на точность определения модальных параметров мостовых сооружений.....	68
3.4. Определение значений модальных параметров мостовых сооружений при проведении пассивного вибрационного мониторинга .....	74
3.4.1. Определение значений модальных параметров мостовых сооружений с использованием свойств передаточных функций .....	75
3.5. Метод оценки технического состояния опор и опорных устройств моста с использованием свойств передаточных функций.....	88

3.5.1. Определение места и степени повреждения опор и опорных устройств моста .....	92
3.6. Выводы .....	95
ГЛАВА 4 ОЦЕНКА ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ ОБ ИХ КОЛЕБАНИЯХ ВО ВРЕМЯ СЛАБЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ .....	96
4.1. Общие замечания .....	96
4.2. Определение периода повторяемости слабых землетрясений в районе Керченского пролива .....	96
4.2.1. Определение пиковых значений колебания поверхности площадки строительства.....	104
4.3. Определение значений модальных параметров мостовых сооружений по данным об их колебаниях во время слабых землетрясений.....	111
4.4. Метод постоянного пассивного вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений .....	117
4.5. Выводы .....	122
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	123
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	125

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Из содержания программ развития автомобильных дорог, проводимых в последние годы правительствами отдельных областей РФ, по состоянию на начало 2016 г. до 40% мостовых сооружений на автомобильных дорогах отдельных регионов страны находятся в неудовлетворительном состоянии [20,21]. Также, согласно содержанию проекта, разрабатываемого правительством РФ, «Стратегия развития железнодорожного транспорта в Российской Федерации до 2030 года»: «На сети железных дорог ОАО «РЖД» эксплуатируется более 30 тыс. мостов, виадуков и путепроводов, из которых 45,2% построены еще в период 1861-1931 гг» [26]. Таким образом для мостового хозяйства России сохраняется общая негативная оценка состояния. Данная проблема характерна для большинства развитых стран, размеры мостового хозяйства которых не позволяют своевременно выявлять и устранять дефекты в конструкции. Одним из способов решения данной проблемы является переход от планового подхода к индивидуальному: обслуживание и ремонту каждого моста, на основе данных о его текущем состоянии и динамики изменения состояния в прошлом. При таком подходе, для достижения наилучшего результата, оценка технического состояния сооружения должна даваться с малой периодичностью, поэтому целесообразным является использование постоянной пассивной вибродиагностики технического состояния мостовых сооружений [141]. Данный вид мониторинга не требует применения специальных средств возбуждения колебаний сооружения, позволяет своевременно выявлять повреждения, рассчитать остаточный срок службы мостового сооружения, а также повысить безопасность его эксплуатации. Однако на сегодняшний день применение систем постоянного мониторинга в значительной степени ограничено, что обусловлено недостаточно проработанной нормативной базой, отсутствием методов, позволяющих точно определять место и степень повреждения моста, а также сложностью разработки подобных систем.

Таким образом разработка методов постоянного вибрационного пассивного мониторинга технического состояния мостовых сооружений является в настоящее время актуальной проблемой.

**Степень разработанности темы исследования.** Исследованиями в области постоянного вибрационного пассивного мониторинга сооружений занимались следующие авторы: Живаев А.А., Редченко В.П., Кадомцев М.И., Шатилов Ю.Ю., Голубова Т.А., Londono N.A., Neitzel F., Patel S.G., Kim C.W., Wenzel H., Reisharm P.H., Brownjohn J.M., Cury A., Omenzetter P., Lu K., Li Z.X., Chan T.H.T., Fujino Y., Ko J.M., Fu Y., De Wolf J.T. а также специалисты организации «Институт Гипростроймост-СПб».

Методы оценки состояния сооружений при проведении пассивного мониторинга, часто совпадают с теми, которые применяются при проведении активного мониторинга, с использованием специальных систем возбуждения конструкции. В связи с этим следует отметить также следующих авторов, занимавшихся исследованиями в области активного вибрационного мониторинга: Агафонов В.М., Донец Н.А., Цернант А.А., Звягинцева А.Н., Павлова Е.И., Казакевич М.И., Коргина М.А., Лазебник Г.Е., Савин С.Н., Демишин С.В., Ситников И.В., Лянин А.А., Mehmet C., Mufti A., Chowdhury F.H., Raihan M.T., Michael L., Matthias W., Andrea E., Pines D., Emin A., Sikorsky C., Rohrmann R.G., Benzoni G., Bonessio N., Brownjohn J.M., Doebling S.W., Farrar C.R., Ko J.M., Sun Z.G., Aktan A.E., Catbas F.N., Chang S.P., Lee J., Kim S., Tang J., Leu K., Fu Y., Wolf J.T., Mazurek D.F., DeWolf, J.T., Jang S.

На основании проведённого обзора и анализа литературных источников были сформулированы цель и задачи исследования.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационного исследования является разработка метода постоянной пассивной вибродиагностики технического состояния автомобильных мостов с использованием данных о колебаниях этих сооружений, вызванных случайными или регулярными слабыми воздействиями природного или техногенного характера.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **основные задачи исследования:**

- анализ нормативных документов, регулирующих проведение пассивного и активного вибрационных мониторингов сооружений;
- анализ и сравнение опыта применения прогрессивных методов пассивного мониторинга технического состояния мостовых сооружений;
- разработка метода мониторинга технического состояния мостовых сооружений по данным об их колебаниях под действием слабых природных и техногенных воздействий;
- разработка расчетной программы для моделирования работы мостовых сооружений под действием случайных или регулярных слабых воздействий природного или техногенного характера;
- исследование влияния температурных изменений и принятых допущений на точность оценки технического состояния мостовых сооружений;
- моделирование движения случайного автомобильного потока по мосту;
- исследование возможности применения данных о колебании мостовых сооружений под действием слабых землетрясений для проведения пассивного вибрационного мониторинга технического состояния конструкции.

В работе представлены результаты теоретических исследований, выполнен анализ и сравнение решений, полученных разными методами.

**Объект исследования.** Объектом исследования в диссертационной работе являются мостовые сооружения.

**Предмет исследования.** Предметом исследования в диссертационной работе являются методы постоянного пассивного мониторинга технического состояния мостовых сооружений.

**Научная новизна** результатов исследования, полученных автором диссертации, состоит в следующем:

1) предложен метод постоянного пассивного вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений с использованием данных об их

колебании под действием слабых природных и техногенных воздействий, отличающийся от существующих подходов тем, что позволяет выявить те элементы моста, техническое состояние которых следует определять с использованием индивидуальных датчиков для достижения требуемой точности;

2) исследована возможность проведения постоянного пассивного вибрационного мониторинга мостовых сооружений в случае использования данных об их колебаниях под действием слабых землетрясений;

3) разработан метод оценки технического состояния опор и опорных устройств мостов по данным о колебаниях этих сооружений под действием тормозной автомобильной нагрузки;

4) предложен метод учета влияния изменения температуры на модальные параметры мостовых сооружений при проведении постоянного пассивного вибрационного мониторинга их состояния;

5) разработаны методы построения балочных конечных элементов на двухпараметрическом упругом основании и трехмерных конечных элементов, с использованием теории разработанной д.т.н. Е.Н. Курбацким. Методы отличаются от существующих тем, что в них отсутствует необходимость использования нелогичного моделирования континуума и элементов конструкции моста, сосредоточенными массами и пружинами. На основе этих методов была разработана программа для определения динамических характеристик мостовых сооружений.

**Теоретическая значимость работы.** Результаты исследований позволяют:

- научно обосновывать применение данных о колебаниях мостов во время землетрясений для оценки технического состояния сооружений;

- моделировать колебания мостовых транспортных сооружений под действием случайных или регулярных слабых воздействий природного или техногенного характера.

**Практическая значимость работы.** Полученные результаты, выводы и предложения, изложенные в работе, могут быть использованы при проведении

постоянного пассивного мониторинга технического состояния мостовых сооружений Российской Федерации.

**Методология и методы исследований.** В работе использованы методы математической статистики, построение математических моделей рассматриваемых систем, их численный и аналитический анализ, сопоставление результатов, полученных разными методами.

**Положения, выносимые на защиту:**

- разработанный метод постоянного пассивного мониторинга мостовых сооружений с использованием данных об их колебании под действием слабых природных и техногенных воздействий;

- разработанный метод оценки технического состояния опор и опорных устройств транспортных мостовых сооружений при проведении постоянного пассивного вибрационного мониторинга;

- предложенные методы построения балочных и трехмерных конечных элементов;

- модель движения случайного автомобильного потока по мосту, позволяющая генерировать функции искусственных транспортных нагрузок на модели автомобильных мостов, с любым требуемым шагом дискретизации по времени;

- предложенный метод учета влияния температуры на модальные параметры сооружений при проведении постоянного пассивного вибрационного мониторинга мостовых сооружений;

- результаты исследования возможности применения данных о колебаниях мостовых сооружений под действием слабых землетрясений для проведения постоянного пассивного мониторинга.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью применения апробированных научных методов. В диссертации используются известные положения теории упругости и теории распространения волн, интегральное преобразование Фурье.

Достоверность исследований подтверждается достаточной сходимостью результатов, полученных с использованием численных методов с результатами более ранних исследований другими авторами. Разработанная модель движения случайного автомобильного потока по мосту базируется на данных отраслевой статистической информации.

Основные научные результаты докладывались:

- на заседании кафедры «Мосты и тоннели» РУТ (МИИТ);
- на второй международной научно-практической конференции «Инновационные технологии в образовании и науке» г. Чебоксары 10 сентября 2017;
- на всероссийской конференции с международным участием «Современное состояние, проблемы и перспективы развития отраслевой науки» г. Москва 19 декабря 2017.

**Публикации.** По результатам исследований опубликовано 7 печатных работ, в том числе 4 статьи – в рецензируемых ведущих научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения с изложением основных результатов и выводов, списка использованных источников из 153 наименований и содержит 140 страниц, 37 рисунков и 16 таблиц.

# ГЛАВА 1 ПОСТОЯННЫЙ ПАССИВНЫЙ ВИБРАЦИОННЫЙ МОНИТОРИНГ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ

## 1.1. Общие замечания

Для осуществления безопасной эксплуатации мостовых сооружений необходимо проводить проверку принятых на этапе проектирования допущений, учитывающих неполноту информации о параметрах моста и грунтового основания, а также учитывать текущее состояние конструкции. Данная проверка может быть осуществлена путем анализа реакции сооружения на воздействие, параметры которого близки к расчетному. Однако, в виду редкости подобных событий и их потенциальной опасности, предпочтительней заранее уточнить параметры сооружения, выявить изменения в его состоянии и скорректировать максимальные допускаемые реакции. До недавнего времени, для этого требовалось проводить визуальный осмотр, использовать специальные системы нагружения конструкции и проводить отбор образцов материалов [37,54,111,152]. Недостатками данных методов являются необходимость перекрытия движения, невозможность проведения постоянного мониторинга или его высокая стоимость [7].

Последние достижения в области беспроводных и компьютерных технологий, появление новых типов датчиков и снижение их себестоимости позволили осуществлять постоянный вибрационный пассивный мониторинг состояния сооружения, использующий данные о его колебаниях под действием случайных или регулярных слабых воздействий природного и техногенного характера [116]: ветровая, транспортная и слабая сейсмическая нагрузки, а также воздействие потока воды. Данный вид мониторинга лишен вышеназванных недостатков и, при условии установленных в достаточном количестве датчиков колебания, позволяет не только дать оценку технического состояния моста в любой

момент времени, но и скорректировать параметры принятой на этапе проектирования расчетной модели [122].

Многие страны в настоящий момент осуществляют на своей территории программы постоянного вибрационного мониторинга мостов на дорогах общего пользования. Среди таких программ можно выделить следующие: California strong motion instrumentation program (CSMIP), the United States geological survey (USGS), Network for earthquake engineering simulation (NEES), проекты, осуществляемые Centre for Structural Innovation and Monitoring Technologies Inc. (SIMTReC). Целью их проведения является решение следующих задач:

- 1) определение технического состояния мостовых сооружений;
- 2) обнаружение повреждений/неупругих деформаций в конструкции моста;
- 3) проверка принятой на этапе проектирования модели сооружения [152];
- 4) повышение качества проводимого комплекса работ по содержанию, обслуживанию и ремонту сооружения, а также снижение стоимости данных работ [111];
- 5) проверка положений нормативных документов;
- 6) исследование взаимодействия сооружения и основания;
- 7) оценка влияния изменения параметров окружающей среды на работу моста [152];
- 8) оценка влияния нелинейного поведения материала моста на его работу;
- 9) построение графика расчетного срока службы мостовых сооружений [54].

Оценка технического состояния мостовых сооружений является наиболее важной и в тоже время одной из самых сложных задач, решаемых при проведении вибрационного мониторинга мостов. В зависимости от требуемой информации, системы мониторинга состояния сооружений делятся на четыре категории сложности [122]:

- 1) базовая система способная зафиксировать факт наличия повреждений;
- 2) система может определить место повреждения;
- 3) система может определить серьезность повреждения;

- 4) система может определить уровень угрозы представляемой сооружением в случае его дальнейшей эксплуатации.

В зависимости от требуемой категории сложности системы мониторинга состояния сооружения, меняется как набор оборудования, так и методы анализа полученных данных. В настоящий момент наиболее часто используемыми являются системы первой и второй категорий, что обусловлено высокой сложностью более совершенных систем.

В общем случае методы вибродиагностики сооружений могут быть условно разделены, по типу источника возбуждения сооружения, на активные и пассивные. В первом случае, к конструкции прикладывается искусственная импульсная или гармоническая вибрационная нагрузки с использованием специального оборудования. Во втором случае специальная система нагружения конструкции не требуется, а в качестве нагружения используются случайные или регулярные фоновые воздействия природного или техногенного характера: транспортная нагрузка, воздействие ветра и воды, а также слабые землетрясения. В настоящее время использование пассивных методов вибродиагностики мостов получило широкое распространение в связи со сравнительно малой стоимостью проведения подобных испытаний и отсутствием необходимости перекрытия движения. В тоже время, практически все виды случайных фоновых воздействий природного и техногенного характера, носят нестационарный, неэргодический характер. Это означает, что пассивный вибрационный мониторинг состояния мостов требует значительного увеличения времени регистрации параметров колебания, а доверительная вероятность полученных результатов невелика [5].

## **1.2. Методы оценки технического состояния мостовых сооружений по данным пассивного и активного мониторингов**

В настоящее время существует множество методов оценки технического состояния мостового сооружения, с использованием данных об их колебаниях под действием динамических нагрузок. Среди этих методов можно выделить

модальные методы, предполагающие исследование динамических характеристик сооружения, и позволяющих осуществлять постоянный пассивный мониторинг. Они делятся на два типа:

1) Контроль изменения модальных параметров сооружения: собственных частот и форм колебания, коэффициентов демпфирования. Данная группа методов предполагает определение значений модальных параметров и дальнейшее их сравнение с эталонными значениями.

1.1) контроль изменения собственных частот сооружения. Значения могут быть определены следующим образом:

1.1.1) определение положения пиков на графиках спектров Фурье, спектрах мощности и графиках передаточных функций;

1.1.2) аппроксимация передаточной функции полиномиальной функцией [113,115]. Значения модальных параметров сооружения определяются с использованием параметров полученной полиномиальной функции [113]. Данный метод позволяет учесть влияние соседних форм колебания.

1.2) контроль изменения собственных форм колебания сооружения. Значения могут быть определены следующим образом:

1.2.1) определение значения собственных форм по мнимой части передаточной функции;

1.2.2) аппроксимация передаточной функции полиномиальной функцией.

1.3) контроль изменения модальных коэффициентов демпфирования сооружения. Значения могут быть определены следующим образом:

1.3.1) коэффициент демпфирования определяется, исходя из ширины полосы частот на уровне половинной мощности модуля передаточной функции на собственной частоте (Рисунок 1.1) (Уравнение 1.1);

$$\xi_r \approx \frac{f_{2,r} - f_{1,r}}{2f_r}, \quad (1.1)$$

где  $f_r$  - собственная частота;  $f_{2,r}, f_{1,r}$  - значения частот на уровне половинной мощности функции частотного отклика, что соответствует  $1/\sqrt{2}$  амплитуды.

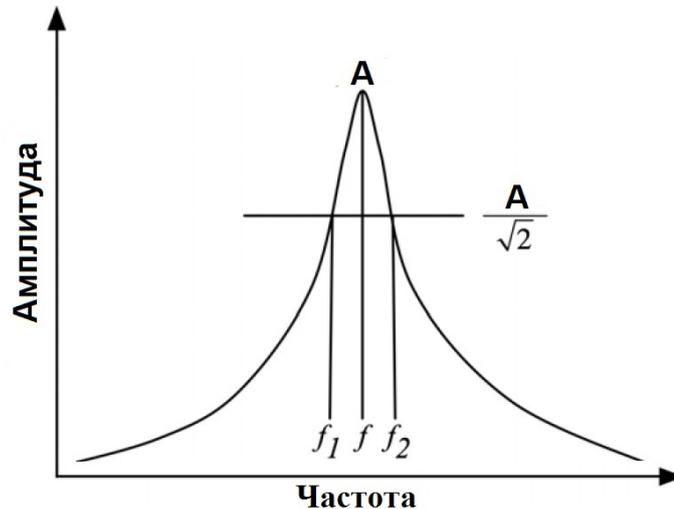


Рисунок 1.1 – График передаточной функции

1.3.2) аппроксимация передаточной функции полиномиальной функцией [113].

1.4) метод контроля изменения кривизны собственных форм колебаний сооружения [105] (Уравнение 1.2);

$$\phi_i'' = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2}, \quad (1.2)$$

где  $h$  - расстояние между точками « $i$ » и « $i+1$ »;  $\phi_i$  - значение собственной формы колебания сооружения в  $i$ -й точке.

Данный метод основан на предположении, что величина  $\phi_i''$  достигает максимума в месте повреждения элемента.

1.5) вейвлет-анализ. Метод позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала с течением времени [8].

2) Использование расчетной модели моста, для определения места и степени повреждения его элементов. Параметры модели корректируются в соответствии с модальными параметрами реального сооружения, определенными по результатам натурных измерений. Данная группа методов является значительно

более сложной в использовании и требует не только высокой квалификации инженера, но и точного определения модальных параметров сооружения.

2.1) контроль изменения элементов матрицы податливости (Уравнение 1.3);

$$[F] = [\phi] \left[ \frac{1}{\omega^2} \right] [\phi^T] \quad (1.3)$$

где  $\left[ \frac{1}{\omega^2} \right]$  - диагональная матрица обратной величины квадрата частоты.

2.2) Контроль изменения элементов матрицы жесткости;

2.3) Метод минимизации разности матрицы жесткости поврежденного и эталонного сооружения [29];

2.4) сравнение матриц чувствительности сооружения в эталонном и поврежденном состояниях;

2.5) контроль изменения элементов матрицы передаточных функций [95].

2.6) «stochastic Subspace Identification Method (SSI)». Данный метод, получивший широкое распространение в последнее время, позволяет, путем представления конечно-элементной модели сооружения в виде дискретной во времени модели пространства состояний, определить динамические параметры системы без необходимости определения функций вынуждающих сил.

Среди существующих методов оценки технического состояния сооружений следует также отметить методы индексов повреждения. Данные методы, несмотря на свою простоту, позволяют быстро дать оценку степени повреждения элементов сооружения и его общего состояния. При определении индексов повреждений могут применяться следующие параметры, характеризующие состояния сооружения:

- 1) величина деформаций (коэффициент равный отношению величины максимальных перемещений к величине перемещений при которых напряжения в элементе достигают предела текучести);
- 2) величина рассеиваемой элементом энергии;
- 3) комбинированные методы;

4) изменение модальных параметров (отношение значений модальных параметров сооружения до и после повреждения).

Также, в зависимости от учета или неучёта циклического нагружения сооружения, эти методы делятся соответственно на кумулятивные и некумулятивные методы.

Выбор того или иного метода оценки технического состояния сооружения определяется требуемым набором данных о состоянии сооружения: факт наличия повреждения, место повреждения, серьезность повреждения и опасность, представляемая поврежденным сооружением в случае дальнейшей эксплуатации. Вместе с тем следует учитывать, что чем более подробные данные о состоянии сооружения требуются, тем более сложные методы необходимо использовать, и тем выше должна быть точность измерения модальных параметров.

### **1.3. Положения современных нормативных документов, регулирующих проведение пассивного вибрационного мониторинга состояния мостов**

Несмотря на то, что мосты являются одними из самых сложных и важных сооружений в транспортной инфраструктуре любой страны, на сегодняшний день существует сравнительно небольшое число нормативных документов и руководств, регулирующих проведение постоянного пассивного вибрационного мониторинга их состояния [5,9,31,97,141,151]. Рассмотрим основные положения этих документов:

- непрерывный пассивный вибрационный мониторинг состояния моста проводится с целью выявления опасного состояния конструкции и определения ее параметров;
- мониторинг состояния моста должен проводиться с использованием данных о колебании вызванных различными источниками: движение транспорта, ветровая нагрузка, пешеходная нагрузка, водяной поток, ледовая нагрузка и т.д. [31];
- мониторинг должен включать в себя контроль состояния опорных устройств, и учитывать старение материалов моста;

- мониторинг моста рекомендуется проводить на этапе строительства с целью определения безопасности проведения строительных работ;
- максимальный уровень шума в измерениях и требуемые доверительные границы должны быть получены из анализа чувствительности к ошибкам;
- данные используемые для калибровки модели моста следует проверять на наличие шумов и систематических ошибок измерения;
- калибровка и дальнейшая проверка модели мостового сооружения должна проводиться двумя различными наборами данных;
- для подтверждения параметров расчетной модели моста и проведения дальнейшего мониторинга необходимо следующее:
  - учитывать влияние временных конструкция и дорожного покрытия;
  - скорректировать параметры демпфирования в расчетной модели после анализа данных мониторинга сооружения;
  - учитывать условия опирания;
  - определить собственные частоты колебания опоры и основания;
  - определить нелинейные параметры грунта;
  - использование данных о реакции сооружения на микросейсмическое воздействие может давать неточные результаты из-за малых амплитуд. В случае, если отношение мощностей сигнала и шума меньше 3, в расчет должны вводиться корректировки или вместо этого проводятся испытания моста принудительным возбуждением.
- влияние износа или повреждения на параметры конструкции обычно невелико, поэтому при проведении мониторинга следует также использовать местное возбуждение конструкции и феномен биения;
- использование микросейсмического воздействия в качестве источника возбуждения моста требует установки значительно большего числа датчиков, чем в случае других видов источников;

- для определения параметров конструкции инженер может проводить расчет во временной области или в области частот. В зависимости от поставленной задачи предпочтение отдается одному из следующих методов:
  - коэффициенты демпфирования следует определять во временной области;
  - в случае значительной нелинейности и амплитудной зависимости анализ проводится во временной области;
  - каждую форму колебаний следует рассматривать во временной области отдельно;
  - определение собственных частот колебания системы следует проводить в области частот с применением фильтров: низкочастотный, высокочастотный и полосовой;
  - в случае наличия сейсмоизоляторов в конструкции моста или проявления амплитудной зависимости в опорных устройствах собственные частоты изменяются вместе с амплитудой колебания. В этом случае необходимо проводить сравнение во временной области полученных во время мониторинга данных с одномодовыми данными.
- при оценке состояния сооружения следует учитывать следующие факторы:
  - погрешность в измерениях;
  - изменение параметров сооружения во времени;
  - расхождение между реальными и вычисленными параметрами сооружения.
- в случае определения общей реакции сооружения следует избегать установки датчиков на элементы конструкции чувствительные к местным вибрациям;
- при проведении мониторинга состояния моста во время слабого землетрясения необходимо вести запись колебаний основания и опоры моста для учета их взаимодействия. Мониторинг колебаний свободного поля следует вести на достаточном удалении от опор моста;
- мониторинг сооружения должен дополняться периодическими испытаниями принудительным возбуждением;

- в общем случае любая система мониторинга состояния сооружения должна дополняться системой контроля состояния окружающей среды: температура, влажность и т.д.

Исходя из проведенного обзора нормативных документов можно сделать вывод, что в настоящее время не существует единого общепринятого метода постоянного пассивного вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений.

#### **1.4. Анализ мирового опыта применения активного и пассивного методов вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений**

Определение наличия повреждений в конструкции моста, места повреждения и степени повреждения, являются одними из самых сложно-решаемых инженерных задач. Поэтому, несмотря на значительный прогресс в данной области, в настоящий момент не существует надежных методов, позволяющих давать оценку состояния любого моста [43]. Рассмотрим примеры успешного определения технического состояния мостов с использованием данных полученных во время пассивного и активного вибрационного мониторингов:

- Kato M., Shimada S. (1986) [37]. Тест импульсной нагрузкой железобетонного преднапрягаемого пролетного строения показал значительное изменение собственных частот колебания системы при нарастании нагрузки вплоть до критической. Коэффициенты демпфирования менялись слабо.
- Biswas M. (1990) [58]. Повреждение неразрезного двухпролетного моста моделировалось путем ослабления нескольких болтов соединения стальных балок пролетного строения. Изменения на спектрах Фурье функций колебания были малозаметны и не позволяли идентифицировать повреждения, поэтому вместо них использовались графики отношений спектров Фурье в целом и поврежденном состоянии. Значения собственных частот колебания конструкции изменились незначительно.

- Mazurek T.F., De Wolf J.T. (1990) [53]. Моделировалось повреждение двухпролетного моста: разрушение опорного устройства и распространение трещины в промежуточной опоре. В первом случае наблюдалось значительное изменение значений собственных частот и форм колебания, проявление новых форм колебания. Во втором случае произошла небольшая сдвигка собственных частот, величина которой нелинейно зависела от размеров трещины. Вместе с тем, трещина оказала значительное влияние на формы собственных колебаний.
- Tang J., Leu K. (1991) [127]. Согласно результатам проведенного исследования мостов, изменение форм собственных колебаний, является более точным показанием наличия повреждения чем изменение собственных частот. Для использования собственных частот система мониторинга должна улавливать изменения порядка одной сотой герца.
- Toksoy T., Aktan A.E. (1994) [131]. По результатам испытания 32-х метрового трехпролетного моста, авторы пришли к заключению, что отсутствие точной модели сооружения и основания, не позволяет проводить эффективный мониторинг состояния моста модальными методами.
- Farrar C.R., Jauregui D. (1996) [58]. Провели сравнение четырех методов обнаружения повреждений на конечно-элементной модели моста, на котором ранее проводились испытания вынужденным возбуждением с поэтапным разрезанием фланца балки пролетного строения. Были рассмотрены следующие методы: метод индекса повреждения, метод кривизны собственных форм колебания, метод контроля изменения матрицы гибкости, метод контроля изменения матрицы жесткости. Каждый из методов корректно определил место повреждения только в случае серьезных повреждений.
- Fu Y., De Wolf J.T. (2001) [138]. Провели эксперимент, показавший, что при низких температурах поворот опорных устройств ограничен и частота собственных колебаний моста значительно изменяется.
- Park S. (2001) [37]. Модальные параметры двухпролетного моста были использованы для определения места повреждения с использованием метода

индекса повреждения. Визуальный осмотр подтвердил хорошее совпадение с результатами расчета. Однако было отмечено, что внешние условия значительно влияют на точность эксперимента.

- Ко J.M. (2002) [58,84]. Разработана многоступенчатая система обнаружения повреждений для вантового моста в Гонконге, использующая модальные параметры, полученные системой мониторинга сооружения и точную трехмерную модель моста. На первом этапе использовалась автоассоциативная нейронная сеть сравнивавшая измеренные и эталонные собственные частоты. Целью второго этапа являлось определение поврежденного пролета. Для этого проводился анализ изменений кривизны собственных форм колебания и применялся метод модальной гибкости. Третий этап состоял из определения конкретного элемента с использованием многослойной нейронной сети. Результаты применения данной системы показали, что в связи с малой чувствительностью моста к повреждениям степень ущерба может быть определена только в случае серьезных повреждений.
- Fujino Y. (2002) [37]. Показал, что такие источники вибрации как ветер и землетрясения включают широкий спектр частот и могут применяться для определения модальных параметров мостов. Вместе с тем, использование случайных вибраций осложняет определение значений высоких собственных частот, необходимых для обнаружения локальных повреждений, в следствии наличия шумов.
- Li Z.X., Chan T.H.T. (2006) [58]. Использовали модальные параметры для определения места повреждения стального балочного моста используя микросейсмическое воздействие. Данные полученные по окончании полевых испытаний позволили определить три первых собственных частоты моста. Кривизна форм колебания была определена численно с использованием кубической полиномиальной функции. Результат эксперимента показал хорошее совпадение реального места расположения повреждения с расчетным несмотря на ложные срабатывания.

- Cardini A.J., De Wolf J.T. (2009) [37]. Опубликовали результаты эксперимента, начатого в 1999 году с использованием различных типов датчиков, установленных на балочном мосту. Авторы указывают на высокую чувствительность сдвига нейтральной оси к наличию трещин и предложили использовать его в качестве нового индекса повреждения для железобетонных мостов.
- Benzoni G. (2013) [37]. Предложил метод сравнения потенциальной энергии отдельных мод сооружения в эталонном и поврежденном состояниях. Метод показал высокую точность определения места и характера повреждения.
- Донец Н.А. (2013) [8]. На примере металлической балки и катящегося по ней стального шара показал возможность определения наличия множественных повреждений путем записи колебания движущегося транспортного средства, и дальнейшего вычисления показателей Гёльдера. Сравнение данных показателей, полученных для балки в ее эталонном и текущем состояниях, позволило не только определить факт наличия повреждения, но и место повреждения.
- Ge-Wei Chen (2015) [45]. Проведено сравнение расчетных собственных частот и форм колебания многопролетного балочного железобетонного моста с коробчатым сечением с реальными для нескольких сценариев повреждения. Жесткость середины главного пролета была снижена на 20% и 50%. Отмечено что данное повреждение оказывает различное влияние на собственные частоты: от незначительного до сдвига на 50%.

Проведенный анализ показал, что наиболее часто используемым методом оценки технического состояния мостов, является контроль изменения модальных параметров сооружения. Это объясняется простотой требуемых измерений и расчетов, что в свою очередь позволяет использовать простые системы вибрационного мониторинга и осуществлять частые измерения без необходимости проведения сложных расчетов. Последнее важно, в связи с малой достоверной вероятностью результатов пассивного мониторинга и влиянием температурных

изменений на модальные параметры моста. Вместе с тем, такой подход не позволяет реализовать систему мониторинга, категория сложности которой выше первой и потому в настоящее время разрабатываются новые методы.

Важно заметить, что, и в нормативных документах, и в научных работах других исследователей отмечается необходимость учета температурных изменений при проведении вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений. На рисунках 1.2-1.4 показано как изменение температуры влияет на собственные частоты мостовых сооружений [90,91]. Изменение модальных параметров моста в зависимости от температуры объясняется изменением модуля упругости и коэффициента демпфирования материалов моста [75,101], а также изменением параметров грунта, слагающего грунтовое основание опор моста.

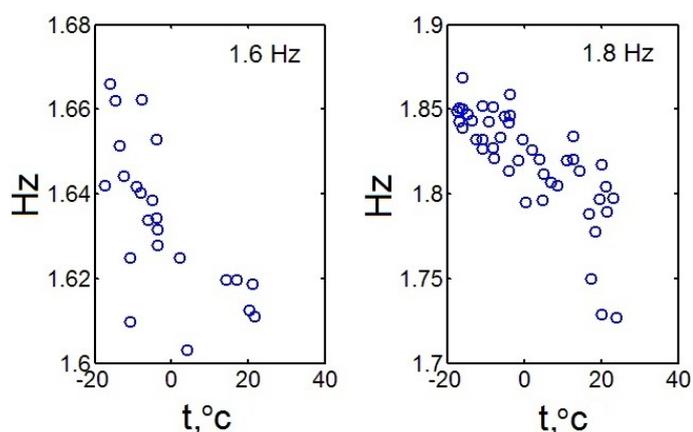


Рисунок 1.2 – График зависимости собственной частоты колебания железобетонного балочного моста Конфедерации, Канада от температуры [91]

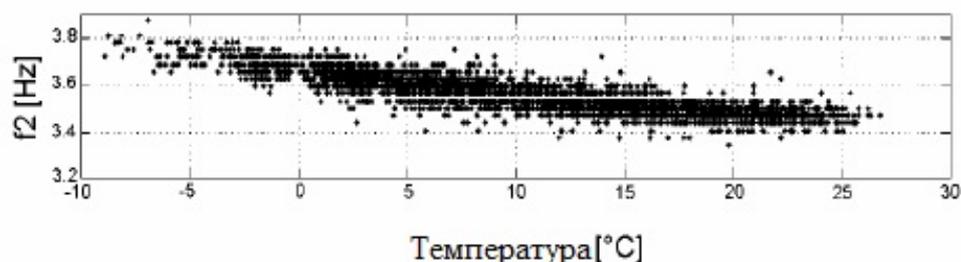


Рисунок 1.3 – График зависимости собственной частоты колебания железобетонного балочного моста Westend Bridge, Германия от температуры [90]

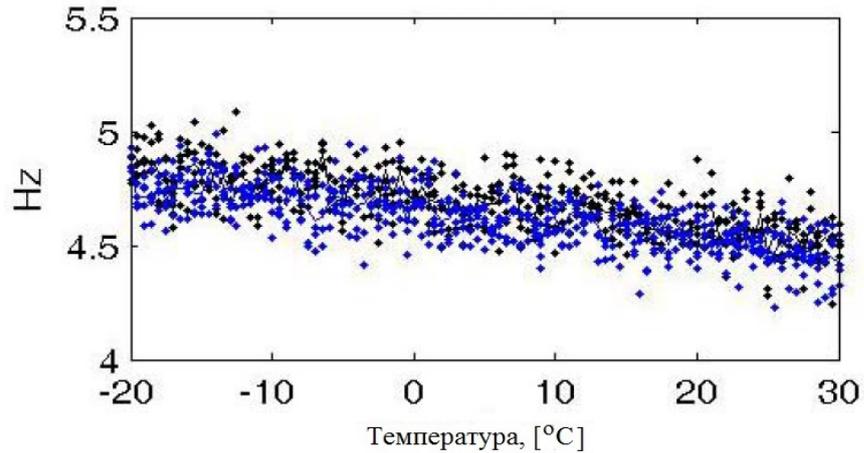


Рисунок 1.4 – График зависимости собственной частоты колебания сталежелезобетонного балочного моста Gaertnerplatz Bridge, Германия от температуры [90]

Также следует отметить возможность скачкообразного изменения значения модальных параметров сооружений при температуре близкой к  $0^{\circ}$  (Рисунок 1.5) [101]. Такое изменение объясняется замерзанием грунта основания и нелинейным поведением материалов опорных устройств.

