

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет транспорта»
РУТ (МИИТ)

На правах рукописи

Акулич Владимир Юрьевич



Напряженно-деформированное состояние и устойчивость равновесия
цилиндрических оболочек при упругих и упруго-пластических деформациях,
в том числе взаимодействующих с окружающим основанием, с учетом
изменения расчетной модели во времени

2.1.9. Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
советник РААСН,
доктор технических наук, профессор
Косицын Сергей Борисович

Москва – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	8
ГЛАВА 1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, В ТОМ ЧИСЛЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОКРУЖАЮЩИМ ОСНОВАНИЕМ.....	18
1.1 Общие положения теории тонких цилиндрических оболочек.....	18
1.2 Применение МКЭ к расчету тонких цилиндрических оболочек...	23
1.3 Методы расчета системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание»	27
1.4 Учет геометрической нелинейности в расчетах цилиндрических оболочек	31
1.5 Учет физической нелинейности в расчетах цилиндрических оболочек	34
1.6 Выводы по главе 1.....	37
ГЛАВА 2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ «ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА – ОКРУЖАЮЩЕЕ ОСНОВАНИЕ»	40
2.1 Основные дифференциальные уравнения цилиндрической круговой оболочки.....	40
2.2 Основные положения метода конечных элементов	44
2.3 Осевое растяжение – сжатие и плоский изгиб стержневого конечного элемента.....	46
2.4 Плоский прямоугольный конечный элемент оболочки	48
2.5 Объемные конечные элементы.....	53
2.6 Геометрически нелинейные задачи.....	57

2.7 Физически нелинейные задачи. Основные положения теории пластического течения.....	59
2.8 Моделирование контактных задач	68
2.9 Решение нелинейных алгебраических уравнений в задачах строительной механики	69
2.10 Метод Ланцоша для решения задач о собственных значениях ...	72
2.11 Выводы по главе 2	75
ГЛАВА 3 ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСАДКИ ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТОВОГО МАССИВА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАЗОРА МЕЖДУ ОБОЛОЧКОЙ И МАССИВОМ	77
3.1 Введение.....	77
3.2 Расчетная модель для определения осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки без учета «потерянного объема» грунта.....	78
3.3 Расчетная модель для определения осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки с учетом «потерянного объема» грунта.....	80
3.4 Расчетная модель для определения осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки с учетом «потерянного объема» грунта.....	84
3.5 Аналитические полуэмпирические методы определения мульды оседания земной поверхности за счет «потерянного объема» грунта	87
3.6 Оценка ширины массива, окружающего оболочку, необходимой для корректного определения осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки.....	96

3.7 Оценка ширины массива, окружающего оболочку, необходимой для корректного определения осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки.....	100
3.8 Определение мульды оседания поверхности земли при строительстве перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена.....	104
3.9 Выводы по главе 3.....	117
ГЛАВА 4 ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УЧЕТА СТАДИЙНОСТИ В РАСЧЕТАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СОВМЕСТНО С ОКРУЖАЮЩИМ ОСНОВАНИЕМ	120
4.1 Введение.....	120
4.2 Методика определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки и окружающего основания с учетом изменения расчетной модели во времени.....	121
4.3 Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки и окружающего основания с учетом изменения расчетной модели во времени и коэффициента трения	135
4.4 Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки и окружающего основания с учетом изменения расчетной модели во времени и коэффициента трения для оболочки с упруго-пластической моделью материала.....	143
4.5 Влияние поэтапно возводимой цилиндрической оболочки на напряженно-деформированные состояния существующей близлежащей оболочки и их единого окружающего основания.....	153
4.6 Выводы по главе 4.....	162

ГЛАВА 5 КРИТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА И ФОРМЫ ПОТЕРИ
УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ОКРУЖАЮЩИМ ОСНОВАНИЕМ 165

5.1 Верификация численного метода на примере определения критической нагрузки равномерно сжатого кольца 165

5.2 Определение и анализ критической нагрузки и форм потери устойчивости стержневой модели системы «оболочка – основание»..... 167

5.2.1 Линейный расчет стержневой модели системы «оболочка – основание» с двусторонними связями 169

5.2.2 Линейный расчет стержневой модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями 171

5.2.3 Нелинейный расчет стержневой модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями 173

5.3 Определение критической нагрузки и форм потери устойчивости плоской модели системы «оболочка – основание» 176

5.3.1 Линейный расчет плоской модели системы «оболочка – основание» с жесткими связями 177

5.3.2 Нелинейный расчет плоской модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями 178

5.4 Определение критической нагрузки и форм потери устойчивости пространственной модели системы «оболочка – основание». Случай бесконечно длинной цилиндрической оболочки 180

5.4.1 Линейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с двусторонними связями при линейно упругой модели материала 182

5.4.2	Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями без учета коэффициента трения по линейно упругой модели материала.....	184
5.4.3	Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями и учетом коэффициента трения при линейно упругой модели материала.....	186
5.4.4	Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями без учета коэффициента трения при упруго-пластической модели материала	187
5.4.5	Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями с учетом коэффициента трения при упруго-пластической модели материала	190
5.5	Численный анализ пространственной модели системы «оболочка – основание». Случай неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки	195
5.5.1	Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями без учета коэффициента трения при упруго-пластической модели материала	198
5.5.2	Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями с учетом коэффициента трения при упруго-пластической модели материала	200
5.6	Выводы по главе 5.....	207
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	210
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	214
	Приложение 1. Программа для автоматизации процесса создания расчетной модели цилиндрической оболочки и окружающего основания на командном языке PCL.....	250

Приложение 2. Описание примененных контактных конечных элементов	268
Приложение 3. Акт о внедрении результатов диссертационной работы	273

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования.

Тонкостенные элементы – оболочки широко применяются в современных строительных конструкциях. Их используют в транспортном, промышленном и гражданском строительстве при сооружении башен, опор, резервуаров, сводов, тоннелей и т. д.

Оболочки имеют ряд преимуществ: они способны эффективно воспринимать приложенную нагрузку за счет своей геометрической формы, эстетичны и предпочтительны с архитектурной точки зрения.

Особую роль оболочечные элементы играют в подземных сооружениях, где часто используют цилиндрические и другие сводчатые поверхности. При достаточно широком исследовании особенностей работы цилиндрических оболочек остаются вопросы по учету влияния контактного взаимодействия оболочки и основания, нелинейности происходящих процессов и изменению напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки в ходе ее монтажа, что не позволяет дать реальную оценку НДС и устойчивости таких конструкций от начала строительных работ до их завершения. Это предопределяет актуальность темы исследования по развитию методов расчета оболочек, взаимодействующих с окружающим основанием, на прочность, устойчивость и жесткость.

Степень разработанности темы исследования.

Общая теория оболочек существует с начала XX века. За прошедшее время отечественными и зарубежными учеными А. В. Александровым [8], С. А. Алексеевым, Н. А. Алумяэ [13, 14], С. А. Амбарцумяном [15], В. В. Болотиным [35, 36], В. З. Власовым [49, 50, 51], А. С. Вольмиром [56], И. И. Воровичем [57], И. Г. Галеркиным, К. З. Галимовым [63], А. Л. Гольденвейзером [70], Э. И. Григолюком [80], Г. Ю. Джанелидзе, Л. Г. Доннеллом [285], Е. М. Зверяевым [92, 93, 94], Р. Кларком, А. И. Лурье,

Э. Мейснером, Х. М. Муштари, В. В. Новожиловым [181, 183, 184, 185], Э. Рейсснером [316], С. П. Тимошенко [233, 234], В. И. Феодосьевым [245, 246], И. С. Цурковым [250], К. Ф. Черныхом [253, 254] и другими проделана огромная работа по совершенствованию и уточнению теории.

Большую роль в развитии теории оболочек сыграло появление вычислительной техники. Это потребовало поиска новых методов расчета и переоценки существующих. Наибольшее распространение среди численных методов определения НДС оболочек получил метод конечных элементов (МКЭ). Основные положения МКЭ изложены в работах следующих отечественных и зарубежных исследователей: М. Р. Айронса, А. В. Александрова, Дж. Аргириса, К. Бате [25], А. М. Белостоцкого [28, 29], Д. В. Вайнберга, Е. Вилсона, А. И. Голованова [68], Ж. Деклу, У. М. Дженкинса, О. К. Зенкевича [95, 96], В. Н. Иванова, Р. Клафа, С. Б. Косицына, Х. Мартина, А. М. Масленникова, Дж. Одена [190], В. А. Постнова [206], Л. А. Розина [211], А. С. Сахарова, Ф. Сьярле, М. Тернера, С. И. Трушина [238], И. Я. Хархурима, Н. Н. Шапошникова, Н. М. Якупова [266] и других.

Весомый вклад в разработку конечных элементов, способных корректно описать работу оболочки, внесли: Ф. Богнер [34], Р. Галлагер [65], А. С. Городецкий [76], Л. П. Железнов [90], О. К. Зенкевич [332, 333], Д. Кантин [112, 113], Р. Клаф [113], С. Б. Косицын [138], А. Б. Сабир [320, 272, 271], Р. Фокс [34], Л. Шмит [34], Д. Эшвел [268, 271] и другие.

Другим численным методом, часто применяющимся для определения НДС оболочек, является метод конечных разностей (МКР), который описан в работах П. А. Акимова [3, 97, 98], А. В. Александрова [8, 10], П. М. Варвака [43], Р. Ф. Габбасова [58], А. Б. Золотова [97, 98, 99], Б. Я. Лащеникова [8], М. Л. Мозгалевой [97, 98], В. Н. Сидорова [97, 98], С. И. Трушина [238], Р. П. Федоренко [243], В. Хакбуша [290], Н. Н. Шапошникова [8] и других.

Исследованиям взаимодействия конструкций с деформируемым основанием посвящены работы следующих авторов: А. Б. Айнбиндера [1, 2], Е. С. Ашпиза [19], А. М. Белостоцкого [27, 28], В. В. Виноградова [19], М. И. Горбунова-Посадова [72, 73], А. Л. Готмана [77, 78], Н. З. Готман [78], Г. К. Клейна [117], С. Н. Клепикова [118], Б. Г. Коренева [124], С. Б. Косицына [135], Э. К. Кузахметовой, Е. Н. Курбацкого [146, 147], Н. Н. Леонтьева, В. Л. Мондруса [146, 166], Н. С. Никифоровой [177, 178], П. Л. Пастернака [198], Г. Н. Савина [215], В. Е. Селезнева [221], А. М. Силкина, В. В. Соколовского, А. Н. Сониной, В. Г. Храпова, Чан Суан Линя [251], Н. Н. Шапошникова [257], Т. В. Шепитько и других.

Учет нелинейных свойств материалов, в том числе для систем «цилиндрическая оболочка – окружающее основание», рассмотрен в трудах В. В. Болотина [36], В. С. Бондаря [37], Л. А. Галина [64], А. И. Голованова [67], А. А. Ильюшина [107, 108], А. Ю. Ишлинского [110], А. Надаи [172], Г. А. Наумовой [173], В. В. Новожилова [181, 183], В. Прагера [208], В. Е. Селезнева, В. В. Соколовского [227], А. В. Яварова [265], А. Altaee, В. Н. Fellenius, А. Nobahar, R. Phillips и других.

Вопросами устойчивости стержневых и оболочечных элементов конструкций, в том числе с учетом физической и геометрической нелинейностей, занимались следующие ученые: А. В. Александров, М. М. Бегичев [26], В. В. Болотин [35], В. З. Власов [51], А. С. Вольмир [55], И. И. Ворович [57], В. В. Галишникова [288], Э. И. Григолюк [79, 81], И. Д. Грудев [82], И. В. Демьянушко, В. Б. Зылев [102, 103, 104], И. Иошимура [331], С. Б. Косицын [134, 163, 164], С. Н. Кривошапко [139, 140], Г. А. Мануйлов [134, 163, 164], В. Б. Мещеряков [165], Х. М. Муштари [169, 170], В. В. Новожилов [185], А. В. Перельмутер [201], А. В. Погорелов [202], В. Д. Потапов, А. Ф. Смирнов [225], С. П. Тимошенко [233], С. И. Трушин [239, 240], В. И. Феодосьев [246], Дж. Хаддлстон, Н. Дж. Хофф [248], К. Ф. Черных [253, 254] и другие.

Тем не менее до сих пор существует необходимость в разработке методов расчета систем «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» в нелинейных постановках задач и с учетом изменения расчетной модели во времени для увеличения области приложения классической теории.

Цель диссертационной работы заключается в разработке и развитии методов расчета и анализе напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек, взаимодействующих с окружающим основанием, в плоской и пространственной постановках задач.

Задачи исследования.

1. Разработка численной методики учета строительного зазора между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием, а также анализ влияния этого зазора на НДС системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание», в частности на перемещения верхней поверхности основания.

2. Определение размеров пространственного фрагмента системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание», необходимых для получения достоверных результатов расчета осадки верхней поверхности основания, вызванной наличием зазора между оболочкой и основанием.

3. Разработка программы для автоматизации процесса создания твердотельной расчетной модели системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» с возможностью учета строительного зазора между оболочкой и основанием.

4. Разработка методики и анализ влияния учета поэтапного возведения цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, на НДС системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» с использованием расчетной модели, изменяющейся во времени, с односторонним контактным взаимодействием между оболочкой и основанием при упруго-пластических моделях материала оболочки и основания.

5. Разработка методики определения критической нагрузки и форм потери устойчивости равновесия цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, при различных моделях материала оболочки и основания и условиях контактного взаимодействия с учетом геометрической нелинейности. Сравнительный анализ полученных результатов.

6. Применение разработанных методик для решения практических задач расчета цилиндрических оболочек, взаимодействующих с окружающим основанием.

Научная новизна исследования состоит в оценке НДС и устойчивости цилиндрических оболочек с учетом взаимодействия с окружающим основанием и этапности строительства, а именно:

1. Построены конечно-элементные модели системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание», изменяющиеся во времени, учитывающие зазор между оболочкой и основанием на этапе строительства с помощью одностороннего контактного взаимодействия и физическую нелинейность материалов.

2. Определены размеры пространственного фрагмента системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание», необходимые для получения достоверных результатов расчета осадки верхней поверхности основания.

3. Разработан и реализован алгоритм оценки НДС и устойчивости системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание».

4. Программа на языке PCL в программном комплексе PATRAN для автоматизации процесса создания твердотельной расчетной модели системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» с возможностью учета строительного зазора между оболочкой и основанием при одностороннем контактном взаимодействии.

Теоретическая и практическая значимость работы.

1. Методики и алгоритмы расчета системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» с учетом строительного зазора между оболочкой и основанием на этапе строительства можно использовать в расчетах подземных сооружений.

2. Расчетные модели, методики и алгоритмы, позволяющие учесть разное количество этапов возведения цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, можно применять при расчетах цилиндрических оболочек, возводимых в несколько стадий.

3. Программа для автоматизации процесса создания твердотельной расчетной модели системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» возможно использовать в расчетах подземных сооружений, особенно в случае необходимости большого числа вариантов расчетных моделей.

4. Рекомендации по выбору размеров пространственного фрагмента системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание», необходимых для получения достоверных результатов расчетов осадки верхней поверхности массива основания.

5. Рекомендации по выбору минимально необходимого количества расчетных стадий возведения оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, в практических расчетах по определению НДС системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание».

6. Определено влияние учета контактного трения и упруго-пластической модели материала цилиндрической оболочки, поэтапно возводимой в массиве основания, на ее НДС.

7. Методика определения и полученные величины критических нагрузок, при которых конструкция цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, теряет устойчивость равновесия, могут быть

использованы при проектировании подземных тоннелей различного назначения.

8. Результаты работы уже нашли практическое применение при проектировании перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена (от станции «Раменки» до станции «Расказовка»), расположенных под существующими железнодорожными путями Московской железной дороги на участке станция «Солнечная» – остановочный пункт «Новопеределкино». Соответствующий акт о внедрении результатов диссертационной работы приведен в Приложении 3.

Методология и методы исследования.

Для решения поставленных в диссертационной работе задач применен метод конечных элементов в перемещениях, включающий построение расчетных моделей рассматриваемых систем, их численные линейный и геометрически, физически и конструктивно нелинейный анализы. С целью учета развития пластических деформаций материалов использована теория пластического течения с критериями пластичности Мора – Кулона и Друкера – Прагера.

Положения, выносимые на защиту.

1. Пространственные расчетные модели, методики и алгоритмы для определения НДС системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» и осадки верхней поверхности массива основания с учетом зазора между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием на этапе строительства с помощью одностороннего контактного взаимодействия.

2. Оценка влияния размеров пространственного фрагмента системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» на его НДС и рекомендации по выбору характерных размеров такого фрагмента для расчета осадки верхней поверхности массива основания.

3. Программа (на языке PCL в программном комплексе PATRAN), позволяющая автоматизировать процесс создания твердотельной расчетной

модели системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» с возможностью учета строительного зазора между оболочкой и основанием при одностороннем контактном взаимодействии.

4. Пространственные расчетные модели, изменяющиеся во времени, методика и алгоритм, позволяющие учесть разное количество этапов возведения цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, при различных моделях материала оболочки и основания и рекомендации по выбору минимально необходимого количества расчетных стадий возведения оболочки при определении НДС.

5. Оценка влияния учета контактного трения и упруго-пластической модели материала цилиндрической оболочки, поэтапно возводимой в массиве основания, на ее НДС.

6. Методика, алгоритм и оценка критических нагрузок и форм потери устойчивости цилиндрической оболочки, полученных при различных моделях материала оболочки и основания и условиях контактного взаимодействия с окружающим основанием, с учетом геометрической нелинейности.

7. Анализ результатов численного решения практической задачи, а именно НДС четырех перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена от станции «Раменки» до станции «Рассказовка», расположенных под существующими железнодорожными путями Московской железной дороги на участке станция «Солнечная» – остановочный пункт «Новопеределкино».

Соответствие паспорту специальности. Содержание диссертации соответствует П.1. «Общие принципы расчета сооружений и их элементов», П.2. «Линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета» и П.4. «Численные методы расчета сооружений и их элементов» паспорта специальности 2.1.9. Строительная механика.

Достоверность результатов работы обеспечена корректностью постановок задач, сформулированных и решенных на основе общих теоретических положений строительной механики и механики деформируемого твердого тела; применением известных численных методов, реализованных в верифицированных программных комплексах MSC PATRAN – NASTRAN и ANSYS Mechanical; согласованностью результатов численного анализа с известным обобщенным полуэмпирическим методом, а также хорошей сходимостью тестовых численных расчетов с точными аналитическими решениями.