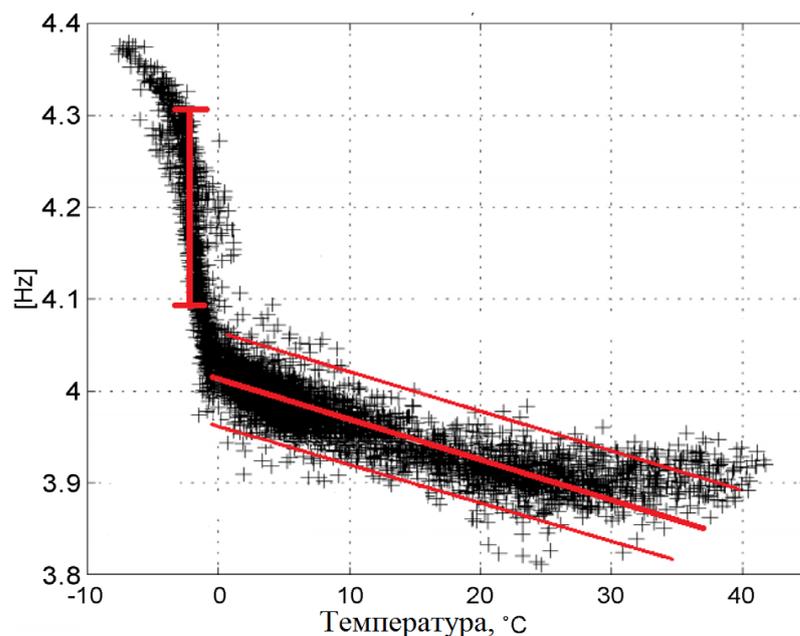


Рисунок 1.5 – График зависимости значения собственной частоты колебания железобетонного преднапряженного моста Z24, Швейцария от температуры [101]

### **1.5. Виды и степень повреждений мостовых сооружений, определяемые при проведении постоянного вибрационного пассивного мониторинга.**

При проведении постоянного пассивного вибрационного мониторинга мостовых сооружений, оценка их технического состояния обычно даётся на основании сравнения текущих значений параметров, характеризующих состояние конструкции, и эталонных. В большинстве случаев за эталонные значения принимаются, те, которые были получены на ранних этапах проведения мониторинга, или после ремонта сооружения. Таким образом, в случае использования данного вида мониторинга, определение наличия дефектов конструкции, обусловленных конструктивными ошибками при строительстве [9], невозможно.

Применяемые в настоящее время методы оценки технического состояния сооружений, разработанные на основе предположения о влиянии повреждений сооружения на его модальные параметры, в большинстве случаев предполагают использование данных о колебаниях конструкции в линейной стадии, когда изменением ее модальных параметров вследствие нелинейного поведения материалов и геометрической нелинейности конструкции можно пренебречь. Таким образом использование только пассивного вибрационного мониторинга делает своевременное обнаружение серьезных повреждений невозможным.

Рассмотрим основные возможные причины возникновения повреждений и дефектов мостовых сооружений [7]:

- 1) сейсмические воздействия;
- 2) естественное старение материалов моста;
- 3) размывание грунта у опор моста [82];
- 4) человеческий фактор при управлении транспортом;
- 5) некачественное содержание и эксплуатация сооружения;
- 6) конструктивно-технологические ошибки.

Особый интерес среди перечисленных причин повреждений мостовых сооружений представляют те из них, которые могут привести к появлению малозаметных (при

проведении обследования), но потенциально-опасных повреждений. К таким причинам можно отнести следующие: землетрясения, разжижение грунта и размывание грунта вокруг опор моста (местный размыв). Повреждения, порождаемые подобными воздействиями и явлениями (повреждение фундаментов опор, повышение гибкости опор), могут оказывать слабое влияние на работу сооружения и долгое время оставаться необнаруженными, снижая при этом расчетную несущую способность сооружения. Вместе с тем, такие повреждения неизбежно оказывают влияние на динамические характеристики сооружений и, следовательно, могут быть обнаружены при проведении постоянного пассивного вибрационного мониторинга.

### **1.6. Основные подходы, применяемые при проведении постоянного пассивного мониторинга**

На основании проведенного ранее в данной главе анализа нормативных документов и обзора литературы автором было выделено три основных возможных подхода при проведении постоянного пассивного мониторинга мостовых сооружений:

Тип 1. Осуществляется мониторинг состояния наиболее вероятных участков повреждения сооружения [147] с использованием таких датчиков как: тензометры, датчики деформаций, волоконно-оптические тензодатчики и акселерометры. Данный подход позволяет повысить точность системы мониторинга, но в тоже время значительно ее усложняет.

Тип 2. Осуществляется мониторинг общего состояния сооружения с использованием модальных и немодальных методов: контроль изменения модальных параметров сооружения, контроль изменения элементов матрицы жесткости или гибкости, отслеживание положения нейтральной оси балки пролетного строения. Основными типами датчиков являются акселерометры и сейсмометры.

Тип 3. Осуществляется мониторинг максимальных реакций сооружения и проводится их сравнение с предельно-допустимыми значениями. Основными типами датчиков являются акселерометры, сейсмометры, датчики относительных деформаций.

В таблице 1.1 представлены основные недостатки данных трех подходов.

Таблица 1.1 – Недостатки трех основных подходов при проведении мониторинга мостовых сооружений.

Недостатки	Тип мониторинга		
	Первый	Второй	Третий
Высокая стоимость системы мониторинга	+	-	-
Высокая сложность системы мониторинга	+	-	-
Сложность обслуживания системы мониторинга	+	+/-	-
Высокая сложность методов оценки состояния моста	+/-	+/-	-
Невозможность оценки состояния сооружения в случае его нелинейной работы	-	+	+/-
Невозможность точного определения места и серьезности повреждения.	-	+	+
Невозможность регистрации потенциально опасного состояния сооружения непосредственно в момент его возникновения.	-	+	-
Определение наличия повреждений невозможно	-	-	+
Оценка общего технического состояния мостового сооружения затруднительна	+	-	+

## 1.7. Выводы

1. Основным недостатком постоянного пассивного вибрационного мониторинга является необходимость использования данных о колебании сооружения под действием слабых природных и техногенных воздействий и, как следствие, невозможность определения функций внешних силовых воздействий. Такой подход значительно снижает достоверность результатов, в следствии чего

возникает необходимость в использовании датчиков контроля состояния отдельных элементов моста, а также требует увеличения продолжительности и числа необходимых измерений.

2. Преимуществом постоянного пассивного вибрационного мониторинга является возможность учета изменения динамических характеристик сооружения в следствие температурных колебаний, что затруднительно при осуществлении активного мониторинга.

3. Постоянный пассивный вибрационный мониторинг позволяет выявлять повреждения, оказывающие малое влияние на работу конструкции при эксплуатационных нагрузках, но снижающие ее несущую способность.

4. Проведение вибрационного мониторинга затруднительно без использования расчетной модели наблюдаемого моста.

5. При проведении постоянного вибрационного мониторинга сооружения следует комбинировать методы оценки его технического состояния.

6. На основании проведенного обзора выделены следующие основные этапы проведения постоянного пассивного вибрационного мониторинга мостовых сооружений:

А. Подготовительный этап, включающий в себя:

- а. выбор подхода при проведении мониторинга: наиболее вероятные участки повреждения, общее состояние сооружения и превышение предельно допустимых значений;
- б. выбор метода мониторинга: модальные или немодальные методы;
- в. выбор определяемых параметров, характеризующих состояние сооружения или его отдельного элемента;
- г. выбор метода определения динамических характеристик сооружения, для случая выбора модальных методов мониторинга;
- д. выбор типа и числа датчиков, места их установки;
- е. выбор параметров записываемой информации;
- ж. выбор частоты проводимых измерений;
- з. создание расчетной модели сооружения;

- и. определение предельно допустимых значений измеряемых параметров.
- Б. Проведение измерений и обработка полученных данных:
- а. проводятся периодические измерения параметров, выбранных на подготовительном этапе;
  - б. производится обработка полученной информации в соответствии с ее типом и выбранным методом ее анализа.
- В. Анализ полученных данных:
- а. сравниваются полученные значения измерений с предельно допустимыми для данного сооружения;
  - б. корректируется математическая модель сооружения в случае достижения предельно допустимых значений измеряемых параметров;
  - в. определяется место и степень возможного повреждения сооружения;
  - г. делается заключение о возможности или невозможности дальнейшей эксплуатации сооружения, необходимости проведения ремонтных работ, корректируется остаточный срок службы сооружения.

## **ГЛАВА 2 МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛАБЫХ ПРИРОДНЫХ И ТЕХНОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

### **2.1. Общие положения**

Проведение пассивного вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений затруднительно без использования их расчетных моделей. Такие модели позволяют не только установить место и степень повреждения сооружения, но и провести исследование влияния внешних факторов и принятых допущений на точность результатов проводимого мониторинга.

Моделирование работы мостового сооружения, колеблющегося под действием слабых искусственных природных и техногенных воздействий, предполагает учет взаимодействия каждого элемента сооружения: балка пролетного строения, опорные части, промежуточные опоры, их фундаменты, устои и грунтовый массив. Поскольку аналитическое решение такой задачи не представляется возможным, то следует использовать метод конечных элементов.

В зависимости от параметров элемента мостового сооружения и характера его работы и взаимодействия с другими элементами системы, для его моделирования могут быть использованы одномерные, двухмерные или трехмерные конечные элементы. Так, в случае моделирования работы одиночной сваи, промежуточной опоры и балки пролетного строения, их удобно представить в виде одномерной балки, в то время как свайный фундамент, состоящий из нескольких близко расположенных рядов свай, предпочтительней моделировать с использованием трехмерных конечных элементов.

## 2.2. Поперечные колебания балочного конечного элемента на упругом основании

Получим систему уравнений поперечных колебаний балочного конечного элемента, моделирующего работу одиночной сваи (Рисунок 2.1), а также тела опоры или балки пролетного строения в случае, если принять параметры характеризующие грунтовое основание равными нулю.

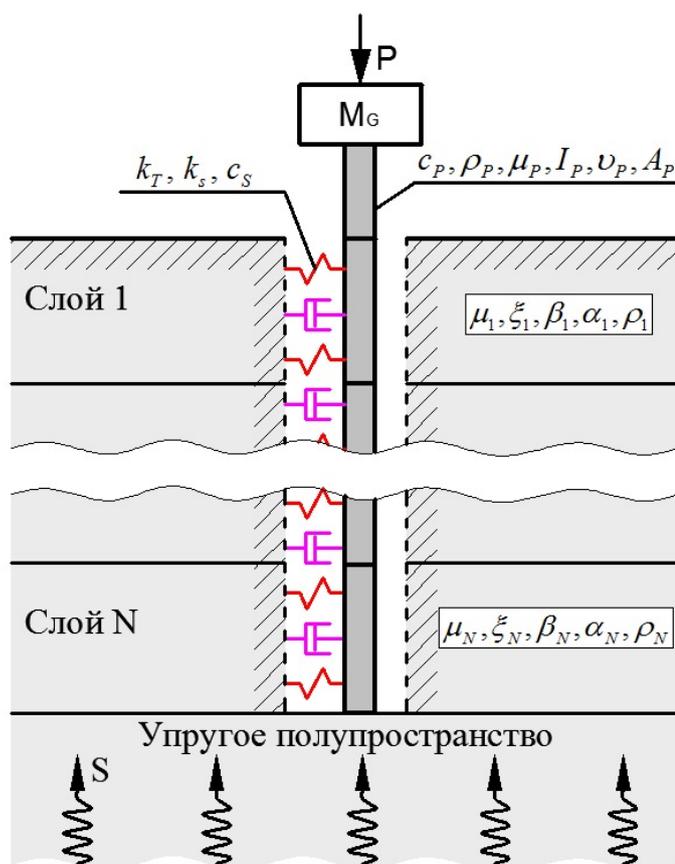


Рисунок 2.1 – Расчетная модель сваи на сплошном упругом основании с учетом демпфирования грунта

Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением колебания балки Эйлера-Бернулли с поправкой Рэля, учитывающей влияние сил инерции, соответствующих повороту сечений:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - mr^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} = p(z, t), \quad (2.1)$$

где  $u$  - перемещение балки;  $m$ ,  $E$ ,  $\mu$  - погонная масса и модули упругости при растяжении и сдвиге материала балки;  $I$ ,  $A$  - момент инерции поперечного сечения балки и площадь поперечного сечения балки;  $p(z, t)$  - функция внешней силы;  $r = \sqrt{I/A}$  - радиус инерции поперечного сечения балки;  $c_p$  - вязкое демпфирование материала балки.

Для определения напряженно-деформированного состояния балки на упругом основании с использованием уравнения (2.1) необходимо дополнительно учесть влияние демпфирования ее материала и осевую нагрузку (Рисунок 2.2).

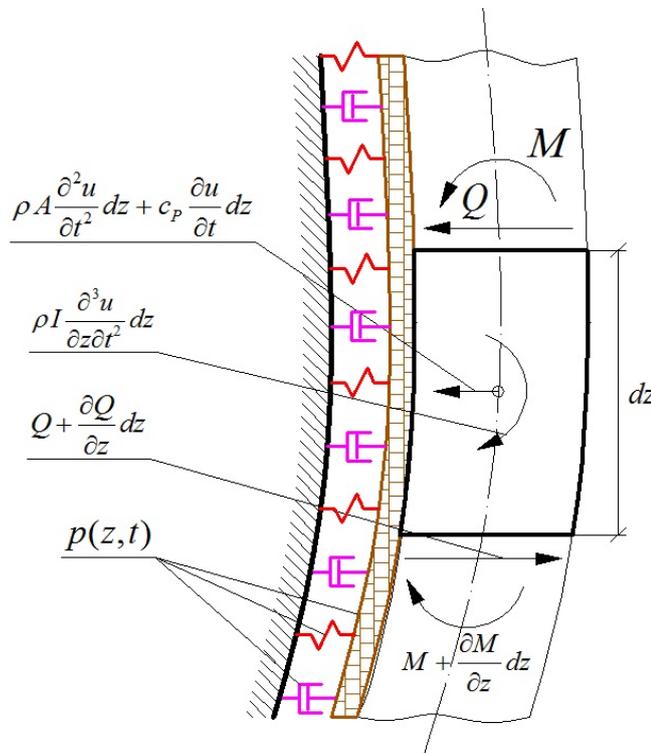


Рисунок 2.2 – Схема балочного конечного элемента на двухпараметрическом упругом основании

Тогда дифференциальное уравнение (2.1) принимает окончательный вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial u}{\partial z} \left[ P \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial z} \left[ \rho I \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} \right] = p(z, t), \quad (2.2)$$

где  $p(z, t)$  - внешняя распределенная нагрузка;  $P$  - осевая нагрузка;  $c_p$  - коэффициент вязкого демпфирования материала сваи.

### 2.2.1. Моделирование грунтового массива на боковой поверхности одиночной сваи

При определении напряженно-деформированного состояния одиночной сваи с использованием уравнения (2.2) необходимо дополнительно учитывать деформации грунта в зоне контакта (Рисунок 2.2). Существует два классических метода моделирования грунта: упругое полупространство и модель основания, предложенная Винклером в 1867 г. [71] (Уравнение 2.3).

$$p(z,t) = k_s \cdot u_g(z,t) = n_h z \cdot u_g(z,t), \quad (2.3)$$

где  $k_s = \frac{q}{\delta} = n_h z$  – коэффициента постели;  $q$  – распределенная нагрузка;  $\delta$  – осадка грунта;  $n_h = N_h \gamma_h$  – эмпирический коэффициент учета влияния глубины на коэффициент «к» [133];  $\gamma_h$  – расчетная объемная масса;  $N_h$  – безразмерный коэффициент.

Одним из главных отличий этих двух подходов, является то, как в них распределяется давление на границе контакта. В моделях на основе Винклеровой теории основание заменено одинаковыми, независимыми, близко расположенными упругими пружинами, закрепленными на жестком слое. Однако эти модели не учитывают непрерывность деформаций (Рисунок 2.3) и инерционных свойств грунта [17,59], что во многих случаях является недопустимым.



Рисунок 2.3 – а) модель Винклера

б) модель, учитывающая непрерывность деформаций

Как было отмечено в [23] модель Винклера «... лучше отображает действительность в случаях илистых, торфяных грунтов и мелкозернистых водонасыщенных песков». В случае использования модели упругого полупространства, распределительные способности наоборот могут быть сильно завышены [4] и как отмечается в [22] «... в малосвязных или совсем несвязных грунтах распределение напряжений ... совершенно не отвечает теории упругого полупространства». В общем случае оба этих подхода не дают точного результата [59].

Для учета непрерывности деформации грунта, в случае использования модели основания Винклера, были предложены другие модели, уточняющие ее. Существует целый ряд моделей основания, в которых, для более точного учета непрерывности деформаций, добавляется промежуточное звено между упругим основанием и балкой [56,128]. Этим звеном может быть дополнительная балка (модель Хетеньи) (Рисунок 2.4), пластина (двумерный расчет), слой работающий только на сдвиг [22], нерастяжимая преднапряженная нить (ламинарная модель, модель Филоненко-Бородича).

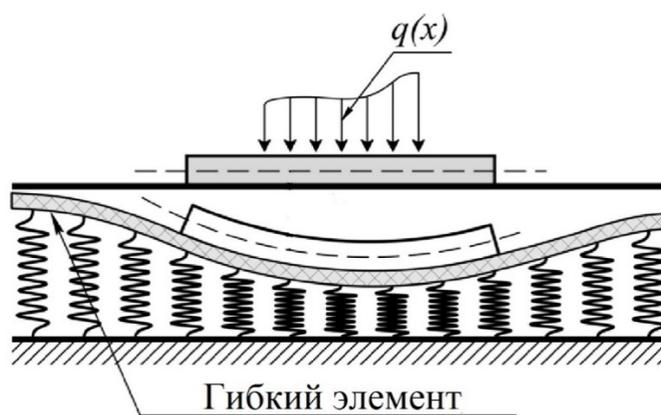


Рисунок 2.4 – Модель упругого основания, учитывающая непрерывность деформаций с использованием дополнительного гибкого элемента

Перечисленные модели называют двухпараметрическим, поскольку в них вводится параметр, характеризующий дополнительный элемент. К числу двухпараметрических моделей также относится модель Власова-Леонтьева [2,78],

в которой авторы ввели дополнительный параметр  $\gamma$ , зависящий от типа грунта и толщины слоя. Однако ими не было указано как определить данный параметр, и, уже в дальнейшем, такие авторы как Vallabhan, Straughan, Das Y.C. (1991), Vallabhan и Daloglu A. (1999) предложили методы для его нахождения [68].

Поскольку многие двухпараметрические модели, несмотря на разную трактовку вторыми параметрами их авторами, можно привести к модели Винклера исключая соответствующий параметр, то в данной работе используется классическое дифференциальное уравнение деформации поверхности грунта [92]:

$$k_s b \cdot u_g(z, t) - k_T b \frac{\partial^2 u_g(z, t)}{\partial z^2} = p(z, t), \quad (2.4)$$

где  $u_g$  - деформация свободного поля;  $b$  - ширина деформированной зоны упругого основания;  $k_T$  - коэффициента постели для учета непрерывности деформаций.

### 2.2.2. Определение значения коэффициента постели основания Винклера

В случае использования модели Винклера возникает необходимость определения коэффициента постели. В общем случае, для этого необходимо определить величину деформации грунта под действием приложенной нагрузки. Однако были предложены формулы для более простого его вычисления [69,94,118,129]:

1. Био (1937):

$$k_s = \frac{0.95 E_s}{B(1-\nu_s^2)} \cdot \left[ \frac{E_s B^4}{(1-\nu_s^2) E_b I_b} \right]^{0.108}, \quad (2.5)$$

где  $E_s$  - модуль упругости грунта;  $B$  - ширина балки;  $E_b I_b$  - изгибная жесткость балки.

2. Весик (1961):

$$k_s = \frac{0.65 \cdot E_s}{B(1-\nu_s^2)} \cdot \sqrt[12]{\frac{E_s B^4}{E_b I_b}}, \quad (2.6)$$

где  $\nu_s$  - коэффициент Пуассона грунта.

3. Боулес (1998):

$$k_s = \frac{E_s}{B_1(1-\nu_s^2)mI_S I_F}, \quad (2.7)$$

где  $B_1$  - размер плиты в испытании нагружением плиты (PLD);  $I_S, I_F$  - коэффициенты зависящие от формы опоры;  $m$  - коэффициент зависящий от точки опоры.

Использование данных формул (Уравнения 2.5-2.7) обоснованно только в том случае, когда значение деформаций и напряжений в грунте не велико. Иначе, как и в случае с другими материалами, зависимость несущей способности грунта от деформаций перестает быть линейной [69].

В случае использования двухпараметрической модели необходимо дополнительно вычислить второй параметр  $k_T$ , характеризующий распределительные способности упругого основания [22]:

$$k_T = \frac{E_s^2}{6k_s(1-\nu_s)(1-\nu_s^2)} \quad (2.8)$$

### 2.2.3. Система уравнений, описывающая поперечные колебания одиночной сваи

Запишем уравнение для определения значения  $p(z, t)$  в уравнении (2.2) с учетом вязкого демпфирования в грунте:

$$p(z, t) = k_s b \cdot u(z, t) - k_T b \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + c_s b \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}, \quad (2.9)$$

где  $c_s$  - коэффициент вязкого демпфирования грунта.

Поскольку уравнение (2.9) предназначено для определения реакции поверхности грунта под действием распределенной нагрузки, без учета перемещения свободного поля, то, для случая колебания массива грунта, необходимо учесть относительные деформации (Рисунок 2.5) [94]:

$$u_R = u_g - u, \quad (2.10)$$

где  $u_g$  - деформация свободного поля;  $u$  - деформация сваи.

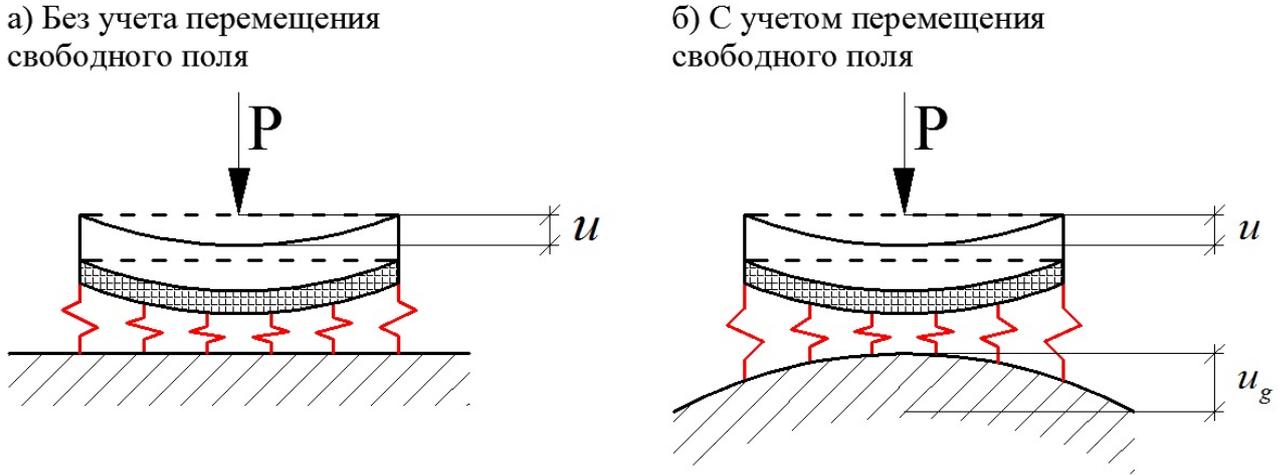


Рисунок 2.5 – Схема деформации системы балка-грунт

Деформация пружин, моделирующих грунт, зависит от разности деформации балки и свободного поля, в то время как деформация слоя, работающего только на сдвиг равна деформации балки. Таким образом уравнение (2.9) принимает следующий вид:

$$p(z,t) = k_s b \cdot u_R(z,t) - k_T b \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + c_s b \frac{\partial u_R(z,t)}{\partial t} \quad (2.11)$$

Поскольку слой, работающий на сдвиг, продолжается и после нижнего конца сваи в нижележащих слоях грунта (Рисунок 2.6), то в граничных условиях необходимо учесть дополнительную поперечную силу.

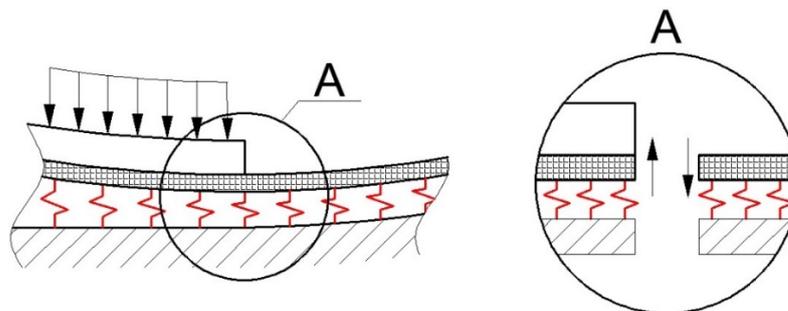


Рисунок 2.6 – Схема для определения граничных условий на конце сваи

Следует, однако, заметить, что данная поправка незначительно повлияет на напряженно-деформированное состояние сваи, поскольку ее конец обычно находится в сравнительно крепких грунтах на значительном удалении от поверхности. В таких условиях величина относительных перемещений конца сваи, даже без учета этой поправки, пренебрежимо мала и, следовательно, деформациями нижележащих грунтов можно пренебречь.

При расчете свайного основания необходимо учитывать непрерывность деформаций не только в продольном направлении, но и в поперечном [22]. Тогда дифференциальное уравнение (2.11) принимает следующий вид:

$$p(z,t) = k_{s_2}b \cdot u_R(z,t) - k_Tb \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + c_Sb \frac{\partial u_R(z,t)}{\partial t}, \quad (2.12)$$

где  $k_{s_2} = k_S \left[ 1 + \frac{\sqrt{k_t}}{b\sqrt{k_s}} \right]$ .

Для того, чтобы учесть гистерезисный характер демпфирования грунта, примем в уравнении (2.12)  $c_S = \frac{k_{s_2}\xi_S}{\omega}$ :

$$p(z,t) = k_{s_2}b \cdot u_R(z,t) - k_Tb \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + b \frac{k_{s_2}\xi_S}{\omega} \frac{\partial u_R(z,t)}{\partial t} \quad (2.13)$$

Подставим полученное выражение для  $p(z,t)$  в уравнение (2.2):

$$EI \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} + [P - k_Tb] \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} - \rho I \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^2 \partial t^2} + b \frac{k_{s_2}\xi_S}{\omega} \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_P \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + k_{s_2}b \cdot u(z,t) = p_g(z,t) \quad (2.14)$$

где  $p_g(z,t) = k_{s_2}b \cdot u_g(z,t) + b \frac{k_{s_2}\xi_S}{\omega} \frac{\partial u_g(z,t)}{\partial t}$ .

Найдем изображение Фурье уравнения (2.14) по времени:

$$EI \frac{\partial^4 \tilde{u}(z,\omega)}{\partial z^4} + [P - k_Tb + \omega^2 \rho I] \frac{\partial^2 \tilde{u}(z,\omega)}{\partial z^2} + [bk_{s_2}^* - i\omega c_P - \omega^2 \rho A] \tilde{u}(z,\omega) = \tilde{p}_g(z,\omega) \quad (2.15)$$

где  $\tilde{p}_g(z, \omega) = bk_{s_2}^* \cdot \tilde{u}_g(z, \omega)$ ;  $k_{s_2}^* = k_{s_2}(1 - i\xi_s)$ .

Запишем функцию перемещения свободного поля  $\tilde{u}_g(z, \omega)$  в уравнении (2.15) с использованием финитных функций, считая, что она не меняется по длине конечного элемента:

$$\tilde{u}_g(z, \omega) = \frac{\tilde{u}_g(0, \omega) + \tilde{u}_g(h, \omega)}{2} [\theta(z) - \theta(z - h)], \quad (2.16)$$

где  $u_g(0, t)$ ,  $u_g(h, t)$  - значение перемещения грунта на границах слоя;  $h$  - мощность слоя.

Запишем прогиб сваи  $\tilde{u}(z, \omega)$  в уравнении (2.15) с использованием функции финитной на интервале  $[0, h]$ :

$$\tilde{U}(\omega, z) = \tilde{u}(\omega, z) [\theta(z) - \theta(z - h)] \quad (2.17)$$

Для дифференцирования уравнения (2.17) воспользуемся следующей формулой:

$$\tilde{U}^{(N)}(z, \omega) = \sum_{n=0}^N \tilde{u}^{(N-n)}(z, \omega) \cdot [\theta(z) - \theta(z - h)]^{(n)}, \quad (2.18)$$

где  $N$  - порядок производной.

Тогда уравнение (2.15) примет вид:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 \tilde{U}(z, \omega)}{\partial z^4} + s_1 \frac{\partial^2 \tilde{U}(z, \omega)}{\partial z^2} + s_2 \cdot \tilde{U}(z, \omega) = \\ = \tilde{p}_g(z, \omega) + EI \sum_{n=0}^4 \tilde{u}^{(4-n)}(z, \omega) \cdot [\theta(z) - \theta(z - h)]^{(n)} + \\ + s_1 \sum_{n=0}^2 \tilde{u}^{(2-n)}(z, \omega) \cdot [\theta(z) - \theta(z - h)]^{(n)} + s_2 \cdot \tilde{u}(z, \omega) \cdot [\theta(z) - \theta(z - h)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $s_1 = P - k_T b + \omega^2 \rho I$ ;  $s_2 = bk_{s_2}^* - i\omega c_p - \omega^2 \rho A$ .

Для удобства дальнейших вычислений воспользуемся следующей зависимостью:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N \tilde{u}^{(N-n)}(z, \omega) \cdot [\theta(z) - \theta(z - h)]^{(n)} e^{ivz} dz = \\ = \sum_{n=1}^N (-iv)^{n-1} \cdot [\tilde{u}^{(N-n)}(0, \omega) - \tilde{u}^{(N-n)}(h, \omega) \cdot e^{ivh}] + \int_0^{h_j} \tilde{u}^{(N)}(z, \omega) e^{ivz} dz \end{aligned} \quad (2.20)$$

Найдем изображение Фурье по пространственной переменной уравнения (2.19):

$$\begin{aligned}
& \left[ v^4 EI - v^2 s_1 + s_2 \right] \cdot \tilde{U}(v, \omega) = \\
& = \tilde{p}_g(v, \omega) + EI \cdot \sum_{n=1}^4 (-iv)^{n-1} \cdot \left[ \tilde{u}^{(4-n)}(0, \omega) - \tilde{u}^{(4-n)}(h, \omega) \cdot e^{ivh} \right] + \\
& + s_1 \sum_{n=1}^2 (-iv)^{n-1} \cdot \left[ \tilde{u}^{(2-n)}(0, \omega) - \tilde{u}^{(2-n)}(h, \omega) \cdot e^{ivh} \right]
\end{aligned} \quad (2.21)$$

Запишем уравнения для определения изображения Фурье по времени функций изгибающего момента и поперечной силы в балке:

$$\tilde{M}(z, \omega) = -EI \frac{\partial^2 \tilde{u}(z, \omega)}{\partial z^2}, \quad (2.22)$$

$$\tilde{Q}(z, \omega) = -EI \frac{\partial^3 \tilde{u}(z, \omega)}{\partial z^3} - [\omega^2 \rho I + P] \frac{\partial \tilde{u}(z, \omega)}{\partial z} \quad (2.23)$$

Подставляя уравнения (2.22) и (2.23) в уравнение (2.21) получим уравнение поперечных колебаний  $j$ -го конечного элемента сваи:

$$\left[ v^4 E_j I_j - v^2 s_{1,j} + s_{2,j} \right] \cdot \tilde{U}_j(v, \omega) = \tilde{p}_{g,j}(v, \omega) + \tilde{G}_j(v, \omega), \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_j(v, \omega) = & - \left[ \tilde{Q}_j(\omega) - \tilde{Q}_{j+1}(\omega) \cdot e^{ivh_j} \right] + iv \cdot \left[ \tilde{M}_j(\omega) - \tilde{M}_{j+1}(\omega) \cdot e^{ivh_j} \right] + \\
& + B_j \cdot \left[ \tilde{\varphi}_j(\omega) - \tilde{\varphi}_{j+1}(\omega) \cdot e^{ivh_j} \right] + C_j \cdot \left[ \tilde{u}_j(\omega) - \tilde{u}_{j+1}(\omega) \cdot e^{ivh_j} \right]
\end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\tilde{p}_{g,j}(\omega) = \frac{b_j k_{s2,j}^*}{2} \cdot \left[ \tilde{u}_{g,j}(\omega) + \tilde{u}_{g,j+1}(\omega) \right] \frac{e^{ivh_j} - 1}{iv}, \quad (2.26)$$

где  $j$  – номер конечного элемента сваи;  $B_j = -k_{T,j} b_j - v^2 E_j I_j$ ;

$$C = iv^3 E_j I_j - iv(P_j - k_{T,j} b_j + \omega^2 \rho_j I_j); \quad s_{1,j} = P_j - k_{T,j} b_j + \omega^2 \rho_j I_j;$$

$s_2 = b_j k_{s2,j}^* - i\omega c_{p,j} - \omega^2 \rho_j A_j$ ;  $\tilde{u}_j(\omega), \tilde{u}_{j+1}(\omega)$  – изображение Фурье функций

перемещений на границах  $j$ -го конечного элемента;  $\tilde{\varphi}_j(\omega), \tilde{\varphi}_{j+1}(\omega)$  – изображение

Фурье функций угла поворота на границах  $j$ -го конечного элемента;

$\tilde{M}_j(\omega), \tilde{M}_{j+1}(\omega)$  – изображение Фурье функций изгибающего момента на границах

$j$ -го конечного элемента;  $\tilde{Q}_j(\omega), \tilde{Q}_{j+1}(\omega)$  – изображение Фурье функций

поперечной силы на границах  $j$ -го конечного элемента.

Преобразуем уравнение (2.24):

$$\tilde{U}_j(v, \omega) = \frac{\tilde{p}_{g,j}(v, \omega) + \tilde{G}_j(v, \omega)}{E_j I_j \cdot v^4 - s_{1,j} \cdot v^2 + s_{2,j}} \quad (2.27)$$

Тогда, должны выполняться следующие условия [10,16]:

$$\begin{cases} \tilde{G}(v_1, \omega) = -\tilde{p}_{g,j}(v_1, \omega) \\ \tilde{G}(v_2, \omega) = -\tilde{p}_{g,j}(v_2, \omega), \\ \tilde{G}(v_3, \omega) = -\tilde{p}_{g,j}(v_3, \omega) \\ \tilde{G}(v_4, \omega) = -\tilde{p}_{g,j}(v_4, \omega) \end{cases} \quad (2.28)$$

где  $v_{1,2,3,4}$  - корни знаменателя в уравнении (2.27).