Апробация работы.

Основные результаты работы доложены и опубликованы в следующих трудах и тезисах докладов научно-технических конференций российского и международного уровня.

1. VII и VIII Международные научные конференции «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»). Москва, РААСН 2018 и 2019 г.

2. Международная конференция «Modelling and methods of structural analysis». Москва, МГСУ 2019 г.

3. 76, 77 и 78 Международные научно-методические и научно-исследовательские конференции МАДИ. Подсекция «Строительная механика машин и конструкций». Москва, МАДИ 2018, 2019 и 2020 г.

4. 43 Межвузовский научный семинар «Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы». Москва, РУДН 2019 г.

5. XIX, XX и XXI Международные конференции «Компьютерные системы инженерного анализа MSC Software». Москва 2016, 2017 и 2018 г.

6. Конференции «Неделя науки. Наука МИИТа – транспорту». Москва, Российский университет транспорта (РУТ МИИТ) 2017, 2018, 2019 и 2020 г.

7. XV Международная научно-техническая конференция «Современные проблемы проектирования, строительства и эксплуатации железнодорожного пути». Москва, Российский университет транспорта (РУТ МИИТ) 2018 г.

Публикации.

Основные положения диссертации изложены в 17 печатных работах. Из них 5 опубликованы в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ, и 4 опубликованы в изданиях, входящих в международные базы Web of Science и Scopus.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, содержащего 333 наименований, и трех приложений. Общий объем составляет 273 страницы и включает 134 рисунка, 19 таблиц.

ГЛАВА 1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, В ТОМ ЧИСЛЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОКРУЖАЮЩИМ ОСНОВАНИЕМ

1.1 Общие положения теории тонких цилиндрических оболочек

Криволинейные, в том числе цилиндрические, оболочки являются частью большого числа строительных проектов различного назначения: гражданское и промышленное строительство, транспортные системы, уникальные здания и сооружения и пр. Использование криволинейных оболочек обусловлено их превосходством в восприятии некоторых видов внешних нагрузок и экономией материальных ресурсов по сравнению с другими типами конструкций.

До появления теории оболочек существовала теория пластин, где один из основных методов вывода разрешающих уравнений разработан О. Коши и С. Пуассоном [276, 312] в первой половине XIX века. Ими впервые рассмотрена проблема изгиба пластин на основе общих уравнений теории упругости. Метод основан на разложении всех перемещений и напряжений пластины в ряды по степеням расстояния точек от средней плоскости (либо по некоторой системе функций этой переменной) с удержанием членов ряда первого порядка малости. Таким образом получено основное дифференциальное уравнение для прогибов, которое полностью совпадает с известным уравнением Софи Жермен – Лагранжа. Позднее С. Пуассон успешно расширил данное уравнение для расчета пластин под действием статической нагрузки. Однако метод Коши – Пуассона оказался подвержен некоторым критическим замечаниям. В частности, А. Сен-Венан [278] утверждал, что ряды, предложенные О. Коши и С. Пуассоном, в большинстве случаев не имеют сходимости. Количество граничных условий, введенных С. Пуассоном, также стало предметом споров.

Второй, основной метод вывода разрешающих уравнений предложен в конце XIX века Г. Кирхгофом [292, 293]. Г. Кирхгоф сформулировал два основных допущения, которые по настоящее время существуют в теории изгиба пластин и известны как «гипотезы Кирхгофа». Первая гипотеза носит геометрический характер, вторая – силовой. Теория Г. Кирхгофа внесла физическую ясность в теорию изгиба пластин и способствовала ее широкому использованию на практике. Недостатком данного подхода служит его приближенный характер, что не позволяет развить метод в точную теорию.

Во второй половине XIX века разработана двумерная теория оболочек в общем виде (для оболочек произвольной формы). Г. Арон [267] и А. Лява [300] перенесли на оболочки допущения, использованные Г. Кирхгофом в двумерной теории пластин. Неправильное использование малых слагаемых и неопределенная область применимости – основной недостаток уравнений А. Лява.

Дальнейшее развитие трудов А. Лява отмечено в работах А. И. Лурье [157, 159, 160], в которых впервые уравнения теории оболочек представлены в тензорном виде. А. И. Лурье также предложен метод расчета напряжений вблизи малого кругового отверстия на цилиндрической оболочке [158].

Следующий важный шаг в теории оболочек связан с трудами А. Л. Гольденвейзера, в которых разработаны асимптотические методы интегрирования [70], в том числе примененные к цилиндрическим оболочкам.

Решающую роль в создании математически последовательной теории оболочек сыграли работы Б. Г. Галеркина [59, 60, 61] по теории толстых плит и толстых цилиндрических оболочек, где применены уравнения общей теории упругости.

В. В. Новожиловым в работах [186, 187] выяснена погрешность гипотез Кирхгофа, что позволило упростить уравнения теории оболочек, которые основаны на данных гипотезах. В докторской диссертации В. В. Новожиловым

предложен комплексный метод теории оболочек. В монографии [185] рассмотрена проблема геометрически нелинейных задач теории оболочек.

В начале XX века учеными предпринята попытка ввести еще один приближенный подход к расчету оболочек путем разложения напряженного состояния в теле оболочки на безмоментное [87] и на краевой эффект [263].

В докторской диссертации В. З. Власова предложены методы расчета цилиндрических перекрытий с использованием некоторых упрощающих гипотез. Другой предложенный метод предполагает расчет цилиндрических перекрытий с помощью их замены на призматические складчатые конструкции [52]. Применение и развитие способа заменяющей складки изложено в работах П. Л. Пастернака [199, 200], С. И. Стельмаха, Г. С. Шахраманова [259], А. А. Джубуа [85]. Позднее В. З. Власовым предложена теория пологих оболочек (техническая теория оболочек) [49], в которой допущено пренебрегать влиянием перемещений, касательных к срединной поверхности, на параметры, определяющие кривизну и кручение оболочки. Это приводит расчет оболочки к простому и удобному виду, который можно использовать в ряде практических задач для пологих и цилиндрических оболочек.

Устойчивости цилиндрических оболочек при кручении рассмотрена в работах Х. М. Муштари, где учтены деформации элемента в уравнениях равновесия. Данная теория оболочек рассматривает задачи в геометрически нелинейной постановке [170, 171]. Также Х. М. Муштари получено решение задачи о «хлопке» сферической оболочки. Само явление «хлопка» в вопросах устойчивости оболочек показано механиком Т. Карманом. Оно означает потерю устойчивости оболочки при конечных перемещениях.

П. Ф. Папковичем получено решение задачи об устойчивости цилиндрической оболочки с усиливающими ребрами, приведен метод определения напряженного состояния в данной оболочке [196].

Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при различных вариантах нагружения рассмотрена в работах С. П. Тимошенко [233].

Отметим русских и советских ученых, которые внесли значительный вклад в решение задач теории оболочек во второй половине XX века: Н. А. Алумяэ [13, 14], С. А. Амбарцумян [15], В. В. Болотин [35, 36], А. С. Вольмир [56], И. И. Ворович [57], К. З. Галимов [63], Э. И. Григолюк [80], Г. Ю. Джанелидзе [86], В. В. Новожилов [184, 185], С. П. Тимошенко [233, 234], В. И. Феодосьев [246], И. С. Цурков [250], К. Ф. Черных [253, 254] и др.

Отличительной особенностью того периода является появление вычислительной техники (ЭВМ), с которой тесно связано дальнейшее развитие теории оболочек. Далеко не все известные на тот момент методы расчета оболочек оказались пригодны для решения задач на ЭВМ. Это требовало поиска новых методов расчета и переоценки существующих.

Изначально предпочтение отдавалось разностным методам [66], обладающим универсальностью и дискретным представлением с использованием ленточной матрицы. Недостатком данного метода является проблема аппроксимации граничных условий в областях со сложной геометрией. Позднее предложены вариационно-разностные методы [189], сеточные методы, многосеточные методы [32], а также суперэлементный подход [205].

Наибольшее распространение среди численных методов определения НДС оболочек получили метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ), о котором пойдет речь в следующем параграфе.

Популярность МКР обусловлена применением относительно простого подхода к дискретизации дифференциальных уравнений строительной механики. Участок рассматриваемого тела заменяют совокупностью точек (узлов), образующих сетку. Производные, входящие в дифференциальные уравнения и краевые условия, заменяют в каждом узле их разностными

аналогами. Задачу сводят к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений. Из преимуществ МКР можно выделить: высокую универсальность, простоту программирования и модификации. К недостаткам относятся сложность удовлетворения краевым условиям для областей со сложной геометрией и большое число алгебраических уравнений, подлежащих решению.

МКР посвящены работы многих отечественных и иностранных ученых: П. А. Акимова [3, 97, 98], А. В. Александрова [8, 10], П. М. Варвака [43], Р. Ф. Габбасова [58], А. Б. Золотова [97, 98, 99], Б. Я. Лашеникова [8], М. Л. Мозгалевой [97, 98], В. Н. Сидорова [97, 98], С. И. Трушина [238], Р. П. Федоренко [243], В. Хакбуша [290], Н. Н. Шапошникова [8] и др.

Более подробный обзор развития теории пластин и оболочек изложен в специальных изданиях [182, 324, 326].

В настоящее время в нашей стране исследования НДС цилиндрических оболочек приведены в некоторых диссертационных работах. Так в работе [123] рассмотрено исследование НДС составных цилиндрических оболочек при различных геометрических и жесткостных параметрах и граничных условиях. Получены основные алгоритмы и программы для расчета НДС цилиндрических оболочек на ЭВМ. В работе [174] выполнена разработка алгоритмов расчетов пологих, цилиндрических и сферических оболочек при действии различных нагрузок. Полученные алгоритмы хорошо адаптированы для ЭВМ.

Авторы научных статей, посвященных расчетам НДС цилиндрических оболочек, вышедших за последние годы: О. В. Байдин [22], С. К. Голушко [69], С. Н. Кривошاپко [141], Е. Д. Мордовин [167], Б. В. Нерубайло [176], Н. В. Николаев [179], В. П. Ольшанский [191, 192], В. Н. Паймушин [194], Л. С. Рыбалков [213, 214], А. А. Тарасенко [231], К. Ф. Шагивалеев [256] и др.

1.2 Применение МКЭ к расчету тонких цилиндрических оболочек

Среди численных методов решения задач строительной механики наибольшее распространение имеет МКЭ. Универсальный подход к конструкциям любой сложности и адаптированность к использованию на ЭВМ являются его главными преимуществами. Необходимо отметить, что на сегодняшний день решение многих задач строительной механики возможно только с использованием МКЭ.

Основополагающие труды по МКЭ принадлежат следующим ученым: А. В. Александрову, К. Бате и Е. Вилсону [25], Р. Галлагеру [65], О. Зенкевичу [95], Р. Клафу [280], Д. Норри и Ж. де Фризу [188], Дж. Одну [190], Л. А. Розину [211], М. Дж. Тернеру и др. Математические аспекты сходимости метода рассмотрены в трудах А. С. Городецкого [75], Г. Стренга и Дж. Фикса [229], Ф. Сьярле [230] и др.

На базе МКЭ основано большое число современных программных комплексов с крупной библиотекой конечных элементов, которые позволяют проводить расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и динамику с учетом разного вида нелинейностей: ANSYS Mechanical, MSC PATRAN – NASTRAN, ABAQUS/Simulia, LS-DYNA, СТАДИО, Ing+ MicroFe, Stark ES, Robot Structure, SOFiSTiK, Лира САПР, SCAD и др. Первые два программных комплекса приведенного списка использованы в расчетах данной диссертационной работы.

В нашей стране первые решения задач теории оболочек, полученные с использованием ЭВМ, принадлежат А. С. Вольмиру [54] и В. И. Феодосьеву [245].

При моделировании оболочек существует проблема выбора подходящего конечного элемента, способного адекватно описать работу оболочки в исследуемых условиях, так как большинство оболочечных элементов

пригодны для использования лишь в определенной области задач. Особенно это касается расчетов оболочек на устойчивость и динамику. Также выбранные элементы должны обеспечивать достаточно точное решение при минимальных вычислительных ресурсах.

Цилиндрические оболочки можно составить из набора плоских четырехузловых конечных элементов, что дает удовлетворительные результаты расчетов. При помощи таких элементов решен ряд практически важных задач строительной механики [332, 333]. Применение плоских элементов оболочек подробнее описано в монографиях [42, 65, 74, 75, 95, 206] и др. Однако, для решения рассматриваемых задач возможно использовать и криволинейные оболочечные элементы с применением той или иной теории оболочек. Далее приведен обзор криволинейных прямоугольных элементов оболочек.

Криволинейные прямоугольные элементы впервые упомянуты в работах по пологим и цилиндрическим оболочкам. Позднее они применены для оболочек произвольной формы. Дж. Коннором и К. Бреббиа разработан простейший прямоугольный элемент, полученный совмещением прямоугольного элемента изгиба пластин с мембранным четырехузловым элементом [282]. Подобные элементы первоначально использовались для пологих оболочек [274, 282, 322], но известны попытки разработки таких элементов для цилиндрических оболочек [318]. Позднее выяснилось, что данные элементы имеют серьезные недостатки и пригодны лишь для отдельных задач.

В работах Р. Галлагера изложена попытка улучшения такого элемента [289] с использованием одномерных Эрмитовых аппроксимаций. Я. С. Пшеменецкий в [313] также использует полиномы Эрмита для аппроксимаций прогиба, но с отсутствием одного слагаемого, что приводит к потере получаемой точности.

Основным недостатком приведенных выше прямоугольных элементов является плохая аппроксимация смещений элемента как твердого тела, что видно на примере расчета круговой арки [68]. Это проблема решена в конечном элементе цилиндрической оболочки Д. Кантина – Р. Клафа [113] путем явного добавления жестких смещений к аппроксимациям.

В работе [320] А. Б. Сабира и А. С. Лока изложена сокращенная версия такого элемента, имеющая двадцать степеней свободы вместо двадцати четырех. За счет этого число степеней свободы в каждой вершине элемента уменьшено с шести до пяти. Однако такая версия элемента обладает теми же недостатками, что и у элементов Я. С. Пшеменецкого с использованием усеченных Эрмитовых аппроксимаций, но в большей степени.

Другой способ точного учета жестких смещений изложен Д. Кантином в работах [112, 277]. Им предложено корректировать уже построенную матрицу жесткости. Такой прием более предпочтителен по сравнению с добавлением жестких смещений, используемым в работе А. Б. Сабира и А. С. Лока [320]. Численный эксперимент показал более быструю сходимость элемента, построенного с корректировкой матрицы жесткости. Такие элементы хорошо зарекомендовали себя в расчетах цилиндрических оболочек как по точности, так и по вычислительным затратам.

Точность описанных выше аппроксимаций проверена на круговом брусе прямоугольного поперечного сечения, испытывающим чистый изгиб. Данная задача затрагивает наиболее сложную проблему расчетов тонких оболочек МКЭ о независимой аппроксимации деформаций. Проверка показала, что явное добавление жестких смещений в пробные функции, как это сделано в элементе цилиндрической оболочки Д. Кантина – Р. Клафа [113], является недопустимым, так как это приводит к некорректной аппроксимации деформаций.

Для точного представления жестких смещений и независимых деформаций в пробных функциях необходим другой подход. В работах [269,

272, 270, 321] указано, что следует задавать деформации, по которым будут определены перемещения, а не наоборот. Однако, для оболочек число перемещений не соответствует числу деформаций: для определения трех перемещений существует шесть выражений для деформаций, которые связаны друг с другом уравнениями совместности деформаций. Это сильно затрудняет создание подобного оболочечного элемента. Известно небольшое число таких конечных элементов для пологих и цилиндрических оболочек [268, 271, 317, 319].

Наиболее популярный конечный элемент цилиндрической оболочки с заданными деформациями – элемент Д. Г. Эшвела и А. Б. Сабира [268, 271]. Численные эксперименты в работах [144, 268] показывают, что такой элемент в расчетах цилиндрических оболочек является наиболее эффективным за счет точного представления жестких смещений и постоянных напряженных состояний. К тому же он имеет только «инженерные степени свободы»: по три перемещения и два угла поворота в каждом узле.

Отметим также еще один элемент для расчета цилиндрической оболочки, который предложен в работе Ф. Богнера, Р. Фокса и Л. Шмита [34]. В этом элементе применены одинаковые бикубические аппроксимации ко всем трем перемещениям. Он обеспечивает хорошую точность при довольно редкой конечно-элементной сетке. Подобный подход приобрел популярность в конечных элементах оболочек произвольной формы.

Применение криволинейных конечных элементов оболочек подробнее описано в монографии [68].

Разработка оболочечных конечных элементов и их применение в практических расчетах проводится и в настоящее время. В диссертационной работе [138] решена проблема выбора специфических функциональных базисов для аппроксимации перемещений двумерных и трехмерных криволинейных конечных элементов, проведена работа над классом изопараметрических конечных элементов. В диссертации [84] на основе

предложенных инвариантной аппроксимации и смешанного функционала разработаны объемные конечные элементы для определения НДС пластин и оболочек в криволинейной системе координат. В работе [90] предложены новые оболочечные элементы для различных видов цилиндрических оболочек. Предложенные элементы обладают естественной кривизной и позволяют учитывать жесткие перемещения оболочек как твердых недеформируемых тел.

В статьях [122, 120] показан алгоритм расчета сочлененных оболочек произвольной формы. Элементом дискретизации выбран четырехугольный криволинейный конечный элемент с восемнадцатью степенями свободы в каждом узле.

1.3 Методы расчета системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание»

Исследования НДС цилиндрических оболочек, взаимодействующих с окружающим деформируемым основанием, представляют особый интерес в связи с широким распространением таких систем в технике и строительстве: транспортные тоннели, заглубленные тонкостенные емкости (резервуары), подземные трубопроводы и т.д.

Формулировка теоретических положений, способных удовлетворительно описать работу конструкции на деформируемом основании, оказалась весьма сложной задачей, так как физико-механические свойства грунтового основания довольно сложны и неоднородны. Далее перечислены основные известные модели деформируемого основания.

Одной из первых моделей упругого основания является модель Фусса – Винклера – Циммермана (винклеровское упругое основание). Модель отождествляет работу основания с работой набора вертикальных независимых пружин с использованием гипотезы коэффициента постели. Такая модель

является наиболее простой, однако имеет ряд недостатков: неизвестны осадки основания за пределами конструкции, и сложность определения величины коэффициента постели. Развитие метода изложено в трудах [118, 124, 142, 143, 195, 198, 209].