Знаменатель в уравнении (2.27) представляет собой биквадратное уравнение, корни которого могут быть найдены согласно следующему уравнению:

$$v_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{s_{1,j} \pm \sqrt{s_{1,j}^2 - 4E_j I_j \cdot s_{2,j}}}{2E_j I_j}} \quad (2.29)$$

Запишем систему уравнений для определения неизвестных на границах конечных элементов сваи в матричном виде [12]:

$$\begin{pmatrix} S_1 & -S_1 \cdot e^{i v h_j} & & & & & \\ & S_2 & -S_2 \cdot e^{i v h_j} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & S_N & -S_N \cdot e^{i v h_j} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_N \\ f_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\text{где } f_j = \begin{pmatrix} \tilde{u}_j \\ \tilde{\varphi}_j \\ \tilde{M}_j \\ \tilde{Q}_j \end{pmatrix}; \quad p_j = - \begin{pmatrix} \tilde{p}_{g,j}(v_1) \\ \tilde{p}_{g,j}(v_2) \\ \tilde{p}_{g,j}(v_3) \\ \tilde{p}_{g,j}(v_4) \end{pmatrix}; \quad S_j = \begin{pmatrix} C_j(v_1) & B_j(v_1) & i v_1 & -1 \\ C_j(v_2) & B_j(v_2) & i v_2 & -1 \\ C_j(v_3) & B_j(v_3) & i v_3 & -1 \\ C_j(v_4) & B_j(v_4) & i v_4 & -1 \end{pmatrix}; \quad N - \text{число конечных}$$

элементов.

Поскольку граничные условия на концах балки зависят от решаемой задачи, то в систему уравнений (2.30) они не включены и должны быть записаны дополнительно.



где  $v_j = \sqrt{\frac{m_j \omega^2 - k_{s,j}}{E_j A_j}}$ ;  $k_{s,j}$  - коэффициент, учитывающий контакт боковой поверхности  $j$ -го конечного элемента сваи с грунтом;  $m_j$  - погонная масса  $j$ -го участка сваи;  $E_j$  - модуль упругости;  $\tilde{u}_j(\omega)$  - изображение Фурье функции перемещения верхней границы элемента;  $\tilde{u}_{j+1}(\omega)$  - изображение Фурье функции перемещения нижней границы элемента;  $\tilde{\sigma}_j(\omega)$  - изображение Фурье функции нормальных напряжений на верхней границе элемента;  $\tilde{\sigma}_{j+1}(\omega)$  - изображение Фурье функции нормальных напряжений на нижней границе элемента;  $H_j$  - длина элемента,  $P_{N,2}$  - внешняя нагрузка.

### 2.3.1. Продольные колебания балки пролетного строения

Для учета контакта пролетного строения с опорами, обеспечиваемого посредством опорных устройств, следует учесть в системе уравнений (2.32) силу, возникающую в опорных устройствах на  $f$ -й опоре:

$$P_{bear,f} = k_f \cdot [u_{p,f}(t) - u_b(t)] + c_f \cdot [\dot{u}_{p,f}(t) - \dot{u}_b(t)] \quad (2.33)$$

где  $k_f$  - жесткость опорного устройства на  $f$ -ой опоре [24,44,48,150];  $c_f$  - коэффициент вязкого демпфирования опорного устройства на  $f$ -ой опоре;  $u_{p,f}(t)$  - смещение верха  $f$ -й опоры относительно соответствующего конечного элемента пролетного строения;  $u_b(t)$  - перемещение балки пролетного строения в точке над  $f$ -й опорой.

Тогда, уравнение (2.32) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -iv_1 E_n A_n \cdot \tilde{u}_{b,n}(\omega) + A_n \tilde{\sigma}_{b,n}(\omega) + [iv_1 E_n A_n \cdot e^{iv_1 d_n} + (k_f - i\omega c_f) e^{iv_1 x_0}] \cdot \tilde{u}_{b,n+1}(\omega) - \\ - A_n \tilde{\sigma}_{b,n+1}(\omega) e^{iv_1 d_n} = \tilde{P}_{t,n} \left( \frac{d_n}{2}, \omega \right) e^{iv_1 \frac{d_n}{2}} + \tilde{u}_{p,f}(\omega) \cdot [k_f - i\omega c_f] e^{iv_1 x_0} \\ -iv_2 E_n A_n \cdot \tilde{u}_{b,n}(\omega) + A_n \tilde{\sigma}_{b,n}(\omega) + [iv_2 E_n A_n \cdot e^{iv_2 d_n} + (k_f - i\omega c_f) e^{iv_2 x_0}] \cdot \tilde{u}_{b,n+1}(\omega) - \\ - A_n \tilde{\sigma}_{b,n+1}(\omega) e^{iv_2 d_n} = \tilde{P}_{t,n} \left( \frac{d_n}{2}, \omega \right) e^{-iv_2 \frac{d_n}{2}} + \tilde{u}_{p,f}(\omega) \cdot [k_f - i\omega c_f] e^{iv_2 x_0} \end{array} \right. , (2.34)$$

где  $n$  – номер конечного элемента балки пролетного строения;  $\tilde{\sigma}_{b,n}(\omega)$  – изображение Фурье функции нормальных напряжений на левой грани  $n$ -го конечного элемента;  $A_n$  – площадь поперечного сечения  $n$ -го конечного элемента пролетного строения;  $m_b$  – погонная масса пролетного строения;  $d_n$  – длина  $n$ -го конечного элемента;  $\tilde{P}_{t,n} \left( \frac{d_n}{2}, \omega \right)$  – изображение Фурье функции тормозной нагрузки приложенной в середине  $n$ -го конечного элемента;  $v_{1,2} = \pm \omega \sqrt{\frac{m_b}{E_b A_b}}$ ;  $x_0$  – координата точки опирания опорного устройства принимаемая равной  $d_n$  или 0. Следует отметить, что во многих случаях вертикальными колебаниями тел опор моста и продольными колебаниями балки пролетного строения можно пренебречь.

#### 2.4. Моделирование работы фундаментов опор мостов с использованием трехмерных конечных элементов

В отличие от случая колебания, рассмотренной ранее, одиночной сваи, массивный фундамент и свайный фундамент, состоящий из нескольких рядов свай, как в поперечном, так и в продольном оси моста направлении (Рисунок 2.7), не могут быть смоделированы виде балки на упругом основании, без использования допущений значительно снижающих точность расчетов.

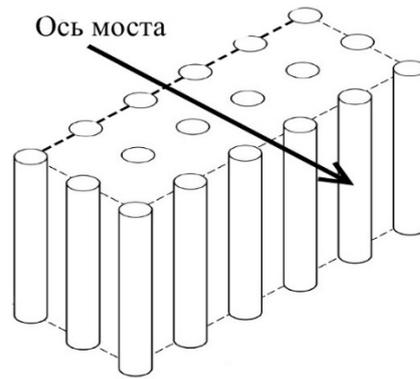


Рисунок 2.7 – Схема расположения свай в фундаменте опор моста

Это обусловлено несколькими факторами: запаздывание волны для случая протяженных фундаментов [120], влияние свай на распространение сейсмических волн [64], колебание грунта вокруг исследуемой сваи вследствие колебания соседних свай [104], неравномерное давление массивного фундамента на грунт в его основании и необходимость учета трения по подошве фундамента.

За последние 50 лет было предложено множество моделей фундаментов, учитывающих перечисленные особенности [32,38,39,46,49,57,87,89,98,102,103,107,112,114,124]. Однако для большинства из них необходимо использовать эмпирические зависимости, допущения требующие проверки и корректировки для заданных условий или предполагающие нелогичное моделирование континуума сосредоточенными массами и пружинами. В данной главе, для моделирования работы фундамента мостовых сооружений под действием динамических воздействий, получена оригинальная система уравнений, описывающая колебания трехмерного конечного элемента (Рисунок 2.8).

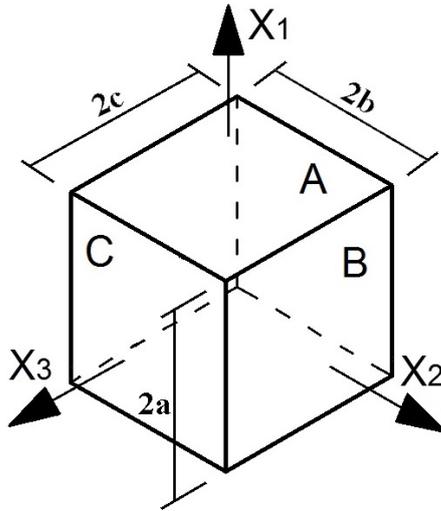


Рисунок 2.8 – Общий вид трехмерного конечного элемента

### 2.4.1. Трехмерный конечный элемент

Рассмотрим движение упругого тела, занимающего ограниченную выпуклую область  $\Omega$  (Рисунок 2.8), на интервале времени  $[t_0, t_1]$  под действием сил  $f_k$ . Пусть,  $U_n(x_1, x_2, x_3, t)$  - функция, описывающая перемещение точек тела (Рисунок 2.9), а  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$  функция напряжений (Рисунок 2.10).

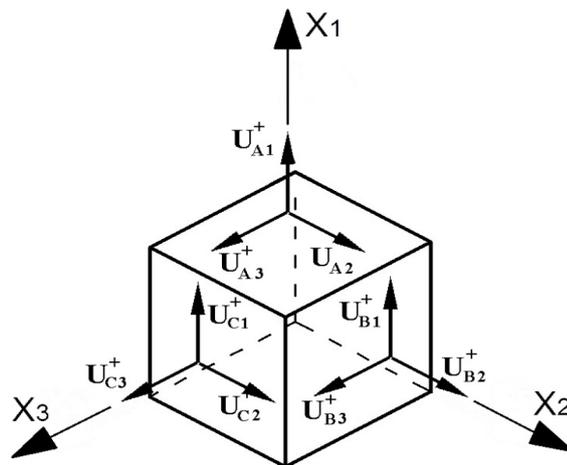


Рисунок 2.9 – Перемещения граней трехмерного конечного элемента

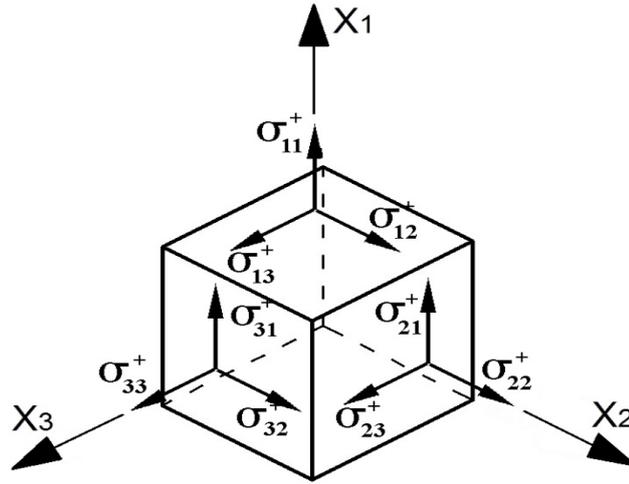


Рисунок 2.10 – Напряжения на гранях трехмерного конечного элемента

Необходимо чтобы данные функции продолжались нулями вне области, занимаемой телом. Для этого запишем их в следующем виде:

$$U_n(x_1, x_2, x_3, t) = \{U_n(x_1, x_2, x_3, t)\} \theta(\Omega) \theta(T), \quad (2.35)$$

$$\sigma_{nj}(x_1, x_2, x_3, t) = \{\sigma_{nj}(x_1, x_2, x_3, t)\} \theta(\Omega) \theta(T), \quad (2.26)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, t) \equiv 0, \quad x \notin \Omega \text{ и } t \notin [t_0, t_1], \quad (2.37)$$

где  $\theta(x)$  - функция Хэвисайда.

Получим уравнение в перемещениях для ограниченного тела. Для этого воспользуемся следующими уравнениями:

1. соотношение Гука:

$$\lambda \delta_{kj} (U_{n,n}) + \mu (U_{k,j} + U_{j,k}) - \sigma_{jk} = 0 \quad (2.38)$$

2. уравнение движения:

$$\sigma_{jk,j} - \rho \ddot{U}_k = -f_k, \quad (2.39)$$

где  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера;  $\lambda$  – коэффициент Пуассона;  $\mu$  – модуль сдвига.

При записи уравнений (2.38) и (2.39) применяется правило, используемое в тензорных обозначениях: запятая после индекса означает дифференцирование, а индекс после запятой означает номер переменной, по которой производится дифференцирование.

Запишем уравнения (2.38) и (2.39) в обобщенных функциях:

$$\lambda \delta_{kj} (U_{n,n}) + \mu (U_{k,j} + U_{j,k}) - \sigma_{jk} = \lambda \delta_{kj} \left[ [U_n]_s \cos(\bar{n} \cdot x_n) \delta_s \right] + \mu \left[ [U_k]_s \cos(\bar{n} \cdot x_j) + [U_j]_s \cos(\bar{n} \cdot x_k) \delta_s \right], \quad (2.40)$$

$$\sigma_{jk,j} - \rho \ddot{U}_k = -F_k + [\sigma_{jk}]_s \cos(\bar{n} \cdot x_j) \delta_s - \rho [U_k]_{t=t_0} \dot{\delta}(t-t_0) + \rho [U_k]_{t=t_1} \dot{\delta}(t-t_1) - \rho [\dot{U}_k]_{t=t_0} \delta(t-t_0) + \rho [\dot{U}_k]_{t=t_1} \delta(t-t_1), \quad (2.41)$$

где  $[U_j]_{t=t_0}$ ,  $[U_j]_{t=t_1}$ ,  $[\dot{U}_j]_{t=t_0}$  и  $[\dot{U}_j]_{t=t_1}$  - перемещения и скорости точек слоя при  $t = t_0$  и  $t = t_1$ ;  $\delta_s$  - дельта функция, сосредоточенная на границе области;  $\delta(t)$  и  $\dot{\delta}(t)$  - дельта-функция, и её производная по времени;  $[U_k]_s$  и  $[\sigma_{jk}]_s$  - скачки функций  $U_k$  и  $\sigma_{jk}$  при переходе извне через границу области  $\Omega$ ;  $F_k$  - совпадает в области  $\Omega$  с функцией  $f_k$  и равна нулю вне этой области и вне интервала  $[t_0, t_1]$ ;  $\rho$  - плотность материала;  $\cos(\bar{n} \cdot x_j)$  - косинус угла между нормалью к площадке и осью  $x_j$ .

При записи уравнений (2.40) и (2.41) использовалось следующее правило, описанное в диссертации Курбацкого Е.Н.: "Если в левой части уравнения находится производная некоторой функции по  $j$ -той координате, например  $U_{k,j}$ , то в правой части его необходимо записать слагаемое, состоящее из произведения значения этой функции на границе области -  $[U_k]_s$  на косинус угла между нормалью к границе  $\bar{n}$  и осью  $x_j$  и дельта - функции -  $\delta_s$ " [15,16]. То есть, функции  $U_{k,j}$ , стоящей в левой части уравнения, будет соответствовать слагаемое  $[U_k]_s \cos(\bar{n} \cdot x_j) \delta_s$ , которое необходимо записать в правой части уравнения.

Дифференцируем уравнение (2.40) по переменной  $x_j$ :

$$\lambda (U_{n,nk}) + \mu (U_{k,jj} + U_{j,kj}) - \sigma_{jk,j} = \lambda \left[ [U_n]_s \cos(\bar{n} \cdot x_n) \delta_s \right]_k + \mu \left[ [U_k]_s \cos(\bar{n} \cdot x_j) + [U_j]_s \cos(\bar{n} \cdot x_k) \delta_s \right]_j \quad (2.42)$$

Выразим неизвестную функцию  $\sigma_{jk,j}$  в уравнении (2.41) и подставим полученное выражение в уравнение (2.42):

$$\begin{aligned}
& \lambda(U_{n,nk}) + \mu(U_{k,jj} + U_{j,kj}) - \rho\ddot{U}_k = -F_k + [\sigma_{jk}]_s \cos(\bar{n} \cdot x_j) \delta_s + \\
& + \lambda \left[ [U_n]_s \cos(\bar{n} \cdot x_n) \delta_s \right]_k + \mu \left[ [U_k]_s \cos(\bar{n} \cdot x_j) + [U_j]_s \cos(\bar{n} \cdot x_k) \delta_s \right]_j - \\
& - \rho[U_k]_{t=0} \dot{\delta}(t) + \rho[U_k]_{t=T} \dot{\delta}(t-T) - \rho[\dot{U}_k]_{t=0} \delta(t) + \rho[\dot{U}_k]_{t=T} \delta(t-T)
\end{aligned} \quad (2.43)$$

В правой части уравнения (2.43) содержится вся информация о внешних воздействиях на ограниченное тело или ограниченную область: массовая нагрузка и воздействия на границе области. Внешнее воздействие предполагается гармоническим, поэтому примем значения неизвестных функций в уравнении (2.43) в начальный момент времени равными нулю, тогда уравнение (2.43) примет окончательный вид:

$$\begin{aligned}
& \lambda(U_{n,nk}) + \mu(U_{k,jj} + U_{j,kj}) - \rho\ddot{U}_k = -F_k + [\sigma_{jk}]_s \cos(\bar{n} \cdot x_j) \delta_s + \\
& + \lambda \left[ [U_n]_s \cos(\bar{n} \cdot x_n) \delta_s \right]_k + \mu \left[ [U_k]_s \cos(\bar{n} \cdot x_j) + [U_j]_s \cos(\bar{n} \cdot x_k) \delta_s \right]_j
\end{aligned} \quad (2.44)$$

Обозначим правую часть уравнения (2.44) как  $X_k$  и запишем полученные выражения при разных значениях индекса «k»:

$$\begin{aligned}
X_1 = & -F_1 + [\sigma_{11}^+ \cdot \delta(x_1 - a) + \sigma_{21}^+ \cdot \delta(x_2 - b) + \sigma_{31}^+ \cdot \delta(x_3 - c)] - \\
& - [\sigma_{11}^- \cdot \delta(x_1 + a) + \sigma_{21}^- \cdot \delta(x_2 + b) + \sigma_{31}^- \cdot \delta(x_3 + c)] + \\
& + \lambda [U_{A1}^+ \cdot \delta(x_1 - a) + U_{B2}^+ \cdot \delta(x_2 - b) + U_{C3}^+ \cdot \delta(x_3 - c)]_1 - \\
& - \lambda [U_{A1}^- \cdot \delta(x_1 + a) + U_{B2}^- \cdot \delta(x_2 + b) + U_{C3}^- \cdot \delta(x_3 + c)]_1 + \\
& + \mu [U_{A1}^+ \cdot \delta(x_1 - a)]_1 + \mu [U_{B1}^+ \cdot \delta(x_2 - b)]_2 + \mu [U_{C1}^+ \cdot \delta(x_3 - c)]_3 - \\
& - \mu [U_{A1}^- \cdot \delta(x_1 + a)]_1 - \mu [U_{B1}^- \cdot \delta(x_2 + b)]_2 - \mu [U_{C1}^- \cdot \delta(x_3 + c)]_3 + \\
& + \mu [U_{A1}^+ \cdot \delta(x_1 - a)]_1 + \mu [U_{A2}^+ \cdot \delta(x_1 - a)]_2 + \mu [U_{A3}^+ \cdot \delta(x_1 - a)]_3 - \\
& - \mu [U_{A1}^- \cdot \delta(x_1 + a)]_1 - \mu [U_{A2}^- \cdot \delta(x_1 + a)]_2 - \mu [U_{A3}^- \cdot \delta(x_1 + a)]_3
\end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
X_2 = & -F_2 + \left[ \sigma_{12}^+ \cdot \delta(x_1 - a) + \sigma_{22}^+ \cdot \delta(x_2 - b) + \sigma_{32}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right] - \\
& - \left[ \sigma_{12}^- \cdot \delta(x_1 + a) + \sigma_{22}^- \cdot \delta(x_2 + b) + \sigma_{32}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right] + \\
& + \lambda \left[ U_{A1}^+ \cdot \delta(x_1 - a) + U_{B2}^+ \cdot \delta(x_2 - b) + U_{C3}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right]_2 - \\
& - \lambda \left[ U_{A1}^- \cdot \delta(x_1 + a) + U_{B2}^- \cdot \delta(x_2 + b) + U_{C3}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right]_2 + \\
& + \mu \left[ U_{A2}^+ \cdot \delta(x_1 - a) \right]_1 + \mu \left[ U_{B2}^+ \cdot \delta(x_2 - b) \right]_2 + \mu \left[ U_{C2}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right]_3 - \\
& - \mu \left[ U_{A2}^- \cdot \delta(x_1 + a) \right]_1 - \mu \left[ U_{B2}^- \cdot \delta(x_2 + b) \right]_2 - \mu \left[ U_{C2}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right]_3 + \\
& + \mu \left[ U_{B1}^+ \cdot \delta(x_2 - b) \right]_1 + \mu \left[ U_{B2}^+ \cdot \delta(x_2 - b) \right]_2 + \mu \left[ U_{B3}^+ \cdot \delta(x_2 - b) \right]_3 - \\
& - \mu \left[ U_{B1}^- \cdot \delta(x_2 + b) \right]_1 - \mu \left[ U_{B2}^- \cdot \delta(x_2 + b) \right]_2 - \mu \left[ U_{B3}^- \cdot \delta(x_2 + b) \right]_3
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
X_3 = & -F_3 + \left[ \sigma_{13}^+ \cdot \delta(x_1 - a) + \sigma_{23}^+ \cdot \delta(x_2 - b) + \sigma_{33}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right] - \\
& - \left[ \sigma_{13}^- \cdot \delta(x_1 + a) + \sigma_{23}^- \cdot \delta(x_2 + b) + \sigma_{33}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right] + \\
& + \lambda \left[ U_{A1}^+ \cdot \delta(x_1 - a) + U_{B2}^+ \cdot \delta(x_2 - b) + U_{C3}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right]_3 - \\
& - \lambda \left[ U_{A1}^- \cdot \delta(x_1 + a) + U_{B2}^- \cdot \delta(x_2 + b) + U_{C3}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right]_3 + \\
& + \mu \left[ U_{A3}^+ \cdot \delta(x_1 - a) \right]_1 + \mu \left[ U_{B3}^+ \cdot \delta(x_2 - b) \right]_2 + \mu \left[ U_{C3}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right]_3 - \\
& - \mu \left[ U_{A3}^- \cdot \delta(x_1 + a) \right]_1 - \mu \left[ U_{B3}^- \cdot \delta(x_2 + b) \right]_2 - \mu \left[ U_{C3}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right]_3 + \\
& + \mu \left[ U_{C1}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right]_1 + \mu \left[ U_{C2}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right]_2 + \mu \left[ U_{C3}^+ \cdot \delta(x_3 - c) \right]_3 - \\
& - \mu \left[ U_{C1}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right]_1 - \mu \left[ U_{C2}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right]_2 - \mu \left[ U_{C3}^- \cdot \delta(x_3 + c) \right]_3
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Применим преобразование Фурье по всем переменным к уравнению (2.44):

$$\begin{cases} \left[ v_1^2 \eta^2 + v_2^2 + v_3^2 - \omega^2 \frac{1}{\beta^2} \right] U_1 + v_1 v_2 [\eta^2 - 1] U_2 + v_1 v_3 [\eta^2 - 1] U_3 = -\frac{\tilde{X}_1}{\mu} \\ v_1 v_2 [\eta^2 - 1] U_1 + \left[ v_1^2 + v_2^2 \eta^2 + v_3^2 - \omega^2 \frac{1}{\beta^2} \right] U_2 + v_2 v_3 [\eta^2 - 1] U_3 = -\frac{\tilde{X}_2}{\mu}, \\ v_1 v_3 [\eta^2 - 1] U_1 + v_2 v_3 [\eta^2 - 1] U_2 + \left[ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \eta^2 - \omega^2 \frac{1}{\beta^2} \right] U_3 = -\frac{\tilde{X}_3}{\mu} \end{cases} \tag{2.48}$$

где  $\eta = \frac{\alpha}{\beta}$ ;  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  - скорость продольной волны;  $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  - скорость поперечной

волны;  $v_1, v_2, v_3$  - параметры преобразования Фурье по пространственным координатам  $x_1, x_2, x_3$ ;  $\omega$  - параметр преобразования Фурье по переменной  $t$ ;

$\tilde{U}_k$  - изображения Фурье функций перемещений.

Решим систему уравнений (2.48):

$$\tilde{U}_1 = \frac{-\tilde{X}_1 \left[ v_1^2 + v_2^2 \eta^2 + v_3^2 \eta^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right] + v_1 [v_2 \tilde{X}_2 + v_3 \tilde{X}_3] [\eta^2 - 1]}{\rho \beta^2 \left[ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right] \left[ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right]}, \quad (2.49)$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{-\tilde{X}_2 \left[ v_1^2 \eta^2 + v_2^2 + v_3^2 \eta^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right] + v_2 [v_1 \tilde{X}_1 + \tilde{X}_3 v_3] [\eta^2 - 1]}{\rho \beta^2 \left[ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right] \left[ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right]}, \quad (2.50)$$

$$\tilde{U}_3 = \frac{-\tilde{X}_3 \left[ v_1^2 \eta^2 + v_2^2 \eta^2 + v_3^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right] + v_3 [v_1 \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 v_2] [\eta^2 - 1]}{\rho \beta^2 \left[ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right] \left[ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right]}, \quad (2.51)$$

Найдем изображение Фурье уравнений (2.49), (2.50) и (2.51):

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 = & -\tilde{F}_1 + \left[ \tilde{\sigma}_{11}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} + \tilde{\sigma}_{21}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} + \tilde{\sigma}_{31}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} \right] - \\ & - \left[ \tilde{\sigma}_{11}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} + \tilde{\sigma}_{21}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} + \tilde{\sigma}_{31}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} \right] + \\ & + \lambda (-i v_1) \left[ \tilde{U}_{B2}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} - \tilde{U}_{B2}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} + \tilde{U}_{C3}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} - \tilde{U}_{C3}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} \right] + \\ & + (\lambda + 2\mu) (-i v_1) \left[ \tilde{U}_{A1}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} - \tilde{U}_{A1}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} \right] + \\ & + \mu (-i v_2) \left[ \tilde{U}_{B1}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} - \tilde{U}_{B1}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} + \tilde{U}_{A2}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} - \tilde{U}_{A2}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} \right] + \\ & + \mu (-i v_3) \left[ \tilde{U}_{C1}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} - \tilde{U}_{C1}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} + \tilde{U}_{A3}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} - \tilde{U}_{A3}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} \right] \end{aligned}, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 = & -\tilde{F}_2 + \left[ \tilde{\sigma}_{12}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} + \tilde{\sigma}_{22}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} + \tilde{\sigma}_{32}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} \right] - \\ & - \left[ \tilde{\sigma}_{12}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} + \tilde{\sigma}_{22}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} + \tilde{\sigma}_{32}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} \right] + \\ & + \lambda (-i v_2) \left[ \tilde{U}_{A1}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} - \tilde{U}_{A1}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} + \tilde{U}_{C3}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} - \tilde{U}_{C3}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} \right] + \\ & + (\lambda + 2\mu) (-i v_2) \left[ \tilde{U}_{B2}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} - \tilde{U}_{B2}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} \right] + \\ & + \mu (-i v_1) \left[ \tilde{U}_{A2}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} - \tilde{U}_{A2}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} + \tilde{U}_{B1}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} - \tilde{U}_{B1}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} \right] + \\ & + \mu (-i v_3) \left[ \tilde{U}_{C2}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} - \tilde{U}_{C2}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} + \tilde{U}_{B3}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} - \tilde{U}_{B3}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} \right] \end{aligned}, \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3 = & -\tilde{F}_3 + \left[ \tilde{\sigma}_{13}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} + \tilde{\sigma}_{23}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} + \tilde{\sigma}_{33}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} \right] - \\ & - \left[ \tilde{\sigma}_{13}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} + \tilde{\sigma}_{23}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} + \tilde{\sigma}_{33}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} \right] + \\ & + \lambda (-i v_3) \left[ \tilde{U}_{A1}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} - \tilde{U}_{A1}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} + \tilde{U}_{B2}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} - \tilde{U}_{B2}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} \right] + \\ & + \mu (-i v_1) \left[ \tilde{U}_{A3}^+(a, v_2, v_3) \cdot e^{i v_1 a} - \tilde{U}_{A3}^-(a, v_2, v_3) \cdot e^{-i v_1 a} + \tilde{U}_{C1}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} - \tilde{U}_{C1}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} \right] + \\ & + \mu (-i v_2) \left[ \tilde{U}_{B3}^+(v_1, b, v_3) \cdot e^{i v_2 b} - \tilde{U}_{B3}^-(v_1, -b, v_3) \cdot e^{-i v_2 b} + \tilde{U}_{C2}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} - \tilde{U}_{C2}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} \right] + \\ & + (\lambda + 2\mu) (-i v_3) \left[ \tilde{U}_{C3}^+(v_1, v_2, c) \cdot e^{i v_3 c} - \tilde{U}_{C3}^-(v_1, v_2, -c) \cdot e^{-i v_3 c} \right] \end{aligned}, \quad (2.54)$$

Изображение Фурье финитных функций можно представить в виде ряда Тейлора. Каждой  $n$ -ый член этих рядов является моментом  $n$ -го порядка оригинала. Для финитной на интервале  $[-a, a]$  функции  $f(x)$ , её изображение Фурье можно представить в следующем виде:

$$\tilde{F}(v) = \sum_0^{\infty} C_n (-iv)^n; \quad C_n = \frac{1}{n!} \int_{-a}^a x^n f(x) dx, \quad (2.55)$$

$$\tilde{F}(v) = \int_{-a}^a f(x) dx - iv \int_{-a}^a x f(x) dx + \frac{(-iv)^2}{2} \int_{-a}^a x^2 f(x) dx + \dots \quad (2.56)$$

Дискретизируем рассмотренную область таким образом, чтобы элементы были достаточно малы и можно было ограничиться удержанием одного члена ряда. Тогда изображение Фурье функции  $f(x_1, x_2)$  можно представить в следующем виде:

$$\tilde{F}(v_1, v_2) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.57)$$

Заменяя правую часть уравнения константой, содержащей среднее значение перемещения или напряжения на гранях элемента, получим:

$$\tilde{F}(v_1, v_2) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 4ab \cdot f^{\text{среднее}} = \text{const} \quad (2.58)$$

Таким образом, уравнения (2.52), (2.53) и (2.54) можно записать в следующем виде (внешняя нагрузка не учитывается):

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 = & 4 \left[ bc \cdot \sigma_{11}^+ \cdot e^{iv_1 a} + ac \cdot \sigma_{21}^+ \cdot e^{iv_2 b} + ab \cdot \sigma_{31}^+ \cdot e^{iv_3 c} \right] - \\ & - 4 \left[ bc \cdot \sigma_{11}^- \cdot e^{-iv_1 a} + ac \cdot \sigma_{21}^- \cdot e^{-iv_2 b} + ab \cdot \sigma_{31}^- \cdot e^{-iv_3 c} \right] + \\ & + 4(\lambda + 2\mu)(-iv_1) \left[ bc \cdot U_{A1}^+ \cdot e^{iv_1 a} - bc \cdot U_{A1}^- \cdot e^{-iv_1 a} \right] + \\ & + 4\lambda(-iv_1) \left[ ac \cdot U_{B2}^+ \cdot e^{iv_2 b} - ac \cdot U_{B2}^- \cdot e^{-iv_2 b} + ab \cdot U_{C3}^+ \cdot e^{iv_3 c} - ab \cdot U_{C3}^- \cdot e^{-iv_3 c} \right] + \\ & + 4\mu(-iv_2) \left[ ac \cdot U_{B1}^+ \cdot e^{iv_2 b} - ac \cdot U_{B1}^- \cdot e^{-iv_2 b} + bc \cdot U_{A2}^+ \cdot e^{iv_1 a} - bc \cdot U_{A2}^- \cdot e^{-iv_1 a} \right] + \\ & + 4\mu(-iv_3) \left[ ab \cdot U_{C1}^+ \cdot e^{iv_3 c} - ab \cdot U_{C1}^- \cdot e^{-iv_3 c} + bc \cdot U_{A3}^+ \cdot e^{iv_1 a} - bc \cdot U_{A3}^- \cdot e^{-iv_1 a} \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_2 = & 4 \left[ bc \cdot \sigma_{12}^+ \cdot e^{i\nu_1 a} + ac \cdot \sigma_{22}^+ \cdot e^{i\nu_2 b} + ab \cdot \sigma_{32}^+ \cdot e^{i\nu_3 c} \right] - \\
& - 4 \left[ bc \cdot \sigma_{12}^- \cdot e^{-i\nu_1 a} + ac \cdot \sigma_{22}^- \cdot e^{-i\nu_2 b} + ab \cdot \sigma_{32}^- \cdot e^{-i\nu_3 c} \right] + \\
& + 4(\lambda + 2\mu)(-i\nu_2) \left[ ac \cdot U_{B2}^+ \cdot e^{i\nu_2 b} - ac \cdot U_{B2}^- \cdot e^{-i\nu_2 b} \right] + \\
& + 4\lambda(-i\nu_2) \left[ bc \cdot U_{A1}^+ \cdot e^{i\nu_1 a} - bc \cdot U_{A1}^- \cdot e^{-i\nu_1 a} + ab \cdot U_{C3}^+ \cdot e^{i\nu_3 c} - ab \cdot U_{C3}^- \cdot e^{-i\nu_3 c} \right] + \\
& + 4\mu(-i\nu_1) \left[ bc \cdot U_{A2}^+ \cdot e^{i\nu_1 a} - bc \cdot U_{A2}^- \cdot e^{-i\nu_1 a} + ac \cdot U_{B1}^+ \cdot e^{i\nu_2 b} - ac \cdot U_{B1}^- \cdot e^{-i\nu_2 b} \right] + \\
& + 4\mu(-i\nu_3) \left[ ab \cdot U_{C2}^+ \cdot e^{i\nu_3 c} - ab \cdot U_{C2}^- \cdot e^{-i\nu_3 c} + ac \cdot U_{B3}^+ \cdot e^{i\nu_2 b} - ac \cdot U_{B3}^- \cdot e^{-i\nu_2 b} \right]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_3 = & 4 \left[ bc \cdot \sigma_{13}^+ \cdot e^{i\nu_1 a} + ac \cdot \sigma_{23}^+ \cdot e^{i\nu_2 b} + ab \cdot \sigma_{33}^+ \cdot e^{i\nu_3 c} \right] - \\
& - 4 \left[ bc \cdot \sigma_{13}^- \cdot e^{-i\nu_1 a} + ac \cdot \sigma_{23}^- \cdot e^{-i\nu_2 b} + ab \cdot \sigma_{33}^- \cdot e^{-i\nu_3 c} \right] + \\
& + 4(\lambda + 2\mu)(-i\nu_3) \left[ ab \cdot U_{C3}^+ \cdot e^{i\nu_3 c} - ab \cdot U_{C3}^- \cdot e^{-i\nu_3 c} \right] + \\
& + 4\lambda(-i\nu_3) \left[ bc \cdot U_{A1}^+ \cdot e^{i\nu_1 a} - bc \cdot U_{A1}^- \cdot e^{-i\nu_1 a} + ac \cdot U_{B2}^+ \cdot e^{i\nu_2 b} - ac \cdot U_{B2}^- \cdot e^{-i\nu_2 b} \right] + \\
& + 4\mu(-i\nu_1) \left[ bc \cdot U_{A3}^+ \cdot e^{i\nu_1 a} - bc \cdot U_{A3}^- \cdot e^{-i\nu_1 a} + ab \cdot U_{C1}^+ \cdot e^{i\nu_3 c} - ab \cdot U_{C1}^- \cdot e^{-i\nu_3 c} \right] + \\
& + 4\mu(-i\nu_2) \left[ ac \cdot U_{B3}^+ \cdot e^{i\nu_2 b} - ac \cdot U_{B3}^- \cdot e^{-i\nu_2 b} + ab \cdot U_{C2}^+ \cdot e^{i\nu_3 c} - ab \cdot U_{C2}^- \cdot e^{-i\nu_3 c} \right]
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Для каждой из граней трехмерного конечного элемента необходимо найти шесть граничных функций:  $U_1, U_2, U_3, \sigma_{j1}, \sigma_{j2}$  и  $\sigma_{j3}$ . Потребуется тридцать шесть уравнений для определения неизвестных функций перемещений и напряжений: восемнадцать уравнений можно получить из граничных условий для области, либо из условий равенства функций на общих гранях соседних элементов, а еще восемнадцать уравнений можно получить, воспользовавшись теоремой предложенной в диссертации Курбацкого Е.Н. [16]: «Если состояние механической системы описывается дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то сумма изображений Фурье всех функций, определяющих внешнее воздействие (включая и граничные условия), равна нулю на нулях полинома, соответствующего этому дифференциальному уравнению».