Следующим шагом в развитии моделирования деформируемого основания стала модель упругого полупространства. Такая модель способна описать распределение осадок основания за пределами конструкции, но весьма сложна для расчета в сравнении с моделью Фусса – Винклера – Циммермана. Также расчеты показали, что в некоторых случаях модель приводит к завышенным значениям осадок и изгибающих моментов. Модель отражена в следующих работах [72, 91, 153, 203, 224].

Позднее появились более совершенные модели деформируемого основания. К ним относятся модель упругого слоя [73, 88, 153, 261], комбинированные модели [153, 262], двухпараметрическая модель основания [50] и др.

Существенное влияние на развитие методов расчета систем «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» оказало определение НДС обделок транспортных тоннелей. В книгах Б. З. Амузина, Н. С. Булычева и А. Г. Оловянного [41] приведен подробный обзор инженерных методов расчета обделок тоннелей. В работах Н. И. Мухелишвили и Г. Н. Савина [215] изложен метод расчета НДС областей, ослабленных криволинейными отверстиями, с помощью комплексных потенциалов. Определение НДС кольца оболочки, взаимодействующего с упруго-пластической средой приведено в работе К. В. Руппенейта [212]. О. В. Афанасовой разработана методика расчета круговых тоннелей, пересекаемых по диаметру границей двух слоев пород с разными физико-механическими характеристиками [18].

Также методы расчета систем «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» развиты, благодаря работам по расчету подземных трубопроводов на прочность А. Б. Айнбиндера [1, 2], П. П. Бородавкина [38],

С. В. Виноградова [48], Б. Г. Галеркина [62], В. П. Ильина [106], А. Г. Камерштейна [111], Г. К. Клейна [117] и др. Подробный обзор методов расчета подземных трубопроводов изложен в [255].

Для дальнейшего совершенствования методов расчета конструкций, взаимодействующих с деформируемым основанием, возникла потребность учитывать неоднородность основания, а также физическую и геометрическую нелинейности. Таким требованиям удовлетворяют численные методы, в частности МКЭ. Также необходимо отметить метод граничных элементов (МГЭ), который, в отличие от МКЭ, позволяет рассматривать бесконечные области [40].

МКЭ применен в работах, посвященных расчетам конструкций, взаимодействующих с основанием, следующих авторов: А. Б. Айнбиндера [1, 2], В. В. Алешина [12], А. М. Белостоцкого [27, 28, 31], Н. В. Купчиковой [145], В. В. Лалина [148, 149], Г. А. Наумовой [173], М. П. Саинова [216], В. Е. Селезнева [220, 221, 222], В. И. Травуша [327], П. В. Чепура [252], G. W. Clough [279], D. J. Naylor [308], D. L. Nyaoro [309] и др.

Особенность расчетов НДС систем «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» заключена в том, что окружающее основание является одновременно и нагрузкой, приложенной к оболочке, и средой, в которой оболочка испытывает деформации. Величина модуля упругости окружающего основания, как правило, на несколько порядков меньше модуля упругости оболочки, в связи с этим основание способно оказывать лишь ограниченное сопротивление деформациям оболочки. Особый интерес представляет моделируемый контакт между телами, от которого сильно зависит получаемое НДС системы: жесткий контакт, с учетом или без учета трения и т.д.

Простейшая модель системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» с применением МКЭ состоит из стержневых элементов оболочки и пружинных элементов, моделирующих винклеровское основание [11, 135].

Доступны различные варианты учета контактного взаимодействия. Такие модели пригодны для большого числа практических задач оценки НДС оболочки и не требуют больших вычислительных затрат.

Другой вариант плоской модели возможен с использованием плоских элементов для основания [136, 286]. Преимущество такой постановки заключено в возможности получить НДС не только оболочки, но и окружающего основания. Доступен учет стадийного возведения конструкций.

Наиболее современный подход к расчетам данной системы предполагает использование пространственных расчетных моделей [27, 251, 265, 286]. Они позволяют моделировать конструкции со сложной геометрией: оболочки с криволинейной центральной осью, пересечения оболочек и др. Это открывает возможности к решению нового широкого круга задач. В пространственной постановке расширены возможности учета этапного возведения конструкций, а также доступны более сложные типы контактного взаимодействия [251, 265, 330]. В качестве элементов оболочки выступают плоские элементы, основание моделируют объемными элементами.

На сегодняшний день моделирование деформируемого основания плоскими и объемными элементами в МКЭ имеет самое широкое распространение благодаря возможности учета нелинейных свойств грунтового основания [30, 121, 197].

В диссертационной работе [265], посвященной расчету подземных трубопроводов, разработана двухэтапная методика определения НДС подземных трубопроводов с использованием геометрически нелинейной стержневой модели. Также разработана методика численного определения жесткостей нелинейных связей. Приведены алгоритм и программа для анализа НДС подземных трубопроводов.

В другой диссертационной работе [33] рассмотрен расчет тонкостенных пространственных систем, в том числе цилиндрических оболочек,

контактирующих с упругой средой винклеровского типа. Изложен численный алгоритм расчета таких тонкостенных систем.

Помимо аналитических и численных методов расчета систем «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» существует метод физического моделирования, основная идея которого заключена в воссоздании поля напряжений реальной конструкции в создаваемой модели. В работе [287] с помощью данного метода смоделирован процесс разрушения крепи шахтовых стволов.

Отметим также работы, в которых рассмотрен важный и актуальный вопрос об учете последовательности возведения в системах «цилиндрическая оболочка – окружающее основание». В диссертации [251] учет последовательности возведения реализован с помощью добавления в расчетную модель поля начальных напряжений с предшествующей расчетной стадии. В упомянутой ранее работе [265] приведен расчет магистрального трубопровода с учетом нескольких этапов возведения.

1.4 Учет геометрической нелинейности в расчетах цилиндрических оболочек

Использование линейных моделей при расчете оболочек, в том числе цилиндрических, часто приводит к неудовлетворительным результатам, особенно в задачах на устойчивость равновесия. Величина критической нагрузки может быть сильно завышена. В таких случаях получение точного решения возможно только с учетом различных видов нелинейностей, одной из которых является геометрическая нелинейность.

Первые работы по расчету на устойчивость стержневых систем с учетом геометрической нелинейности принадлежат Р. Мизесу и И. Ратцерсдорфу [302].

Расчетам на устойчивость рам с учетом геометрической нелинейности посвящены работы: Д. М. Бениаминова, Р. К. Бриджа [275], Д. А. Дадеппо [314], Р. К. Кваши [314], А. Писату, У. Тена и др.

Среди стержневых систем особой интерес представляют плоские арки, так как их потеря устойчивости имеет много общего с потерей устойчивости оболочек. Задачи устойчивости плоских арок рассмотрены авторами: М. Абадель-Рохманом [281], Дж. Аргирисом [16], М. М. Бегичевым [26], В. В. Галишниковой [288], П. Дунайским [288], В. Б. Зылевым [103, 104], Р. С. Корнфортом, С. Б. Косицыным [134], М. З. Кохом [281], Д. Л. С. Лоом, Е. Ф. Мазуром, Г. А. Мануйловым [134], П. Дж. Палом [288], Г. П. Соловьевым [104], С. Б. Чилдсом, А. В. Штейном [103] и др.

Расчет на устойчивость круговых арок, взаимодействующих с окружающим основанием, в геометрически нелинейной постановке выполнен в работе В. И. Гуляева [83].

Задачи устойчивости в геометрически нелинейной постановке с учетом упруго-пластических деформаций приведены в работе И. Д. Грудева [82] для стержневых систем различных металлических конструкций и в работе В. Б. Зылева [104] для пространственной фермы с применением динамического метода.

Вопросы нелинейной теории оболочек рассмотрены в книгах И. Г. Бубнова, В. З. Власова [51], И. И. Воровича [57], Э. И. Григолюка [79, 81], Л. Г. Доннелла, К. А. Жукова, Т. фон Кармана, В. В. Кабанова [81], В. И. Мамаева [79], К. Маргерра, Х. М. Муштари [169], В. В. Новожилова [185], С. П. Тимошенко [233] и др. Исследованиям по устойчивости цилиндрических оболочек посвящены работы М. М. Бегичева [26, 164], И. Иошимуры [331], С. Б. Косицына [137, 164], Г. А. Мануйлова [137, 164], К. У. Нарисимхана [248], А. В. Погорелова [202], С. И. Трушина [239, 240], Н. Дж. Хоффа [248] и др.

В работе И. И. Воровича [57] дан полный математический анализ краевых задач нелинейной теории оболочек. Большое внимание уделено нелинейной устойчивости равновесия, а именно двум вопросам: оценке числу решений краевой задачи и выбору наиболее реального.

А. В. Погореловым в монографии [202] выполнено приложение геометрических результатов теории поверхностей к изучению важного и трудного вопроса описания закритических деформаций тонких оболочек (после потери устойчивости). Подтверждение разработок А. В. Погорелова отмечено в работах И. Йошимуры [331].

Систематический обзор поверхностей, в том числе использующихся в геометрически нелинейных задачах строительной механики, выполнен С. Н. Кривошапко [139, 140].

К современным исследованиям в данной области относится диссертационная работа [223], в которой разработана математическая модель деформирования ортотропных оболочек, учитывающая поперечные сдвиги, геометрическую нелинейность и добавление ребер с учетом их сдвиговой и крутильной жесткостей.

В работе [105] представлены физико-математические модели различных типов конечных элементов и алгоритмы формирования разрешающих уравнений, относящихся к линейным и нелинейным задачам статики, устойчивости и динамики в строительной механике.

Также в [264] показано, что использование векторной интерполяции полей перемещений в ходе формирования матриц жесткостей конечных элементов позволяет получить корректные результаты при расчете оболочек с учетом геометрической нелинейности в зонах сильных кривизн срединной поверхности.

1.5 Учет физической нелинейности в расчетах цилиндрических оболочек

Более точного описания работы строительных конструкций возможно достичь путем учета физической нелинейности материала, где материал подчинен нелинейному закону деформирования. К основным трудам в области теории пластичности и механики сплошной среды следует отнести работы В. С. Бондаря [37], Л. А. Галина [64], А. А. Ильюшина [107, 108], А. Ю. Ишлинского [110], А. Надаи [172], В. В. Новожилова [181, 183], В. Прагера [208], Л. И. Седова [217, 218], С. Л. Соболева [226], В. В. Соколовского [227], К. Трусделла [237], С. А. Христиановича [249], К. Н. Шевченко [260] и др.

Основой для многих исследований служат фундаментальные труды А. А. Ильюшина [107, 108] по теории упруго-пластических процессов и В. В. Новожилова [181, 183] по концепции микронапряжений. В монографии В. С. Бондаря [37] предложен оригинальный подход к проблемам пластичности, где использовано большое число экспериментальных и численных данных.

В докладе [44] подробно рассмотрено развитие теории упруго-пластических процессов во второй половине XX века. Отмечены эксперименты, нацеленные на проверку достоверности существующей теории упруго-пластических процессов, рассмотрено решение задач теории пластичности с использованием появившегося численно-экспериментального метода. Выделены работы следующих авторов: Р. А. Васина [46, 47], В. Г. Зубчанинова [100, 101], А. А. Ильюшина [108], В. С. Ленского [151, 152], П. А. Моссаковского [45], А. В. Муравлева [168], А. Надаи [172] и др.

При расчетах стальных цилиндрических оболочек с учетом упруго-пластических деформаций чаще всего используют критерии прочности Треска – Сена-Венана [325] и Хубера – Мизеса [291, 303]. Критерий прочности Треска – Сена-Венана основан на предположении, что текучесть начинается в

тот момент, когда максимальное напряжение сдвига достигает определенного значения. По условию текучести Хубера – Мизеса пластичность наступает тогда, когда второй инвариант тензора напряжений достигает некоторой величины. Проведением экспериментов выявлено, что условие текучести Хубера – Мизеса лучше всего описывает поведение металла. Критерий прочности Треска – Сена-Венана удобно использовать для теоретических исследований.

Далее приведены современные диссертационные работы, рассматривающие работу цилиндрических оболочек с учетом упруго-пластических деформаций.

Работа [193] посвящена исследованию некоторых закономерностей упруго-пластического деформирования и проблеме устойчивости цилиндрических оболочек в случае сложного нагружения при малых деформациях. Рассмотрено влияние истории сложного докритического нагружения на устойчивость оболочек.

В диссертации [71] приведено исследование нелинейных деформаций, потери устойчивости и закритического поведения тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе для случаев с сыпучим наполнителем и без него. Также выполнен анализ с целью определения влияния сыпучего заполнителя на устойчивость цилиндрических оболочек. Автором созданы установки для проведения экспериментов и выведена эмпирическая формула, позволяющая определять критическую нагрузку цилиндрической оболочки при работе на изгиб.

Упруго-пластические цилиндрические оболочки, взаимодействующие с опорными ребрами, рассмотрены в работе [180]. Предложена методика расчета, представляющая собой комбинацию вариационного метода Власова – Канторовича и известного метода конечных разностей. Изложены алгоритм и программа расчета для решения поставленной задачи.

Развитию теории нелинейного деформирования тонкостенных, в том числе цилиндрических, оболочек на основе МКЭ посвящена диссертационная работа [90]. Разработаны алгоритмы и программы, направленные на расчет тонкостенных оболочек с учетом нелинейного деформирования. Приведено исследования большого числа новых задач с учетом нелинейного деформирования и устойчивости цилиндрических оболочек.

В работе [241] предложены нелинейные геометрические соотношения с учетом деформаций поперечного сдвига для различного вида оболочек. Методы ориентированы на численную реализацию. Изложен вариант энергетических функционалов Лагранжа для расчетов оболочек на прочность и устойчивость с учетом упруго-пластических деформаций.

Совершенствование МКЭ для решения пространственных задач оболочек с учетом упруго-пластических деформаций изложено в диссертационной работе [150]. Особое внимание уделено зонам местных формоизменений и контактными взаимодействиям. Теоретические исследования дополнены экспериментальными данными.

Создание математической модели и компьютерных программ для расчетов пересекающихся цилиндрических оболочек с учетом физической нелинейности приведено в [53].

Необходимо отметить некоторые научные статьи последних лет, посвященные расчету оболочек с учетом физической нелинейности материала, с использованием различных методик решения следующих авторов: А. А. Артемьева [17], В. Г. Баженова [20, 21], В. Н. Барашкова [23], А. И. Голованова [67], О. А. Киликовской [116], С. И. Трушина [239].

Для корректной оценки НДС основания также необходимо иметь некоторую математическую модель грунта, опирающуюся на теорию пластичности, которая позволит описать упругое и пластическое поведение материала. Среди существующих упруго-пластических моделей основания наибольшее распространение получили модели Мора – Кулона [283, 304] и

Друкера – Прагера [284]. Критерий пластичности Мора – Кулона представляет собой обобщение известного закона Кулона – закона прочности при сдвиге для материалов с внутренним трением. Модель Друкера – Прагера является аппроксимацией критерия пластичности Мора – Кулона на основе модификации критерия пластичности Хубера – Мизеса.

Также необходимо выделить работы по упруго-пластическим моделям основания следующих авторов: А. И. Боткина [39], Р. Конднера, М. В. Малышева [162], Т. Кокушо и др.

В нелинейноупругая модели А. И. Боткина [39, 242] предложено описывать условия прочности уравнением типа Кулона, но записанным через октаэдрические напряжения. М. В. Малышевым [162, 242] описаны связи объемных деформаций и напряжений при изотропной компрессии.

1.6 Выводы по главе 1

Выполненный краткий обзор публикаций по рассматриваемой тематике позволил сформулировать следующие выводы.

1. Традиционная теория тонких оболочек основана на гипотезах Кирхгофа – Лява и имеет несколько направлений развития. За последние годы благодаря работам отечественных и зарубежных ученых она значительно усовершенствована преимущественно с целью решения нелинейных задач.

2. Большое внимание уделено проблемам устойчивости тонкостенных оболочек при различных видах нагрузок, однако вопросы устойчивости системы «оболочка – основание» изучены недостаточно полно.

3. Появление ЭВМ привело к созданию новых методов расчета оболочек и переоценке существующей теории. Среди численных методов можно выделить МКР и особенно МКЭ, как самый распространенный. Разработано большое количество конечных элементов как плоских, так и криволинейных, предназначенных для различного вида анализа НДС оболочек.

4. Методика определения НДС пространственных систем «оболочка – основание» имеет долгую историю развития с начала XX века, однако до сих пор существует ряд нерешенных проблем, которые связаны с нелинейным характером происходящих в данной системе процессов: контактное взаимодействие тел, геометрическая и физическая нелинейности и т.д.

5. Основная часть исследований НДС оболочечных конструкций посвящена расчетам в одну стадию, что в большинстве случаев не соответствует действительности, когда оболочка сооружена за несколько этапов. В связи с этим проблема учета стадий возведения оболочечных конструкций весьма актуальна и востребована.

6. Учет геометрической нелинейности необходим при расчетах оболочек, в том числе цилиндрических, особенно в задачах на устойчивость равновесия, так как использование линейных моделей часто приводит к неудовлетворительным результатам, в которых величина критической нагрузки может быть завышена.

7. Учет упруго-пластических деформаций позволяет намного точнее описывать работу тонкостенных оболочек, но требует сложных и объемных вычислений, что довольно затруднительно без применения численных методов, которые освоены сравнительно недавно. Это объясняет недостаточную изученность вопроса.

На основе выполненного обзора поставлены следующие задачи.

– Разработать численную методику учета строительного зазора между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием, а также проанализировать влияние этого зазора на НДС системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание», а именно на перемещения верхней поверхности основания, при упруго-пластической модели материала основания.

– Определить размеры пространственного фрагмента системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание», необходимые для

получения достоверных результатов расчета осадки поверхности основания в поперечном и продольном направлениях к оси цилиндрической оболочки для расчетных моделей, учитывающих зазор между оболочкой и основанием.

– Разработать программу для автоматизации процесса создания твердотельной расчетной модели системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» с возможностью учета строительного зазора между оболочкой и основанием.

– Разработать методику и проанализировать влияние учета поэтапного возведения цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, на НДС системы «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» с использованием расчетной модели, изменяющейся во времени, с односторонним контактным взаимодействием между оболочкой и основанием при упруго-пластических моделях материала оболочки и основания.

– Разработать методику определения критической нагрузки, при которой конструкция цилиндрической оболочки, взаимодействующая с окружающим основанием, теряет устойчивость равновесия, и форм потери устойчивости при различных моделях материала оболочки и основания и условиях контактного взаимодействия. Провести сравнительный анализ полученных результатов.

– Применить разработанные методики для решения практических задач о цилиндрических оболочках, взаимодействующих с окружающим основанием.

**ГЛАВА 2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ «ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА
– ОКРУЖАЮЩЕЕ ОСНОВАНИЕ»**

**2.1 Основные дифференциальные уравнения цилиндрической круговой
оболочки**

Рассмотрим основные дифференциальные уравнения цилиндрической круговой оболочки. Пусть R – радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки, h – толщина оболочки. Со срединной поверхностью оболочки связана система криволинейных ортогональных координат α и β . Положение некоторой точки M на срединной поверхности оболочки определено постоянными α и β (рисунок 2.1). Перемещение точки M определяют тангенциальные перемещения $u = (u, X)$, $v = (v, Y)$ и нормальное перемещение (прогиб) $w = (w, Z)$. На оболочку действуют поверхностные силы X, Y, Z .

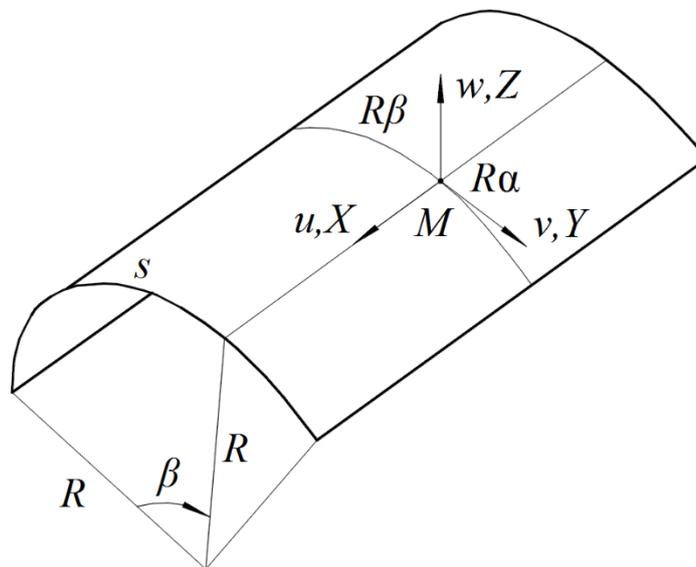


Рисунок 2.1 Цилиндрическая круговая оболочка в криволинейных ортогональных координатах α и β

Относительное расстояние α вдоль цилиндрической круговой оболочки до точки M :

$$\alpha = \frac{z}{R}, \quad (2.1)$$

где z – координата вдоль оси цилиндрической оболочки.

Центральный угол β , пропорциональный длине дуги s поперечного сечения круговой цилиндрической оболочки до точки M :

$$\beta = \frac{s}{R}. \quad (2.2)$$

Главные кривизны k_1 и k_2 имеют значения:

$$k_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$k_2 = \frac{1}{R}. \quad (2.4)$$

Уравнения равновесия бесконечно малого элемента круговой цилиндрической оболочки имеют вид [49]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{21}}{\partial \beta} + RX &= 0, \\ \frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha} + Q_2 + RY &= 0, \\ -N_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} + RZ &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - RQ_2 &= 0, \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta} - \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - RQ_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где N_1, S_{12}, Q_1 – нормальные, сдвигающие и поперечные силы, действующие на площадке нормального сечения оболочки ($\alpha = \text{const}$); N_2, S_{21}, Q_2 – нормальные, сдвигающие и поперечные силы, действующие на площадке другого нормального сечения оболочки ($\beta = \text{const}$); M_1, M_{12} – изгибающий и крутящий моменты, действующие на площадке нормального сечения оболочки ($\alpha = \text{const}$); M_2, M_{21} – изгибающий и крутящий моменты, действующие на площадке другого нормального сечения оболочки ($\beta = \text{const}$).

Внутренние усилия и моменты круговой цилиндрической оболочки показаны на рисунке 2.2.

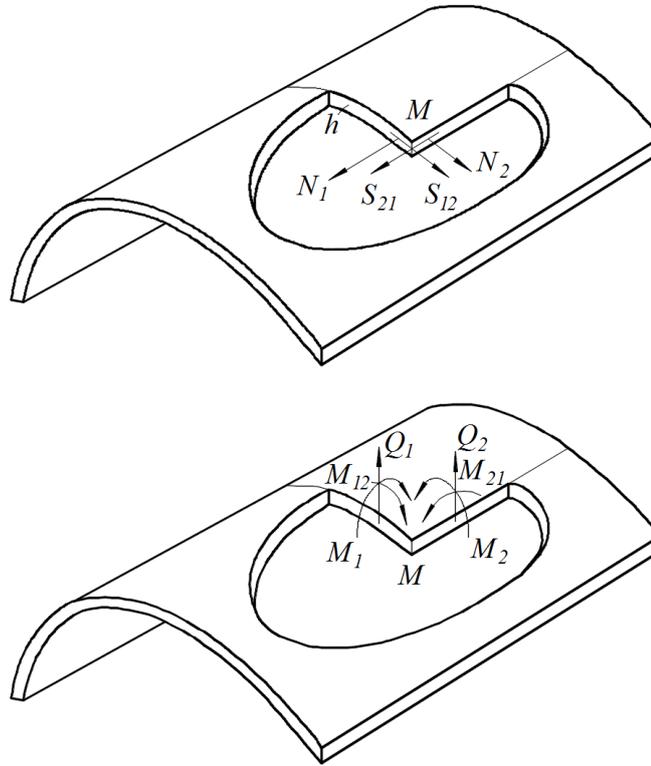


Рисунок 2.2 Усилия и моменты круговой цилиндрической оболочки

Компоненты деформаций круговой цилиндрической оболочки определим по формулам [49]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right), \\ \omega &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \\ \varepsilon_1 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right), \\ \tau &= -\frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где ε_1 – относительное удлинение вдоль центральной оси оболочки; ε_2 – относительное удлинение по дуге поперечного сечения оболочки; ω – относительный сдвиг, зависящий от изменения прямого угла между координатными линиями $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$; \varkappa_1 – деформация изгиба в продольном направлении; \varkappa_2 – деформация изгиба в поперечном направлении; τ – относительная деформация кручения.

Внутренние усилия и моменты круговой цилиндрической оболочки определены формулами [49]:

$$\left. \begin{aligned}
 N_1 &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)R} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right], \\
 N_2 &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)R} \left[\frac{\partial v}{\partial \beta} + w + \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{12R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) \right], \\
 S_{12} &= \frac{Eh}{2R(1+\mu)} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right], \\
 S_{21} &= \frac{Eh}{2R(1+\mu)} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right], \\
 M_1 &= -\frac{Eh^3}{12R^2(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial v}{\partial \beta} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \right], \\
 M_2 &= \frac{Eh^3}{12R^2(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + w \right], \\
 M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1+\mu)R^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right], \\
 M_{21} &= -\frac{Eh^3}{24(1+\mu)R^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right], \\
 Q_1 &= \frac{Eh^3}{12R^3(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \right], \\
 Q_2 &= \frac{Eh^3}{12R^3(1-\mu^2)} \left[(1-\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где E – модуль упругости материала; μ – коэффициент Пуассона.

2.2 Основные положения метода конечных элементов

В связи с тем, что использование дифференциальных соотношений для цилиндрической оболочки, приведенных в предыдущем параграфе, совместно с зависящими от решаемой задачи краевыми условиями, особенно при взаимодействии с окружающим основанием, не позволяет в общем случае получать точные аналитические решения, перейдем к приближенному вариационному методу – методу конечных элементов (МКЭ).

МКЭ позволяет находить приближенные численные решения различных задач строительной механики. Данный метод получил широкое применение в инженерном анализе напряженно-деформированного состояния конструкций благодаря универсальному подходу и высокой эффективности. Идея МКЭ состоит в аппроксимации рассматриваемой конструкции определенным количеством элементов, соединенных между собой общими узлами. Решение задач с помощью МКЭ имеет много общего с известной инженерам техникой расчета статически неопределимых стержневых систем методами строительной механики (метод перемещений) [95, 238].

Расчет конструкций МКЭ основан на условии стационарности интегральной величины, а именно полной потенциальной энергии рассматриваемой системы Π , которая складывается из потенциальной энергии деформации W и потенциала внешней приложенной нагрузки A . Далее приведены формулы, для определения данных величин:

$$\Pi(\mathbf{z}) = W(\mathbf{z}) - A(\mathbf{z}), \quad (2.9)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (2.10)$$

$$A = \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS, \quad (2.11)$$

где \mathbf{z} – вектор узловых перемещений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор деформаций; $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор с компонентами тензора напряжений; V – занимаемый телом объем; \mathbf{u} – вектор перемещений; \mathbf{p} – вектор внешних нагрузок; S – площадь распределения нагрузки.

Уравнение МКЭ получены из условия, основанном на энергетическом принципе Лагранжа:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}} = 0. \quad (2.12)$$

Для отдельного конечного элемента потенциальная энергия принимает вид:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B}\mathbf{z})^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{z} dV - \\ &\int_S (\mathbf{N}\mathbf{z})^T \mathbf{p} dS = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV \right) \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS = \\ &\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R}\mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где \mathbf{B} – матрица, связывающая вектор узловых перемещений и вектор деформаций; \mathbf{D} – матрица, содержащая физические постоянные материала; \mathbf{N} – матрица функции формы; \mathbf{R} – матрица жесткости элемента; \mathbf{P} – вектор узловых нагрузок.

Из выражения (2.13) может быть выделена матрица жесткости этого элемента:

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV. \quad (2.14)$$

Вектор узловых нагрузок имеет вид:

$$\mathbf{P} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS. \quad (2.15)$$

Рассмотрим матрицу жесткости для некоторой системы. Векторы узловых перемещений \mathbf{z}_i и узловой нагрузки \mathbf{P}_i конечного элемента следует преобразовать в векторы \mathbf{z} и \mathbf{P} системы. Для этого необходимо использовать

некоторую булеву матрицу H_i , содержащую в качестве компонентов только нули и единицы:

$$z_i = H_i z, \quad (2.16)$$

$$P_i = H_i P. \quad (2.17)$$

Формулы (2.13) и (2.17) позволяют получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Pi_i = \frac{1}{2} (H_i z)^T R_i H_i z - (H_i z)^T H_i P = \frac{1}{2} z^T H_i^T R_i H_i z - \\ z^T H_i^T H_i P. \end{aligned} \quad (2.18)$$

С учетом формулы (2.12) из (2.18) получена система линейных алгебраических уравнений МКЭ:

$$\sum_{i=1}^m (H_i^T R_i H_i z - H_i^T H_i P) = 0 \quad (2.19)$$

или

$$Rz = P. \quad (2.20)$$

В матрице жесткости R (2.20) необходимо задать граничные условия, иначе определитель матрицы будет равен нулю.

2.3 Осевое растяжение – сжатие и плоский изгиб стержневого конечного элемента

В плоской постановке задачи цилиндрические оболочки обычно моделируют стержневыми элементами. Для примера рассмотрен стержневой элемент, испытывающий одновременное действие растяжения – сжатия вдоль своей оси и плоский изгиб. Положение узлов такого стержня (рисунок 2.3) зависит от трех составляющих: продольного перемещения u , поперечного перемещения v и угла поворота в данном узле $\varphi = \frac{dv}{dx}$.

Далее приведены соответствующие интерполирующие функции для определения этих составляющих:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x, \quad (2.21)$$

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \quad (2.22)$$

$$\varphi = \frac{dv}{dx} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2. \quad (2.23)$$

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ определены из граничных условий: $u = u_i, v = v_i, \varphi = \varphi_i$ при $x = x_i$ для первого узла; $u = u_j, v = v_j, \varphi = \varphi_j$ при $x = x_j$ для второго узла.

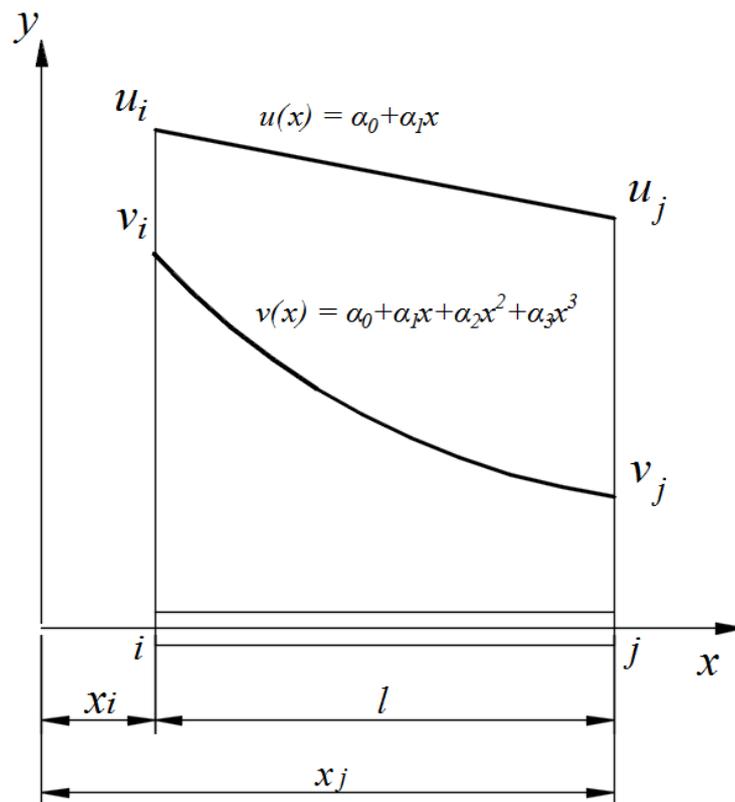


Рисунок 2.3. Осевое растяжение-сжатие и плоский изгиб стержневого конечного элемента

Вектор узловых перемещений:

$$\mathbf{z} = (u_i \ v_i \ \varphi_i \ u_j \ v_j \ \varphi_j)^T. \quad (2.24)$$

Матрица жесткости для такого стержневого элемента принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}, \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

где E – модуль упругости материала; F – площадь поперечного сечения стержня; J – момент инерции поперечного сечения стержня; l – длина стержневого конечного элемента.

2.4 Плоский прямоугольный конечный элемент оболочки

В большинстве практических задач строительной механики оболочки, в том числе цилиндрические, рассчитывают с использованием плоских конечных элементов по модели Кирхгофа – Лява, которые испытывают деформации в своей плоскости и из плоскости. Плоские конечные элементы прямоугольной формы являются предпочтительными по сравнению с элементами треугольной формы, так как позволяют найти более точное решение задачи. Для примера рассмотрен плоский четырехузловой прямоугольный конечный элемент оболочки (рисунок 2.4).

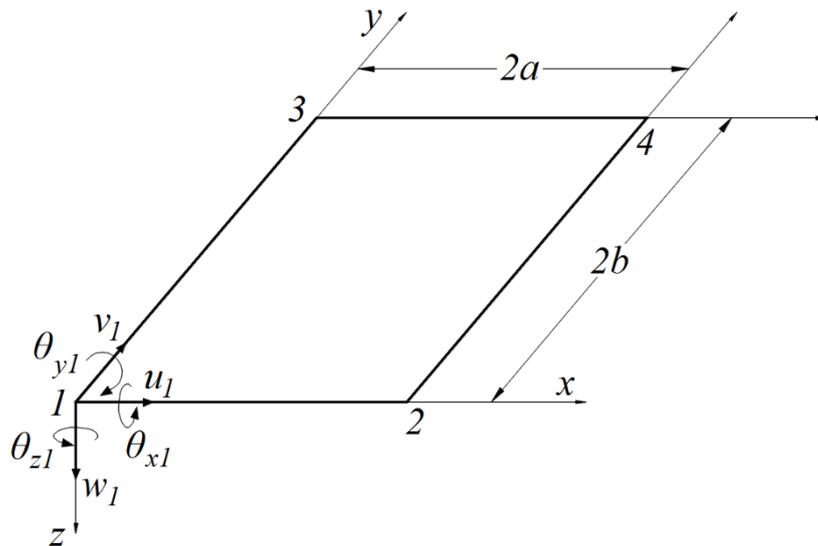


Рисунок 2.4. Плоский прямоугольный конечный элемент оболочки в местной системе координат (узловые неизвестные показаны для 1-ого узла)

Обобщенный вектор узловых перемещений конечного элемента оболочки можно записать как:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \mathbf{z}_3 \quad \mathbf{z}_4)^T. \quad (2.26)$$

Вектор узловых неизвестных перемещений i -го узла \mathbf{z}_i состоит из трех поступательных перемещений u_i, v_i, w_i и трех углов поворота $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$:

$$\mathbf{z}_i = (u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi})^T. \quad (2.27)$$

Матрицу жесткости плоского прямоугольного конечного элемента оболочки можно получить путем наложения матриц жесткости двух других элементов: элемента, испытывающего плосконапряженное состояние (соответствует мембранным деформациям элемента оболочки), и элемента пластины (соответствует изгибным деформациям элемента оболочки). Важно отметить, что мембранные деформации элемента оболочки не влияют на изгибные деформации и наоборот.

Матрица жесткости элемента, испытывающего плосконапряженное состояние, может быть выражена в следующем виде с использованием подматриц для соответствующих узлов:

$$\mathbf{R}^M = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^M & \mathbf{R}_{12}^M & \mathbf{R}_{13}^M & \mathbf{R}_{14}^M \\ \mathbf{R}_{21}^M & \mathbf{R}_{22}^M & \mathbf{R}_{23}^M & \mathbf{R}_{24}^M \\ \mathbf{R}_{31}^M & \mathbf{R}_{32}^M & \mathbf{R}_{33}^M & \mathbf{R}_{34}^M \\ \mathbf{R}_{41}^M & \mathbf{R}_{42}^M & \mathbf{R}_{43}^M & \mathbf{R}_{44}^M \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Каждая подматрица \mathbf{R}_{ij}^M имеет размерность 2×2 (соответствует узловым перемещениям u_i и v_i).