Поскольку в рассматриваемой задаче знаменатели в уравнениях (2.49), (2.50) и (2.51) представляют собой полиномы 4 переменных, то их нули являются аналитическим множеством. Числитель данных уравнений должен делиться на знаменатель без остатка, поэтому нулевые множества числителя должны содержать в себе нулевые множества знаменателя. «В соответствии с подготовительной теоремой Вейерштрасса аналитические функции в окрестности

точки, в которой они превращаются в нуль, ведут себя как многочлены одной переменной с коэффициентами, голоморфно зависящими от остальных. Так как целую функцию можно представить как угодно точно через ее значения в дискретных точках, зафиксировав все переменные кроме одной и найдя при этих значениях корни знаменателя, можно записать условия совпадения нулей числителя и знаменателя так же, как и в одномерном случае» [16].

Найдем корни знаменателя в уравнениях (2.49), (2.50) и (2.51) при которых числитель обращается в ноль:

1. при  $v_1 = 0, v_2 = 0$ :

$$\begin{cases} \tilde{U}_1\left(0, 0, \frac{\omega}{\beta}\right) = 0 \\ \tilde{U}_2\left(0, 0, \frac{\omega}{\beta}\right) = 0 \\ \tilde{U}_3\left(0, 0, \frac{\omega}{\alpha}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{U}_1\left(0, 0, -\frac{\omega}{\beta}\right) = 0 \\ \tilde{U}_2\left(0, 0, -\frac{\omega}{\beta}\right) = 0 \\ \tilde{U}_3\left(0, 0, -\frac{\omega}{\alpha}\right) = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

2. при  $v_1 = 0, v_3 = 0$ :

$$\begin{cases} \tilde{U}_1\left(0, \frac{\omega}{\beta}, 0\right) = 0 \\ \tilde{U}_2\left(0, \frac{\omega}{\alpha}, 0\right) = 0 \\ \tilde{U}_3\left(0, \frac{\omega}{\beta}, 0\right) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{U}_1\left(0, -\frac{\omega}{\beta}, 0\right) = 0 \\ \tilde{U}_2\left(0, -\frac{\omega}{\alpha}, 0\right) = 0 \\ \tilde{U}_3\left(0, -\frac{\omega}{\beta}, 0\right) = 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

3. при  $v_2 = 0, v_3 = 0$ :

$$\begin{cases} \tilde{U}_1\left(\frac{\omega}{\alpha}, 0, 0\right) = 0 \\ \tilde{U}_2\left(\frac{\omega}{\beta}, 0, 0\right) = 0 \\ \tilde{U}_3\left(\frac{\omega}{\beta}, 0, 0\right) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{U}_1\left(-\frac{\omega}{\alpha}, 0, 0\right) = 0 \\ \tilde{U}_2\left(-\frac{\omega}{\beta}, 0, 0\right) = 0 \\ \tilde{U}_3\left(-\frac{\omega}{\beta}, 0, 0\right) = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

Условие равенства нулю правых частей уравнения (2.44) для указанных выше значений параметров приводит к следующим уравнениям (внешняя нагрузка не учитывается):

при  $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = D$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= bc \cdot \sigma_{11}^+ + ac \cdot \sigma_{21}^+ + ab \cdot \sigma_{31}^+ \cdot e^{iDc} - \\ &- bc \cdot \sigma_{11}^- - ac \cdot \sigma_{21}^- - ab \cdot \sigma_{31}^- \cdot e^{-iDc} - \\ &- \mu i D \left[ ab \cdot U_{C1}^+ \cdot e^{iDc} - ab \cdot U_{C1}^- \cdot e^{-iDc} + bc \cdot U_{A3}^+ - bc \cdot U_{A3}^- \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 &= bc \cdot \sigma_{12}^+ + ac \cdot \sigma_{22}^+ + ab \cdot \sigma_{32}^+ \cdot e^{iDc} - \\ &- bc \cdot \sigma_{12}^- - ac \cdot \sigma_{22}^- - ab \cdot \sigma_{32}^- \cdot e^{-iDc} - \\ &- \mu i D \left[ ab \cdot U_{C2}^+ \cdot e^{iDc} - ab \cdot U_{C2}^- \cdot e^{-iDc} + ac \cdot U_{B3}^+ - ac \cdot U_{B3}^- \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

при  $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = S$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3 &= bc \cdot \sigma_{13}^+ + ac \cdot \sigma_{23}^+ + ab \cdot \sigma_{33}^+ \cdot e^{iSc} - \\ &- bc \cdot \sigma_{13}^- - ac \cdot \sigma_{23}^- - ab \cdot \sigma_{33}^- \cdot e^{-iSc} - \\ &- iS(\lambda + 2\mu) \left[ ab \cdot U_{C3}^+ \cdot e^{iSc} - ab \cdot U_{C3}^- \cdot e^{-iSc} \right] - \\ &- iS\lambda \left[ bc \cdot U_{A1}^+ - bc \cdot U_{A1}^- + ac \cdot U_{B2}^+ - ac \cdot U_{B2}^- \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

при  $v_1 = 0, v_2 = D, v_3 = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= bc \cdot \sigma_{11}^+ + ac \cdot \sigma_{21}^+ \cdot e^{iDb} + ab \cdot \sigma_{31}^+ - \\ &- bc \cdot \sigma_{11}^- - ac \cdot \sigma_{21}^- \cdot e^{-iDb} - ab \cdot \sigma_{31}^- - \\ &- \mu i D \left[ ac \cdot U_{B1}^+ \cdot e^{iDb} - ac \cdot U_{B1}^- \cdot e^{-iDb} + bc \cdot U_{A2}^+ - bc \cdot U_{A2}^- \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3 &= bc \cdot \sigma_{13}^+ + ac \cdot \sigma_{23}^+ \cdot e^{iDb} + ab \cdot \sigma_{33}^+ - \\ &- bc \cdot \sigma_{13}^- - ac \cdot \sigma_{23}^- \cdot e^{-iDb} - ab \cdot \sigma_{33}^- - \\ &- \mu i D \left[ ac \cdot U_{B3}^+ \cdot e^{iDb} - ac \cdot U_{B3}^- \cdot e^{-iDb} + ab \cdot U_{C2}^+ - ab \cdot U_{C2}^- \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

при  $v_1 = 0, v_2 = S, v_3 = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 &= bc \cdot \sigma_{12}^+ + ac \cdot \sigma_{22}^+ \cdot e^{iSb} + ab \cdot \sigma_{32}^+ - \\ &- bc \cdot \sigma_{12}^- - ac \cdot \sigma_{22}^- \cdot e^{-iSb} - ab \cdot \sigma_{32}^- - \\ &- iS(\lambda + 2\mu) \left[ ac \cdot U_{B2}^+ \cdot e^{iSb} - ac \cdot U_{B2}^- \cdot e^{-iSb} \right] - \\ &- iS\lambda \left[ bc \cdot U_{A1}^+ - bc \cdot U_{A1}^- + ab \cdot U_{C3}^+ - ab \cdot U_{C3}^- \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

при  $v_1 = D, v_2 = 0, v_3 = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 = & bc \cdot \sigma_{12}^+ \cdot e^{iDa} + ac \cdot \sigma_{22}^+ + ab \cdot \sigma_{32}^+ - \\ & - bc \cdot \sigma_{12}^- \cdot e^{-iDa} - ac \cdot \sigma_{22}^- - ab \cdot \sigma_{32}^- - \\ & - \mu i D [bc \cdot U_{A2}^+ \cdot e^{iDa} - bc \cdot U_{A2}^- \cdot e^{-iDa} + ac \cdot U_{B1}^+ - ac \cdot U_{B1}^-] = 0 \end{aligned} \quad , \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3 = & bc \cdot \sigma_{13}^+ \cdot e^{iDa} + ac \cdot \sigma_{23}^+ + ab \cdot \sigma_{33}^+ - \\ & - bc \cdot \sigma_{13}^- \cdot e^{-iDa} - ac \cdot \sigma_{23}^- - ab \cdot \sigma_{33}^- - \\ & - \mu i D [bc \cdot U_{A3}^+ \cdot e^{iDa} - bc \cdot U_{A3}^- \cdot e^{-iDa} + ab \cdot U_{C1}^+ - ab \cdot U_{C1}^-] = 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

при  $v_1 = S$ ,  $v_2 = 0$ ,  $v_3 = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 = & bc \cdot \sigma_{11}^+ \cdot e^{iSa} + ac \cdot \sigma_{21}^+ + ab \cdot \sigma_{31}^+ - \\ & - bc \cdot \sigma_{11}^- \cdot e^{-iSa} - ac \cdot \sigma_{21}^- - ab \cdot \sigma_{31}^- - \\ & - iS(\lambda + 2\mu) [bc \cdot U_{A1}^+ \cdot e^{iSa} - bc \cdot U_{A1}^- \cdot e^{-iSa}] - \\ & - iS\lambda [ac \cdot U_{B2}^+ - ac \cdot U_{B2}^- + ab \cdot U_{C3}^+ - ab \cdot U_{C3}^-] = 0 \end{aligned} \quad , \quad (2.73)$$

где  $D = \pm \frac{\omega}{\beta}$ ;  $S = \pm \frac{\omega}{\alpha}$ .

Для перехода к действительным выражениям сложим и вычтем попарно уравнения (2.65-2.73). Также будем полагать, что размеры элемента малы по сравнению с длиной волны, поэтому  $\sin(\gamma) \approx \gamma$ , а  $\cos(\gamma) \approx 1$ . Тогда получим систему уравнений, описывающую колебание трехмерного конечного элемента система, в окончательном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l}
bc \cdot [\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-] + ac \cdot [\sigma_{21}^+ - \tilde{\sigma}_{21}^-] + ab \cdot [\sigma_{31}^+ - \sigma_{31}^-] + abcD^2 \mu \cdot [U_{C1}^+ + U_{C1}^-] = 0 \\
bc \cdot [\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-] + ac \cdot [\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-] + ab \cdot [\sigma_{32}^+ - \sigma_{32}^-] + abcD^2 \mu \cdot [U_{C2}^+ + U_{C2}^-] = 0 \\
bc \cdot [\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-] + ab \cdot [\sigma_{31}^+ - \sigma_{31}^-] + ac \cdot [\sigma_{21}^+ - \tilde{\sigma}_{21}^-] + abcD^2 \mu \cdot [U_{B1}^+ + U_{B1}^-] = 0 \\
bc \cdot [\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-] + ab \cdot [\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-] + ac \cdot [\sigma_{23}^+ - \sigma_{23}^-] + abcD^2 \mu \cdot [U_{B3}^+ + U_{B3}^-] = 0 \\
ac \cdot [\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-] + ab \cdot [\sigma_{32}^+ - \sigma_{32}^-] + bc \cdot [\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-] + abcD^2 \mu \cdot [U_{A2}^+ + U_{A2}^-] = 0 \\
ac \cdot [\sigma_{23}^+ - \sigma_{23}^-] + ab \cdot [\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-] + bc \cdot [\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-] + abcD^2 \mu \cdot [U_{A3}^+ + U_{A3}^-] = 0 \\
a \cdot Dc \cdot [\sigma_{31}^+ + \sigma_{31}^-] - \mu D [a \cdot [U_{C1}^+ - U_{C1}^-] + c \cdot [U_{A3}^+ - U_{A3}^-]] = 0 \\
b \cdot Dc \cdot [\sigma_{32}^+ + \sigma_{32}^-] - \mu D [b \cdot [U_{C2}^+ - U_{C2}^-] + c \cdot [U_{B3}^+ - U_{B3}^-]] = 0 \\
a \cdot Db \cdot [\sigma_{21}^+ + \tilde{\sigma}_{21}^-] - \mu D [a \cdot [U_{B1}^+ - U_{B1}^-] + b \cdot [U_{A2}^+ - U_{A2}^-]] = 0 \\
c \cdot Db \cdot [\sigma_{23}^+ + \sigma_{23}^-] - \mu D [c \cdot [U_{B3}^+ - U_{B3}^-] + b \cdot [U_{C2}^+ - U_{C2}^-]] = 0 \\
b \cdot Da \cdot [\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-] - \mu D [b \cdot [U_{A2}^+ - U_{A2}^-] + a \cdot [U_{B1}^+ - U_{B1}^-]] = 0 \\
c \cdot Da \cdot [\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-] - \mu D [c \cdot [U_{A3}^+ - U_{A3}^-] + a \cdot [U_{C1}^+ - U_{C1}^-]] = 0 \\
bc \cdot [\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-] + ac \cdot [\sigma_{23}^+ - \sigma_{23}^-] + ab \cdot [\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-] + abcS^2 (\lambda + 2\mu) \cdot [U_{C3}^+ + U_{C3}^-] = 0 \\
bc \cdot [\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-] + ab \cdot [\sigma_{32}^+ - \sigma_{32}^-] + ac \cdot [\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-] + abcS^2 (\lambda + 2\mu) \cdot [U_{B2}^+ + U_{B2}^-] = 0 \\
ac \cdot [\sigma_{21}^+ - \tilde{\sigma}_{21}^-] + ab \cdot [\sigma_{31}^+ - \sigma_{31}^-] + bc \cdot [\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-] + abcS^2 (\lambda + 2\mu) \cdot [U_{A1}^+ + U_{A1}^-] = 0 \\
abcS [\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-] - abS (\lambda + 2\mu) [U_{C3}^+ - U_{C3}^-] - cS\lambda [b \cdot (U_{A1}^+ - U_{A1}^-) + a \cdot (U_{B2}^+ - U_{B2}^-)] = 0 \\
abcS [\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-] - acS (\lambda + 2\mu) [U_{B2}^+ - U_{B2}^-] - bS\lambda [c \cdot [U_{A1}^+ - U_{A1}^-] + a \cdot [U_{C3}^+ - U_{C3}^-]] = 0 \\
abcS [\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-] - bcS (\lambda + 2\mu) [U_{A1}^+ - U_{A1}^-] - aS\lambda [c \cdot [U_{B2}^+ - U_{B2}^-] + b \cdot [U_{C3}^+ - U_{C3}^-]] = 0
\end{array} \right. , (2.74)$$

Полученная система уравнений (2.74) позволяет определять напряженно-деформированное состояния фундаментов мостовых сооружений с учетом их взаимодействия с грунтовым основанием.

## 2.5. Учет давления воды на боковую поверхность опор

Согласно действующим в разных странах нормативным документам [85,134,143] давление воды на боковую поверхность свай и/или опоры следует учитывать с использованием уравнения для определения лобового сопротивления [85]:

$$F_w(z, t) = \frac{\rho_w C_d S_p}{2} \cdot \dot{u}(z, t)^2 \quad (2.75)$$

где  $C_d$  - безразмерный коэффициент сопротивления формы;  $S_p$  - характерная площадь, принимаемая равной площади смачиваемой поверхности;  $\rho_w = 1000 \text{ кг} / \text{м}^3$  - плотность воды;  $\dot{u}(z, t)$  - относительная скорость потока воды.

При учете давления воды на опоры, помимо силы лобового сопротивления требуется так же учитывать инерционные компоненты: «нагрузки от волн на обтекаемые преграды и сквозные сооружения должны определяться как сумма скоростного и инерционного компонентов, обусловленных соответственно локальными значениями скорости и ускорения волнового движения жидкости» [144]. Воспользуемся уравнением для учета давления воды на тонкие опоры, предложенным в 1950 г. Морисоном [96]. Предположив, что опоры мало влияют на поток воды он представил гидродинамическую силу в виде суммы инерционной силы  $F_i$  и лобового сопротивления  $F_d$ :

$$F_w = \overbrace{\frac{\pi \rho_w D_p^2 C_m}{4} h \cdot \ddot{u}}^{F_i} + \overbrace{\frac{\rho_w D_p C_d}{2} h \cdot \dot{u} |\dot{u}|}^{F_d} \quad (2.76)$$

где  $D_p$  - диаметр опоры;  $h$  - высота погруженной в воду части опоры;  $C_m = 1 + C_d$  - инерционный коэффициент;  $C_d$  - коэффициент масс принимаемый равным единице для цилиндрических опор.

Поскольку не существует общего решения для нахождения изображения Фурье квадрата функции, то для решения задачи в области частот, с использованием уравнения (2.76), необходимо либо заранее задать функцию скорости, либо упростить это уравнение. Воспользуемся предложенным в [76] уравнением линеаризованной силы лобового сопротивления без учета давления постоянной составляющей течения для нормального случайного процесса с нулевым средним:

$$F_d \approx \sqrt{3} \frac{\rho_w D_p C_d}{2} h \cdot \sigma_u \dot{u}, \quad (2.77)$$

где  $\sigma_{\dot{u}}$  - величина стандартного отклонения функции скорости.

Получим уравнение для определения гидродинамического давления воды на опоры в окончательном виде:

$$F_w = \frac{\pi \rho_w D_p^2}{4} h \cdot \ddot{u}_p + \sqrt{3} \frac{\rho_w D_p C_d}{2} \sigma_{\dot{u}_p} h \cdot \dot{u}_p, \quad (2.78)$$

где  $\ddot{u}_p$ ,  $\dot{u}_p$  - ускорение и скорость колебания опоры.

Найдем изображение Фурье по времени функции  $F_w$ :

$$\tilde{F}_w = C_w \cdot \tilde{u}_p(z, \omega), \quad (2.79)$$

где  $C_w = -h \rho_w \left[ \omega^2 \cdot \pi \frac{D_p^2}{4} + i \omega \cdot \sqrt{3} \frac{D_p}{2} C_d \sigma_{\dot{u}_p} \right]$ .

Поскольку в уравнение (2.79) входит заранее неизвестное стандартное отклонение функции скорости, то для его определения необходимо проводить расчет моста в несколько этапов: на первом этапе  $\sigma_{\dot{u}_p}$  принимается равным нулю или значению в полученном в предыдущем расчете, после чего вычисляется его новое значение и проводится новый расчет. Расчеты проводятся до тех пор, пока разница между новым значением стандартного отклонения  $\sigma_{\dot{u}_p}$  и старым не будет менее 5%.

## 2.6. Учет воздействия ветра на мостовое сооружение

Согласно нормативному документу РФ [142] «нормативное значение ветровой нагрузки  $W_n$  следует определять как сумму нормативных значений средней  $W_m$  и пульсационной  $W_p$ , составляющих»:

$$W_n = W_m + W_p, \quad (2.80)$$

где  $W_m = W_0 k C_w$ ;  $W_0$  - нормативное значение ветрового давления;  $k$  - коэффициент учитывающий изменение ветрового давления по высоте;  $C_w$  - аэродинамический коэффициент лобового сопротивления;  $W_p = W_m \xi L \nu$ ;  $\xi$  - коэффициент динамичности;  $L$  - коэффициент пульсации давления ветра;  $\nu$  - коэффициент

пространственной корреляции пульсации давления для расчетной поверхности сооружения.

Уравнение (2.80) предназначено для статического расчета конструкции и было получено из уравнения лобового сопротивления (2.75). Для динамического расчета преобразуем уравнение (2.75) с учетом поправок, введенных в уравнении (2.80) на изменение ветрового давления по высоте и пространственной корреляции пульсации давления, а также с учетом снижения нагрузки в продольном направлении для пролетных строений со сплошными балками [142]:

$$W_n(z, t) = c_t \cdot k [1 + Lv] \frac{\rho_w C_d S_p}{2} \cdot \dot{u}(z, t)^2, \quad (2.81)$$

где  $\dot{u}(z, t)^2$  - квадрат функции скорости ветра;  $c_t$  - коэффициент принимаемый равным 0.2 для пролетных строений со сплошными балками и равным 1.0 для опор. Поскольку плотность воздуха мала, и скорость колебания конструкции значительно ниже скорости ветра, то при учете давления ветра можно пренебречь колебаниями моста.

Согласно [144] значение коэффициентов  $k$  и  $Lv$  следует определять по следующим формулам:

$$k = k_{10} \left[ \frac{z_e}{10} \right]^{2\alpha}, \quad (2.82)$$

$$Lv = 0.55 - 0.0015 \cdot \lambda, \quad Lv \geq 0.3, \quad (2.83)$$

где  $k_{10}$ ,  $\alpha$  - коэффициенты зависящие от типа местности;  $z_e$  - эквивалентная высота;  $\lambda$  - длина пролетного строения.

Найдем значение изображения Фурье по времени уравнения (2.81) для конечного элемента опоры или пролетного строения, полагая, что  $\dot{u}_{wind}(z, t)$  не изменяется в пределах  $j$ -го конечного элемента, и получим уравнение изображения Фурье функции ветровой нагрузки:

$$\tilde{F}_{wind,j}(z, \omega) = c_t \cdot k [1 + Lv] \frac{\rho_w C_d A_j}{2} \cdot \mathbb{F}\{V_{wind}^2\} \quad (2.84)$$

где  $A_j$  - площадь подветренной стороны конечного элемента;  $\mathbb{F}\{V_{wind}^2\}$  - изображение Фурье квадрата функции скорости ветра, которая в дальнейшей работе генерируется с использованием метода, основные положения которого изложены в работе [80].

## **2.7. Моделирование автомобильной нагрузки, действующей на мостовое сооружение при движении случайного автомобильного потока по проезжей части**

Изложенные в данной главе методы построения балочных и трехмерных конечных элементов не позволяют учесть массу движущегося по проезжей части моста транспорта и жесткость его подвески. Для снижения величины погрешности, обусловленной данными допущениями, в дальнейшем в работе будет рассматриваться только автомобильная транспортная нагрузка.

Моделируемая автомобильная нагрузка на пролетное строение моста должна отражать поведение реального потока машин: учитывать плотность потока, его состав, скорость и образование пробок. Одной из простейших моделей движения потока машин является модель Нагеля-Шрекенберга [99], использующая теорию клеточных автоматов и предложенная в 1992 году. В данной модели скорость движения автомобиля зависит от времени реакции водителя и линейно изменяется в зависимости от дистанции между автомобилями:

$$V_n(t + t_r) = f(x_{n-1}(t) - x_n(t)), \quad (2.85)$$

где  $t_r$  - время реакции водителя;  $x_{n-1}$  - координата едущего впереди автомобиля;  $x_n$  - координата автомобиля «n».

Несмотря на свою простоту, данная модель позволяет моделировать как свободнодвижущийся поток, так и заторы, а также подходит для случая автомобильных мостов, на которых запрещен обгон. Вместе с тем, данная модель не предполагает в своей исходной форме определение скоростей отдельных автомобилей с требуемым для моделирования нагрузки малым шагом

дискретизации по времени. В связи с этим автором была написана программа «Traffic\_Flow», использующая описанную модель со следующими дополнительными условиями:

1. Проезжая часть представляет собой замкнутое кольцо.
2. Запрещен уход автомобилей на другую полосу движения.
3. Дистанция «D», поддерживаемая водителем, принимается равной расстоянию, проезжаемому автомобилем за 1.6 – 2.0 с. [63]
4. Водитель машины номер «n» поддерживает скорость согласно следующему условию:

$$V_n(t_k) = V_n(t_k - t_{r,n} - k \cdot \Delta t) + \sum_{k=0}^N \frac{V_{n-1}(t_k - t_{r,n} - N \cdot \Delta t) - V_{n,k}(t_k - t_{r,n} - N \cdot \Delta t)}{t_b / \Delta t}, \quad (2.86)$$

где  $V_{n-1}(t_k - t_{r,n} - k \cdot \Delta t)$  - скорость едущего впереди автомобиля номер «n-1» в момент времени  $t_k - t_{r,n} - k \cdot \Delta t$ ;  $N = 1, 2, 3 \dots N_0$ ;  $N_0 = t_b / \Delta t$ ;  $t_{r,n}$  - время реакции водителя автомобиля машины номер «n»;  $\Delta t$  - шаг дискретизации функции скорости по времени;  $t_b = \frac{\Delta V + \sqrt{\Delta V^2 + 2a_N \Delta D}}{a_N}$  - время за которое дистанция

между машинами номер «n» и «n-1» примет значение равное «D»;  $\Delta D$  - расстояние равное разнице между текущим расстоянием между автомобилями и «D»;  $\Delta V = V_{N-1} - V_N$ ;  $a_N = \pm 2 \frac{\Delta D - D}{D}$ , ( $m / c^2$ ).

5. Время реакции водителя выбирается равным от 0.8 до 1.6 с. со средним значением 1.2 с. [126].
6. Тип автомобиля, масса и колесная база выбирается случайным образом в соответствии с распределениями, полученными для реального потока [86,99].
7. Максимальное возможное ускорение автомобиля при торможении определяется следующим выражением:

$$a = 9.81 \cdot [\mu + c], \quad (m / c^2) \quad (2.87)$$

где  $\mu$  - коэффициент трения скольжения;  $c = 0.005 + \frac{1}{p} \left[ 0.01 + 0.0095 \left( \frac{V}{100} \right)^2 \right]$  - коэффициент трения качения на сухой дороге [117];  $p$  - давление в колесах.

8. Для моделирования случайных событий на дороге, периодически скорость случайного автомобиля меняется согласно следующему закону:

$$V_n(t_k) = V_n(t_k - k \cdot \Delta t) + \sum_1^k \frac{a_N \cdot \Delta t^2}{2}, \quad (2.88)$$

где  $k = 1, 2, \dots, t_s / \Delta t$ ;  $t_s = 1 \div 3$ , (с).

После того как будет определена функция скорости каждого автомобиля, необходимо определить функцию ускорения и тормозную нагрузку от каждого автомобиля на пролетное строение:

$$T_N(t) = m_N a_N(t) \quad (2.89)$$

На рисунке (2.11) представлен пример графика изменения тормозной нагрузки по длине моста в зависимости от времени, полученный с использованием описанной модели.

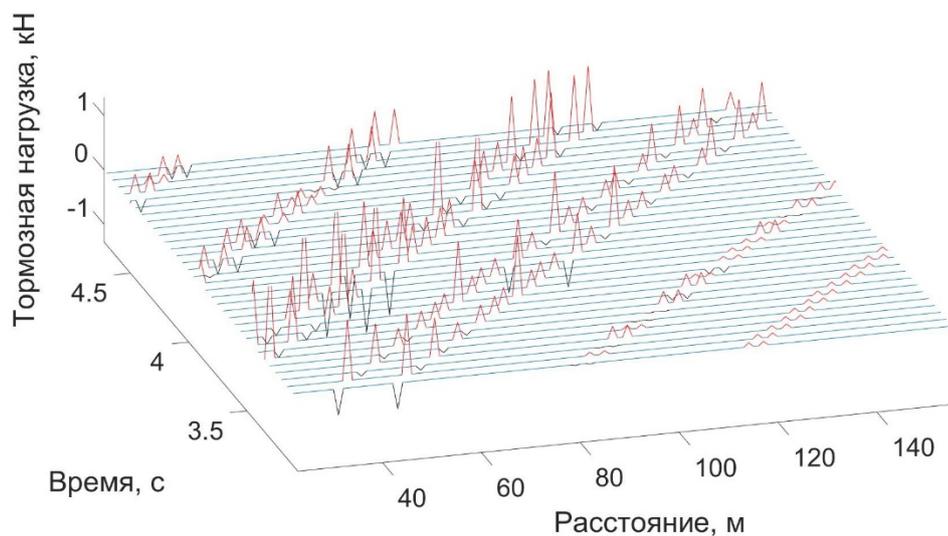


Рисунок 2.11 – График изменения тормозной нагрузки от автомобильного потока

Вертикальное воздействие автомобилей на пролетное строение моста представим в виде движущихся сосредоточенных сил, скорость перемещения

которых вдоль оси моста определяется согласно уравнению (2.86). Поскольку задача об определении напряжённо-деформированного состояния моста под действием динамической нагрузки в данной работе решается в области частот, то учет жесткости подвески автомобиля, движущегося с переменной скоростью, и учет его взаимодействия с балкой полетного строения невозможен.

## 2.8. Выводы

1. Получены системы уравнений, позволяющие моделировать работу мостового транспортного сооружения под действием слабых природных и техногенных воздействий. Преимуществами предлагаемых решений являются отсутствие необходимости использования нелогичного моделирования континуума, сосредоточенными массами и пружинами, а также тот факт, что неизвестными параметрами системы уравнений (2.74) являются напряжения и перемещения граней элементов, а в случае системы уравнений (2.30) это перемещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила.

2. Представлена модель движения автотранспорта, разработанная на основе модели Нагеля-Шрекенберга и дополненная в соответствии с имеющимися статистическими данными. Данная модель может быть использована для определения функций колебания модели автомобильного моста при движении автомобильного потока по проезжей части.

3. Получены уравнения для учета воздействий водного и воздушного потоков на мостовые сооружения. Данные уравнения могут быть использованы при решении задачи об определении функций колебания мостового сооружения в области частот.

## **ГЛАВА 3 ОЦЕНКА ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ ПО ДАННЫМ ПОСТОЯННОГО ПАССИВНОГО ВИБРАЦИОННОГО МОНИТОРИНГА**

### **3.1. Общие замечания**

При проведении пассивного вибрационного мониторинга мостовых сооружений используются данные об их колебаниях, вызванных действием случайных или регулярных слабых воздействий природного и техногенного характера: ветровая и транспортная нагрузки, давление воды, а также слабая сейсмическая нагрузка. Представим некоторые из их возможных сочетаний:

1. Действует только транспортная или ветровая нагрузки. Данное сочетание возможно в случае мониторинга железнодорожного моста.
2. Транспортная и ветровая нагрузки.
3. Ветровая и слабая сейсмическая нагрузки. Данное сочетание возможно в случае мониторинга железнодорожного моста, или автодорожного моста в ночное время.
4. Транспортная, ветровая и слабая сейсмическая нагрузки.

Следует отметить, что в тех случаях, когда действует слабая сейсмическая нагрузка, допущение о постоянном спектральном составе функции вынуждающей силы, используемое во многих методах определения модальных параметров сооружения, недействительно.

В данной главе будет рассмотрен только случай одновременного действия ветровой и автомобильной нагрузок.

### 3.2. Уровень колебаний автомобильных мостов в случае действия слабых транспортных и ветровых нагрузок

При проведении пассивного вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений с использованием данных об их колебаниях под действием слабых природных и техногенных воздействий, основным условием получения достоверных результатов является определение модальных параметров сооружений с требуемой точностью. Поскольку при интенсивных воздействиях, особенно в случае наличия установленных сейсмоизоляторов, мостовые сооружения могут начать вести себя нелинейно, то уровень их колебаний при проведении мониторинга не может превышать некоторой предельной величины индивидуальной для каждого сооружения. В таблице 3.1 показаны значения ускорения продольных колебаний балки пролетного строения реальных мостов, от ветровой и транспортной нагрузок.

Таблица 3.1 – Значения ускорения продольных колебаний балки пролетного строения реальных мостов, от ветровой и транспортной нагрузок

Название моста	Золотые Ворота	Newmarket Viaduct	Komtur	Sorok
Страна	Америка	Новая Зеландия	Германия	Корея
Тип моста	висячий	балочный	балочный	балочный
Среднее значение ускорения колебания балки пролётного строения	0.04 м/с <sup>2</sup> [108]	0.05 м/с <sup>2</sup> [106]	0.05 м/с <sup>2</sup> [100]	0.02 м/с <sup>2</sup> [83]
Пиковое значение ускорения колебания балки пролётного строения	0.10 м/с <sup>2</sup> [108]	0.25 м/с <sup>2</sup> [106]	0.35 м/с <sup>2</sup> [100]	0.25 м/с <sup>2</sup> [83]

По данным, представленным в таблице 3.1, видно, что средний уровень продольных колебаний пролетного строения невелик и составляет не более 0.05

м/с<sup>2</sup>, в то время как максимальный уровень колебаний может достигать 0.35 м/с<sup>2</sup>. Однако, ситуации при которых достигаются подобные максимальные уровни колебаний возникают редко и в случае продолжительной записи колебаний, с последующим выбором подходящих для мониторинга участков функции колебания, нелинейным поведением сооружения можно пренебречь [62,110].

Еще одним важным условием получения достоверных результатов при проведении постоянного вибрационного мониторинга является соответствие возможностей используемых датчиков колебаний требуемым параметрам измерений. В качестве примера приведем трехкомпонентный сейсмический акселерометр MTSS-1043A (Рисунок 3.1) диапазон частот которого составляет 0.1 – 120 Hz, а диапазон регистрируемых ускорений  $5 \cdot 10^{-6} \div 7.8 \text{ м/с}^2$ .



Рисунок 3.1 – Трехкомпонентный сейсмический акселерометр MTSS-1043A

Данный диапазон частот значительно превышает рекомендуемый для проведения постоянного пассивного вибрационного мониторинга диапазон: 0.1 - 30 Hz [74], а минимальный уровень регистрируемых ускорений на несколько порядков меньше среднего уровня колебаний мостовых сооружений при слабых фоновых воздействиях.

### **3.3. Влияние годовых температурных изменений на точность определения модальных параметров мостовых сооружений**

Согласно проведенному в первой главе анализу положений нормативных документов и научных работ других авторов, при проведении вибродиагностики

сооружения рекомендуется учитывать изменение его параметров в зависимости от температуры элементов моста.

Проведем расчет для определения влияния температуры на значение собственных частот модели трехпролетного неразрезного металлического автомобильного балочного моста, построенного на автодороге «Адлер – горноклиматический курорт Альпика-сервис» (Рисунок 3.2). Схема моста следующая: 62м x 62м x 62м. Также сравним величину приращения значений собственных частот моста в случае изменения температуры опорных частей и других элементов моста по-отдельности.