Перемещения точек элемента в его плоскости:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 u_i N_i(x, y); \quad (2.29)$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^4 v_i N_i(x, y), \quad (2.30)$$

где $N_i(x, y)$ – базисные функции.

$$\left. \begin{aligned} N_1(x, y) &= (1 - (x/2a))(1 - (y/2b)); \\ N_2(x, y) &= (x/2a)(1 - (y/2b)); \\ N_3(x, y) &= (1 - (x/2a))(y/2b); \\ N_4(x, y) &= (x/2a)(y/2b) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Матрица жесткости, характеризующая мембранные деформации плоского конечного элемента оболочки, имеет вид [95]:

$$\mathbf{R}^M = \int_{\Omega} h \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy, \quad (2.32)$$

где h – толщина элемента; Ω – площадь элемента; \mathbf{B} – матрица, состоящая из частных производных от базисных функций:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad (2.33)$$

\mathbf{D} – матрица, включающая в себя физические постоянные материала:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Матрица жесткости элемента оболочки, описывающая изгибные деформации, может быть выражена в следующем виде с использованием подматриц для соответствующих узлов:

$$\mathbf{R}^{\text{И}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{12}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{13}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{14}^{\text{И}} \\ \mathbf{R}_{21}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{22}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{23}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{24}^{\text{И}} \\ \mathbf{R}_{31}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{32}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{33}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{34}^{\text{И}} \\ \mathbf{R}_{41}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{42}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{43}^{\text{И}} & \mathbf{R}_{44}^{\text{И}} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Каждая подматрица $\mathbf{R}_{ij}^{\text{И}}$ имеет размерность 3×3 (соответствует узловым перемещениям w_i , θ_{xi} и θ_{yi}).

Связь между деформациями и перемещениями имеет вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (2.36)$$

Вектор $\boldsymbol{\sigma}$ выглядит как:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.37)$$

где M_x и M_y – изгибающие моменты; M_{xy} – крутящий момент.

Поле прогибов w задано в виде следующего полинома:

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 y^3 + \alpha_{10} x^3 y + \alpha_{11} xy^3 \quad (2.38)$$

или

$$w = \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.39)$$

где $\mathbf{P} = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ xy^3]$; $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор с двенадцатью коэффициентами $\alpha_0 - \alpha_{11}$.

Коэффициенты $\alpha_0 - \alpha_{11}$ определены двенадцатью уравнениями, зависящими от граничных условий:

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \quad (2.40)$$

где \mathbf{C} – матрица 12×12 , зависящая от узловых координат.

Из (2.39) и (2.40) получено:

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z}. \quad (2.41)$$

С учетом (2.41) деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ (2.36) принимают вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -2\alpha_3 - 6\alpha_6x - 2\alpha_7y - 6\alpha_{10}xy \\ -2\alpha_5 - 2\alpha_8x - 6\alpha_9y - 6\alpha_{11}xy \\ 2\alpha_4 + 4\alpha_7x + 4\alpha_8y + 6\alpha_{10}x^2 - 6\alpha_{11}y^2 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

или

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{z}, \quad (2.43)$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}; \quad (2.44)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Матрица жесткости, характеризующая изгибные деформации плоского конечного элемента оболочки, имеет вид [95, 238]:

$$\mathbf{R}^И = \frac{h^3}{12} \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \frac{h^3}{12} (\mathbf{C}^{-1})^T \left(\iint_{\Omega} \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} dx dy \right) \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.46)$$

С учетом (2.28) и (2.35) матрица жесткости конечного элемента оболочки в местной системе координат имеет вид:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}
\mathbf{R}_{11}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{12}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{13}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{14}^M & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{R}_{11}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{12}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{13}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{14}^I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{R}_{21}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{22}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{23}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{24}^M & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{R}_{21}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{22}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{23}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{24}^I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{R}_{31}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{32}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{33}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{34}^M & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{R}_{31}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{32}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{33}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{34}^I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{R}_{41}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{42}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{43}^M & 0 & 0 & \mathbf{R}_{44}^M & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{R}_{41}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{42}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{43}^I & 0 & 0 & \mathbf{R}_{44}^I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Матрица жесткости имеет размерность 24×24 . Отметим, что элементы матрицы, связанные с θ_{zi} , в местной системе координат равны нулю. Если удалить нулевые элементы, то матрица станет уменьшенного размера 20×20 . Однако, использование размерности 24×24 упрощает преобразование матрицы из местной системы координат в глобальную.

2.5 Объемные конечные элементы

При решении пространственных задач строительной механики применяют объемные конечные элементы различной формы: параллелепипеды, призмы, тетраэдры и др. НДС в произвольной точке моделируемого пространственного тела описано шестью компонентами вектора напряжений и шестью компонентами вектора деформаций:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Для примера далее рассмотрен объемный восьмиузловой конечный элемент в форме параллелепипеда, имеющий 24 степени свободы – составляющие перемещений u , v , w в каждом узле (рисунок 2.5).

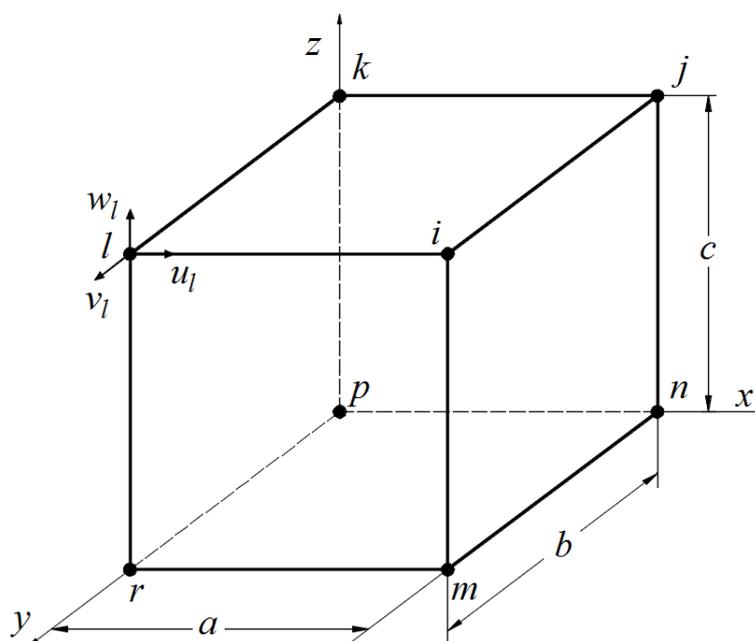


Рисунок 2.5. Объемный конечный элемент в местной системе координат (узловые неизвестные показаны для узла l)

Компоненты перемещений произвольной точки конечного элемента в местной системе координат взяты в форме следующих полиномов [206]:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 xy + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz + \alpha_7 x^2, \\ v(x, y, z) &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + \alpha_{11} z + \alpha_{12} xy + \\ &\quad + \alpha_{13} xz + \alpha_{14} yz + \alpha_{15} y^2, \\ w(x, y, z) &= \alpha_{16} + \alpha_{17} x + \alpha_{18} y + \alpha_{19} z + \alpha_{20} xy + \\ &\quad + \alpha_{21} xz + \alpha_{22} yz + \alpha_{23} z^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Выражения (2.50) в узлах элемента должны быть равны узловым перемещениям u , v , w соответственно. С учетом данных граничных условий для $u(x, y, z)$ получена система уравнений:

$$\begin{aligned}
u_i &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i + \alpha_4 x_i y_i + \alpha_5 x_i z_i + \alpha_6 y_i z_i \\
&\quad + \alpha_7 x_i^2; \\
u_j &= \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j + \alpha_3 z_j + \alpha_4 x_j y_j + \alpha_5 x_j z_j + \alpha_6 y_j z_j \\
&\quad + \alpha_7 x_j^2; \\
u_k &= \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k + \alpha_3 z_k + \alpha_4 x_k y_k + \alpha_5 x_k z_k \\
&\quad + \alpha_6 y_k z_k + \alpha_7 x_k^2; \\
u_l &= \alpha_0 + \alpha_1 x_l + \alpha_2 y_l + \alpha_3 z_l + \alpha_4 x_l y_l + \alpha_5 x_l z_l + \alpha_6 y_l z_l \\
&\quad + \alpha_7 x_l^2; \\
u_m &= \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m + \alpha_3 z_m + \alpha_4 x_m y_m + \alpha_5 x_m z_m \\
&\quad + \alpha_6 y_m z_m + \alpha_7 x_m^2; \\
u_n &= \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n + \alpha_3 z_n + \alpha_4 x_n y_n + \alpha_5 x_n z_n \\
&\quad + \alpha_6 y_n z_n + \alpha_7 x_n^2; \\
u_p &= \alpha_0 + \alpha_1 x_p + \alpha_2 y_p + \alpha_3 z_p + \alpha_4 x_p y_p + \alpha_5 x_p z_p \\
&\quad + \alpha_6 y_p z_p + \alpha_7 x_p^2; \\
u_r &= \alpha_0 + \alpha_1 x_r + \alpha_2 y_r + \alpha_3 z_r + \alpha_4 x_r y_r + \alpha_5 x_r z_r + \alpha_6 y_r z_r \\
&\quad + \alpha_7 x_r^2.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Зависимость компонент перемещений $u(x, y, z)$ от узловых перемещений записана в виде [206]:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \frac{x}{a} \frac{y}{b} \frac{z}{c} u_i - \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} u_j + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} u_k + \\
&\quad + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \frac{z}{c} u_l + \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) u_m + \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) u_n + \\
&\quad + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) u_p + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) u_r.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

По аналогии с $u(x, y, z)$ определены $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$:

$$v(x, y, z) = \frac{x}{a} \frac{y}{b} \frac{z}{c} v_i - \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} v_j + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} v_k + \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \frac{z}{c} v_l + \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) v_m + \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) v_n + \\
& + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) v_p + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) v_r, \\
w(x, y, z) = & \frac{x}{a} \frac{y}{b} \frac{z}{c} w_i - \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} w_j + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} w_k + \\
& + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \frac{z}{c} w_l + \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_m + \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_n + \\
& + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_p + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_r,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

где a, b, c – стороны параллелепипеда (рисунок 2.5).

Зависимость между деформациями и перемещениями, приведенными в (2.52 – 2.54), имеет вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

или

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{z}, \tag{2.56}$$

где матрица \mathbf{B} размером 6×24 состоит из коэффициентов при компонентах перемещений в правой части соотношений (2.55), а вектор \mathbf{z} состоит из 24 компонентов узловых перемещений [175, 207].

Компоненты напряжений и деформаций связаны зависимостью:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.57}$$

где матрица упругости \mathbf{D} выглядит следующим образом:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \times
 \begin{bmatrix}
 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}
 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Наличие матриц \mathbf{B} и \mathbf{D} позволяет вычислить матрицу жесткости данного конечного элемента через объемный интеграл:

$$\mathbf{R} = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad (2.59)$$

где V – объем параллелепипеда.

2.6 Геометрически нелинейные задачи

Часто в задачах строительной механики необходимо учитывать различные типы нелинейностей. Расчет нелинейных систем представляет собой более сложный алгоритм по сравнению с решением линейных задач и приводит к необходимости анализа обширных систем нелинейных алгебраических уравнений. Решение таких систем уравнений возможно, благодаря применению процедуры последовательных приближений. Следует отметить, что в нелинейных задачах в отличие от линейных часто нет единственности решения и найденное решение не всегда будет искомым.

При сильном изменении геометрической формы конструкций (например, в задачах устойчивости) необходимо учитывать геометрическую нелинейность, которая характеризуется большими перемещениями и (или) поворотами.

При учете геометрической нелинейности зависимость между вектором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и вектором узловых обобщенных перемещений \mathbf{z} перестает быть линейной [155]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z})\mathbf{z}. \quad (2.60)$$

Черта означает, что при больших перемещениях деформации нелинейно зависят от перемещений [95]. Матрицу $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z})$ удобно представить в виде:

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}) = \mathbf{B} + \mathbf{B}_N(\mathbf{z}), \quad (2.61)$$

где \mathbf{B} – матрица, определяющая бесконечно малые деформации; $\mathbf{B}_N(\mathbf{z})$ – матрица, зависящая от перемещений.

На каждом шаге нелинейного статического анализа решается матричное уравнение [95]:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{R} + \mathbf{R}_\sigma]\mathbf{z} = [\mathbf{R}_L + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_\sigma]\mathbf{z} = \mathbf{R}_\tau\mathbf{z}, \quad (2.62)$$

где \mathbf{P} – вектор внешних нагрузок; \mathbf{R} – матрица больших перемещений, являющаяся суммой линейной матрицы жесткости при малых деформациях \mathbf{R}_L и нелинейной матрицы жесткости при больших перемещениях \mathbf{R}_N ; \mathbf{R}_σ – матрица жесткости начальных напряжений, которую необходимо учитывать в нелинейном итерационном процессе (описание приведено в параграфе 2.9); \mathbf{z} – вектор перемещений; \mathbf{R}_τ – полная матрица тангенциальных жесткостей.

Матрица больших перемещений \mathbf{R} имеет вид [95]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_L + \mathbf{R}_N = \iiint_V \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z})\mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z})dV, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{R}_L = \iiint_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV, \quad (2.64)$$

$$R_N = \iiint_V (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_N(\mathbf{z}) + \mathbf{B}_N^T(\mathbf{z}) \mathbf{D} \mathbf{B}_N(\mathbf{z}) + \mathbf{B}_N^T(\mathbf{z}) \mathbf{D} \mathbf{B}) dV. \quad (2.65)$$

2.7 Физически нелинейные задачи. Основные положения теории пластического течения

Твердые тела с удовлетворительной точностью можно считать упругими, пока возникающие в них напряжения и деформации не превышают определенных значений. При превышении этих пределов твердые тела получают пластическую деформацию. Условие перехода материала из упругого состояния в пластическое при одноосном напряженном состоянии в случае растяжения (сжатия) охарактеризовано выражением:

$$\sigma = \sigma_T, \quad (2.66)$$

где σ – нормальное напряжение; σ_T – предел текучести при растяжении (сжатии). В случае чистого сдвига:

$$\tau = \tau_T, \quad (2.67)$$

где τ – касательное напряжение; τ_T – предел текучести при чистом сдвиге.

При сложном напряженном состоянии условие текучести (или пластичности) для изотропного тела имеет форму симметрической функции главных напряжений. Пластические деформации возникают, когда удовлетворено следующее выражение (условие текучести):

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K, \quad (2.68)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные нормальные напряжения; K – константа материала, связанная с пределом текучести; $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – функция главных напряжений, определяющая некоторую поверхность текучести.

Выражение (2.68) можно записать через инварианты тензора напряжений:

$$f(\sigma, I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)) = K, \quad (2.69)$$

где σ – среднее (гидростатическое) давление в точке; $I_2(T_\sigma)$ и $I_3(T_\sigma)$ – второй и третий инварианты тензора напряжений соответственно.

Известно, что при всестороннем растяжении или сжатии материал деформирован упруго. С учетом этого условие текучести получает вид:

$$f(I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)) = K, \quad (2.70)$$

где $I_2(D_\sigma)$ и $I_3(D_\sigma)$ – второй и третий инварианты девиатора напряжений соответственно [115, 161].

Наиболее распространены следующие условия текучести: Треска – Сен-Венана, Хубера – Мизеса, Мора – Кулона и Друкера – Прагера.

Математическая формулировка условия Треска – Сен-Венана для пространственного случая имеет вид [325]:

$$\left. \begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_T \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_T \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_T \end{aligned} \right\}, \quad (2.71)$$

где τ_1, τ_2, τ_3 – главные касательные напряжения.

Состояние текучести возникает при знаке равенства в одном или в двух из этих условий. Выражение (2.71) в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляет собой шестигранный цилиндр симметрично расположенный относительно гидростатической оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Цилиндр имеет одинаковые нормальные сечения, описанные кругом радиуса $\sqrt{2/3}\sigma_T$.

Условие текучести Хубера – Мизеса зависит от второго инварианта тензора напряжений $I_2(T_\sigma)$ и имеет вид [291, 303]:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (2.72)$$

Поверхность текучести для критерия Хубера – Мизеса имеет форму кругового цилиндра радиусом $\sqrt{2/3}\sigma_T$, описанного вокруг шестигранного цилиндра рассмотренного ранее условия Треска – Сен-Венана. Отметим, что если интенсивность напряжений не выходит за пределы цилиндра, то пластических деформаций не возникает. Если интенсивность напряжений

достигает предела текучести материала при растяжении σ_T , то в теле возникают пластические деформации.

Геометрическая интерпретация критериев Треска – Сен-Венана и Хубера – Мизеса показана на рисунке 2.6.

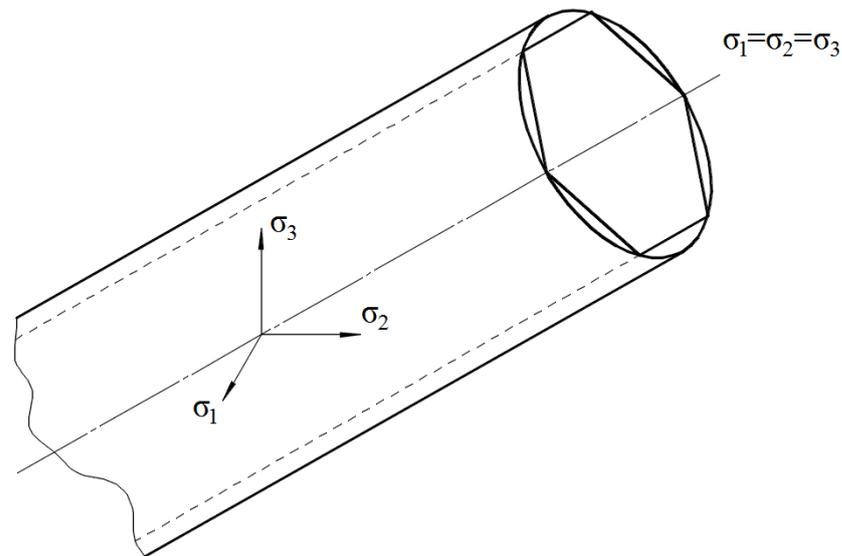


Рисунок 2.6. Поверхности текучести по критериям Треска – Сена-Венана и Хубера – Мизеса

Условие текучести Мора – Кулона представляет собой обобщенную форму закона Кулона для материалов с внутренним трением. Поверхность текучести критерия Мора – Кулона представляет собой конус, проекция которого на девиаторную плоскость имеет форму шестиугольника. Конусный вид обусловлен тем, что в условии текучести принимает участие сферическая часть тензора напряжений. Условие текучести Мора – Кулона может быть выражено в пространстве девиатора напряжений следующим образом [283, 304]:

$$\left. \begin{aligned} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} &= \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right] \sin \varphi + c \cos \varphi \\ \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} &= \left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right] \sin \varphi + c \cos \varphi \\ \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} &= \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right] \sin \varphi + c \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (2.73)$$

где c – сцепление, φ – угол внутреннего трения.

Если положить $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, то в соответствии с выражением (2.73) следует, что $\sigma_1 = c \cdot ctg \varphi$. Таким образом, вершина конуса поверхности текучести находится на гидростатической оси на расстоянии $c \cdot ctg \varphi$ от начала координат.

Условие текучести Друкера – Прагера описано выражением [284]:

$$f(I_1, I_2) = \sqrt{I_2} - \alpha I_1 - K, \quad (2.74)$$

где I_1, I_2 – второй и третий инварианты девиатора напряжений соответственно, α и K параметры, характеризующие свойства материала. Параметры α и K выражены через сцепление c и угол внутреннего трения φ :

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad ; \quad K = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}. \quad (2.75)$$

Критерий текучести Друкера – Прагера может быть выражен в пространстве девиатора напряжений как:

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = K + \alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (2.76)$$

Поверхность текучести критерия Друкера – Прагера является сглаженной версией поверхности текучести критерия Мора – Кулона и представляет собой круговой конус [115, 161, 284].

Критерии Мора – Кулона и Друкера – Прагера хорошо подходят для описания работы грунтового основания, так как они учитывают различие между пределами прочности при растяжении и при сжатии, характерное для грунтов.

Геометрическая интерпретация критериев Мора – Кулона и Друкера – Прагера показана на рисунке 2.7.

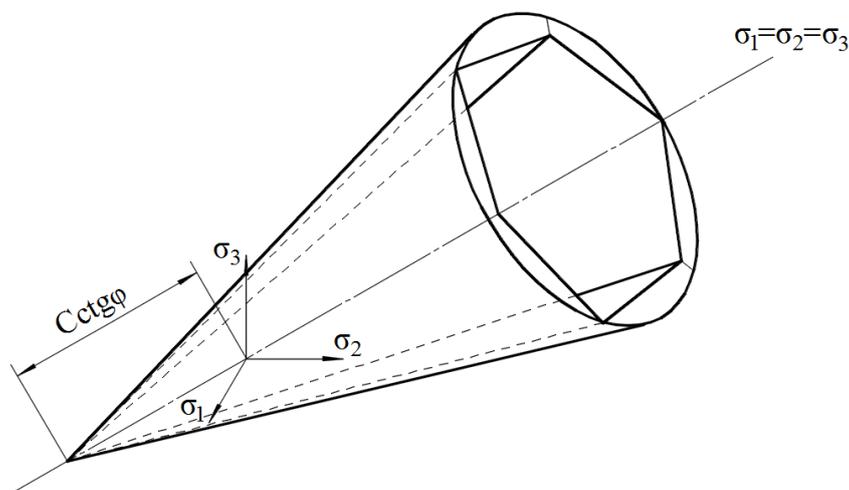


Рисунок 2.7. Поверхности текучести по критериям Мора – Кулона и Друкера – Прагера

Изложенные выше критерии преобразованы Г. С. Nayак и О. С. Zienkiewicz [307] в новый вид, более пригодный для численных методов расчета. Инварианты девиатора напряжений I_1 , I_2 и I_3 преобразованы в альтернативную форму σ_m , $\bar{\sigma}$ и θ соответственно. Условия текучести описаны следующим образом:

$$f(\sigma_m, \bar{\sigma}, \theta) = 0, \quad (2.77)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{I_1}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \bar{\sigma} &= I_2^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[-\frac{3\sqrt{3} I_3}{2 \bar{\sigma}^3} \right] \text{ при } -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\}, \quad (2.78)$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (2.79)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2, \quad (2.80)$$

$$I_3 = s_x s_y s_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{xz}^2 - s_z \tau_{xy}^2, \quad (2.81)$$

$$s_x = \sigma_x - \sigma_m, s_y = \sigma_y - \sigma_m, s_z = \sigma_z - \sigma_m, \quad (2.82)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения; s_x, s_y, s_z – нормальные составляющие девиатора напряжений D_σ ; $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – касательные напряжения.

С учетом выражений (2.77) – (2.82) рассмотренные ранее критерии принимают вид:

1. Треска – Сен-Венана:

$$f = 2\bar{\sigma} \cos \theta - \sigma_T = 0; \quad (2.83)$$

2. Хубера – Мизеса:

$$f = \sqrt{3}\bar{\sigma} - \sigma_T = 0; \quad (2.84)$$

3. Мора – Кулона:

$$f = \sigma_m \sin \varphi + \bar{\sigma} \cos \theta - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \varphi - c \cos \varphi = 0; \quad (2.85)$$

4. Друкера – Прагера:

$$f = 3\alpha\sigma_m + \bar{\sigma} - K = 0, \quad (2.86)$$

где параметры α и K определены по выражениям (2.75).

Вектор текучести \mathbf{a} имеет форму:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.87)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}). \quad (2.88)$$

С учетом (2.78) получено:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[\frac{1}{\bar{\sigma}^3} \frac{\partial I_3(D_\sigma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{3I_3(D_\sigma)}{\bar{\sigma}^4} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]. \quad (2.89)$$

Вектор текучести принимает вид:

$$\mathbf{a} = C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3, \quad (2.90)$$

где

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{a}_3 = \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.91)$$

и

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_m}, \\
 C_2 &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} - \frac{\tan 3\theta}{\bar{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\
 C_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{\bar{\sigma}^3} \frac{\partial f}{\partial \theta}.
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Таким образом, поверхность текучести может быть определена константами C_1 , C_2 , C_3 и легко включена в вычислительную программу. Значения данных констант для рассматриваемых условий текучести приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Критерий пластичности	C_1	C_2	C_3
Треска – Сен-Венана	0	$2 \cos(1 + \tan \theta \tan 3\theta)$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\bar{\sigma}^2 \cos 3\theta}$
Хубера – Мизеса	0	$\sqrt{3}$	0
Мора – Кулона	$\sin \varphi$	$\cos \theta \left[(1 + \tan \theta \tan 3\theta) + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} (\tan 3\theta - \tan \theta) \right]$	$\frac{\sqrt{3} \left[\sin \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \sin \varphi \right]}{2\bar{\sigma}^2 \cos 3\theta}$
Друкера – Прагера	3α	1	0

Далее рассмотрена дифференциальная зависимость между деформациями и напряжениями в пластической области. Материалы с упруго-пластическим поведением имеют широкое распространение среди реальных конструкций. Одновременно одни элементы таких конструкций могут испытывать упругие деформации, а другие – пластические. Таким образом, полные дифференциалы составляющих тензора деформаций $d\varepsilon_{ij}$ приняты

суммой дифференциалов упругих деформаций $d\varepsilon_{ij}^e$ и пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (2.93)$$

Дифференциалы компонентов упругой деформации связаны с приращениями составляющих тензора напряжения законом Гука:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\mu}{1+\mu} \delta_{ij} d\sigma \right), \quad (2.94)$$

где: G – модуль сдвига; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; μ – коэффициент Пуассона; δ_{ij} – символ Кронекера; σ – среднее давление в точке.

Дифференциал пластических деформаций определяет напряженное состояние в данный момент времени:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot s_{ij}, \quad (2.95)$$

где $d\lambda$ – некоторый бесконечно малый скалярный множитель; s_{ij} – компоненты девиатора напряжений.

С помощью выражений (2.94) и (2.95) связь между деформациями и напряжениями для упруго-пластического материала принимает вид:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\mu}{1+\mu} \delta_{ij} d\sigma \right) + d\lambda \cdot s_{ij}. \quad (2.96)$$

Хотя решение нелинейных алгебраических уравнений в задачах строительной механики описано далее в параграфе 2.9, здесь приведены особенности формирования матрицы жесткости \mathbf{R}^* и упруго-пластической матрицы \mathbf{D}_{n+1}^{EP} при учете физической нелинейности.

При учете физической нелинейности связь между вектором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и вектором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ выглядит следующим образом [155]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.97)$$

где: $\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon})$ – матрица физических свойств материала, являющаяся функцией от вектора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$.

С учетом выражения (2.56) получено:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathbf{z})\mathbf{B}\mathbf{z}, \quad (2.98)$$

Матрица жесткости принимает вид:

$$\mathbf{R}^* = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\mathbf{z}) \mathbf{B} dV. \quad (2.99)$$

При применении теорий пластического течения на каждом шаге решения необходимо вычислять параметры упруго-пластической матрицы \mathbf{D}_{n+1}^{EP} , векторов деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$.

Упруго-пластическая матрица \mathbf{D}^{EP} определена как:

$$\mathbf{D}^{EP} = \mathbf{D}^E + \frac{\mathbf{D}^E \mathbf{g} (\mathbf{D}^E \mathbf{g})^T}{\mathbf{g}^T \mathbf{D}^E \mathbf{g} - \mathbf{s}^T \mathbf{c} \mathbf{r}^T \mathbf{g}}, \quad (2.100)$$

где \mathbf{D}^E – матрица упругости, составленная по обобщенному закону Гука; \mathbf{g} – вектор производных функции текучести по напряжениям; \mathbf{s} – вектор производных функции текучести по пластическим деформациям; \mathbf{r} – вектор производных параметра упрочнения по пластическим деформациям; \mathbf{c} – производная функции текучести по параметру упрочнения.

На шаге $n+1$ должны быть вычислены новые коэффициенты упруго-пластической матрицы \mathbf{D}_{n+1}^{EP} .

Деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ на шаге $n+1$ находят на основе накопленных перемещений \mathbf{u}_{n+1} .

Определение полных значений напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1} + \sum_{n+1}^s \mathbf{D}_0^{EP} \delta \mathbf{e}_{n+1}, \quad (2.101)$$

где $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ – упругая часть напряжений на шаге $n+1$; \mathbf{D}_0^{EP} – начальная упруго-пластическая матрица; $\delta \mathbf{e}_{n+1}$ – величина подынтервала, на которую разделена пластическая часть приращения деформаций на шаге $n+1$.

Более подробно процедура решения нелинейных задач с применением теорий течения изложена в монографиях [155, 238].

2.8 Моделирование контактных задач

Проблема контакта имеет большое значение при моделировании цилиндрических оболочек подземных сооружений, взаимодействующих с окружающим основанием. В таких моделях контакт односторонний, так как основание работает только на сжатие, а при появлении растяжения контакт между взаимодействующими телами будет нарушен и возникнут зоны «отлипания». Контакт отнесен к конструктивной нелинейности типа изменения статуса. От статуса контакта (открыт или закрыт) зависит жесткость системы. Также иногда необходимо учитывать поперечное трение между телами. В связи с трудоемкостью контактных задач численные методы наиболее предпочтительны для их решения. В МКЭ контактные элементы располагают в зоне возможного взаимодействия тел путем ввода слоя псевдосреды, например, фиктивный или реальный зазор между телами и др. Данный слой обеспечивает выполнение условий контакта, в том числе условий одностороннего контактного взаимодействия. С помощью итерационных методов решения нелинейных задач возможно определение состояния наложенных на модель односторонних контактов [154].

В программном комплексе MSC PATRAN – NASTRAN моделирование контактного взаимодействия предполагает использование контактных элементов GAP, контактных пар BSURF, граничных условий SPC, SLIDE LINE и др.

В программном комплексе ANSYS Mechanical моделирование контактного взаимодействия реализовано с помощью применения контактных пар различного типа: «узел – узел», «узел – поверхность», «поверхность – поверхность» и др. Приведенные контактные пары используют разные наборы контактных элементов.

Для примера в Приложении 2 приведено описание контактного элемента GAP программного комплекса MSC PATRAN – NASTRAN и контактной пары «поверхность – поверхность» CONTA174, TARGE170 программного комплекса ANSYS Mechanical, использованных в данной работе для реализации одностороннего контактного взаимодействия.

2.9 Решение нелинейных алгебраических уравнений в задачах строительной механики

В строительной механике нелинейные задачи принято разделять на физически, геометрически и конструктивно нелинейные.

Учет физической нелинейности обусловлен нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. К геометрически нелинейным задачам относят такие, в которых возникают большие перемещения, соизмеримые с габаритами конструкции (как правило, с толщиной). При изменении расчетной схемы в процессе нагружения (например, контактное взаимодействие тел) необходим учет конструктивной нелинейности [119, 155, 238].

По МКЭ нелинейные проблемы формулируются системой нелинейных алгебраических уравнений вида:

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{z})\mathbf{z} - \mathbf{P} = 0, \quad (2.102)$$

где $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{z})$ – полная матрица тангенциальных жесткостей; \mathbf{z} – вектор перемещений; \mathbf{P} – вектор внешних нагрузок.

В настоящее время для решения систем нелинейных алгебраических уравнений часто используют шаговую процедуру приложения нагрузки совместно с мощным и хорошо известным итерационным методом Ньютона – Рафсона, который имеет вид [219]:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_k - \mathbf{R}_\tau^{-1}(\mathbf{z}_k)\boldsymbol{\delta}_k; \\ \boldsymbol{\delta}_k &= \mathbf{P} - \mathbf{R}_\tau(\mathbf{z}_k)\mathbf{z}_k, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.103)$$

где \mathbf{z}_{k+1} – вектор искомых узловых перемещений итерации $k + 1$; δ_k – вектор невязки узловых сил, полученный на итерации k ; \mathbf{z}_k – вектор узловых перемещений итерации k .

Необходимо отметить, что полная матрица тангенциальных жесткостей системы $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{z}_k)$ зависит от накопленных перемещений. Процесс итераций по (2.103) идет до тех пор, пока величина невязки δ_k не станет меньше заданной точности расчета.

В модифицированном методе Ньютона – Рафсона матрица жесткости $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{z}_k)$ первой итерации распространена на определенное количество последующих итераций и шагов нагружения. Это позволяет сократить временные затраты вычислений, но при этом может плохо повлиять на сходимость решения.

Модифицированный метод Ньютона – Рафсона выглядит следующим образом [238]:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \mathbf{R}_\tau^{-1}(\mathbf{z}_0)\delta_k; k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.104)$$

где $\mathbf{R}_\tau^{-1}(\mathbf{z}_0)$ – полная матрица тангенциальных жесткостей системы на итерации $k = 0$.

В нелинейных задачах исследования устойчивости равновесия систем часто возникает проблема «хлопка» системы или появления критических точек в ходе решения задачи. В таких случаях для решения систем нелинейных уравнений наиболее эффективен метод «длины дуги» (Arc Length Method) [323, 328]. Критические точки, возникающие на кривой равновесных состояний, представляют собой точки, в которых невозможно дальнейшее увеличение нагрузки или перемещения, в зависимости от того, что принято в качестве ведущего параметра (рисунок 2.8).

В систему нелинейных алгебраических уравнений (2.103) необходимо ввести скалярный коэффициент λ , позволяющий регулировать скорость увеличения вектора внешних сил (значения λ обычно принадлежат диапазону $-1 \geq \lambda \geq 1$):

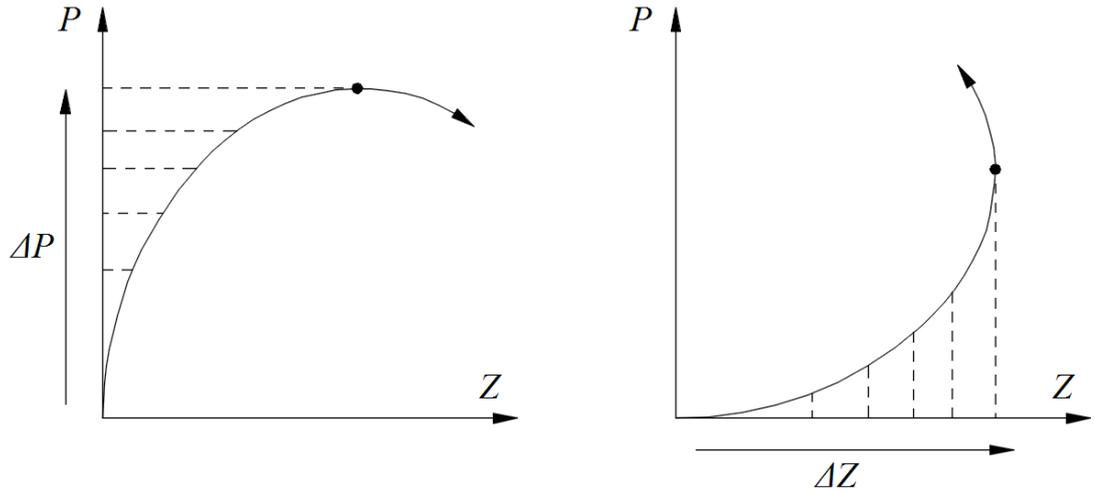


Рисунок 2.8. Примеры критических точек на кривой равновесных состояний для одного нелинейного уравнения:

- а) критическая точка при увеличении вектора внешних нагрузок;
- б) критическая точка при увеличении вектора перемещений

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\tau(\mathbf{z}_k)\Delta\mathbf{z}_k &= \lambda\mathbf{P} - \mathbf{R}_\tau(\mathbf{z}_k)\mathbf{z}_k; \\ \Delta\mathbf{z}_k &= \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{z}_k \end{aligned} \quad (2.105)$$

Далее приведено соотношение с коэффициентом λ для k -й итерации метода Ньютона – Рафсона и n -го шага приложения нагрузки:

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{z}_k)\Delta\mathbf{z}_k - \Delta\lambda\mathbf{P} = (\lambda_n + \lambda_k)\mathbf{P} - \mathbf{R}_\tau(\mathbf{z}_k)\mathbf{z}_k = -\boldsymbol{\delta}_k. \quad (2.106)$$

где $\Delta\lambda$ – приращение λ ; λ_n – величина λ на шаге n ; λ_k – величина λ на итерации k .

Также для решения (2.106) введено дополнительное уравнение длины дуги [323]:

$$l_k^2 = \lambda_k^2 + \beta^2 \Delta\mathbf{z}_n^T \Delta\mathbf{z}_n, \quad (2.107)$$

где l_k – длина дуги на итерации k ; β – коэффициент масштабирования; $\Delta\mathbf{z}_n$ – сумма всех приращений $\Delta\mathbf{z}_k$ на данной итерации.

Параметр l_i устанавливает, на каком радиусе необходимо искать следующую точку равновесия. Метод продолжает обеспечивать $\Delta\mathbf{z}_k$ и $\Delta\lambda$ до тех пор, пока не будет достигнута сходимость выражения (2.106).

Схематическое представление итераций метода «длины дуги» для одного нелинейного уравнения показано на рисунке 2.9.