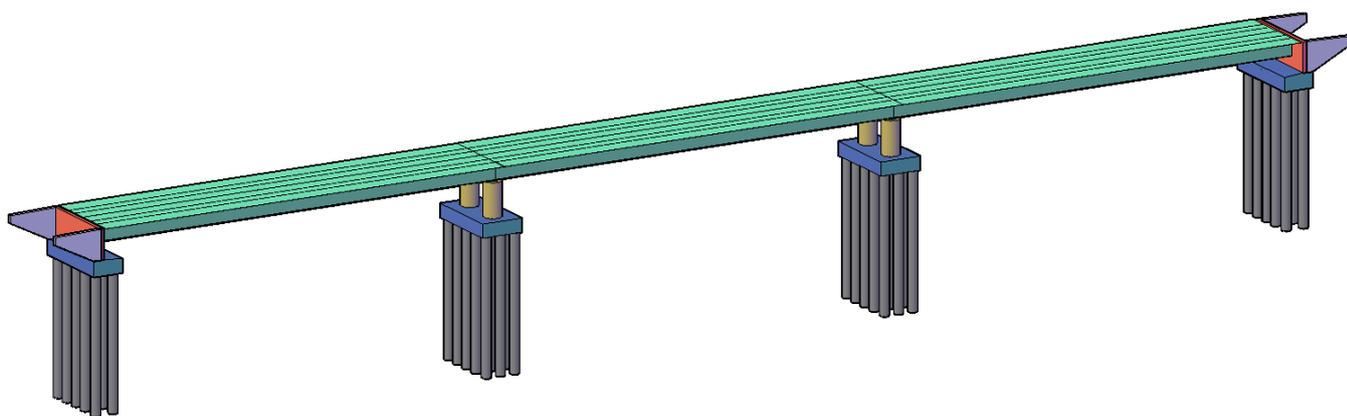


Рисунок 3.2 – Общий вид моста на автодороге «Адлер – горноклиматический курорт Альпика-сервис»

При расчетах в качестве нагрузки использовалось сочетание автомобильной и ветровой нагрузок, функции которых при каждом новом расчете генерировались для каждого конечного элемента заново. Такой подход позволяет построить график зависимости собственных частот от температуры с учетом влияния частотного состава функций внешнего силового воздействия на точность проводимых измерений.

В качестве опорных устройств на данном мосту применялись резинометаллические опорные части со свинцовым сердечником. При этом рассматриваемые уровни колебаний пролетного строения относительно верха опор соответствовали принятому допущению о линейной работе опорных устройств.

При проведении расчета были использованы следующие эмпирические зависимости между параметрами материалов моста и их температурой:

1. Бетон [75]:

$$E_c \approx E_{c,21} - 125 \cdot \Delta T \text{ (МПа)}, \quad (3.1)$$

где  $E_{c,21}$  - модуль упругости при комнатной температуре;  $\Delta T = T - 21$  - изменение температуры;  $T$  - текущая температура.

2. Резина в опорных устройствах:

$$\xi_r \approx -4.17 \cdot 10^{-7} T^3 + 5.54 \cdot 10^{-5} T^2 - 2.44 \cdot 10^{-3} T + 6.29 \cdot 10^{-2} \quad (3.2)$$

$$G_r \approx -2.63 \cdot 10^{-5} \cdot T^3 + 1.67 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 - 0.041 \cdot T + 1.368 \text{ (МПа)} \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) приняты согласно документации, предоставленной производителем опорных устройств «Sylomer».

3. Сталь металлического пролетного строения моста [130,148]:

$$E_s \approx E_{s,21} - 66 \cdot T \text{ (МПа)} \quad (3.4)$$

Следует отметить, что при моделировании не учитывалось влияние изменения температуры грунтового основания опор на его параметры, что не соответствует действительности. Как отмечается во многих научных работах других авторов [121,137], в зависимости от типа грунта и его влажности, изменение модуля упругости грунтов в зимнее и летнее время может достигать нескольких раз.

На рисунке (3.3) представлены полученная зависимость между температурой и значением одной из собственных частот продольных колебаний модели моста.

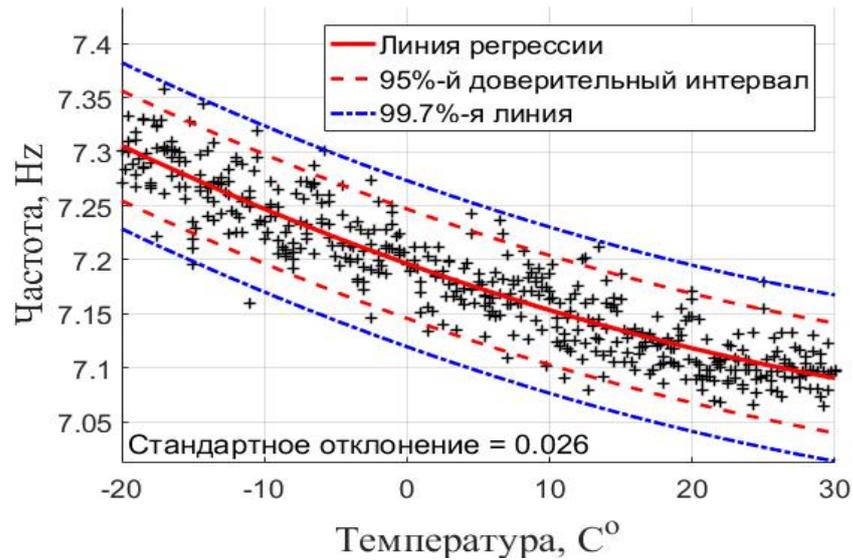


Рисунок 3.3 – График зависимости значения собственной частоты колебания модели транспортного моста от температуры

В целом значения параметров полученного ряда измерений мало отличаются от экспериментальных данных (Рисунок 1.2-1.4) с поправкой на влияние параметров грунта.

На этом же графике (Рисунок 3.3) показана линия регрессии с 95%-ными доверительными границами. Ее форма индивидуальна для каждого моста (Рисунок 1.2-1.4) и может значительно отличаться от аналогичных, полученных для других мостов. Вместе с тем, параметры данной линии и величина стандартного отклонения для конкретного моста, в случае отсутствия повреждений, изменяются незначительно на протяжении многих лет [52,137], что позволяет учитывать влияние температуры на модальные параметры моста имея лишь данные за первые полгода мониторинг и за ограниченный промежуток времени в течении последующих лет. Принимая во внимание данный факт, можно повысить точность обнаружения слабых повреждений сооружения.

Согласно проведенному расчету, а также результатам исследований других авторов [70,75,91], при повреждении моста все ординаты линии регрессии графика зависимости собственных частот от температуры получают приблизительно одинаковое приращение, а ее форма при этом меняется слабо. Это позволяет, используя t-тест Стьюдента (Уравнение 3.5), сравнить два набора измерений и

оценить вероятность того, что отличие их статистических параметров — случайность.

$$t_c = \frac{|M_1 - M_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \geq t_{c,teor}, \quad (3.5)$$

где  $t_{c,teor}$  - теоретическое значение t-критерия для заданной вероятности;  $n_1$  и  $n_2$  - число измерений в каждой из выборок;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  - величина стандартного отклонения каждой из выборок;  $M_1$  и  $M_2$  - среднее значение каждой из выборок.

На рисунке (3.4) показаны два набора измерений: для модели целого моста и для модели того же моста после повреждения одной из его опор.

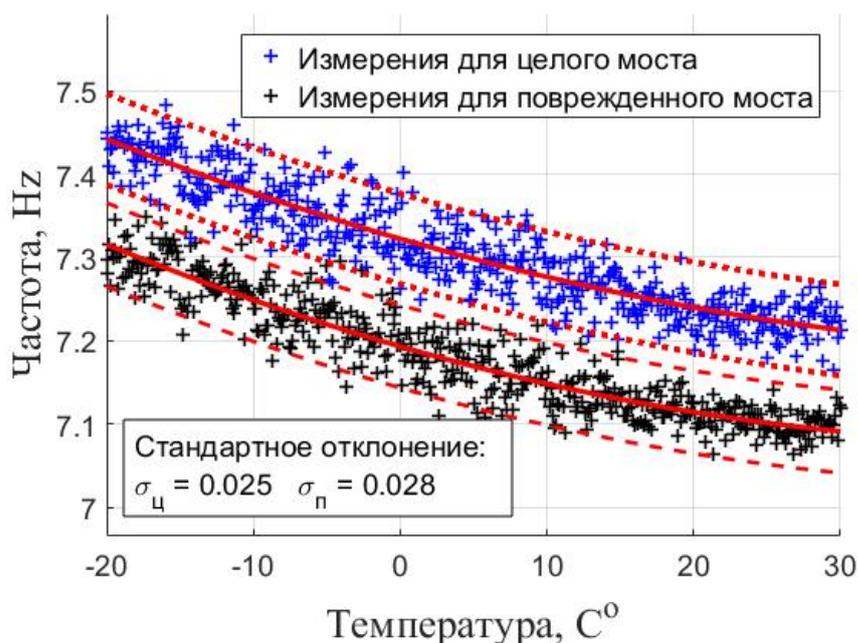


Рисунок 3.4 – График зависимости значения собственной частоты колебания транспортного моста на автодороге «Адлер – горноклиматический курорт Альпика-сервис» от температуры с и без учета повреждения моста

Заметно, что параметры линий регрессии отличаются, однако данное отклонение может являться случайностью. Воспользовавшись уравнением (3.5), легко убедиться, что, уровень значимости меньше 0,001 и, следовательно, с вероятностью больше 99.9% различия в статистических параметрах данных выборок не случайны

и модальные параметры сооружения действительно изменились в следствии повреждения или старения материалов моста.

При определении зависимости модальных параметров сооружения от температуры важно учитывать, что каждый элемент сооружения нагревается по-разному в зависимости от его геометрии, материала, цвета и других параметров. Также проведенные расчеты показали, что даже при одинаковой температуре элементы моста по-разному влияют на его модальные параметры. В таблице 3.2 показано как изменение температуры отдельных элементов модели моста от -20 до 30 °С влияет на его собственные частоты.

Таблица 3.2 – Значения собственных частот моста при изменении температуры его отдельных элементов

	Весь мост		Только опорные устройства		Все, кроме опорных устройств	
	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$
-20 °С	7.31	20.90	7.24	20.73	7.16	20.78
30 °С	7.10	20.52	7.09	20.57	7.10	20.56
Величина приращения	0.21	0.38	0.15	0.16	0.06	0.22

Таким образом, можно сделать вывод, что для оценки влияния температуры на модальные параметры моста, не достаточно учитывать только изменение параметров опорных устройств и, следовательно, заранее спрогнозировать приращение модальных параметров моста невозможно.

На основе проведенного анализа были сформулированы следующие рекомендации для учета влияния температуры на модальные параметры мостовых сооружений при проведении постоянного пассивного вибрационного мониторинга:

1. Проводятся измерения модальных параметров сооружения, в течении первого полугодия после его ввода в эксплуатацию, ремонтных работ или начала мониторинга. Эти ряды измерений принимаются в качестве эталонных. В течении

этого периода времени температура воздуха должна достигнуть значений близких к минимальным и максимальным расчетным.

2. Проводятся периодические измерения и определяются значения модальных параметров сооружения на протяжении всего периода его эксплуатации.

3. Строятся линии регрессии в эталонном и текущих состояниях сооружения. Линии регрессии измерений принимаются криволинейными или кусочно-линейными. В последнем случае участки кривой, соответствующие температурам меньше  $-5^{\circ}$  и больше  $+15^{\circ}$ , следует аппроксимировать отдельными линиями, что обусловлено уменьшением кривизны линии регрессии на этих участках. Проведение оценки технического состояния сооружения по данным о его колебаниях при малых отрицательных температурах не рекомендуется, в связи с возможным скачкообразным изменением значений модальных параметров.

4. Проводится сравнение двух наборов измерений (эталонного и за исследуемый период эксплуатации) и определяется вероятность того, что отличие их статистических параметров случайность, с использованием уравнения (3.5).

5. Делается вывод о наличии изменений модальных параметров сооружения и как следствие в параметрах его конструкции.

В независимости от применяемого метода вибродиагностики технического состояния мостов, неучёт годового цикла изменения модальных параметров сооружения может привести к ложным срабатываниям системы мониторинга или наоборот повреждение сооружения может остаться незамеченным. Возможность контроля данных изменений является важным преимуществом постоянного пассивного мониторинга над активным.

### **3.4. Определение значений модальных параметров мостовых сооружений при проведении пассивного вибрационного мониторинга**

Результат проводимого постоянного пассивного вибрационного мониторинга технического состояния мостов во многом зависит от точности измерения модальных параметров сооружения. Использование данных параметров

для корректировки расчетной модели моста, является необходимым условием для применения многих современных методов оценки технического состояния мостов. Рассмотрим основные методы определения модальных параметров сооружения, применимые для случая пассивного вибрационного мониторинга.

### 3.4.1. Определение значений модальных параметров мостовых сооружений с использованием свойств передаточных функций

В том случае, когда функция вынуждающей силы, действующей на мост, известна, для определения модальных параметров сооружения следует использовать передаточные функции (Рисунок 3.5) [4]:

$$H_{jk}(\omega) = \frac{\tilde{R}(\omega)}{\tilde{P}(\omega)}, \quad (3.6)$$

где  $\tilde{R}(\omega)$  и  $\tilde{P}(\omega)$  - изображение Фурье функции реакции системы и функции вынуждающей силы.

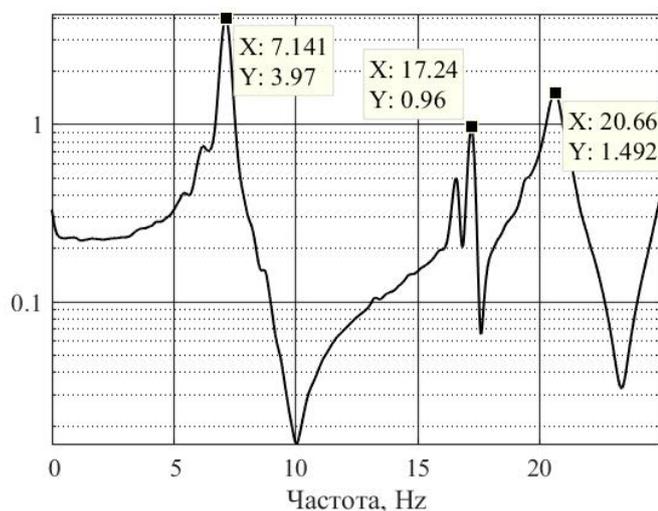


Рисунок 3.5 – График передаточной функции промежуточной опоры автомобильного моста. По вертикальной оси принят логарифмический масштаб

Получим уравнение для определения значения передаточной функции на каждой, представляющей интерес частоте  $\omega_k$ . Для этого воспользуемся

дифференциальным уравнением колебания системы с несколькими степенями свободы:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\}, \quad (3.7)$$

где  $[M]$  - матрица масс;  $[C]$  - матрица демпфирования;  $[K]$  - матрица жесткости;  $\{F\}$  - вектор узловых сил;  $\{\ddot{X}\}, \{\dot{X}\}, \{X\}$  - вектор ускорение, скоростей и перемещений точек системы.

Запишем следующее уравнение для определения вектора перемещений сооружения  $\{X\}$ :

$$\{X\} = [\Phi]\{Y\}, \quad (3.8)$$

где  $[\Phi]$  - матрица собственных форм колебания;  $\{Y\}$  - вектор обобщенных координат.

Тогда уравнение (3.7) примет следующий вид:

$$[M][\Phi]\{\ddot{Y}\} + [C][\Phi]\{\dot{Y}\} + [K][\Phi]\{Y\} = \{F\} \quad (3.9)$$

Умножим левую и правую части уравнения (3.9) на  $[\Phi]^T$ :

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{Y}\} + [\Phi]^T [C][\Phi]\{\dot{Y}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{Y\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (3.10)$$

Введем следующее обозначение:

$$\{f\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (3.11)$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (3.10):

$$\omega_k^2 [\Phi]^T [M][\Phi]\{\tilde{Y}\} - i\omega_k [\Phi]^T [C][\Phi]\{\tilde{Y}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{\tilde{Y}\} = \{\tilde{f}\} \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.12) получим уравнение для определения значения  $\tilde{Y}_j$ :

$$\omega_k^2 \cdot m_j \tilde{Y}_j - i\omega_k \cdot c_j \tilde{Y}_j + k_j \tilde{Y}_j = \tilde{f}_j \quad (3.13)$$

Преобразуем уравнение (3.13):

$$\tilde{Y}_j = \frac{\tilde{f}_j}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]}, \quad (3.14)$$

где  $\xi_j$  - модальный коэффициент демпфирования j-той формы колебаний;  $\omega_j$  - частота j-той формы колебаний.

Воспользуемся уравнением (3.11) и запишем уравнение для определения  $\tilde{f}_j$ :

$$\tilde{f}_j = \{\phi\}_j^T \{\tilde{P}(\omega)\} \quad (3.15)$$

Запишем уравнение для определения вектора изображений Фурье функций перемещения сооружения  $\{\tilde{X}(\omega)\}$  в следующей форме:

$$\{\tilde{X}\} = \sum_{j=1}^N \{\phi\}_j \tilde{Y}_j, \quad (3.16)$$

где N - число форм колебания рассматриваемых в расчёте.

Используя уравнения (3.14), (3.15) и (3.16) запишем уравнение для определения  $\{\tilde{X}\}$ :

$$\{\tilde{X}\} = \sum_{j=1}^N \frac{\{\phi\}_j^T \{\tilde{P}(\omega)\} \{\phi\}_j}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]} \quad (3.17)$$

Запишем уравнение (3.17) только для точки «а»:

$$\tilde{X}_a = \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{aj} \sum_{n=1}^D \phi_{nj} \tilde{P}_n(\omega)}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]}, \quad (3.18)$$

где D – число степеней свободы системы.

В том случае, если справедливо допущение о том, что реакция сооружения в точке «а» на j-й собственной частоте определяется только j-й собственной формой колебания, уравнение (3.18) может быть записано в следующем виде:

$$\tilde{X}_a \approx \frac{\phi_{aj} \sum_{n=1}^D \phi_{nj} \tilde{P}_n(\omega)}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]} \quad (3.19)$$

Тогда, используя полученное уравнение (3.19), запишем уравнение передаточной функции (Уравнение 3.6) для точки «а» в случае единственной узловой силы приложенной в точке «d»  $\tilde{P}_d(\omega)$ :

$$\frac{\tilde{X}_a}{\tilde{P}_d(\omega)} = H_{ad}(\omega) = \frac{\phi_{dj}\phi_{aj}}{m_j[\omega_k^2 - 2i\xi_j\omega_k\omega_j + \omega_j^2]} \quad (3.20)$$

В правой части уравнения (3.20) содержится вся информация о модальных параметрах сооружения, что позволяет определить их используя следующие условия:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[H_{ad}(\omega_j)] = 0 \\ \operatorname{Im}[H_{ad}(\omega_j)] = \frac{\phi_{dj}\phi_{aj}}{2\omega_j^2 m_j [1 - i\xi_j]} \end{cases} \quad (3.21)$$

Данные условия позволяют определить не только значения собственных частот, но и остальных модальных параметров мостового сооружения.

В общем случае, при проведении пассивного мониторинга функции сил, действующие на мостовое сооружение остаются неизвестными. Однако, если принять допущение о том, что функция внешнего воздействия является белым шумом [34,70], то есть ее спектральная мощность в исследуемом диапазоне постоянна, то вместо графиков передаточных функций можно использовать графики спектров Фурье функций колебания сооружения:

$$\tilde{X}_a(\omega) = H_{ad}(\omega) \cdot C, \quad (3.22)$$

где  $C$  - неизвестная константа значение которой зависит от параметров функции внешнего силового воздействия.

Следует отметить, что данное допущение используется в большинстве методов определения значений модальных параметров мостовых сооружений при проведении пассивного вибрационного мониторинга [50,81,91,100,123].

Воспользуемся уравнением (3.22) и определим значения собственных частот колебания сооружения, под действием слабых природных и техногенных воздействий, по пикам на спектре Фурье [42,109,136] (Рисунок 3.6) или энергетическом спектре [52,62].

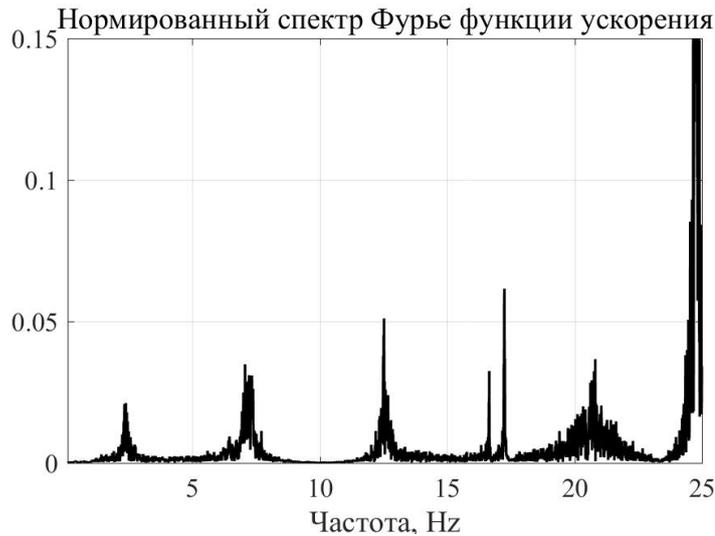


Рисунок 3.6 – Спектр Фурье функции ускорения верха центральной опоры (№2) модели трехпролетного моста

Для удобства определения значений собственных частот с использованием графика спектра Фурье функции колебания сооружения его предварительно следует аппроксимировать. Для этого воспользуемся функцией сглаживающего сплайна (Рисунок 3.7):

$$X = p \sum_j w_j [y_j - s(x_j)]^2 + (1-p) \int \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (3.23)$$

где  $p = 0 \div 1$  - параметр определяющий как точно сплайн повторяет исходный график;  $w_j$  - вес;  $s(x_j)$  - значение функции сплайна;  $y_j$  - значение исходной функции.

Значение ординат сплайна  $s(x_j)$  подбираются согласно уравнению (3.23), так, чтобы соответствующее значение  $X$  было минимальным. Применение плавающего среднего для аппроксимации графика спектра Фурье сигнала, в данном случае, не дает удовлетворительных результатов.

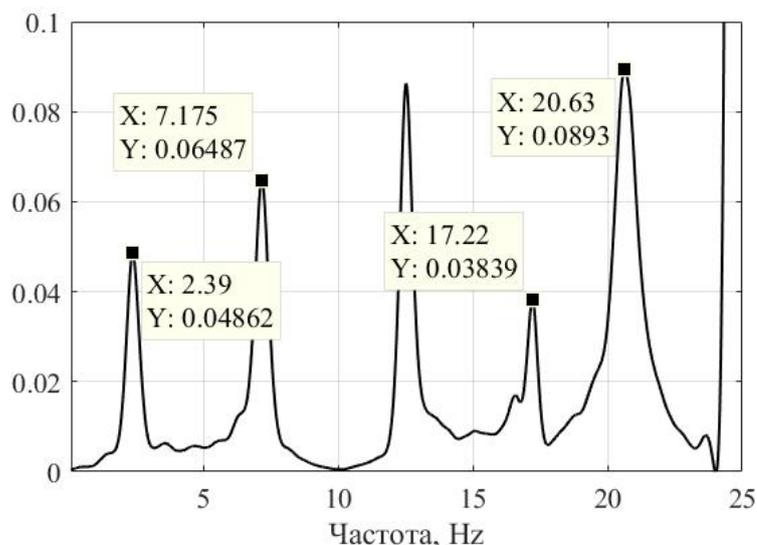


Рисунок 3.7 – Спектр Фурье функции ускорения верхней точки опоры №2 после аппроксимации сплайном

В случае использования допущения о постоянном спектральном составе функций вынуждающих сил, при каждом новом измерении, вне зависимости от других факторов, полученные значения модальных параметров сооружений будут несколько отличаться. Продемонстрируем это на примере спектра Фурье функции колебания верху промежуточной опоры моста (Рисунок 3.2) в поврежденном и целом состояниях. Результаты представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Значения собственных частот моста с поврежденными сваями

	$A_p = 1.00 A_0$ 50 расчетов		$A_p = 0.90 A_0$ 10 расчетов		$A_p = 0.80 A_0$ 10 расчетов	
	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$
Среднее значение ряда измерений	7.16	20.64	7.11	20.23	7.06	19.70
Стандартное отклонение ряда измерений	0.04	0.06	0.05	0.07	0.05	0.08
Доверительный интервал	$\pm 0.02$	$\pm 0.02$	$\pm 0.03$	$\pm 0.04$	$\pm 0.03$	$\pm 0.04$
Вероятность наличия повреждения в конструкции сооружения, %	-	-	99	99.9	99.9	99.9

Повреждение опоры моделировалось путем снижения площади поперечного сечения  $A_0$  полуметрового верхнего участка свай и полуметрового участка на глубине 8 м. Подобные повреждения могут произойти вследствие разжижения верхнего слоя грунта во время землетрясения. Здесь и далее для определения среднего значения частот и величины стандартного отклонения применялся метод максимального правдоподобия.

Указанная в таблице 3.3 вероятность наличия повреждения в конструкции сооружения получена с использованием t-теста Стьюдента в предположении, что число измерений  $n_2$  собственных частот целого сооружения значительно больше числа измерений  $n_1$  поврежденного сооружения и при этом  $n_2 \geq 50$ . Тогда справедливо следующее условие:

$$\frac{\sigma_2^2}{n_2} \ll \frac{\sigma_1^2}{n_1} \quad (3.24)$$

Отсюда окончательно получим уравнение для определения значения t-критерия:

$$t_c = \frac{|M_1 - M_2|}{\sigma_1} \sqrt{n_1} \geq t_{c, теор} \quad (3.25)$$

Следует отметить, что величина стандартного отклонения измерений для разных мостов может отличаться в разы [41,101], а чувствительность собственных частот сооружений к повреждениям при этом оставаться низкой. Таким образом определяемая с использованием уравнения (3.25) вероятность наличия повреждения в конструкции разных мостов может сильно различаться при том же количестве измерений и той же степени повреждений.

Несмотря на то, что значения собственных частот сооружения зачастую легко определяются по спектрам Фурье функций колебания сооружения, их одних недостаточно для оценки технического состояния мостового сооружения. Необходимо также определять значения собственных форм колебания сооружения и модальных коэффициентов демпфирования, которые, как показали опыты, проведенные другими авторами [93,110], более чувствительны к повреждениям чем собственные частоты.

Одним из способов определения значения собственных форм колебания системы при проведении пассивного мониторинга, является использование отношения изображений Фурье функций реакций сооружения в разных точках на слабое динамическое воздействие [110]:

$$\frac{\tilde{X}_a}{\tilde{X}_b} \approx \frac{\tilde{P}_d(\omega) \cdot \phi_{dj} \phi_{aj}}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]} \frac{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]}{\tilde{P}_d(\omega) \cdot \phi_{dj} \phi_{bj}} = \frac{\phi_{aj}}{\phi_{bj}} \quad (3.26)$$

Данное уравнение справедливо только для случая, когда собственные частоты расположены на удалении друг от друга и влиянием соседних форм колебания можно пренебречь.

В таблице 3.4 представлены значения отношения амплитуд собственных форм колебания верхней и нижней точек тела промежуточной опоры моста, для случая повреждения свайного фундамента в результате разжижения грунта.

Таблица 3.4 – Значение амплитуд форм колебания промежуточной опоры моста

	$A_p = 1.00 A_0$ 50 расчетов		$A_p = 0.90 A_0$ 10 расчетов		$A_p = 0.80 A_0$ 10 расчетов	
	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$
Среднее значение	1.28	10.51	1.30	11.87	1.31	12.34
Стандартное отклонение	0.04	0.08	0.05	0.09	0.05	0.10
Доверительный интервал	$\pm 0.02$	$\pm 0.03$	$\pm 0.03$	$\pm 0.05$	$\pm 0.03$	$\pm 0.06$
Вероятность факта наличия повреждения сооружения, %	-	-	<95	99.9	<95	99.9

Результаты расчетов, представленные в таблице 3.4 показывают, что собственные формы колебания сооружения действительно более чувствительны к повреждениям чем собственные частоты, однако точность их измерения несколько ниже из-за влияния соседних форм колебания. Воспользуемся уравнением (3.18) и запишем отношение изображений Фурье функций колебания сооружения с двумя степенями свободы в двух точках в случае действия на систему двух сил:

$$\frac{\tilde{X}_a}{\tilde{X}_b} = \frac{\phi_{a1} \sum_{n=1}^{N=2} \phi_{n1} \tilde{P}_n(\omega) \cdot S_2 + \phi_{a2} \sum_{n=1}^{N=2} \phi_{n2} \tilde{P}_n(\omega) \cdot S_1}{\phi_{b1} \sum_{n=1}^{N=2} \phi_{n1} \tilde{P}_n(\omega) \cdot S_2 + \phi_{b2} \sum_{n=1}^{N=2} \phi_{n2} \tilde{P}_n(\omega) \cdot S_1}, \quad (3.27)$$

где  $S_j = m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]$ ;  $N$  – число точек приложения сил.

Из уравнения (3.27) видно, что точность определения собственных форм колебаний зависит не только от модальных параметров системы, но и от функций внешнего силового воздействия.

Наличие повреждений в конструкции влияет не только на ее собственные частоты и формы колебания, но также и на коэффициент демпфирования. Так, в [35] указывается, что коэффициент демпфирования целого железобетона в среднем равняется 0.7-1.0%, в то время как у потрескавшегося он повышается вплоть до 4%. В свою очередь изменение коэффициента демпфирования влияет на остроту пиков на спектрах Фурье [106,110], что позволяет определить его значение экспериментально. Следует отметить, что значение коэффициента демпфирования, определяемого с использованием различных методов, может различаться более чем в два раза [62]. Также, ряд исследований показал, что коэффициент демпфирования в значительной степени зависит от температуры и интенсивности воздействия [62]: в 1992 году были представлены результаты серии тестов подвесного моста, которые показали, что коэффициент демпфирования изменяется даже при малых амплитудах колебания, соответствующих микросейсмическому воздействию, а увеличение температуры на 20 градусов снизило коэффициент демпфирования одной из мод в два раза.

Рассмотрим пример определения коэффициента демпфирования с использованием уравнения (1.1). Данное уравнение получено в предположении малого влияния соседних форм колебания. Значения  $\omega_{2,r}$  и  $\omega_{1,r}$  обычно определяются на графике модуля передаточной функции, однако также для этого может быть использована диаграмма Найквиста [61]. В таблице 3.5 представлены результаты определения коэффициентов демпфирования двух собственных форм колебания модели транспортного моста (Рисунок 3.2). Повреждение

моделировалось путем изменения коэффициента демпфирования бетона полуметровых участков свай фундамента промежуточной опоры на глубине 2 м. и 8 м.

Таблица 3.5 – Значение модальных коэффициентов демпфирования, в зависимости от степени повреждения свай

	20 расчетов $\xi = 0.7\%$		20 расчетов $\xi = 2\%$		20 расчетов $\xi = 4\%$	
	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$
Среднее значение	1.16	0.90	1.16	0.92	1.18	0.95
Стандартное отклонение	0.13	0.14	0.12	0.11	0.15	0.11
Доверительный интервал	0.06	0.06	0.05	0.05	0.07	0.05
Вероятность факта наличия повреждения сооружения, %	-	-	-	<95	<95	<95

Согласно результатам расчетов, приведенным в таблице 3.5, величина 95% доверительного интервала значений коэффициента демпфирования, превосходит величину изменений, вызванных точечными повреждениями в опорах.

Помимо частотного состава функций вынуждающих сил, на точность измерений коэффициента демпфирования влияют следующие факторы:

1. Наличие шумов от измерительных приборов.
2. Влияния соседних мод. Их влияние тем сильнее, чем больше коэффициент демпфирования исследуемой моды [65].
3. Большой шаг дискретизации передаточной функции.
4. Предварительная аппроксимация графика увеличивает значение коэффициента демпфирования.
5. Влияние температуры.

Таким образом определение значений модальных коэффициентов демпфирования сооружения, с точностью достаточной для определения его технического

состояния, при проведении пассивного вибрационного мониторинга является, в общем случае, невозможным.

Помимо описанных ранее в этой главе методов определения модальных параметров сооружения в настоящее время широкое распространение получил способ, позволяющий учесть влияние соседних форм колебания на исследуемую моду: аппроксимация графика передаточной функции. Предположим, что передаточная функция получена для динамической системы с постоянными во времени параметрами, тогда она может быть представлена в следующем виде [115]:

1. Рациональная дробная форма:

$$F(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^n b_k \cdot s^k}, \quad (3.28)$$

где  $s = i\omega$ .

Данная форма представляет собой отношение двух многочленов порядок которых не зависит друг от друга [113].

2. Разложение на простейшие дроби:

$$F(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{i\omega - \lambda_k^*}, \quad (3.29)$$

где  $R_k = \phi_k \gamma_k^T$ ;  $\phi_k$  - вектор собственных форм колебания;  $\gamma_k$  - коэффициент влияния форм;  $\lambda_k^*, \lambda_k = c_k \pm i\omega_k$  - комплексно-сопряженная пара полюсов;  $c_k$  - коэффициент демпфирования k-й моды;  $\omega_k$  - собственная частота колебания;  $(*)$  - комплексное сопряжение;  $N$  – число собственных форм колебания.

Обе формы представления передаточной функции обладают как своими преимуществами, так и недостатками. Представление передаточной функции в виде суммы простых рациональных дробей позволяет определить модальные параметры системы непосредственно в процессе аппроксимации, в то время как в дробно-рациональной форме для этого необходимо предварительно определить значения неизвестных констант и только после этого можно определить значения

модальных параметров. Недостатком разложения в виде суммы дробей является необходимость решения системы нелинейных уравнений.

На рисунке (3.8) представлен пример аппроксимации передаточной функции промежуточной опоры модели автомобильного моста (Рисунок 3.2).

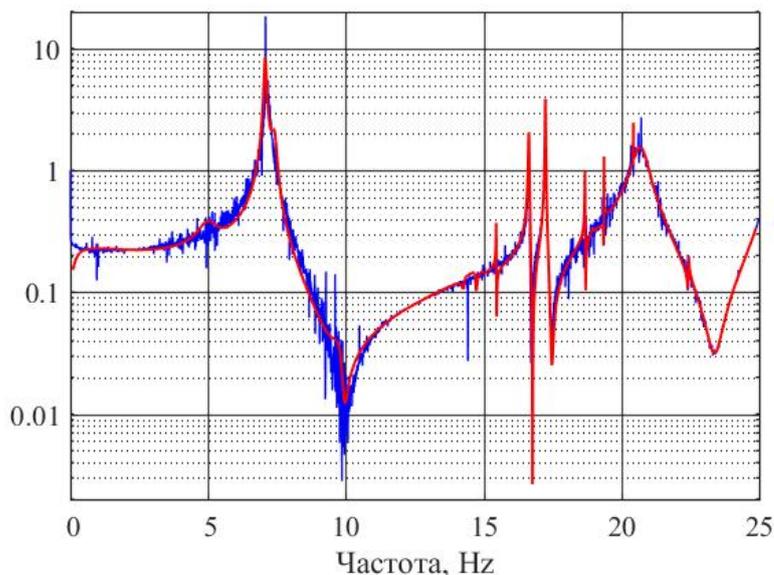


Рисунок 3.8 – График абсолютного значения передаточной функции верхней точки промежуточной опоры модели моста

Следует отметить, что аппроксимация всего графика целиком может быть затруднительна в следствии наличия шумов или большого числа собственных частот. В таком случае можно проводить аппроксимацию на заранее выбранных интервалах частот.