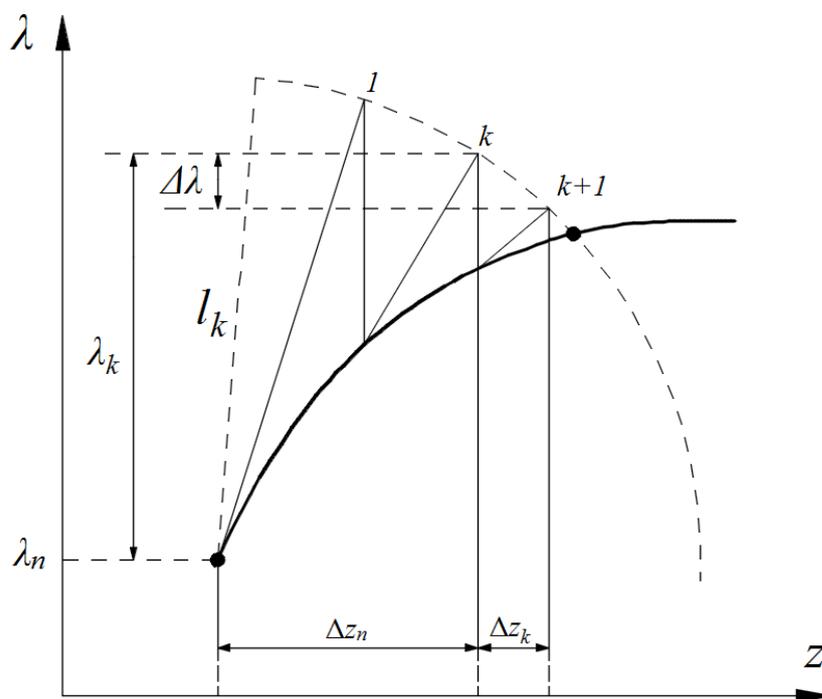


Рисунок 2.9. Схематическое представление итераций метода «длины дуги»

2.10 Метод Ланцоша для решения задач о собственных значениях

Анализ устойчивости систем в строительной механике может быть выполнен с помощью различных методов оценки собственных значений этих систем, из которых наиболее распространенным является метод Ланцоша.

Расчет на устойчивость в линейной постановке (проблема собственных значений) выглядит следующим образом [25, 29, 201]:

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\phi} = \lambda\mathbf{S}\boldsymbol{\phi}, \quad (2.108)$$

где \mathbf{R} – матрица жесткости системы; \mathbf{S} – матрица геометрической жесткости; λ – собственные значения (критические нагрузки); $\boldsymbol{\phi}$ – собственные векторы (формы потери устойчивости).

Решение для p собственных значений и соответствующих им собственных векторов выглядит как:

$$\mathbf{R}\Phi = \mathbf{S}\Phi\Lambda, \quad (2.109)$$

$$\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_p], \Lambda = \text{diag}(\lambda_i), i=1, \dots, p, \quad (2.110)$$

где Φ – матрица, столбцы которой содержат собственные векторы; Λ – диагональная матрица, содержащая соответствующие собственные значения.

Основные этапы метода Ланцоша представляют собой преобразование задачи (2.108) к форме, содержащей трехдиагональную матрицу коэффициентов. Описание этапов приведено ниже.

В начале необходимо выбрать произвольный стартовый вектор \mathbf{q}_1 . Далее задается последовательность векторов для $j = 1, 2, \dots$:

$$\mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{q}_j. \quad (2.111)$$

Затем вектор \mathbf{q}_{j+1} ортогонализируется ко всем предыдущим векторам $\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_{j-1}, \dots, \mathbf{q}_1$. Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{j+1} &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{q}_j - \alpha_j\mathbf{q}_j - \beta_j\mathbf{q}_{j-1}, \\ \alpha_j &= \mathbf{q}_{j+1}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{q}_j, \\ \beta_{j+1} &= \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}^T\mathbf{S}\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}}, \\ \mathbf{q}_{j+1} &= \frac{\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}}{\beta_{j+1}}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

где β_j – известно из предыдущего шага.

Данная последовательность векторов образует подпространство Крылова и является базисом для определения аппроксимаций собственных пар методом Рэлея – Ритца. Выражение (2.108) приобретает вид:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\phi = \theta\phi, \quad (2.113)$$

где $\theta = 1/\lambda$. При использовании метода Рэлея – Ритца редуцированная задача выглядит как:

$$\mathbf{T}_j \tilde{\boldsymbol{\phi}}_j - \theta_j \tilde{\boldsymbol{\phi}}_j = 0,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_j = \frac{\boldsymbol{\phi}_j}{\mathbf{Q}_j} \quad (2.114)$$

$$\mathbf{Q}_j = |[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_j]|^T$$

где трехдиагональная матрица

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{Q}_j^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Вектора $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_j$ называют векторами Ланцоша.

Для задач, содержащих большое количество уравнений, приведенный выше алгоритм метода Ланцоша имеет серьезный недостаток, связанный с неэффективным использованием процессора ЭВМ из-за больших затрат на операции чтения блоков факторизованной матрицы с диска.

В связи с этим в программных комплексах MSC PATRAN – NASTRAN и ANSYS Mechanical, использованных в диссертационной работе, в качестве основного метода для решения задач на собственные значения используется блочная версия метода Ланцоша с использованием сдвигов. Подробное описание данного метода приведено в [29, 201, 323].

2.11 Выводы по главе 2

1. Рассмотрены основные дифференциальные уравнения цилиндрической круговой оболочки в криволинейных ортогональных координатах. Приведены основные уравнения МКЭ, позволяющие находить приближенные численные решения различных задач строительной механики. Показан вид матрицы жесткостей отдельного конечного элемента и системы элементов.

2. Цилиндрические оболочки можно моделировать стержневыми элементами в случае плоской постановки задачи. В связи с этим рассмотрен стержневой элемент, испытывающий одновременное действие растяжения – сжатия вдоль своей оси и плоский изгиб. Положение точек такого стержня зависит от продольных и поперечных перемещений и углов поворота его узлов.

3. Рассмотрен плоский прямоугольный конечный элемент, деформирующийся как в своей плоскости, так и из плоскости, который применяют для аппроксимации цилиндрических оболочек в пространственных расчетных моделях. Каждый узел такого элемента имеет в качестве степеней свободы два перемещения в своей плоскости, прогиб и два угла поворота. Для сопряжения плоских конечных элементов, не лежащих в одной плоскости, используется третий угол поворота, не дающий вклад в матрицу жесткостей.

4. При расчете пространственных систем типа «цилиндрическая оболочка – окружающее основание» для моделирования основания часто используют объемные конечные элементы. Рассмотрен объемный восьмиузловой конечный элемент в форме параллелепипеда, имеющий в качестве степеней свободы по три неизвестных перемещения в каждом узле.

5. Рассмотрен учет геометрической нелинейности в задачах строительной механики, который необходим при сильном изменении геометрической

формы конструкции в процессе нагружения (например, в задачах устойчивости). Показана матрица жесткостей в случае учета геометрической нелинейности.

6. Кратко изложены основные положения теории пластического течения. Рассмотрены наиболее известные условия текучести для однородного изотропного материала и для материала с разным сопротивлением растяжению и сжатию. Приведен преобразованный вид рассмотренных условий текучести, наиболее удобный для применения в численных расчетах. Показаны особенности формирования матрицы жесткости и упруго-пластической матрицы при учете физической нелинейности.

7. Описан способ решения проблемы одностороннего контактного взаимодействия при расчете цилиндрических оболочек, взаимодействующих с окружающим основанием. Приведены известные контактные конечные элементы, способные обеспечить данный вид контактного взаимодействия.

8. Рассмотрена шаговая процедура движения по параметру нагрузки совместно с итерационным методом Ньютона – Рафсона для решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Также приведено описание метода «длины дуги» (Arc Length Method), применяемого для отыскания предельных точек на кривой равновесных состояний.

9. Описаны основные этапы хорошо известного метода Ланцоша для решения задач о собственных значениях, который используется для анализа устойчивости систем в строительной механике.

ГЛАВА 3 ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСАДКИ ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТОВОГО МАССИВА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАЗОРА МЕЖДУ ОБОЛОЧКОЙ И МАССИВОМ

3.1 Введение

В настоящей главе предложена методика оценки НДС массива, моделирующего грунтовое основание, а именно определения осадок поверхности массива, вызванных сооружением круговой цилиндрической оболочки, моделирующей перегонный тоннель, внутри массива. Проведен сравнительный анализ полученных автором численных результатов расчетов, в том числе решений, найденных известными полуэмпирическими аналитическими методами. Предложенная методика апробирована при строительстве линии Московского метрополитена.

В процессе ведения работ тоннелепроходческим механизированным комплексом (ТПМК) или щитовой проходкой на участке тоннеля, который не закреплен или частично закреплен, происходит смещение породы в сторону тоннеля. Таким образом, количество породы, которое удалено из подземного пространства, всегда больше, чем теоретическое, посчитанное, исходя из проектного профиля тоннеля. Дополнительный объем породы, извлеченный из подземного пространства, носит название «потерянный объем» и определен через параметр V_L – отношение между объемами извлеченной породы и самого тоннеля (определенному по внешнему диаметру тоннеля).

«Потерянный объем» служит мерой нарушенности массива проходческими работами и вызывает развитие мульды оседания земной поверхности.

Методика предполагает, что для решения поставленной задачи необходимо построить такую расчетную модель цилиндрической оболочки и окружающего массива, которая позволяла бы учитывать объем

дополнительного «потерянного» грунта, извлеченного из подземного пространства в процессе ведения работ ТПМК, с последующим анализом полученного НДС системы и сравнением результатов с известными полуэмпирическими аналитическими методами определения осадок земной поверхности.

Моделирование и расчеты произведены в современном конечно-элементном программном комплексе MSC PATRAN – NASTRAN в физически и конструктивно нелинейных постановках задачи.

3.2 Расчетная модель для определения осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки без учета «потерянного объема» грунта

В первой расчетной модели системы «цилиндрическая оболочка – окружающий массив» для определения осадки поверхности массива зазор между оболочкой и массивом отсутствует: контакт задан по принципу «узел в узел» без учета зазора между ними, позволяющего учитывать «потерянный объем» породы, извлеченной из подземного пространства в процессе ведения работ ТПМК. Общий вид расчетной модели показан на рисунке 3.1.

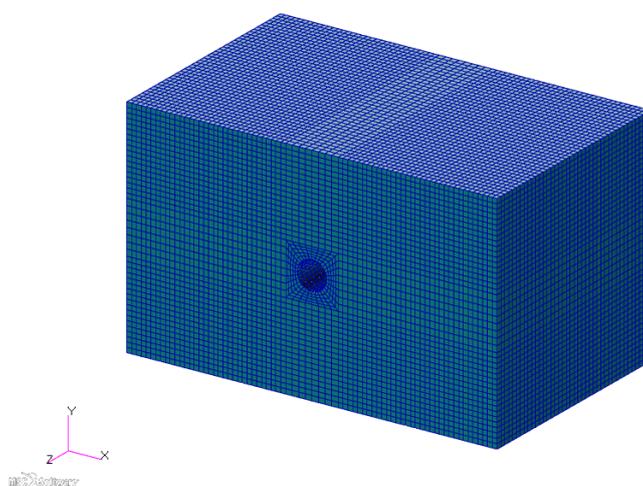


Рисунок 3.1. Общий вид расчетной модели

Окружающий массив, аппроксимирующий грунт, задан пространственными конечными элементами в форме восьмиузловых параллелепипедов, в каждом узле по три степени свободы. Цилиндрическая оболочка, моделирующая тоннельную обделку, задана двумерными плоскими четырехузловыми элементами, имеющими в каждом узле по шесть степеней свободы.

Расстояние от края оболочки до боковых торцов массива принято равным $L = 6D$, где D – диаметр оболочки. Расстояние от оси оболочки до верхнего и нижнего торцов массива принято равным $4D$. К расчетной модели приложена нагрузка от собственного веса. Боковые и нижняя границы массива закреплены от перемещений по нормальям к поверхностям. Оболочка по торцам имеет аналогичные опорные закрепления, обеспечивающие геометрическую неизменяемость расчетной модели. Материал оболочки принят неограниченно линейно упругим. Физико-механические свойства оболочки соответствуют свойствам бетона: модуль упругости $E_{об} = 3.8 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.2$, плотность $\rho_{об} = 2500$ кг/м³. Габариты оболочки приняты по типовому проекту: диаметр – 5.0 м; толщина – 0.25 м. Материал массива задан упруго-пластической моделью Друкера – Прагера (D. C. Drucker, W. Prager). Физико-механические свойства массива приняты следующими: модуль деформации $E_{зр} = 30$ МПа, коэффициент поперечной деформации $\mu_{зр} = 0.3$, плотность $\rho_{зр} = 2000$ кг/м³, сцепление $C = 10$ кПа, угол внутреннего трения $\varphi = 20^\circ$. Расчет выполнен с учетом физической нелинейности (согласно модели материала Друкера – Прагера).

По результатам расчета следует отметить, что при моделировании контакта оболочки и окружающего массива по принципу «узел в узел» без учета зазора между ними расчетная модель работает неправдоподобно, поле вертикальных перемещений массива не соответствует действительности:

верхняя поверхность массива испытывает подъем. Объяснением этому служит то, что вес удаленной части массива больше веса монтируемой оболочки, что вызывает разгрузку нижележащих слоев массива и подъем его верхней поверхности. Максимальное выпучивание верхней поверхности над осью оболочки составило 0.69 см. Масштабированный деформированный вид показан на рисунке 3.2.

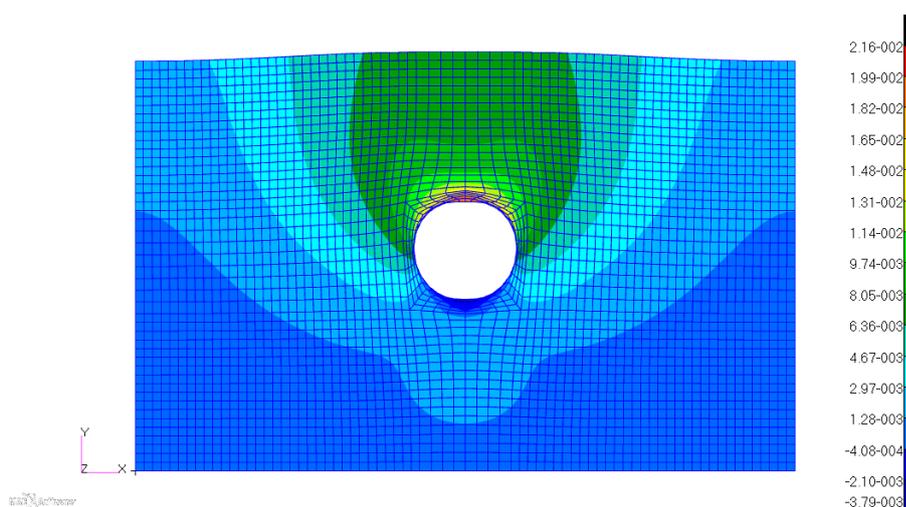


Рисунок 3.2. Масштабированный деформированный вид массива в поперечном направлении к оси оболочки

3.3 Расчетная модель для определения осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки с учетом «потерянного объема» грунта

Для решения вышеизложенной проблемы предложено моделировать зазор между цилиндрической оболочкой и окружающим массивом двумя способами: слоем объемных конечных элементов с низкими деформационными характеристиками и одномерными контактными элементами (GAP элементы в комплексе MSC PATRAN – NASTRAN).

Вычисления по предложенным расчетным моделям произведены с учетом физической (согласно модели материала Друкера – Прагера для массива) и конструктивной (контактные усилия определены методом

последовательных приближений) нелинейностей и выполнены в две стадии. На первой стадии определено начальное НДС массива от его собственного веса (бытовое состояние); на второй стадии определено окончательное НДС массива после возведения оболочки.

В первом способе, где зазор задан слоем объемных конечных элементов, модуль деформации элементов определен итерационным методом: уменьшение значения модуля происходит до тех пор, пока зазор у нижнего свода оболочки не будет перекрыт полностью (таблица 3.1). Начальный зазор слоя объемных конечных элементов с низкими деформационными характеристиками принят 6.8 см, исходя из предположения, что объем зазора на единицу длины оболочки имеет максимально возможное значение 5.5% от объема оболочки [228].

Таблица 3.1

Определение модуля деформации для слоя объемных конечных элементов зазора

$E_{\text{зазора}}$, Па	Зазор у нижнего свода оболочки, см
170000	0.45
160000	0.26
155000	0.16
153000	0.01

По результатам расчета максимальная осадка над осью оболочки составила – 1.68 см в нижнюю сторону. Поле вертикальных перемещений массива представлено на рисунке 3.3.

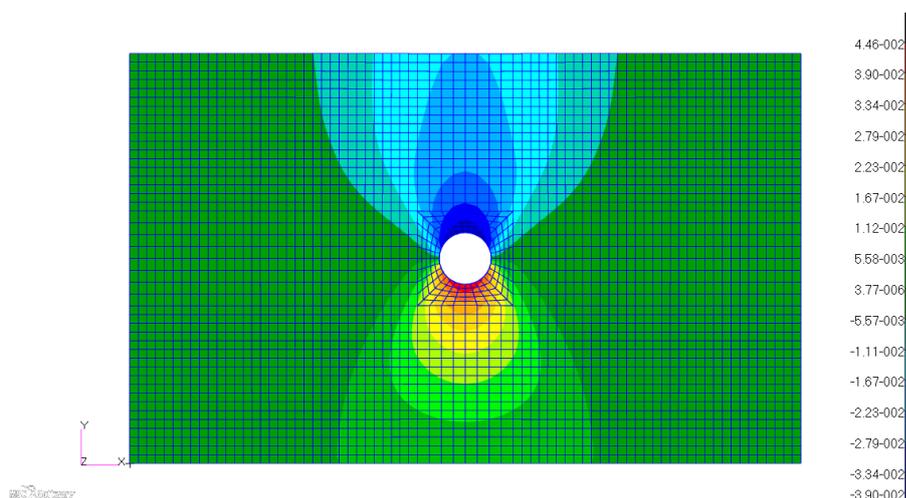


Рисунок 3.3. Поле вертикальных перемещений массива в поперечном направлении к оси оболочки расчетной модели со слоем объемных конечных элементов зазора

Далее рассмотрена расчетная модель, где зазор задан контактными элементами, жесткости которых устремлены к бесконечности при сжатии ($K_a = 1 \cdot 10^7$ Н/м) и к нулю при растяжении ($K_b = 1 \cdot 10^{-7}$ Н/м). Начальный зазор принят 6.8 см, идентично первой расчетной модели.