Наличие шумов на графике передаточной функции затрудняет аппроксимацию, поскольку в процессе проявляются «паразитные» частоты, что обусловлено наличием шумов в измерениях. Для их выявления необходимо проводить аппроксимацию несколько раз постепенно изменяя число удерживаемых членов ряда. В таком случае положение «паразитных» частот будет постоянно меняться, в то время как значения «истинных» собственных частот будут меняться слабо.

Поскольку определить передаточную функцию при проведении пассивного мониторинга в общем случае невозможно, то следует использовать метод аппроксимации спектров Фурье функций колебания [40] в предположении, что спектральная мощность функций вынуждающих сил постоянна. Продемонстрируем на примере функции колебания верха промежуточной опоры как данное допущение сказывается на точности измерений. В таблице (3.6) представлены результаты.

Таблица 3.6 – Значения собственных частот моста, определенные методом аппроксимации спектров Фурье функций колебания

	$A_p = 1.00 A_0$ . 50 измерений		$A_p = 0.90 A_0$ . 20 измерений		$A_p = 0.80 A_0$ . 20 измерений	
	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$
Точное значение	7.16	20.64	7.11	20.23	7.06	19.70
Среднее значение	7.11	20.60	7.04	20.27	7.04	19.68
Стандартное отклонение	0.05	0.12	0.05	0.10	0.06	0.11
Доверительный интервал	$\pm 0.02$	$\pm 0.02$	$\pm 0.03$	$\pm 0.05$	$\pm 0.03$	$\pm 0.05$
Вероятность факта наличия повреждения сооружения, %	-	-	99	99.9	99.9	99.9

Из результатов измерений, представленных в таблице 3.6 видно, что для данного метода характерна большое значение величины стандартного отклонения в связи непостоянной спектральной мощностью функции внешнего силового воздействия. Следует, также заметить, что среднее значение измерений не соответствует точному значению, а для первой собственной частоты точное значение не попадает в доверительный интервал.

### 3.5. Метод оценки технического состояния опор и опорных устройств моста с использованием свойств передаточных функций

Метод контроля изменения значений модальных параметров мостовых сооружений не позволяет проводить полноценный мониторинг их технического состояния. Он может быть использован для определения факта наличия повреждений, но не места и не степени повреждения элементов сооружения. Поэтому при проведении вибрационного мониторинга полученные значения модальных параметров обычно используются как исходная информация для корректировки модели моста, которая в свою очередь в дальнейшем используется в составе более сложных методов оценки технического состояния сооружений. Вместе с тем, как уже было показано ранее в данной главе, значения этих параметров при проведении пассивного мониторинга не могут быть определены точно, и потому полученная модель сооружения неизбежно будет содержать ошибку. Таким образом в независимости от применяемого метода оценки технического состояния мостовых сооружений точное определение места и степени повреждения при проведении пассивного мониторинга возможно только в случае наличия серьезных повреждений [58].

Для повышения точности оценки технического состояния опор и опорных устройств мостовых сооружений при проведении пассивного мониторинга автором предлагается воспользоваться свойствами передаточных функций и определить модальные параметры опор моста, как если бы они были отдельно стоящими. Исходными данными при этом будут служить функции поперечных колебаний верха опор и продольных колебаний балки пролетного строения.

Запишем функцию поперечной силы, действующей в опорном устройстве, в следующем виде:

$$P_{on.yc.}(t) = k_f(t, \Delta u) \cdot \Delta u + c_f(t, \Delta u) \cdot \Delta \dot{u}, \quad (3.30)$$

где  $\Delta u = u_b(t) - u_p(t)$ ;  $\Delta \dot{u} = \dot{u}_b(t) - \dot{u}_p(t)$ ;  $u_p(t)$ ,  $u_b(t)$  - перемещение верха опоры и балки пролетного строения соответственно;  $\dot{u}_p(t)$ ,  $\dot{u}_b(t)$  - скорость колебания верха

опоры и балки пролетного строения соответственно;  $k_f(t, \Delta u)$  - жесткость опорного устройства;  $c_f(t, \Delta u)$  - коэффициент демпфирования опорного устройства.

Поскольку, как отмечалось ранее в данной главе, интенсивность продольных колебаний мостового сооружения при слабых фоновых воздействиях не велика, то изменением значений параметров опорного устройства можно пренебречь. Тогда изображение Фурье уравнения (3.30) можно записать следующим образом:

$$\tilde{P}_{\text{оп.ус.}}(\omega) = [k_f - i\omega \cdot c_f] \cdot \Delta \tilde{U} \quad (3.31)$$

В случае, если пренебречь влиянием изгибающего момента, действующего в верхней точке опоры (Рисунок 3.9) на ее поперечный прогиб, а также воздействием ветра на опору вдоль оси моста, передаточную функцию для данной точки можно представить в следующем виде:

$$H_p(\omega) \approx \frac{\tilde{U}_p(\omega)}{\tilde{P}_{\text{оп.ус.}}(\omega)} = \frac{\tilde{U}_p(\omega)}{[\tilde{U}_b(\omega) - \tilde{U}_p(\omega)] \cdot [k_f - i\omega \cdot c_f]}, \quad (3.32)$$

где  $\tilde{U}_b(\omega)$  - изображение Фурье функции перемещения пролетного строения;  $\tilde{U}_p(\omega)$  - изображение Фурье функции перемещения верха опоры.

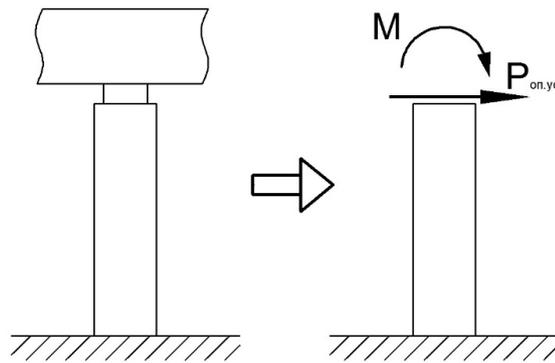


Рисунок 3.9 – Замена «отсеченного» опорного устройства сосредоточенной силой и изгибающим моментом

Отсюда, зная функции колебания опоры и пролетного строения, получим следующее уравнение для определения передаточной функции:

$$\frac{\tilde{U}_p(\omega)}{\tilde{U}_b(\omega) - \tilde{U}_p(\omega)} \approx H_p(\omega) \cdot [k_f - i\omega \cdot c_f] \quad (3.33)$$

Следует отметить, что множитель  $[k_f - i\omega \cdot c_f]$  в правой части уравнения (3.33) не влияет на значение резонансных частот на графике передаточной функции  $H_p(\omega)$ .

На рисунке (3.10) показан график передаточной функции полученный с использованием уравнения (3.33). Заметно, что значения резонансных частот снизились по сравнению со значениями, представленными в таблице (3.3). Эти значения соответствуют данной опоре, как если бы она была отдельно стоящей, без опорного устройства и опирающейся на нее балки пролетного строения. Следует также отметить изменившуюся «остроту» пиков в сравнении с графиком на рисунке (3.7), что свидетельствует об изменении значений модальных коэффициентов демпфирования (Уравнение 1.1).

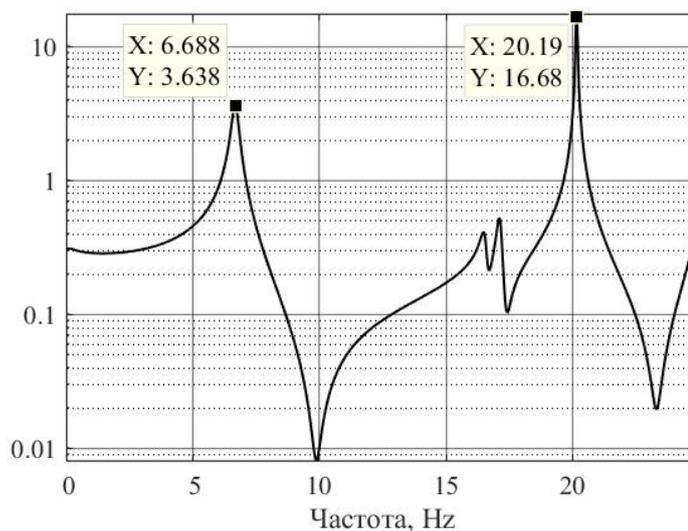


Рисунок 3.10 – График передаточной функции промежуточной опоры автомобильного моста

В таблице 3.7 представлены средние значения двух собственных частот полученные с использованием передаточной функции промежуточной опоры моста (Рисунок 3.2) с целыми и поврежденными сваями. В сравнении со

значениями, представленными в таблице 3.3, величина стандартного отклонения повысилась.

Таблица 3.7 – Значения собственных частот колебания модели моста определенных с использованием передаточной функции промежуточной опоры

	$A_p = 1.00 A_0$ . 50 измерений		$A_p = 0.90 A_0$ . 10 измерений		$A_p = 0.80 A_0$ . 10 измерений	
	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_2$
Точное значение	6.68	20.19	6.61	19.75	6.53	19.24
Среднее значение	6.68	20.17	6.61	19.70	6.49	19.22
Стандартное отклонение	0.04	0.06	0.12	0.06	0.11	0.05
Доверительный интервал	$\pm 0.02$	$\pm 0.03$	$\pm 0.08$	$\pm 0.03$	$\pm 0.08$	$\pm 0.03$
Вероятность факта наличия повреждения сооружения, %	-	-	<95	99.9	99.9	99.9

Большое значение величины стандартного отклонения измерений в таблице (3.7) объясняется воздействием ветра на опору вдоль оси моста, неучтенным при определении передаточной функции (Уравнение 3.33) [11]. Запишем уравнение для определения изображения Фурье перемещений верха опоры с учетом воздействия ветра:

$$\tilde{X}_a \approx \phi_{aj} \frac{\phi_{aj} \tilde{P}_{on.ys.}(\omega) + \sum_{n=1}^N \phi_{nj} \tilde{P}_{n,W}(\omega)}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]}, \quad (3.34)$$

где  $\tilde{P}_{n,W}(\omega)$  - функция давления ветра в точке «n».

Запишем уравнение (3.33) с учетом полученного уравнения для  $\tilde{X}_a$ :

$$\frac{\tilde{X}_a}{\tilde{P}_{on.ys.}(\omega)} \approx \frac{\phi_{aj}}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]} \left[ \phi_{aj} + \sum_{n=1}^N \phi_{nj} \frac{\tilde{P}_{n,W}(\omega)}{\tilde{P}_{on.ys.}(\omega)} \right] \quad (3.35)$$

Из анализа уравнения (3.35), можно сделать вывод, что точность полученной с использованием уравнения (3.33) передаточной функции зависит от функции

отношения продольной транспортной и ветровой нагрузок, а также от формы собственных колебаний. Таким образом использование уравнения (3.33) для железнодорожных мостов может быть более оправданным чем для автомобильных.

### 3.5.1. Определение места и степени повреждения опор и опорных устройств моста

Определение места и степени повреждения мостового сооружения является значительно более сложной задачей, чем выявление самого факта наличия повреждения. В общем случае, для этого требуется моделировать работу всего мостового сооружения в целом, что, в связи с большим числом неизвестных и малой точностью определения модальных параметров, является сложной задачей.

Метод определения модальных параметров опоры моста с использованием свойств передаточных функций (Уравнение 3.33), предложенный ранее в этой главе, может быть использован для определения технического состояния опоры моста отдельно от остальных элементов, что позволяет решать следующие задачи:

1. Определение степени повреждения опорных устройств моста. Поскольку в правую часть уравнения (3.33) в качестве множителя входят параметры опорных устройств  $k_f$  и  $c_f$ , то в случае их изменения также изменятся и все ординаты передаточной функции. Величина данного изменения при этом будет равна:

$$\frac{H_{p,u}(\omega) \cdot [k_{f,u} - i\omega \cdot c_{f,u}]}{H_{p,n}(\omega) \cdot [k_{f,n} - i\omega \cdot c_{f,n}]} \approx \frac{k_{f,u}}{k_{f,n}}, \quad (3.36)$$

где  $k_{f,u}$ ,  $c_{f,u}$  - параметры целого опорного устройства;  $k_{f,n}$ ,  $c_{f,n}$  - параметры поврежденного опорного устройства.

Следует отметить, что в случае повреждения тела или фундамента опоры изменения затронут преимущественно резонансные частоты.

2. Определение места и степени повреждения опор моста. Для этого следует провести дополнительное измерение колебания опоры в точке расположенной ниже верха опоры, тем самым «разбив» опору на два участка. Это позволяет

определить где произошло повреждение: ниже или выше второй точки. Поскольку параметры нижнего участка опоры остаются неизвестными, то его следует заменить пружинками эквивалентной жесткости (Рисунок 3.11).

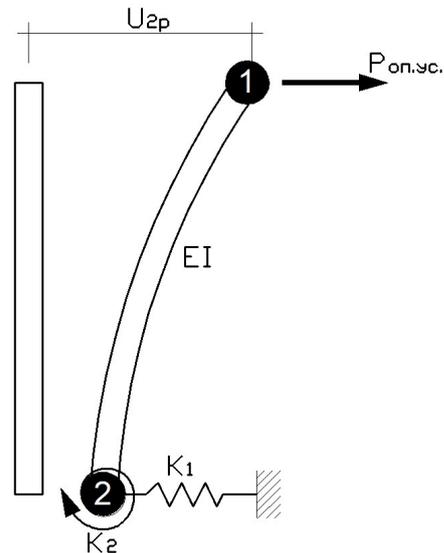


Рисунок 3.11 – Модель промежуточной опоры.

Вычислив значения жесткостей  $K_1$ ,  $K_2$  и  $EI$  можно определить на каком участке произошло повреждение и оценить степень повреждений.

Для определения значений неизвестных жесткостей  $K_1$ ,  $K_2$  и  $EI$  решим задачу обратную задаче об определении модальных параметров сооружения воспользовавшись следующей системой уравнений [47]:

$$\begin{cases} [[k] - \omega_n^2 [m]] \cdot \{\phi\}_n = 0 \\ \det [[k] - \omega_n^2 [m]] = 0 \end{cases}, \quad (3.37)$$

где  $[k]$  - матрица жесткости;  $[m]$  - матрица масс;  $\{\phi\}_n$  - вектор собственных форм колебаний;  $\omega_n$  - значение собственной частоты колебания системы;  $\det[...]$  - определитель матрицы.

Число степеней свободы модели опоры, изображенной на рисунке 3.11 составляет 4: две поступательных и две вращательных. Воспользуемся методом статической конденсации [28,47] и исключим безмассовые степени свободы из рассмотрения:

$$[k]_{con} = \begin{vmatrix} S & -S \\ -S & K_1 + S \end{vmatrix}, \quad (3.38)$$

$$[m]_{con} = \begin{vmatrix} M / 2 & \\ & M / 2 \end{vmatrix}, \quad (3.39)$$

$$\text{где } S = \frac{12EI}{H^3} \left[ 1 - \frac{12EI + 3HK_2}{12EI + 4HK_2} \right].$$

Поскольку  $K_1$  и  $K_2$  являются динамическими жесткостями и зависят от частоты, то систему уравнений (3.37) можно использовать для записи двух систем уравнений из трех уравнений для определения значения трех неизвестных жесткостей для каждой собственной частоты:

$$\begin{cases} [[k]_{con,1} - \omega_1^2 [m]_{con}] \cdot \{\phi\}_1 = 0 \\ \det [[k]_{con,1} - \omega_1^2 [m]_{con}] = 0 \end{cases}, \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} [[k]_{con,2} - \omega_2^2 [m]_{con}] \cdot \{\phi\}_2 = 0 \\ \det [[k]_{con,2} - \omega_2^2 [m]_{con}] = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Пренебрегая изменением значения массы поврежденной опоры и решая системы уравнений (3.40) и (3.41) относительно неизвестных значений жесткостей, можно определить место повреждения опоры путем сравнения полученных значений жесткостей с эталонными. Вместе с тем, следует отметить, что в общем случае повреждение отдельных элементов сооружения слабо сказывается на значениях элементов матрицы жесткости. Однако в случае динамических жесткостей  $K_1$  и  $K_2$  данное изменение может достигать 30%, что позволяет использовать уравнения (3.40) и (3.41) несмотря на погрешности при определении значения модальных параметров. Столь сильное влияние повреждений объясняется тем, что динамическая жесткость представляет собой функцию обратную передаточной функции.

### 3.6. Выводы

1. Проведено исследование влияния годовых температурных колебаний на модальные параметры мостовых сооружений. Предложен метод учета этих изменений в случае проведения пассивной вибродиагностики технического состояния мостов.

2. Использование допущения о постоянном спектральном составе функций внешних силовых воздействий позволяет значительно упростить задачу об определении модальных параметров мостовых сооружений. Вместе с тем, результаты проведенных расчетов показывают, что в связи с малой чувствительностью этих параметров к повреждениям, необходимо проводить многократные измерения для точного определения динамических характеристик сооружений.

3. Предложен новый метод оценки технического состояния опор и опорных устройств мостов по данным пассивной вибродиагностики. Метод позволяет значительно упростить процедуру определения их технического состояния в случае мониторинга многопролетных транспортных мостов.

## **ГЛАВА 4 ОЦЕНКА ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ ОБ ИХ КОЛЕБАНИЯХ ВО ВРЕМЯ СЛАБЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ**

### **4.1. Общие замечания**

При проведении пассивной вибродиагностики транспортных мостовых сооружений источниками возбуждения колебаний конструкции могут являться не только транспортная и ветровая нагрузки, давление воды на опоры моста, но и сейсмическая нагрузка. К ее преимуществам можно отнести следующее:

1. параметры каждого землетрясения уникальны, а значит для исследуемого моста всегда можно выбрать те из них, которые удовлетворяют требованиям по минимальной и максимальной интенсивности воздействия;
2. во время землетрясения динамическому воздействию подвергается все сооружение вне зависимости от его геометрических характеристик;
3. функция колебания грунта во время землетрясения может быть записана и, следовательно, определена передаточная функция.

Вместе с тем, даже слабые землетрясения являются редким событием и их числа может быть недостаточно для проведения постоянного пассивного мониторинга технического состояния мостовых сооружений.

### **4.2. Определение периода повторяемости слабых землетрясений в районе Керченского пролива**

Рассмотрим в качестве примера район Керченского пролива и определим для него период повторяемости слабых землетрясений, применимых для проведения пассивного мониторинга мостов. Данный район был выбран поскольку согласно картам ОСР-2016 он входит в число наиболее сейсмически опасных районов России и характеризуется высокой современной тектонической активностью,



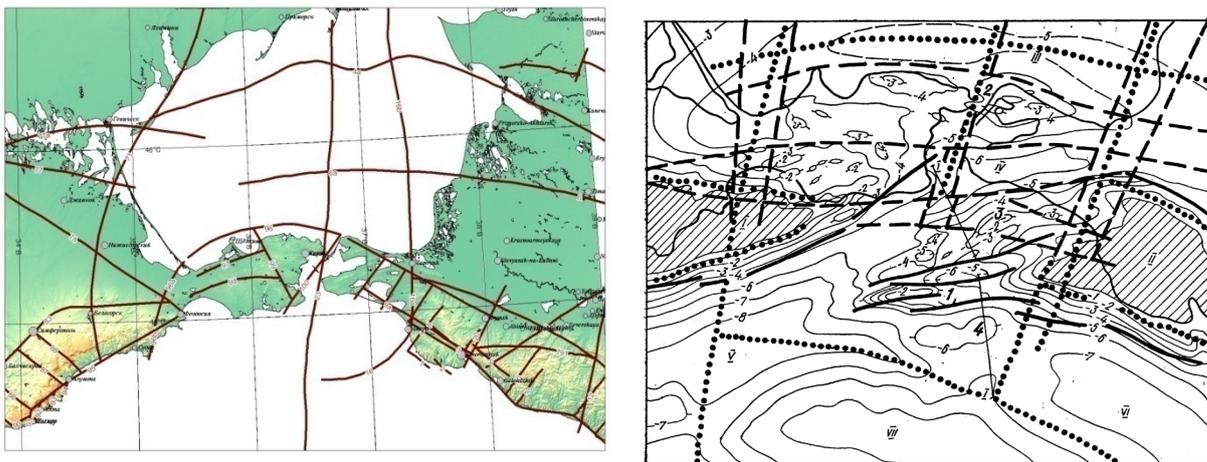


Рисунок 4.2 – Расположение активных разломов в районе Керченского пролива

Для определения периода повторяемости слабых землетрясений воспользуемся вероятностным методом оценки сейсмической опасности района [145]. Запишем уравнение для определения значения вероятности  $\lambda$ , при которой уровень колебаний грунта  $A_0$  будет достигнут или превышен величиной  $A$  [66]:

$$\lambda(A \geq A_0) = \sum_{i=1}^{N_s} v_i \iint f_{M_i}(m) f_{R_i}(r) P[A(m, r) \geq A_0 | m, r] dm dr, \quad (4.1)$$

где  $f_{M_i}(m)$  - функция плотности вероятности магнитуд;  $f_{R_i}(r)$  - функция плотности вероятности расстояния от эпицентра до исследуемого участка;  $P[A(m, r) \geq A_0 | m, r]$  - вероятность превышения пикового ускорения  $A_0$ , в случае, если землетрясение магнитудой « $m$ » произошло на расстоянии « $r$ »;  $v_i$  - частота возникновения землетрясений магнитудой больше  $m_{\min}$  для отдельного источника « $i$ » из общего числа источников  $N_s$ .

Определим неизвестные параметры, входящие в уравнение (4.1). Для этого территория вокруг Керченского пролива была «разбита» автором на несколько сейсмогенерирующих зон (Рисунок 4.1) исходя из расположения разломов и эпицентров землетрясений, их возраста и максимальной магнитуды (Рисунок 4.3).

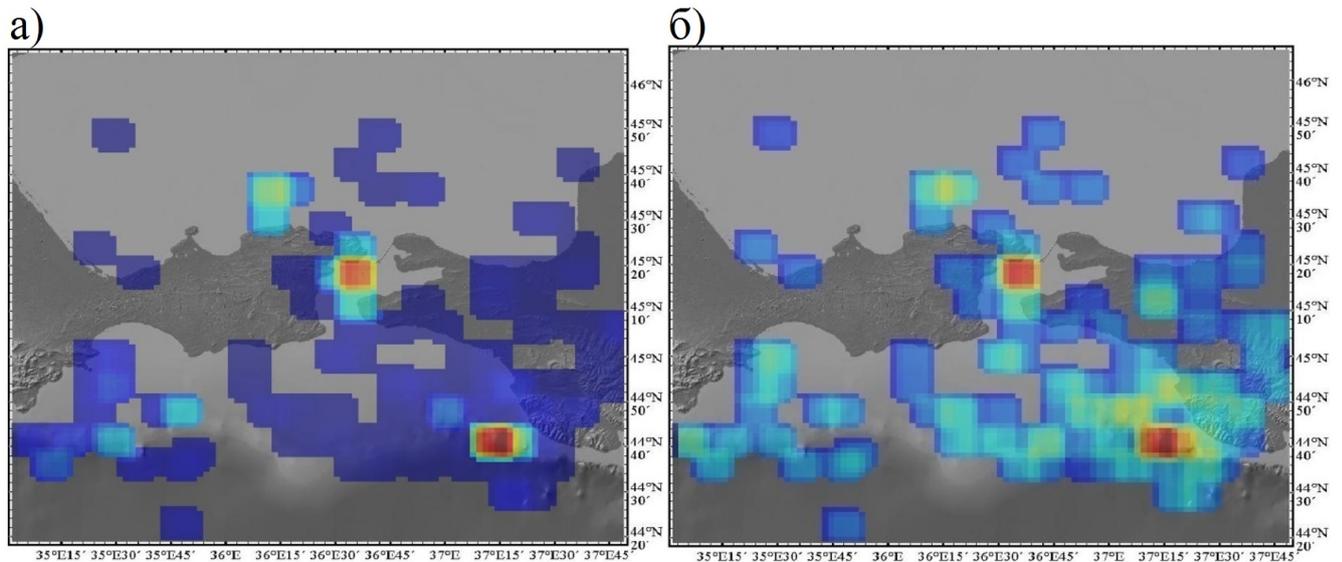


Рисунок 4.3 – Распределение эпицентров: а) по возрасту  
б) по магнитудам

Для каждой из сейсмогенерирующих зон максимальная магнитуда была принята меньшей, чем у зарегистрированных там землетрясений. Для данных зон была использована модель сейсмогенных поверхностей, равномерно распределенных по глубине. В тех точках, в которых согласно имеющейся базе данных в прошлом находились эпицентры землетрясений, были расположены точечные источники с максимальными значениями магнитуд равными максимальной магнитуде землетрясений, зарегистрированных в данной зоне, а минимальная магнитуда принята равной максимальной магнитуде, соответствующей сейсмогенерирующей зоны. Такой подход позволяет учесть возможность смещения расположения эпицентров будущих землетрясений и вместе с тем принять во внимание тот факт, что вероятность возникновения мощного землетрясения в местах отличных от мест скопления эпицентров старых землетрясений невелика [13].

В общем случае между числом землетрясений и магнитудой существует зависимость, называемая законом Гуттенберга-Рихтера (G–R) [66]:

$$\text{Log}(N) = a - bm, \quad (4.2)$$

где  $m$  – магнитуда;  $N$  – число событий магнитудой равной или большей выбранной « $m$ »;  $a$  и  $b$  – константы, которые зависят от  $m$  и  $N$ .

Для определения значений параметров « $a$ » и « $b$ » для каждой из выделенных зон автором была собрана база данных по землетрясениям из различных источников [1,3,19,27,73], которые перекрывают период в 3000 лет. В таблице 4.1 представлены определенные автором на основании полученной базы данных параметры сейсмогенных зон.

Таблица 4.1 – Параметры сейсмогенных зон

Номер сейсмогенной зоны	Тип механизма разлома	Максимальная ожидаемая магнитуда	Минимальная ожидаемая магнитуда	Скорость деформаций, мм/год	Площадь разлома, км <sup>2</sup>	Глубина, км
1	Сбросо-сдвиговой	5.2	4.5	2.1	15	8-50 (24)
		6.0			85	-
2	Сдвиговой	6.5		2.0	255	8-50 (24)
		7.5			2110	-
3	Сбросо-сдвиговой	6.5		5.7	255	8-50 (24)
		7.5			2110	-
4	Сбросо-сдвиговой	5.5		2.3	28	8-50 (24)
5	Сбросо-сдвиговой	6.0		3.3	85	8-50 (24)
		7.0			795	-

В таблице 4.2 представлены полученные автором методом наименьших квадратов значения параметров  $a$  и  $b$  для каждой из зон с указанием 95% доверительного интервала.

Таблица 4.2 – Значения параметров  $a$  и  $b$  для сейсмогенных зон

Номер сейсмогенной зоны	$a$	$b$
1	1.797	0.609
	$\pm 0.166$	$\pm 0.0451$

2	2.02	0.658
	$\pm 0.415$	$\pm 0.075$
3	6.659	1.914
	$\pm 0.717$	$\pm 0.134$
4	3.511	1.086
	$\pm 0.571$	$\pm 0.1616$
5	2.416	0.8153
	$\pm 0.668$	$\pm 0.1149$

Анализ полученных зависимостей логарифма среднего числа землетрясений от магнитуды показал хорошее совпадение с законом Гутенберга-Рихтера (Уравнение 4.2). Ни у одной из зон не было обнаружено площадки «характерной» магнитуды [51] (Рисунок 4.4).

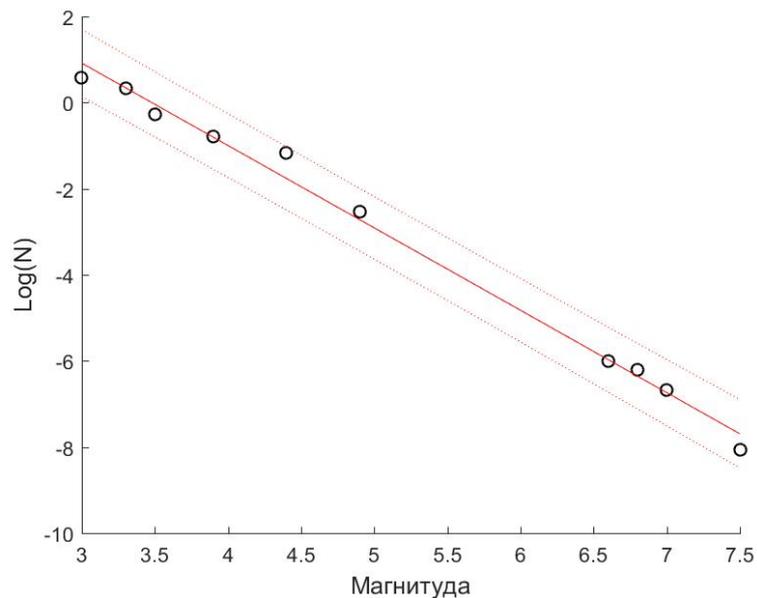


Рисунок 4.4 – Зависимость логарифма среднего годового числа землетрясений от магнитуды для зоны 3

При проведении вероятностного анализа необходимо подобрать модель затухания колебаний в земной коре адекватно отражающую местные условия. В общем случае, для создания такой модели требуется информация о пиковых

ускорениях грунта во время землетрясений, зарегистрированные несколькими станциями, расположенными на разном расстоянии от эпицентров с указанием средней скорости поперечной волны  $V_{s30}$  в грунте под станциями. В случае, если такая информация отсутствует, можно воспользоваться готовыми моделями, которых на сегодняшний день было предложено большое количество. Так в [139] представлено свыше 400 моделей, многие из которых позволяют учесть магнитуду землетрясений, расстояние до эпицентра, механизм разлома и скорость поперечной волны  $V_{s30}$  на исследуемом участке. В данной работе автором была использована модель S. Akkar (2014) созданная для территории Европы и Среднего Востока [30,77]. В таблице 4.3 представлены данные о землетрясениях, использованных при создании модели.

Таблица 4.3 – Данные о землетрясениях, использованных для модели S. Akkar (2014)

Минимальная магнитуда землетрясений	Максимальная магнитуда землетрясений	Скорость поперечной волны $V_{s30}$ для скального грунта, м/с	Максимальное расстояние до эпицентра	Минимальное расстояние до эпицентра
4	7.5	Любая (мало данных для $V_{s30} > 800$ м/с)	200 км	Нет данных

Дальнейшая оценка сейсмичности района Керченского пролива проводилась автором для скального грунта с сейсмической жесткостью 800 т/м·с, что позволяет повысить точность при использовании эмпирических моделей затухания колебаний в земной коре [125].

Для учета возможности изменения пикового ускорения колебания скального грунта в зависимости от расположения площадки строительства в Керченском проливе, автором было рассмотрено несколько точек расположенных вдоль оси моста строящегося в данный момент через пролив. На рисунке (4.5) показан график зависимости периода повторяемости землетрясений от пикового ускорения для точек с наибольшей и наименьшей интенсивностью колебания грунта.

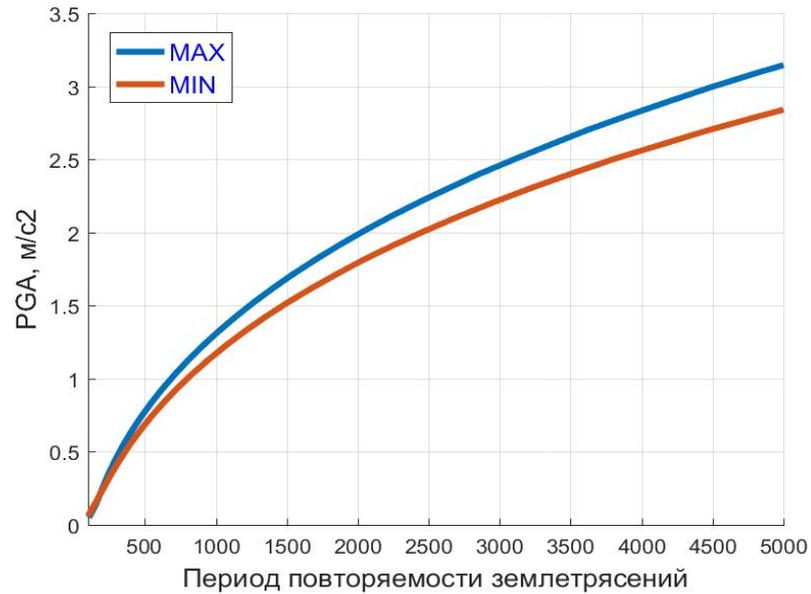


Рисунок 4.5 – Зависимость периода повторяемости землетрясений от пикового ускорения для наиболее и наименее опасных участков на площадке строительства. Вероятность превышения 5%

На рисунке (4.6) показан, полученный автором, график зависимости вероятности слабых землетрясений, с пиковым ускорением скального грунта меньше  $0.025 \text{ м/с}^2$ , от периода повторяемости для наиболее опасного участка.

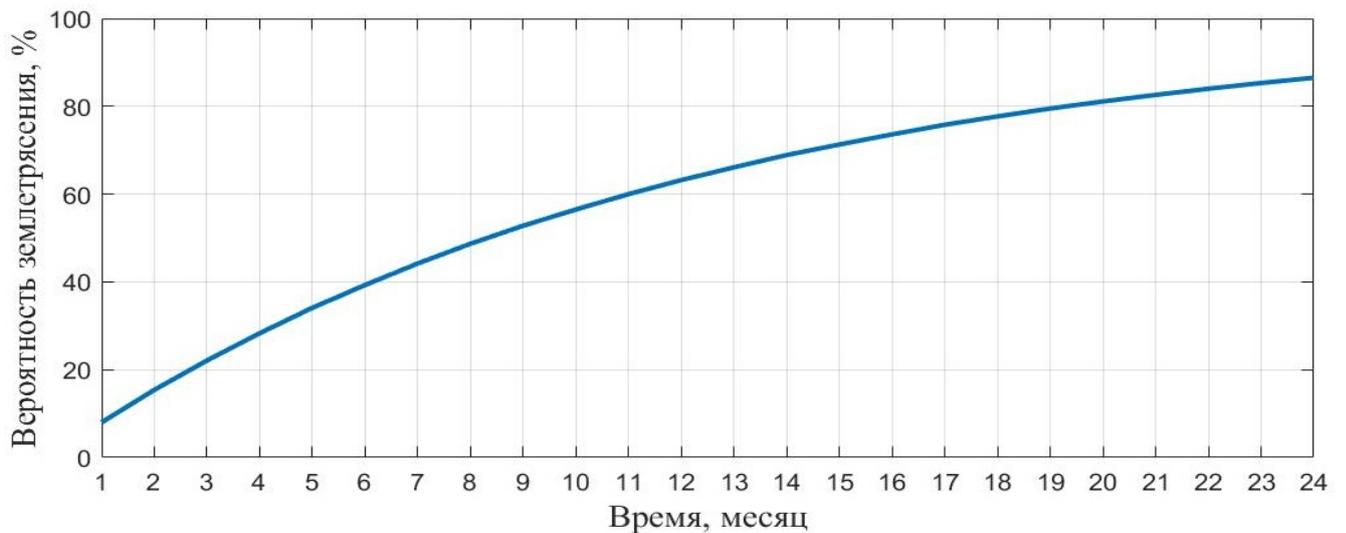


Рисунок 4.6 – Зависимость вероятности слабых землетрясений от периода повторяемости

#### 4.2.1. Определение пиковых значений колебания поверхности площадки строительства

Для проверки принятых во время проведения вероятностного анализа сейсмичности Керченского пролива допущений, определим значения пиковых колебаний поверхности грунта площадки строительства во время землетрясений и сравним их со значениями, определенными согласно положениям, соответствующих современных нормативных документов.

В соответствии с требованиями современных нормативных документов по проектированию сооружений в сейсмоопасных районах, для определения пиковых параметров колебания поверхности строительной площадки следует применять два метода: использование нормативных коэффициентов или точное решение с использованием линейного или нелинейного методов [146,149,153].

В нормах Российской Федерации [145] для определения влияния грунтовых условий используется «поправочный коэффициент на динамические свойства расчетной грунтовой толщи»:

$$K_3 = 2^{1,67 \lg \left( \frac{655}{\rho V_s} \right)} \quad (4.3)$$

Значение 655 в числителе объясняется тем, что пиковое ускорение для района, где располагается строительная площадка, определяется исходя из балльности данного региона на картах ОСР, которые были составлены для референтного грунта с сейсмической жесткостью 655 т/м<sup>2</sup>с. На рисунке (4.7) показан график зависимости значения поправочного коэффициента от сейсмической жесткости. В [145] не указываются границы применимости данной формулы и возможные погрешности в тех случаях, когда сейсмическая жесткость расчетного слоя грунта значительно отличается от сейсмической жесткости референтного грунта. В статье [14] было показано, что уравнение (4.3) является частным случаем уравнения Цеппритца и не учитывает резонансных явлений в грунте, а также оно справедливо только при малых приращениях балльности (меньше единицы). Таким образом диапазон применимости формулы без учета резонансных явлений составляет:

$$\rho V_s = 160 \div 2600 \text{ т/м}^2\text{с} \quad (4.4)$$

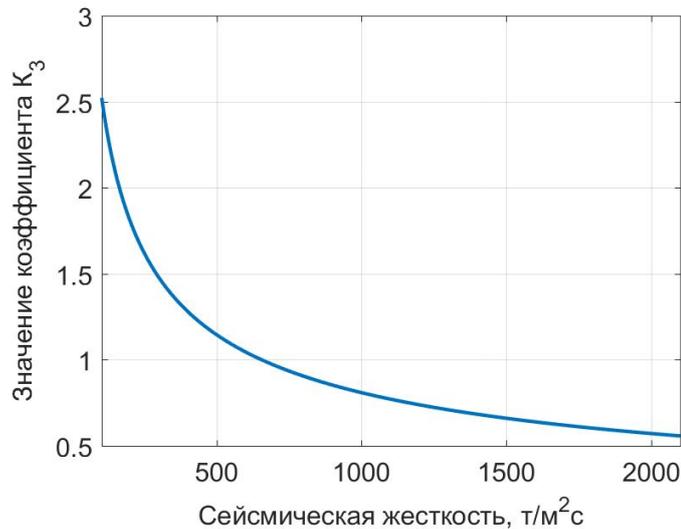


Рисунок 4.7 – Значение поправочного коэффициента K<sub>3</sub>

Согласно нормативным документам Eurocode 8: Part 1 и ASCE 7-10, влияние грунтовых условий на пиковые значения ускорений, можно определить используя нормативные коэффициенты и спектры ответов, которые зависят от категории грунта расчетной 30 метровой толщи строительной площадки. Для выбора категории грунта необходимо найти среднее значение скорости поперечной волны для расчетной грунтовой толщи или, если подобные данные отсутствуют, провести стандартное пенетрационное испытание [146,149]. Также данные нормативные документы допускают возможность применения линейного или нелинейного методов определения напряженно-деформированного состояния массива грунта [119]. Зависимость модуля сдвига, коэффициента демпфирования и относительных деформаций для линейного эквивалентного и нелинейного методов допускается определять по результатам лабораторных испытаний, но также они могут быть взяты из научных трудов, с соответствующим обоснованием.

Для определения параметров колебаний многослойного массива грунта, лежащего в основании площадки строительства и опирающегося на упругое полупространство, воспользуемся решением, полученным в [18] для массива

грунта, лежащего на жестком основании, а также получим уравнение для касательных напряжений на поверхности упругого полупространства.

Запишем уравнения падающей  $u_I$  и отраженной  $u_R$  волн на границе упругого полупространства в следующем виде:

$$\begin{cases} u_I = u_I(z + \beta_r \cdot t) \\ u_R = u_R(z - \beta_r \cdot t) \end{cases} \quad (4.5)$$

где  $u_I$  - падающая волна;  $u_R$  - отраженная волна;  $\beta_r$  - скорость поперечной волны в упругом полупространстве.

Тогда уравнение для касательных напряжений на границе упругого полупространства во временной области примет вид [79]:

$$\tau_B(t) = \mu_r \left( \frac{\partial u_I}{\partial z} + \frac{\partial u_R}{\partial z} \right) \quad (4.6)$$

Продифференцируем систему уравнений (4.5):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_I}{\partial z} = \frac{V_I}{\beta_r} \\ \frac{\partial u_R}{\partial z} = -\frac{V_R}{\beta_r} \end{cases} \quad (4.7)$$

Тогда, уравнение (4.6) принимает следующий вид:

$$\tau_B(t) = \frac{\mu_r}{\beta_r} [V_I(t) - V_R(t)] \quad (4.8)$$

Найдем изображение Фурье по времени уравнения (4.8):

$$\tilde{\tau}_B(\omega) = i\omega\beta_r\rho_r [\tilde{u}_I(\omega) - \tilde{u}_R(\omega)] \quad (4.9)$$

Пусть  $\tilde{u}_R = \tilde{u}_B - \tilde{u}_I$ . Тогда уравнение (4.9) принимает окончательный вид:

$$\tilde{\tau}_{N+1}(\omega) = -S_r \cdot \tilde{u}_B(\omega) + 2S_r \cdot \tilde{u}_I(\omega), \quad (4.10)$$

где  $\tilde{u}_B = \tilde{u}_{N+1}$  - перемещение границы упругого полупространства;  $S_r = i\omega \cdot \beta_r \rho_r$ .

Отметим, что выражение  $2 \cdot \tilde{u}_I(\omega)$  представляет собой изображение Фурье функции колебания свободной поверхности скального грунта (Рисунок 4.8). В том



Полученное решение позволяет определять напряженно-деформированное состояние всех слоев грунтового массива строительной площадки без необходимости применения передаточных функций, используемых во многих программах: ProShake, EERA, SHAKE91, DeepSoil [36,60,72].

Уравнение (4.11) в отличие от решения, описанного в [18], может быть использовано для определения напряженно-деформированного состояния слоистого массива грунта в том случае, когда сейсмическое воздействие задано в виде сейсмической волны падающей на границу скального грунта лежащего в основании этого массива. Функция колебания частиц грунта при распространении такой сейсмической волны может быть получена в случае записи акселерограммы в точке выхода скального грунта на дневную поверхность (Рисунок 4.8).

Воспользуемся полученной системой уравнений (4.11) и определим пиковое ускорение колебаний поверхности массива грунта в районе Керченского пролива (Рисунок 4.9).

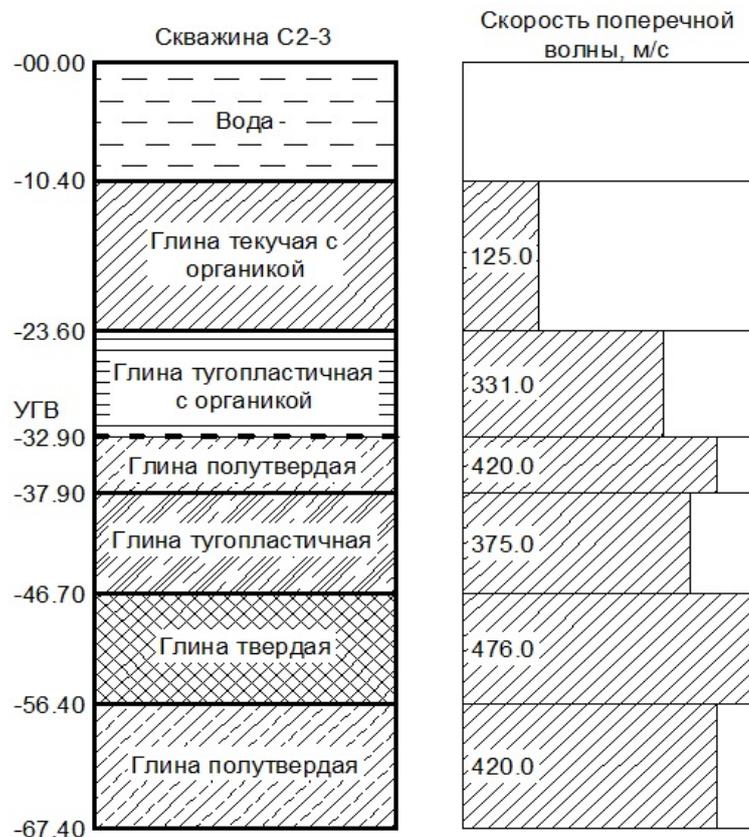


Рисунок 4.9 – Схема скважины С2-3 с указанием скорости поперечной волны в грунте

При расчете был использован линейный эквивалентный метод [135,139,140] с моделью «GeoIndex Model» [116], которая устанавливает зависимость между величиной относительных деформаций и параметрами грунта. Данная модель подходит для расчета различных типов грунтов с широким диапазоном характеристик, за исключением скального грунта, мощных залежей гравия и грунтов с очень высоким индексом пластичности ( $PI > 50$ ).

Следует отметить, что несмотря на то, что полученное решение в области частот (Уравнение 4.11) является точным в рамках принятых допущений, в случае использования линейного эквивалентного метода необходимо дополнительно «разбивать» каждый слой грунта на подслои, для учета нелинейности деформаций и более точного определения их значений внутри каждого слоя.

Для определения пиковых параметров колебания поверхности строительной площадки были использованы акселерограммы 10 землетрясений, эпицентры которых были расположены в непосредственной близости от моста через Керченский пролив. Для дальнейшего анализа было выбрано среднее и максимальное значение 10 пиковых ускорений, полученных в результате проведенного расчета. В таблице (4.4) представлены результаты расчетов для скального грунта и поверхности массива грунта, показанного на рисунке (4.9), для трех значений вероятности превышения в соответствии с картами ОСР-2016.

Таблица 4.4 – Пиковые значения ускорения колебания грунта, определенные в результате расчета

	Пиковое ускорение поверхности строительной площадки, м/с <sup>2</sup>		
	10%	5%	1%
Средние значения пикового ускорения	2.5	3.1	4.1
Максимальное значение пикового ускорения	2.8	3.6	5.5

Сравним представленные в таблице (4.4) значения пикового ускорения колебания поверхности грунта с нормативными значениями, определенными согласно картам ОСР-2016 и [145]. В таблице 4.5 представлены нормативные пиковые значения.

Таблица 4.5 – Нормативные пиковые значения ускорения колебания грунта

Карта ОСР - 2016	А	В	С
Вероятность превышения	10%	5%	1%
Период	50 лет	50 лет	50 лет
Пиковое ускорение (PGA), м/с <sup>2</sup>	2.0	4.0	4.0
PGA*K <sub>3</sub> , м/с <sup>2</sup>	2.39	4.79	4.79

Сравнение полученных автором результатов расчета показывают преимущественно большие пиковые ускорения грунта, чем те, которые получены согласно картам ОСР-2016 и [145]. Это связано с тем, что дно Керченского пролива сложено слабыми осадочными породами [53], которые усиливают пиковые значения ускорения колебаний более чем в два с половиной раза, в том числе в результате резонансных явлений, которые не учитываются в случае применения коэффициента K<sub>3</sub> (Уравнение 4.3) [14]. Таким образом можно сделать вывод, что полученный график зависимости вероятности слабых землетрясений от периода повторяемости для скальных грунтов в районе Керченского пролива (Рисунок 4.6) может быть применен для оценки возможности проведения постоянной пассивной вибродиагностики технического состояния мостовых сооружений с использованием данных о колебании мостов под действием слабых землетрясений в данном районе.

В качестве примера для дальнейшего расчета был использован трехпролетный автомобильный мост, показанный на рисунке (3.2). Параметры расчетного массива грунта приняты равными параметрам грунта площадки строительства данного моста. В результате серии расчетов было определено максимальное ускорение колебания поверхности скального грунта, при котором для данного моста

соблюдается допущение о его линейной работе:  $0.025 \text{ м/с}^2$ . В соответствии с графиком на рисунке (4.7) вероятность землетрясения с пиковым ускорением скального грунта меньше или равным  $0.025 \text{ м/с}^2$  и периодом повторяемости полгода составляет 40%. Таким образом, можно сделать вывод о малой пригодности данного типа воздействия для проведения постоянного пассивного мониторинга технического состояния мостовых сооружений.

Следует отметить, что график на рисунке (4.6), учитывает не только землетрясения с заданной интенсивностью  $0.025 \text{ м/с}^2$ , но также и с меньшей интенсивностью. Таким образом, часть землетрясений окажутся слишком слабыми чтобы вызвать регистрируемые имеющимся оборудованием колебания. Таким образом, вероятность землетрясений пригодных для проведения мониторинга окажется еще ниже.

### **4.3. Определение значений модальных параметров мостовых сооружений по данным об их колебаниях во время слабых землетрясений**

Получим уравнение для определения передаточных функций всех точек мостового сооружения во время землетрясения. Для этого воспользуемся уравнением колебания системы с несколькими степенями свободы и с несколькими точками опирания:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} - [M][U]\{\ddot{u}_g\}, \quad (4.12)$$

где  $[M]$  - матрица масс;  $[C]$  - матрица демпфирования;  $[K]$  - матрица жесткости;  $\{F\}$  - вектор узловых сил;  $\{\ddot{X}\}, \{\dot{X}\}, \{X\}$  - вектор относительного ускорения, скоростей и перемещений точек системы соответственно;  $\{\ddot{u}_g\}$  - вектор функций колебания грунта у каждой точки опирания;  $[U]$  - матрица смещения точек системы при статическом перемещении опоры на единицу длины в направлении сейсмического движения.

В том случае, если функции колебания точек опирания сооружения отличаются незначительно справедливо следующее допущение:

$$[U]\{\ddot{u}_g\} \approx \bar{1} \cdot \ddot{u}_g, \quad (4.13)$$

где  $\bar{1}$  - вектор, элементы которого равны единице.

Представим уравнение (4.12) в следующем виде:

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{Y}\} + [\Phi]^T [C][\Phi]\{\dot{Y}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{Y\} = [\Phi]^T \{F\} - [\Phi]^T [M][U]\{\ddot{u}_g\} \quad (4.14)$$

где  $Y$  - обобщенные координаты.

Введем следующие обозначения:

$$\{f\} = [\Phi]^T \{F\}, \quad (4.15)$$

$$\{g\} = -[\Phi]^T [M][U]\{\ddot{u}_g\} \quad (4.16)$$

Воспользуемся уравнением (4.14) и запишем уравнение для определения значения  $\tilde{Y}_j$ :

$$\tilde{Y}_j = \frac{\tilde{f}_j - \tilde{g}_j}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]}, \quad (4.17)$$

где  $\tilde{f}_j = \{\phi\}_j^T \{\tilde{P}(\omega)\}$ ;  $\tilde{g}_j = \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^S \phi_{nj} m_n U_{ns} \tilde{u}_{s,g}$ ;  $s$  - номер точки опирания;  $S$  - число точек опирания моста.

Тогда изображение Фурье функции перемещения сооружения в точке «а» можно представить в следующем виде:

$$\tilde{X}_a = \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{aj} [\tilde{f}_j - \tilde{g}_j]}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]} \quad (4.18)$$

В том случае, если справедливо допущение о том, что реакция сооружения в точке «а» на  $j$ -й собственной частоте определяется только  $j$ -й собственной формой колебания, уравнение (4.18) может быть записано в следующем виде:

$$\tilde{X}_a = \frac{\phi_{aj} \left[ \sum_{n=1}^D \phi_{nj} \tilde{P}_n(\omega) + \sum_{n=1}^D \sum_{s=1}^S \phi_{nj} m_n U_{ns} \tilde{u}_{s,g} \right]}{m_j [\omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2]}, \quad (4.19)$$

где  $D$  – число степеней свободы системы.

Значения коэффициентов  $U_{ns}$  при проведении пассивной вибродиагностики остаются неизвестными. Поэтому, для определения уравнения передаточной функции, предположим, что грунтовые условия точек опирания моста отличаются незначительно, а расстояние между ними невелико и, следовательно, запаздыванием волны можно пренебречь. В таком случае справедливо уравнение (4.13) и тогда уравнение (4.19) можно записать в окончательном виде:

$$\tilde{X}_a = \frac{\phi_{aj} \left[ \sum_{n=1}^D \phi_{nj} \tilde{P}_n(\omega) + \sum_{n=1}^D \phi_{nj} m_n \tilde{u}_g \right]}{m_j \left[ \omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2 \right]} \quad (4.20)$$

Воспользуемся уравнение (4.20) и найдем отношение изображений Фурье функций колебания сооружения в точках «а» и «b»:

$$\frac{\tilde{X}_a}{\tilde{X}_b} \approx \frac{\phi_{aj}}{\phi_{bj}} \quad (4.21)$$

Запишем уравнение передаточной функции в случае, если на сооружение не действуют внешние силы:

$$\frac{\tilde{X}_a}{\tilde{u}_g} = H_a = \frac{\phi_{aj} \sum_{n=1}^D \phi_{nj} m_n}{m_j \left[ \omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2 \right]} \quad (4.22)$$

Отсюда получим условие для определения значений собственных частот сооружения с использованием передаточных функций:

$$\operatorname{Re} \left[ H_a(\omega_j) \right] = 0 \quad (4.23)$$

В случае, если на сооружение во время землетрясения действуют внешние силы, уравнение (4.22) принимает следующий вид:

$$\frac{\tilde{X}_a}{\tilde{u}_g} = \frac{\phi_{aj}}{m_j \left[ \omega_k^2 - 2i\xi_j \omega_k \omega_j + \omega_j^2 \right]} \sum_{n=1}^D \left[ \phi_{nj} \frac{\tilde{P}_n}{\tilde{u}_g} + \phi_{nj} m_n \right] \quad (4.24)$$

Таким образом точность определения передаточной функции зависит от значений форм собственных колебания в точках приложения сил и соотношения изображений Фурье функции силы и функции ускорения колебания грунта.

В общем случае, во время слабого землетрясения, возможны два сочетания нагрузок:

1. на мост действуют транспортная и ветровая нагрузки;
2. внешними силовыми воздействиями можно пренебречь.

В первом случае для определения значений собственных частот мостовых сооружений могут быть использованы спектры Фурье функций колебания, но не передаточные функции. Это обусловлено множественными источниками возбуждения конструкции, интенсивность которых сопоставима друг с другом (Уравнение 4.24). В таблице 4.6 представлены результаты проведенной серии расчетов по определению значений собственных частот сооружения для первого сочетания нагрузок. Для каждого расчета использовалась новая акселерограмма землетрясений. Функция колебания грунта у каждой опоры моста отличалась незначительно.

Таблица 4.6 – Значения собственных частот моста, определенные по спектрам Фурье во время землетрясения

	$A_p = 1.00 A_0$ . 50 измерений			$A_p = 0.80 A_0$ . 10 измерений		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
Точное значение	3.43	7.18	20.64	3.53	7.07	19.67
Среднее значение	2.93	7.19	20.66	2.89	7.07	19.66
Стандартное отклонение	0.21	0.06	0.06	0.19	0.07	0.07
Доверительный интервал	$\pm 0.06$	$\pm 0.02$	$\pm 0.02$	$\pm 0.10$	$\pm 0.03$	$\pm 0.03$
Вероятность факта наличия повреждения сооружения, %	-	-	-	$\ll 95$	99.9	99.9

Согласно результатам проведенных расчетов, точное определение значений собственных частот сооружения возможно только в том случае, если они попадают в диапазон частот 0 – 4 Hz. Это обусловлено характерным для функций колебания грунта во время землетрясений распределением спектральной мощности по частотам.

В том случае, если интенсивность внешних силовых воздействий пренебрежимо мала, а функции колебания грунта у каждой опоры моста отличается незначительно, для определения значений собственных частот сооружения можно воспользоваться уравнением (4.22). В таблице (4.7) представлены результаты проведенной автором серии расчетов, согласно которым точность измерения значений собственных частот в таком случае несколько выше чем при использовании других методов определения модальных параметров и типов нагружения.

Таблица 4.7 – Значения собственных частот моста, определенные с использованием передаточных функций во время землетрясения

	$A_p = 1.00 A_0$ . 40 измерений			$A_p = 0.80 A_0$ . 25 измерений		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
Точное значение	3.43	7.18	20.64	3.43	7.07	19.74
Среднее значение	3.43	7.17	20.61	3.42	7.08	19.76
Стандартное отклонение	0.02	0.01	0.06	0.02	0.01	0.05
Доверительный интервал	$\pm 0.01$	$\pm 0.01$	$\pm 0.02$	$\pm 0.01$	$\pm 0.01$	$\pm 0.02$
Вероятность факта наличия повреждения сооружения, %	-	-	-	-	99.9	99.9

Уравнение (4.22) было получено в предположении, что функции колебания грунта у каждой опоры моста отличается незначительно и, следовательно, справедливо уравнение (4.13). Продемонстрируем как данное допущение отражается на точности измерений значений собственных частот мостовых сооружений. В таблице (4.8) представлены результаты проведенных расчетов, согласно которым, можно сделать следующие выводы:

1. при измерении собственных частот сооружений разницей в грунтовых условиях основания опор можно пренебречь в случае, если  $V_{s,30}$  отличается не более чем на 50-100 м/с;

2. запаздыванием волны при определении значений собственных частот, даже в случае значительного расстояния между опорами, можно пренебречь.

Таблица 4.8 – Измеренные значения собственных частот моста, в случае учета различных грунтовых условий и запаздывания волны

		Точное значение			Результат измерения		
		$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
Запаздывание волны между соседними опорами моста, с	0.05	3.43	7.18	20.64	3.44	7.15	20.63
	0.10				3.47	7.15	20.63
Отличие средних скоростей распространения волны $V_{s,30}$ в грунте у опор моста, м/с	50	3.43	6.53	18.60	3.43	6.54	18.61
	100	3.43	5.82	16.50	3.43	5.89	16.57

Важно отметить, что запаздывание волны значительно сказывается на точности определения собственных форм колебания сооружения с использованием уравнения (4.21) – ошибка может достигать 30% в случае задержки между опорами более 0.1 с. Это обусловлено тем, что в уравнении (4.21) используются функции относительного перемещения точек системы. Однако в случае запаздывания волны между опорами, функции колебания грунта отличаются в разных точках, что не позволяет определить относительное перемещение точек системы. Покажем это на примере системы с двумя массовыми степенями свободы и двумя точками опирания. Изображение Фурье функции в случае запаздывания во времени определяется следующим выражением:

$$F[f(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0} \tilde{f}(\omega) \quad (4.25)$$

Тогда уравнение (4.21) примет следующий вид:

$$\frac{\tilde{X}_{t,1} - [U_{11} + U_{12}e^{-i\omega t_0}]}{\tilde{X}_{t,2} - [U_{21} + U_{22}e^{-i\omega t_0}]} \approx \frac{\phi_{1j}}{\phi_{2j}}, \quad (4.26)$$

где  $\tilde{X}_t$  - изображение Фурье полного перемещения точки системы.

Таким образом, в случае, если значения коэффициентов матрицы смещения точек системы  $[U]$  неизвестны, воспользоваться уравнением (4.26) не представляется возможным.

#### **4.4. Метод постоянного пассивного вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений**

При проведении пассивной вибродиагностики мостовых сооружений могут быть использованы данные о их колебаниях от целого набора различных источников возбуждения. Вместе с тем, состав этого набора в значительной степени влияет на тип используемого оборудования, места установки датчиков, методики определения модальных параметров и оценки технического состояния сооружений. Это означает, что использование методики проведения пассивного мониторинга мостов, разработанной для одного сооружения, может оказаться не эффективной для другого.

В главе 1 были выделены три основных подхода при проведении пассивной вибродиагностики мостовых сооружений: мониторинг состояния наиболее вероятных участков повреждения сооружения, мониторинг общего состояния сооружения, мониторинг максимальных реакций сооружения. Как было показано в таблице 1.1 каждый из этих подходов обладает рядом недостатков. Однако, в случае их совместного применения, можно не только повысить точность измерений, снизить число ошибочных срабатываний системы мониторинга, но и вместе с тем оптимизировать ее в соответствии с параметрами сооружения и набором источников возбуждения колебаний конструкции.

На основе выделенных трех подходов при проведении пассивной вибродиагностики автомобильных мостов, был сформулирован метод проведения постоянного пассивного мониторинга:

1. Создается конечно-элементная модель сооружения.

2. Определяются типы источников силового и кинематического воздействия на мостовое сооружение, параметры которых позволяют проводить постоянную пассивную вибродиагностику.
3. Осуществляется мониторинг технического состояния наиболее вероятных участков повреждения сооружения:
  - 3.1. Определяются наиболее опасные источники внешнего силового и кинематического воздействия на мостовое сооружение. В случае расположения моста в сейсмоопасном районе, дается оценка его сейсмичности:
    - 3.1.1. Определяется расположение сейсмогенерирующих источников.
    - 3.1.2. Определяются параметры сейсмогенерирующих зон.
    - 3.1.3. Определяются функции затухания колебаний грунта при распространении сейсмической волны от источника к площадке строительства.
    - 3.1.4. Строятся графики зависимости вероятности превышения максимального допускаемого ускорения колебания грунта  $a_g$  величиной  $a$  от времени.
  - 3.2. Проводится расчет модели мостового сооружения на возможные сценарии нагружения. В случае сейсмического воздействия учитываются сейсмогенерирующие зоны в радиусе 100 км, а также вариативность параметров функций колебания грунта.
  - 3.3. Проводится анализ возможных повреждений сооружения на основе проведенного расчета на этапе 2.2 и построение схемы последовательности повреждений.
  - 3.4. Строятся кривые зависимости вероятности превышения величины предела текучести материалов элементов конструкции или максимально допустимой величины напряжений при неупругих деформациях  $C_n$  при заданной величине  $A$ , характеризующей интенсивность силового или кинематического воздействия (Рисунок 4.10):

$$P_{nk} = P\{D_k \geq C_n | A_k\} \quad (4.27)$$

где  $P\{\dots\}$  - величина вероятности;  $D$  - величина напряжения в исследуемом элементе, при  $k$ -м сценарии нагружения;  $k$  - номер сценария нагружения;  $n$  – номер сценария повреждения (под сценарием повреждения может пониматься как повреждение отдельного элемента конструкции, так и повреждения различных элементов объединённые по степени представляемой ими опасности для сооружения);  $n$  - номер элемента.

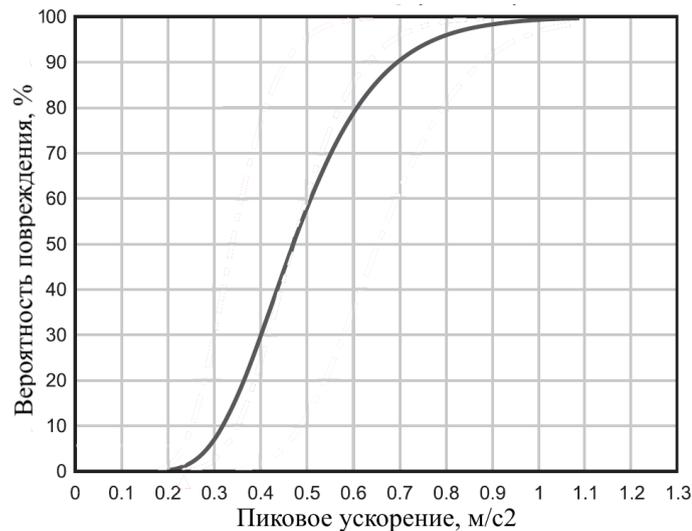


Рисунок 4.10 – График зависимости вероятности повреждения от величины пикового ускорения грунта

- 3.5. Присваивается соответствующий «вес» каждому из элементов схемы последовательности повреждений конструкции и определяются наиболее вероятные сценарии повреждения сооружения.
- 3.6. Определяются наиболее вероятные участки повреждения сооружения.
- 3.7. Определяется чувствительность модальных параметров модели моста к наиболее вероятным повреждениям.
- 3.8. Дается оценка необходимости осуществления индивидуального мониторинга отдельных наиболее вероятных участков повреждения.
- 3.9. Определяются типы и места установки датчиков контроля состояния отдельных элементов, выявленных на этапе 2.8, а также определяются

пределы допустимого изменения их реакций или модальных параметров в зависимости от выбранного оборудования.

3.10. Проводится периодическое измерение реакций сооружения в выбранных точках или модальных параметров выбранных элементов. Сравниваются текущие значения с максимально допускаемыми, определенными на предыдущем этапе.

4. Осуществляется мониторинг общего состояния мостового сооружения.

4.1. Проводится периодическое определение значений модальных параметров сооружения с использованием данных о его колебаниях под действием слабых природных и техногенных воздействий, с целью выявления наличия повреждений:

4.1.1. На балку пролетного строения вдоль ее оси и верх каждой опоры устанавливаются трехосевые акселерометры или сейсмометры. В случае необходимости более детального контроля состояния опор моста устанавливаются дополнительные датчики на теле опоры.

4.1.2. Ведется запись функций колебания сооружения в двух режимах:

- а. Запись максимальных значений реакций сооружения начиная с некоторого минимального порогового значения  $R_{min}(t)$ .
- б. Запись ведется непрерывно в течении отрезка времени принимаемого равным или большим значению  $T_{min}$ , определенному согласно следующему уравнению:

$$T_{min} = \frac{1}{\Delta f}, \quad (4.28)$$

где  $\Delta f \leq 0.01 \text{ Hz}$  - частота дискретизации сигнала.

Значение реакции сооружения не должно превышать максимального порогового значения  $R_{max,lin}(t)$ , при котором все еще справедливо допущение о линейной работе конструкции.

4.2. Определяются значения модальных параметров сооружения с использованием функций колебания сооружения полученных на этапе 3.1:

4.2.1. Динамические характеристики вертикальных колебаний балки пролетного строения определяются с использованием таких методов как: определение положения пиков на графиках спектров Фурье функций колебания сооружения, аппроксимация спектров Фурье функций колебания сооружения полиномиальной функцией, Stochastic Subspace Identification Method (SSI).

4.2.2. Модальные параметры опор определяются с использованием уравнения (3.33).

Также модальные параметры сооружения могут быть определены с использованием уравнений (4.21) и (4.23), в случае сейсмического воздействия и малой величиной времени запаздывания сейсмической волны между опорами моста.

4.3. Проводится сравнение текущих значений модальных параметров сооружения с эталонными значениями. В качестве эталонных принимаются значения, полученные в течении первого полугодия после ввода сооружения в эксплуатацию, ремонтных работ или начала мониторинга.

4.4. Корректируется эталонная модель моста, с целью определения места и степени повреждения сооружения. Могут быть использованы такие методы, как: метод контроля изменений элементов матрицы жесткости (Уравнение 3.37), гибкости или передаточных функций.

5. Производится поправка параметров эталонной модели сооружения, на суточное и/или годовое изменение температуры.

5.1. Определяются значения параметров эталонных линий регрессии графиков функций зависимости модальных параметров сооружения от температуры в течении первого полугодия после ввода сооружения в эксплуатацию, ремонтных работ или начала мониторинга.

5.2. Корректируются параметры эталонной модели сооружения в соответствии с текущей температурой. Данная модель в дальнейшем используется на этапе 3.4.

6. Определяется вероятность того, что отличие статистических параметров эталонной модели и сооружения в его текущем состоянии случайность, с использованием уравнения (3.5). Делается вывод о наличии изменений модальных параметров сооружения и как следствие в параметрах его конструкции. В случае положительного заключения переходят к пункту 3.4 данного метода.
7. Проводится сравнение максимальных реакций сооружения, полученных на этапе 3.1.2 с допустимыми значениями, определенными на этапе 2.9, с целью выявления потенциально опасных состояний сооружения.
8. В случае выявления наличия повреждения принимается решение о возможности дальнейшей эксплуатации сооружения в текущем состоянии.

#### **4.5. Выводы**

1. Исследована возможность применения данных о колебаниях мостовых сооружений под действием слабых землетрясений, для проведения пассивного мониторинга. Результаты проведенных расчетов показывают, что данный вид вибрационного мониторинга малоприменим в связи с редкостью землетрясений даже в наиболее сейсмически опасных районах РФ.

2. Получены уравнения для определения модальных параметров мостовых сооружений в случае действия сейсмической нагрузки. Показано, что величина запаздывания сейсмической волны между опорами моста, а также разница в скорости распространения волны в грунтовом основании опор мало влияет на точность определения собственных частот сооружения.

3. Сформулированы положения нового метода проведения постоянной пассивной вибродиагностики мостовых сооружений. Данный метод позволяет гибко подстроить систему постоянного пассивного мониторинга мостовых сооружений в зависимости от типа источников возбуждения сооружения, требуемой информации о состоянии моста и параметров сооружения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации на основании выполненных исследований сделаны следующие выводы:

1. Предложен новый метод проведения пассивной вибродиагностики технического состояния мостовых сооружений. Данный метод позволяет давать оценку технического состояния мостовых сооружений, в случае действия на них слабых природных и техногенных воздействий: движение автомобильного потока, ветровая нагрузка, давление воды на опоры и слабые сейсмические воздействия.
2. Разработан метод оценки технического состояния опор и опорных устройств транспортных мостов, обладающий высокой чувствительностью к наличию повреждений, а также, при достаточном количестве установленных датчиков, позволяющий определить место и степень повреждения опор мостов.
3. Предложен метод учета влияния температурных изменений на модальные параметры мостовых сооружений. Данный метод основан на предположении о малом влиянии слабых повреждений на формы линий регрессии графиков зависимости модальных параметров сооружений от температуры, что подтверждается проведенными расчетами.
4. Разработаны методы построения балочных и трехмерных конечных элементов с использованием теории, описанной в докторской диссертации Е.Н. Курбацкого. Данные методы были использованы при написании программы для определения параметров колебаний моделей мостовых сооружений под действием слабых динамических воздействий природного и техногенного характера. Преимуществами предлагаемых решений являются отсутствие необходимости использования нелогичного моделирования континуума и элементов конструкции моста, сосредоточенными массами и пружинами, а также тот факт, что неизвестными параметрами систем уравнений в первом случае являются внутренние усилия и перемещения, а во втором напряжения и перемещения граней элементов.

5. Выявлена значительная ошибка при определении собственных форм колебания мостовых сооружений по данным об их колебаниях во время землетрясений в следствии запаздывания волны между опорами: ошибка может достигать 30%.
6. Использование допущения о постоянной спектральной мощности функций внешних силовых воздействий при проведении пассивного мониторинга, снижает точность измерений и затрудняет обнаружение наличия слабых повреждений при малом числе измерений.
7. При проведении вибрационного мониторинга технического состояния мостовых сооружений учет влияния температуры на их модальные параметры является обязательным: влияние температуры на собственные частоты может достигать 15% и более. В некоторых случаях, при отрицательных температурах, данное изменение происходит скачкообразно.
8. Определение значений модальных коэффициентов демпфирования мостовых сооружений с точностью достаточной для оценки их технического состояния при проведении пассивного мониторинга затруднительно.
9. Использование данных о колебаниях мостов под действием слабых землетрясений в сейсмоопасных районах, для проведения пассивного мониторинга, возможно только в случае совместного использования этих данных с данными о колебаниях сооружений под действием других типов слабых воздействий.
10. Перспективами дальнейшего развития темы диссертации являются исследование возможности проведения пассивного мониторинга железнодорожных мостов с использованием математических моделей, позволяющих учесть жесткость подвески и массу проходящего транспорта, а также учет, при проведении пассивной вибродиагностики, тех элементов мостовых сооружений, которые не включаются в работу при слабых динамических воздействиях.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Винокуров, Н. И. К оценке сейсмической опасности района Керченского пролива по данным археосейсмологии [Текст] / Н. И. Винокуров, М. В. Родкин // Вопросы инженерной сейсмологии. 2015. – 42 т. – С. 51–66.
2. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов // М.: Государственное издательство физико-математической литературы. – 1960. – 497 с.
3. Габсатарова, И. П. Землетрясение 10 декабря 2012 года с  $M_w=4.6$  вблизи г. Анапы [Текст] / И. П. Габсатарова, Л. С. Малянова // НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика», Сейсмологический бюллетень за 2012 г. – 2013. – С. 35–45.
4. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании [Текст] / М. И. Горбунов-Посадов // М.: Стройиздат. – 1984. – 679 с.
5. Государственная служба дорожного хозяйства министерства транспорта Российской Федерации (РОСАВТОДОР). Методические рекомендации по вибродиагностике автодорожных мостов [Текст] / М.: Информавтодор. – 2001. – 25 с.
6. Деренюк, Д. Геологические признаки сейсмичности юго-западной части Азовского моря и Керченского полуострова [Текст] / Д. Деренюк // Киев: Геология и полезные ископаемые мирового океана. – 2006. – 1 т. – С. 118 – 124.
7. Дмитренко, Е. А. Основные типы дефектов и повреждений железобетонных конструкций транспортных сооружений, причины их возникновения [Текст] / Е. А. Дмитренко // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. – 2016. – С. 134–138.
8. Донец, Н. А. Идентификация повреждений в балочных пролетных строениях мостов на основе анализа отклика проходящих по ним транспортных средств [Текст] / Н. А. Донец // дис. канд. ... тех. наук. Новосибирск. – 2013. – 190 с.
9. Косауров, А. П. Мониторинг состояния мостов во время землетрясения [Текст] / А. П. Косауров // Инновационные технологии в образовании и науке. Сборник

- материалов II-й Международной научно-практической конференции. – 2017. – С. 288 – 291.
10. Косауров, А. П. Применение интегрального преобразования Фурье при расчёте конструкций [Текст] / А. П. Косауров // Мир транспорта. – 2016. – С. 50–58.
  11. Косауров, А. П. Применение передаточных функций для определения наличия повреждений в свайном основании моста [Текст] / А. П. Косауров // Современное состояние, проблемы и перспективы развития отраслевой науки. Сборник материалов всероссийской конференции с международным участием. – 2017. – С. 35–41.
  12. Косауров, А. П. Расчет свайного фундамента мостов в сейсмоопасных районах [Текст] / А. П. Косауров // Инновационные технологии в образовании и наук. Сборник материалов II-й Международной научно-практической конференции. – 2017. – С. 291–295.
  13. Косауров, А. П. Уточнение исходной сейсмичности района Керченского пролива [Текст] / А. П. Косауров // Строительство и реконструкция. – 2017. – С. 27–33.
  14. Курбацкий, Е. Н. К вопросу о пересчете балльности в ускорения колебаний грунта [Текст] / Е. Н. Курбацкий, А. П. Косауров // Инженерные изыскания. – 2016. – С. 50 – 60.
  15. Курбацкий, Е. Н. Метод защиты сооружений от вибраций и сейсмических воздействий [Текст] / Е. Н. Курбацкий, Е. Ю. Титов, О. А. Голосова, А. П. Косауров // Строительство и реконструкция. – 2018. – С. 55 – 67.
  16. Курбацкий, Е. Н. Метод решения задач строительной механики и теории упругости, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций [Текст] / Е. Н. Курбацкий // автореф. дис. ... док. техн. наук. – Москва. – 1995. – 39 с.
  17. Львовский, В. Исследование колебаний подземных оболочек в податливых инерционных средах при действии подвижных нагрузок [Электронный ресурс] / В. Львовский // Режим доступа: [www.url](http://www.url)

- [www.russianscientist.org/files/archive/Nauka/2007\\_LVOVMOD\\_1.pdf](http://www.russianscientist.org/files/archive/Nauka/2007_LVOVMOD_1.pdf) (дата обращения: 01.02.2018).
18. Нгуен Ван Хунг Методы расчета тоннелей, выполненных из опускных секций, на сейсмические воздействия [Текст] / Нгуен Ван Хунг // дис. канд. ... тех. наук. Москва. – 2015. – 139 с.
  19. Никонов, А. А. Главные особенности геодинамики, напряженного состояния и распределения сильных землетрясений в азово-черноморском регионе [Текст] / А. А. Никонов // Четвертая тектонофизическая конференция в ИФЗ РАН: тектонофизика и актуальные вопросы наук о земле. – 2016. – С. 493–501.
  20. Об областной целевой программе «развитие сети автомобильных дорог еврейской автономной области» на 2009 - 2014 годы [Электронный ресурс] / Режим доступа: [www.url: http://nra.eao.ru/win/noframe/law?d&nd=642212979&nh=1](http://nra.eao.ru/win/noframe/law?d&nd=642212979&nh=1) (дата обращения: 01.02.2018).
  21. Об утверждении ведомственной целевой программы “сохранность региональных автомобильных дорог ярославской области” на 2016 год и плановый период 2017 и 2018 годов (с изменениями на: 17.08.2016) [Электронный ресурс] / Режим доступа: [www.url: http://docs.cntd.ru/document/444710416](http://docs.cntd.ru/document/444710416) (дата обращения: 01.02.2018).
  22. Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели [Текст] / П. Л. Пастернак // М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре. – 1954. – 56 с.
  23. Прудько, Е. Сравнительный анализ математических моделей основания фундаментных плит [Текст] / Е. Прудько // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2012. – № 7-8 (172-173). – С. 52–56.
  24. Рекомендации по проектированию и установке полимерных опорных частей мостов. Отраслевой дорожный методический документ [Текст] / Федеральное дорожное агенство (Росавтодор). – 2008. – 55 с.

25. Рогожин, Е. А. Новые сведения об очагах сильных землетрясений в районе керченского полуострова по палеосейсмологическим данным [Текст] / Е. А. Рогожин, А. М. Корженков, А. С. Ларьков, А. Н. Овсяченко // М.: Доклады Академии наук. – 2017. – 472 т. – С. 89–92.
26. Стратегия развития железнодорожного транспорта в Российской Федерации до 2030 года [Электронный ресурс] / Режим доступа: [www.url:   
http://www.mintrans.ru/file/400344](http://www.mintrans.ru/file/400344) (дата обращения: 01.02.2018).
27. Уломов, В. И. Специализированный каталог землетрясений для задач общего сейсмического районирования территории Российской Федерации [Электронный ресурс] / В. И. Уломов, Н. С. Медведева // Режим доступа: [www.url:   
http://www.seismos-u.ifz.ru/documents/Eartquake-Catalog-CK3.pdf](http://www.seismos-u.ifz.ru/documents/Eartquake-Catalog-CK3.pdf) (дата обращения: 01.02.2018).
28. Фролов, К. В. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем [Текст] / К. В. Фролов // М.: Машиностроение. – 1999. – 482 с.
29. Abdalla, M. Enhanced damage detection using linear matrix inequalities [Текст] / M. Abdalla, K. M. Grigoriadis, D. C. Zimmerman // Proceedings of SPIE: The international society for optical engineering. – 1998. – С. 144-150
30. Akkar, S. Empirical ground-motion models for point- and extended-source crustal earthquake scenarios in Europe and the Middle East [Текст] / S. Akkar, M. A. Sandıkkaya, J. J. Bommer // Bull Earthquake Eng. – 2014. – 12 т. – С. 359–387.
31. Aktan, A. Development of a model health-monitoring guide for major bridges [Текст] / A. Aktan // Report to Federal highway administration. – 2002. – 284 с.
32. Anoyatis, G. Dynamic Winkler modulus for axially loaded end-bearing piles // International conferences on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. Paper No. 5.22a [Текст] / G. Anoyatis, G. E. Mylonakis // Scholars' Mine. – 2010. – С. 1–13.
33. Anoyatis, G. Dynamic Winkler Modulus for Axially Loaded Piles [Текст] / G. Anoyatis, G. Mylonakis // Géotechnique. – 2012. – 62 т. – С. 521–536.
34. Avitabile, P. Experimental modal analysis [Текст] / P. Avitabile // Sound and vibration. – 2001. – С. 20-31.

35. Bachmann, H. Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines. [Текст] / H. Bachmann // Springer Science & Business Media. – 1995. – 264 с.
36. Bardet, J. EERA - a computer program for equivalent-linear earthquake site response analyses of layered soil deposits [Электронный ресурс] / J. Bardet, K. Ichii, C. Lin // Режим доступа: [www.url: www.ce.memphis.edu/7137/PDFs/EERA2/EERAManual.pdf](http://www.ce.memphis.edu/7137/PDFs/EERA2/EERAManual.pdf) (дата обращения: 01.02.2018).
37. Benzoni, G. Structural health monitoring of bridges with seismic response modification devices [Текст] / G. Benzoni // Structural systems research project, Department of Structural Engineering, University of California. – 2013. – 215 с.
38. Berger, E. Simplified Method For Evaluating Soil-Pile-Structure Interaction Effects [Текст] / E. Berger, S. A. Mahi, R. Pyke // Proc. 9th offshore technol. conf. – 1977. – С. 589–598.
39. Bezgin, N. Response of laterally loaded group shafts for bridge foundations in cohesionless soils using a 3D FE soil-structure model [Текст] / N. Bezgin, H. Najm, H. Nassif // Bridge Structures. – 2008. – 4 т. – С. 111–119.
40. Brincker, R. Modal identification and damage detection on a concrete highway bridge by frequency domain decomposition [Текст] / R. Brincker, P. Andersen, L. Zhang // Proceedings of Structural Engineering World Conference (SEWC). – 2002. – С. 1–8.
41. Brincker, R. Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition [Текст] / R. Brincker // Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC). – 2000. – С. 625–630.
42. Brownjohn, J. M. Vibration-based monitoring of civil infrastructure: challenges and successes [Текст] / J. M. Brownjohn // J. Civil Struct. Health Monit. – 2011. – 1 т. – С. 79–95.
43. Brownjohn, J. M. Structural health monitoring of civil infrastructure [Текст] / J. M. Brownjohn // Philosophical transactions of the royal society of London A: mathematical, physical and engineering sciences. London. – 2007. – 365 т. – С. 589–622.

44. Buckle, I. Seismic isolation design examples of highway bridges. Final report [Текст] / I. Buckle, E. Monzon // Research for AASHTO standing committee on highways. Task 262(M2). – 2011. – 382 с.
45. Chen, G. W. Experimental investigation into amplitude-dependent modal properties of an eleven-span motorway bridge [Текст] / G. W. Chen, S. Beskhyroun, P. Omenzetter // Engineering Structure. – 2016. – 107 т. – С. 80–100.
46. Chin, T. Y. Interpretation of subgrade reaction from lateral load tests on spun piles in soft ground [Текст] / T. Y. Chin // Association of Consulting Engineers Malaysia (ACEM). Conference and Exhibition on Bridge Engineering. – 2009. – С. 1-21.
47. Chopra, A. K. Dynamics of structures. 4th edition [Текст] / A. K. Chopra // Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall. – 2011. – 992 с.
48. Choun, Y. S. Effects of mechanical property variability in lead rubber bearings on the response of seismic isolation system for different ground motions [Текст] / Y. S. Choun, J. Park, I. K. Choi // Nuclear Engineering and Technology. – 2014. – 46 т. – С. 605–618.
49. Chowdhury, I. Dynamics of Structure and Foundation - A Unified Approach: 1. Fundamentals [Текст] / I. Chowdhury, S. P. Dasgupta // CRC Press. – 2008. – 632 с.
50. Clotaire, M. Dynamic parameters of structures extracted from ambient vibration measurements: an aid for the seismic vulnerability assessment of existing buildings in moderate seismic hazard regions [Текст] / M. Clotaire, P. Guéguen // Soil Dynamic and Earthquake Engineering. – 2008. – 40 с.
51. Convertito, V. Seismic-Hazard Assessment for a Characteristic Earthquake Scenario: An Integrated Probabilistic–Deterministic Method [Текст] / V. Convertito, A. Emolo, A. Zollo // Bulletin of the Seismological Society of America. – 2006. – 96 т. – С. 377–391.
52. Cury, A. Long-term monitoring of a PSC box girder bridge [Текст] / A. Cury, C. Cremona // IABSE Symposium Report. – 2010. – 97 т. – С. 22–29.
53. David, F. M. Experimental Study of Bridge Monitoring Technique [Текст] / F. M. David, T. D. John // Journal of structural engineering. – 1990. – 116 т. – С. 2532–2549.

54. Del Grosso, A. Structural Health Monitoring: research and practice [Текст] / A. Del Grosso // Second conference on smart monitoring. – 2013. – 9 с.
55. Deng, G. Soil-Pile Interaction in the Pile Vertical Vibration Based on Fictitious Soil-Pile Model [Электронный ресурс] / G. Deng // Journal of Applied Mathematics. – 2014. – Режим доступа: [www.url:https://www.hindawi.com/journals/jam/2014/905194/](http://www.url:https://www.hindawi.com/journals/jam/2014/905194/) (дата обращения: 01.04.2018).
56. Dinev, D. Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions [Текст] / D. Dinev // Journal of Engineering Mechanics. – 2012. – 19 т. – С. 381–392.
57. Dobry, R. Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups [Текст] / R. Dobry, G. Gazetas // Géotechnique. – 1988. – 38 т. – С. 557–574.
58. Doebling, S. W. Summary review of vibration-based damage identification methods [Текст] / S. W. Doebling, C. Farrar, M. A Prime // The shock and vibration digest. – 1998. – 30 т. – С. 91–105.
59. Dutta, S. critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system [Текст] / S. Dutta, R. Roy // Computers & Structures. – 2002. – 80 т. – С. 1579–1594.
60. EduPro Civil Systems, Inc. ProShake. Ground response analysis program [Электронный ресурс] / Режим доступа: [www.url:www.proshake.com/proshake\\_2.0/User%20Manual.pdf](http://www.url:www.proshake.com/proshake_2.0/User%20Manual.pdf) (дата обращения: 01.02.2018).
61. Ewins, D. J. Modal testing: theory and practice. Revised edition [Текст] / Ewins D. J. // New York: Research Studies Pr. Ltd. – 2000. – 332 с.
62. Felber, A. J. Development of a hybrid bridge evaluation system [Текст] / A. J. Felber // The university of British Columbia: A thesis in partial fulfilment of the requirements for the degree of doctor of philosophy. – 1994. – 296 с.
63. Fred, L. H. Traffic stream characteristics. Federal Highway Administration Research and Technology [Электронный ресурс] / L. H. Fred // Режим доступа: [www.url:](http://www.url:)

- <https://www.fhwa.dot.gov/publications/research/operations/tft/chap2.pdf> (дата обращения: 01.02.2018).
64. Gazetas, G. Simple Methods for the Seismic Response of Piles Applied to Soil-Pile-Bridge Interaction [Текст] / G. Gazetas, G. Mylonakis, A. Nikolaou // Scholars' Mine. – 1995. – 11 с.
  65. Ghosn, M. Design of Highway Bridges for Extreme Events [Текст] / M. Ghosn // Transportation Research Board. – 2003. – 174 с.
  66. Godinho, J. Probabilistic seismic hazard analysis - An introduction to theoretical basis and applied methodology [Текст] / J. Godinho // A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the master degree in earthquake engineering. – 2007. – 56 с.
  67. Gyoten, Y. Soil-pile interaction in vertical vibration [Текст] / Y. Gyoten, T. Fukusumi, H. Nozoe // International conferences on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. – 1981. – С. 1–8
  68. Hamarat, M. A. Seismic Analysis of Structures Resting on Two Parameter Elastic Foundation [Текст] / M. A. Hamarat, H. Ç. Karaköse, E. Orakdöğen // 19th Analysis and Computation Specialty Conference. – 2012. – 10 с.
  69. Hannigan, P. J. Design and construction of driven pile foundations – volume 1 [Текст] / P. J. Hannigan, G. G. Goble // U.S. Department of Transportation Federal Highway Administration. – 2016. – 559 с.
  70. Heerah, A. Field investigation of fundamental frequency of bridges using ambient vibration measurements [Текст] / A. Heerah // McGill University: A thesis submitted to McGill University in partial fulfillment of the requirements of the degree of master of engineering. – 2017. – 8 с.
  71. Hetenyi, M. Beams on elastic foundation; theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering [Текст] / M. Hetenyi // Ann Arbor, Mich.: The University of Michigan Press. – 1946. – 255 с.
  72. Idriss, I. User's manual for SHAKE91 [Текст] / I. Idriss, J. Sun // Department of Civil and Environment Engineering. – 1992. – 75 с.

73. IRIS: Wilber. Incorporated Research Institutions for Seismology [Электронный ресурс] / Режим доступа: [www.url: http://ds.iris.edu/wilber3/find\\_event](http://ds.iris.edu/wilber3/find_event) (дата обращения: 01.02.2018).
74. Jang, S. Structural health monitoring for bridge structures using smart sensors [Текст] / S. Jang, B. Spencer // Department of Civil and Environmental Engineering. University of Illinois at Urbana-Champaign. – 2015. – 165 с.
75. Jiao, Y. Temperature effect on mechanical properties and damage identification of concrete structure [Текст] / Y. Jiao // Advances in Materials Science and Engineering. – 2014. – 10 с.
76. Jin-Bao, S. A new linearized equation of random wave forces [Текст] / S. Jin-Bao, W. Yong-Hong // International congress on modelling and simulation proceedings. – 1997. – С. 111–114.
77. John, D. Ground motion prediction equations 1964-2016. GMPE compendium [Электронный ресурс] / D. John // Режим доступа: [www.url: http://www.gmpe.org.uk/gmpereport2014.pdf](http://www.gmpe.org.uk/gmpereport2014.pdf) (дата обращения: 01.02.2018).
78. Jones, R. The Vlasov foundation model [Текст] / R. Jones, J. Xenophontos // International Journal of Mechanical Sciences. – 1977. – 19 т. – С. 317–323.
79. Joyner, W. B. Calculation of nonlinear ground response in earthquakes [Текст] / W. B. Joyner, A. T. Chen // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1975. – 65 т. – С. 1315–1336.
80. Kareem, A. Modeling and simulation of transient wind load effects [Текст] / A. Kareem, K. Butler, D. K. Kwon // Tokyo: Proceedings of the 4th UJNR Panel on Wind and Seismic Effects Workshop on Wind Engineering. – 2006. – 11 с.
81. Kim, C. W. Remote vibration monitoring for scour detection of a railway bridge [Текст] / C. W. Kim // SMAR 2017. Assessment and rehabilitation of civil structures. – 2017. – 8 с.
82. Kim, H. Flood fragility analysis for bridges with multiple failure modes [Текст] / H. Kim // Advances in Mechanical Engineering. – 2017. – 9 т. – С. 1–11.
83. Kim, S. Damping identification of bridges under nonstationary ambient vibration [Текст] / S. Kim, H. K. Kim // Engineering. – 2017. – 3 т. – С. 839–844.

84. Ko, J. M. Multi-stage identification scheme for detecting damage in cable-stayed Kap Shui Mun Bridge [Текст] / J. M. Ko, Z. G. Sun, Y. Q. Ni // Engineering Structures. – 2002. – 24 т. – С. 857–868.
85. Lenner, R. Traffic data collection and analysis [Текст] / R. Lenner, C. Viljoen // Journal of the South African Institution of Civil Engineering. – 2017. – С. 34–46.
86. Lenner, R. Traffic characteristics and bridge loading in South Africa [Текст] / R. Lenner // Journal of the South African Institution of Civil Engineering. – 2017. – 59 т. – С. 34–46.
87. Leung, C. F. Response of pile groups subjected to lateral loads [Текст] / C. F. Leung, Y. K. Chow // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 1987. – 11 т. – С. 307–314.
88. Li, Q. Vertical vibration of pile [Текст] / Q. Li // The 14th world conference on earthquake engineering. – 2008. – С. 1–7
89. Li, Q. Vertical vibration of pile in saturated soil considering soften regions of surrounding soil [Текст] / Q. Li, Z. J. Sun // The 14th world conference on earthquake engineering. – 2008. – 7 с.
90. Link, M. Structural Health Monitoring of the Gaertnerplatz Bridge over the Fulda River in Kassel [Текст] / M. Link, M. Weiland // Proceedings of the 2<sup>nd</sup> int. UHPC symposium, Kassel. – 10 т. – 2008. – 14 с.
91. Londoño, N. A. Use of stochastic subspace identification methods for post-disaster condition assessment of highway bridges [Текст] / N. A. Londoño, S. L. Desjardins, D. T. Lau // 13th World Conference on Earthquake Engineering. Paper No. 2714. – 2004. – 15 с.
92. Lu, C. A new analytic symplectic elasticity approach for beams resting on Pasternak elastic foundations [Текст] / C. Lu, C. W. Lim, A. W. Yao // Journal of Mechanics of Materials and Structures - J. – 2010. – 4 т. – С. 1741–1754.
93. Lu, K. C. Ambient vibration study of Gi-Lu cable-stay bridge: application of wireless sensing units [Текст] / K. C. Lu // Smart Structures and Materials 2006: Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems. – 2006. – 6174 т. – С. 1–11.

94. Makris, N. Dynamic pile-soil-pile interaction. Part II: Lateral and seismic response [Текст] / N. Makris, G. Gazetas // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. – 1992. – 21 т. – С. 145–162.
95. Mirzaee, A. Comparative Study on Sensitivity-Based Damage Detection Methods in Bridges [Текст] / A. Mirzaee, R. Abbasnia, M. A. Shayanfar // Shock and Vibration. – 2015. – 2015 т. – С. 1–19.
96. Morison, J. R. The force exerted by surface waves on piles [Текст] / J. R. Morison, J. W. Johnson, S. A. Schaaf // Journal of Petroleum Technology. Society of Petroleum Engineers. – 1950. – 189 т. – С. 149-157
97. Mufti, A. A. Guidelines for Structural Health Monitoring [Текст] / A. A. Mufti, I. Canada // ISIS Canada (Intelligent sensing for innovative structures) . – 2001. – 127 с.
98. Mylonakis, G. Lateral Vibration and Internal Forces of Grouped Piles in Layered Soil [Текст] / G. Mylonakis, G. Gazetas // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 1999. – 125 т. – С. 16–25.
99. Nagel, K. A cellular automaton model for freeway traffic [Текст] / K. Nagel, M. Schreckenberg // J. Phys. I France. – 1992. – 2 т. – С. 2221–2229.
100. Neitzel, F. Vibration monitoring of bridges [Текст] / F. Neitzel // Reports on Geodesy. – 2011. – 90 т. – С. 331–340.
101. Nguyen, V. H. A Study of Temperature and Aging Effects on Eigenfrequencies of Concrete Bridges for Health Monitoring [Текст] / V. H. Nguyen // Engineering. – 2017. – 9 т. – 396 с.
102. Novak, M. Dynamic Soil Reactions for Plane Strain Case [Текст] / M. Novak, F. Aboul-Ella, T. Nogami // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1978. – 104 т. – С. 953–959.
103. Novak, M. Dynamic Stiffness and Damping of Piles [Текст] / M. Novak // Can. Geotech. J. – 1974. – 11 т. – С. 574–598.
104. Novak, M. Piles under dynamic loads [Текст] / M. Novak // International Conferences on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. Paper no. SOA14. – 1991. – С. 2433–2456.

105. Nuno, K. Damage detection of a steel truss bridge using frequency response function curvature method [Текст] / K. Nuno // Royal Institute of Technology. – 2013. – 2 т. – С. 3–8.
106. Omenzetter, P. Forced and ambient vibration testing of full scale bridges. [Текст] / P. Omenzetter // A report submitted to earthquake commission research foundation (Project No. UNI/578). – 2013. – 206 с.
107. O'Neill, M. Analysis of three-dimensional pile groups with nonlinear soil response and pile-soil-pile interaction [Текст] / M. O'Neill, I. O. Ghazzaly, H. H. Boo // Proceedings of the Annual Offshore Technology Conference. – 1977. – 2 т. – С. 279–287.
108. Pakzad, S. N. Statistical Analysis of Vibration Modes of a Suspension Bridge Using Spatially Dense Wireless Sensor Network [Текст] / S. N. Pakzad, G. L. Fenves // Journal of Structural Engineering. – 2009. – 135 т. – С. 863–872.
109. Patel, S. G. Ambient vibration testing of bridges - state of the art [Текст] / S. G. Patel // International Journal of Advances in Engineering & Technology. – 2015. – С. 1009–1017.
110. Peeters, B. System Identification and Damage Detection in Civil Engineering [Текст] / B. Peeters // Belgium: Katholieke Universiteit Leuven Faculteit Toegepaste Wetenschappen Arenbergkasteel. – 2000. – 256 с.
111. Pines, D. Status of structural health monitoring of long-span bridges in the United States [Текст] / D. Pines, A. E. Aktan // Progress in Structural Engineering and Materials. – 2002. – № 4. – С. 372–380.
112. Poulos, H. G. Pile Foundation Analysis and Design [Текст] / H. G. Poulos // Wiley. Rainbrow-Bridge Book Co. – 1980. – 410 с.
113. Randall, R. B. Extraction of modal parameters from response measurements [Текст] / R. B. Randall, G. Zurita, T. Wardrop // Investigation and desarrollo. – 4 т. – 2004. – С. 5–12
114. Renganathan, T. Static pile soil pile interaction in offshore pile groups [Текст] / T. Renganathan, J. B. Ravindraraj // International Journal of Civil Engineering and Technology. – 2018. – 9 т. – С. 1649–1653.

115. Richardson, M. H. Parameter Estimation from Frequency Response Measurements using Rational Fraction Polynomials [Текст] / М. H. Richardson, D. L. Formenti // IMAC. – 1982. – 15 с.
116. Roblee, C. J. The GeoIndex model for practical design selection of non-linear soil properties [Текст] / C. J. Roblee // Proceedings of the 8th U.S. National Conference on Earthquake Engineering. – 2006. – 15 с.
117. Rolling Resistance. The engineering toolbox [Электронный ресурс] / Режим доступа: [www.url: https://www.engineeringtoolbox.com/rolling-friction-resistance-d\\_1303.html](https://www.engineeringtoolbox.com/rolling-friction-resistance-d_1303.html) (дата обращения: 01.02.2018).
118. Sadrekarimi, J. The Coefficient of Subgrade Reaction and Its Accuracy on Design of Foundations [Текст] / J. Sadrekarimi, M. A. Ghamari // International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering. – 2007. – 7 с.
119. Schevenels, M. Frequency domain analysis of site amplification in low seismicity regions [Текст] / M. Schevenels, G. Degrande // 5th international conference on earthquake geotechnical engineering. – 2011. – С. 1–12.
120. Sextos, A. Effect of soil-structure interaction and spatial variability of ground motion on irregular bridges: the case of the Krystallopigi bridge [Текст] / A. Sextos, J. A. Kappos, P. Mergos // 13th World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2298. Canada. – 2018. – С. 1–15
121. Shelman, A. Characterization of Seasonally Frozen Soils for Seismic Design of Foundations [Текст] / A. Shelman // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 2014. – 140 т. – С. 1–11.
122. Sikorsky, C. Development of a Health Monitoring System for Civil Structures using a Level IV Non-Destructive Damage Evaluation Method [Текст] / C. Sikorsky // Structural health monitoring, Stanford university. – 1999. – С. 68–81.
123. Sinha R. Seismic Damage Index for Classification of Structural Damage – Closing the Loop [Текст] / R. Sinha, S. Shiradhonkar // Indian Institute of Technology Bombay: 15 WCEE. – 2012. – 10 с.

124. Srinivasulu, P. A Study of Dynamic Pile-Soil Interaction [Текст] / P. Srinivasulu // International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering. 1. – 1988. – 9 с.
125. Stewart, J. Guidelines for performing hazard-consistent one-dimensional ground response analysis for ground motion prediction. [Текст] / J. Stewart, K. Afshari, Y. M. Hashash // PEER Report 2014/16 Pacific Earthquake Engineering Research Center Headquarters. University of California at Berkeley. – 2014. – 11 с.
126. Summala, H. Brake Reaction Times and Driver Behavior Analysis [Текст] / H. Summala // Transportation Human Factors. – 2000. – 2 т. – С. 217–226.
127. Tang, J. P. Vibration tests and damage detection of P/C bridges [Текст] / J. P. Tang, K. M. Leu // Journal of the Chinese Institute of Engineers. – 1991. – 14 т. – С. 531–536.
128. Teodoru, I. B. Beams on Elastic Foundation. The Simplified Continuum Approach [Текст] / I. B. Teodoru // The Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy, Construction. Architecture Section. – 2009. – 4 т. – С. 37–46.
129. Terzaghi, K. Soil Mechanics in Engineering Practice [Текст] / K. Terzaghi // John Wiley & Sons. – 2010. – 534 с.
130. Thulukkanam, K. Heat Exchanger Design Handbook. 2 edition [Текст] / K. Thulukkanam // Boca Raton: CRC Press. – 2013. – 1260 с.
131. Toksoy, T. Bridge-condition assessment by modal flexibility [Текст] / T. Toksoy, A. E. Aktan // Experimental Mechanics. – 1994. – 34 т. – С. 271–278.
132. Towhata, I. Geotechnical Earthquake Engineering [Текст] / I. Towhata // Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. – 2008. – 684 с.
133. Vesic, A. S. Design of pile foundation [Текст] / A. S. Vesic // NCHRP Synthesis of Highway Practice. – 1977. – 42 т. – 80 с.
134. Wang, Y. Analysis of Water Flow Pressure on Bridge Piers considering the Impact Effect [Электронный ресурс] / Y. Wang // Mathematical Problems in Engineering. – 2015. – Режим доступа: [www.url: https://www.hindawi.com/journals/mpe/2015/687535/](http://www.hindawi.com/journals/mpe/2015/687535/) (дата обращения: 01.02.2018).

135. Wang, N. Analytical model of vertical vibrations in piles for different tip boundary conditions: parametric study and applicationsx [Текст] / N. Wang, K. Wang, W. Wu // J. Zhejiang Univ. Sci. A. – 2013. – 14 т. – С. 79–93.
136. Wenzel, H. Damage detection and bridge classification by ambient vibration monitoring—application of BRIMOS at two stay cable bridges in China [Текст] / H. Wenzel, F. Peter // The Proceeding of 4th China-Japan-US Symposium on Structural Control and Monitoring. – 2006. – С. 16–17.
137. Yang, H. Elastic modulus calculation model of a soil-rock mixture at normal or freezing temperature based on micromechanics approach [Текст] / H. Yang // Advances in Materials Science and Engineering. – 2015. – С. 1–10.
138. Yongda, F. Monitoring and Analysis of a Bridge with Partially Restrained Bearings [Текст] / F. Yongda, T. D. John // Journal of Bridge Engineering. – 2001. – 6 т. – С. 23–29.
139. Yoshida, N. Nonlinear site response and its evaluation and prediction [Текст] / N. Yoshida, S. Iai // Yokosuka: Proc. 2nd International Symposium on the Effect of Surface Geology on Seismic Motion. – 1998. – С. 71–90.
140. Zhang, Y. Non-linear and equivalent linear site response analysis for the Izmit Bay Bridge [Электронный ресурс] / Y. Zhang, S. Christie // Режим доступа: [www.url:https://www.itascacg.com/documents/non-linear-and-equivalent-linear-site-response-analysis-for-the-izmit-bay-bridge](http://www.url:https://www.itascacg.com/documents/non-linear-and-equivalent-linear-site-response-analysis-for-the-izmit-bay-bridge) (дата обращения: 01.02.2018).

#### **Нормативные документы**

141. СП 274.1325800.2016 «Мосты. Мониторинг технического состояния» (Дата введения 06.17.2017) [Текст] / М.: Стандартинформ. – 2017. – 50 с.
142. СП 35.13330.2011 «Мосты и трубы» актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84\* [Текст] / М.: Центр проектной продукции в строительстве. – 2011. – 338 с.
143. СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия» актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\* [Текст] / М.: Центр проектной продукции в строительстве. – 2016. – 96 с.

144. СП 38.13330.2012 «Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов)». Актуализированная редакция СНиП 2.06.04-82\* [Текст] / М.: Минрегион России. – 2013. – 142 с.
145. СП 14.13330.2014 «Строительство в сейсмических районах» [Текст] / М.: ФАУ «ФЦС». – 2016. – 131 с.
146. ASCE 7-10. Minimum design loads for buildings and other structures [Текст] / American Society of Civil Engineers. – 2010. – 658 с.
147. ASCE 4-16. Seismic analysis of safety-related nuclear structures [Текст] / ASCE Standard. – 2017. – 204 с.
148. ASME code for pressure piping, B31 [Текст] / The American society of mechanical engineers. – 2008. – 140 с.
149. Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance. Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings [Текст] / British standards. – 2004. – 232 с.
150. Guide specifications for seismic isolation design. Third edition [Текст] / AASHTO. – 2010. – 62 с.
151. ISO 14963:2003 Guidelines for dynamic tests and investigations on bridges and viaducts [Текст] / International Standard ISO. – 2003. – 134 с.
152. ISO 18649:2004 - Mechanical vibration - Evaluation of measurement results from dynamic tests and investigations on bridges [Текст] / International Standard ISO. – 2004. – 87 с.
153. LRFD Seismic Analysis and Design of Bridges Reference Manual [Текст] / U.S. Department of Transportation Federal Highway Administration. – 2011. – 608 с.