Максимальное перемещение над осью оболочки составило – 3.60 см в нижнюю сторону. Разница в перемещениях, полученных по двум предложенным способам, объяснена тем, что в модели со слоем объемных конечных элементов зазора из-за постоянного модуля деформации по всему периметру оболочки зазор не везде перекрыт до конца, в частности в области верхнего свода. Также в первой расчетной модели зазор имеет ненулевую жесткость при растяжении, что не позволяет оболочке отлипнуть от массива в местах растяжения, в отличие от второй расчетной модели. На рисунке 3.4 показано поле вертикальных перемещений массива по результатам второй стадии расчета модели с контактными элементами зазора.

На рисунке 3.5 изображены кривая подъема поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки для первой расчетной модели, в которой зазор отсутствует, а также кривые осадки поверхности массива для двух предложенных моделей, учитывающих «потерянный объем» грунта.

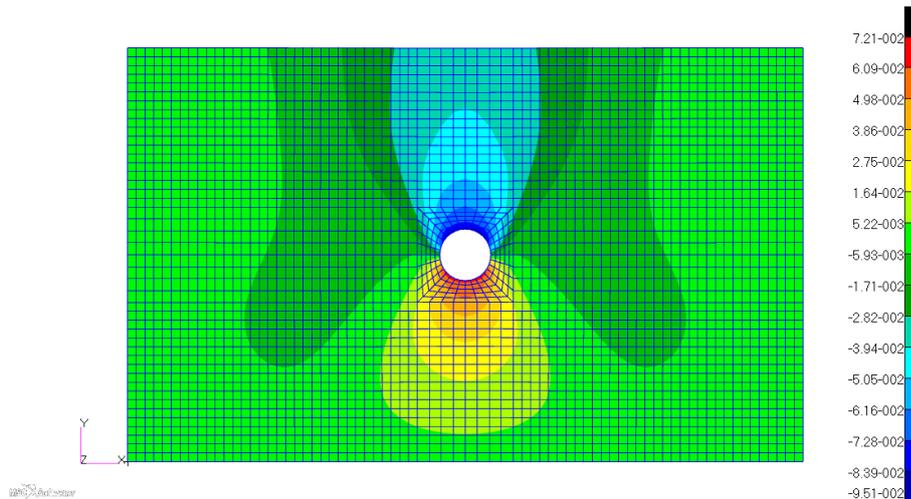


Рисунок 3.4. Поле вертикальных перемещений массива в поперечном направлении к оси оболочки расчетной модели с контактными элементами зазора

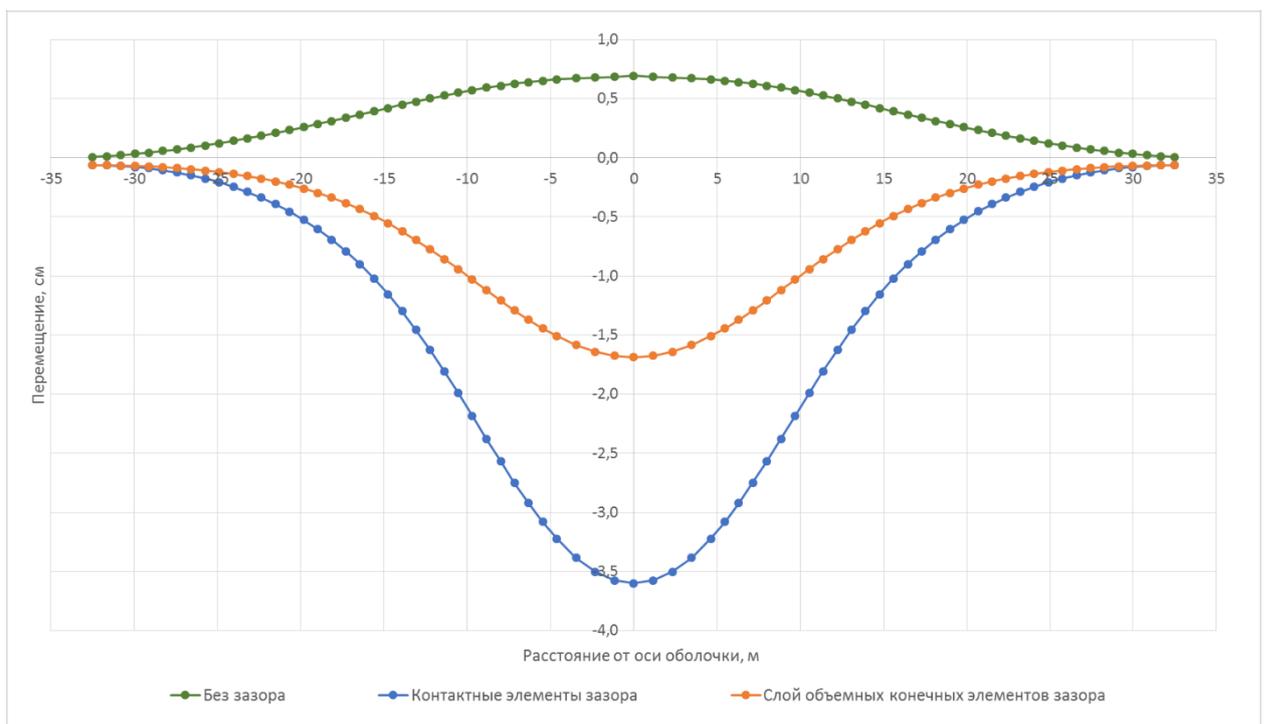


Рисунок 3.5. Кривые подъема и осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки

3.4 Расчетная модель для определения осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки с учетом «потерянного объема» грунта

После определения осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки необходимо проделать то же самое для продольного направления.

В предложенной расчетной модели оболочка задана на половину длины массива для исследования осадок поверхности вдоль оси оболочки, однако, с такой моделью возможно определять вертикальные перемещения и в поперечном направлении, что позволяет увидеть общую картину развития мульды осадки. При моделировании контакта по принципу «узел в узел» без учета зазора максимальное выпучивание верхней поверхности основания над осью оболочки составило 0.69 см.

Зазор между оболочкой и массивом задан двумя способами: слоем объемных конечных элементов с низкими деформационными характеристиками и контактными элементами.

В первой расчетной модели модуль деформации слоя конечных элементов зазора определен итерационным методом, как и в предыдущем случае. Максимальное перемещение над осью оболочки составило – 1.69 см в нижнюю сторону. Поле вертикальных перемещений массива вдоль оси оболочки по всей длине расчетной модели показано на рисунке 3.6.

Далее рассмотрена расчетная модель, где зазор задан контактными элементами, жесткости которых устремлены к бесконечности при сжатии ($K_a = 1 \cdot 10^7$ Н/м) и к нулю при растяжении ($K_b = 1 \cdot 10^{-7}$ Н/м). Начальный зазор принят 6.8 см, идентично первой расчетной модели. Максимальное перемещение над осью оболочки составило – 3.60 см в нижнюю сторону. На рисунке 3.7 показано поле вертикальных перемещений массива вдоль оси оболочки по всей длине расчетной модели [128, 129, 297].

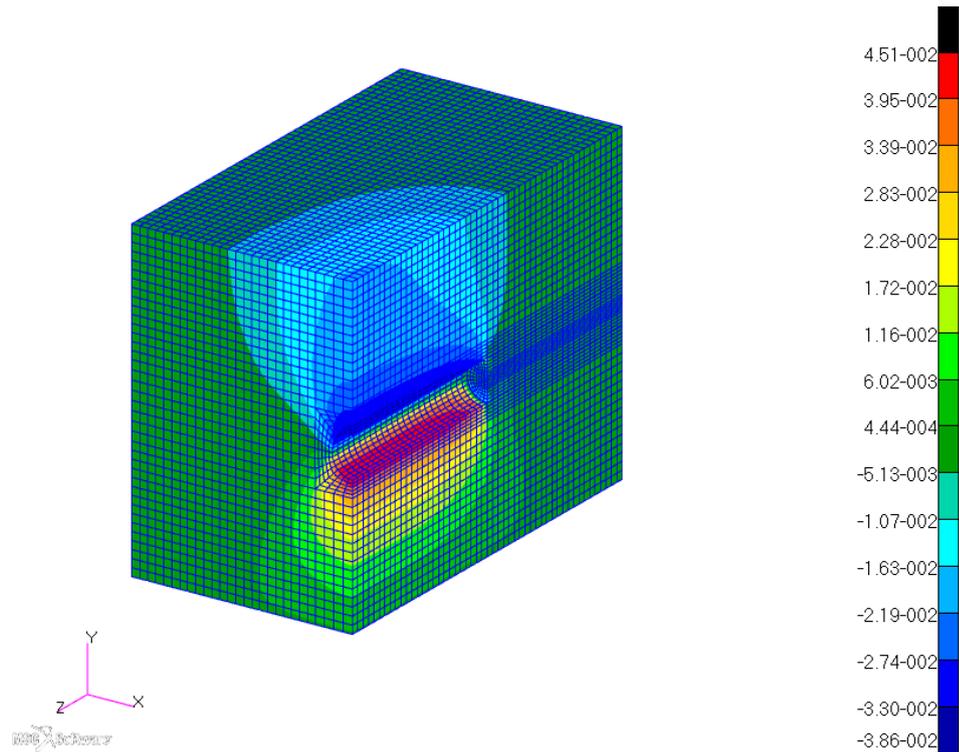


Рисунок 3.6. Поле вертикальных перемещений массива вдоль оси оболочки расчетной модели со слоем объемных конечных элементов зазора

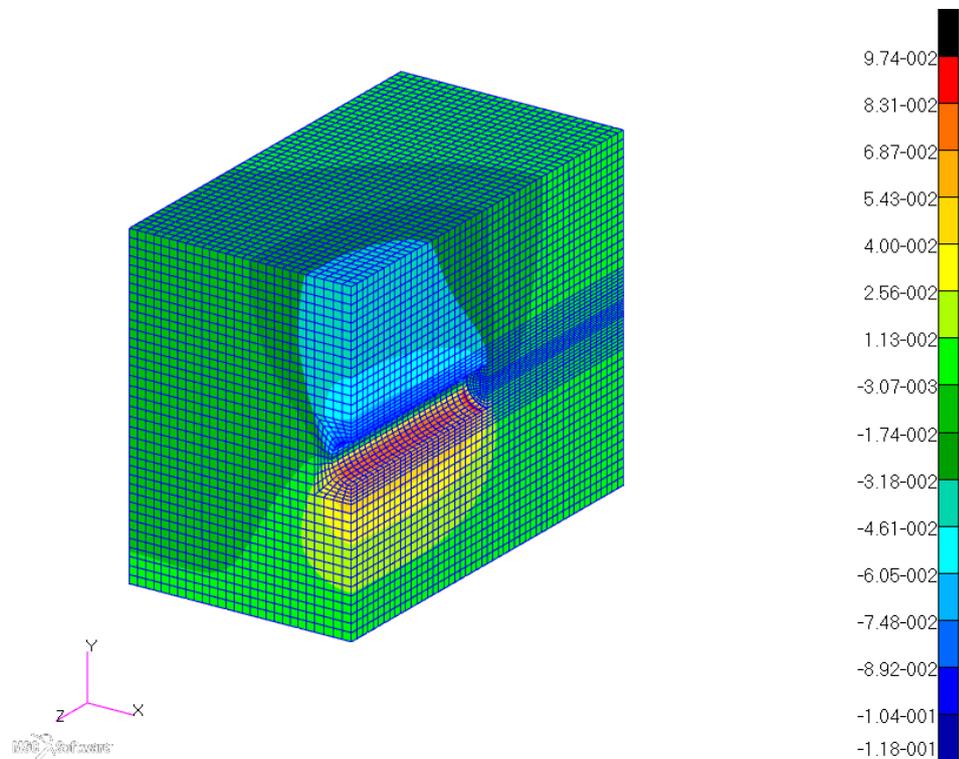


Рисунок 3.7. Поле вертикальных перемещений массива вдоль оси оболочки расчетной модели с контактными элементами зазора

На рисунке 3.8 изображены кривая подъема поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки для расчетной модели, в которой зазор отсутствует, а также кривые осадки поверхности массива для двух предложенных моделей, учитывающих «потерянный объем» грунта.

По кривым рисунка 3.8 видно, что осадки поверхности массива во второй расчетной модели превышают осадки, полученные в первой. Разница в перемещениях обусловлена замечаниями, приведенными в параграфе 3.3, о том, что в модели со слоем объемных конечных элементов зазора из-за постоянного модуля деформации по всему периметру оболочки зазор не везде перекрыт до конца, в частности в области верхнего свода. Также в первой расчетной модели зазор имеет ненулевую жесткость при растяжении, что не позволяет оболочке отлипнуть от массива в местах растяжения, в отличие от второй расчетной модели.

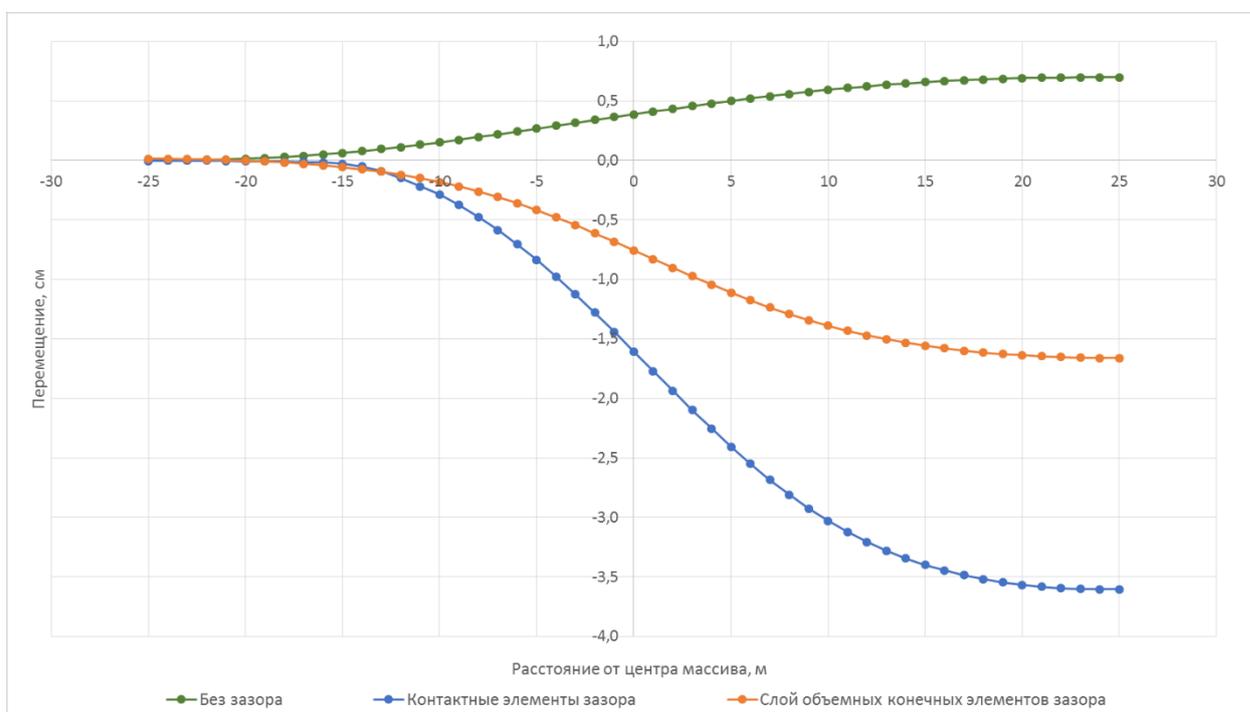


Рисунок 3.8. Кривые подъема и осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки

3.5 Аналитические полуэмпирические методы определения мульды оседания земной поверхности за счет «потерянного объема» грунта

Обобщенный полуэмпирический метод определения осадки земной поверхности для случая строительства одиночного тоннеля в однородных породах предложен Р. В. Attewell и J. P. Woodman [273]. Форма мульды оседания земной поверхности, вызванная процессом продвижения ТПМК, показана на рисунке 3.9.

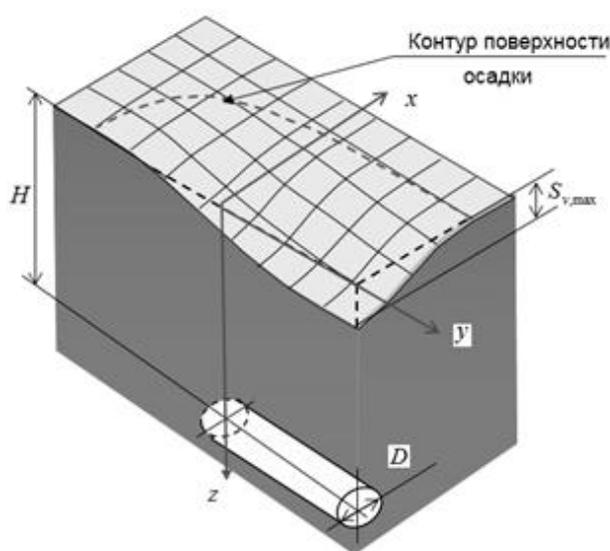


Рисунок 3.9. Форма мульды оседания земной поверхности, вызванная процессом продвижения ТПМК

Данная мульда оседания описана зависимостью [89, 114]:

$$S = \frac{V_s}{\sqrt{2\pi i_x}} e^{-\frac{x^2}{2i_x^2}} \left[G\left(\frac{y - y_i}{i_x}\right) - G\left(\frac{y - xy_f}{i_x}\right) \right], \quad (3.1)$$

где S – величина осадки земной поверхности в точке (x, y) ; x – расстояние от рассматриваемой точки до продольной оси тоннеля; y – координата точки по продольной оси тоннеля; V_s – полезный объем мульды оседания земной поверхности; y_i – начальная позиция тоннеля; y_f – расположение лба забоя; i_x – ширина мульды оседания, $i_x = Kz$; K – безразмерная константа,

характеризующая параметры породы; z – расстояние от поверхности земли до продольной оси тоннеля; G – функция распределения.

Функция распределения G определена выражением:

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha; \quad \alpha = \frac{y - y_i}{i} \quad (3.2)$$

Рассматривая характер мульды оседания, можно выделить интересующее нас поперечное направление развития осадок над забоем тоннеля. В работе Р. В. Реск [311] показано, что мульду оседания земной поверхности в данном направлении можно описать функцией Гаусса, и такое описание получило широкое распространение при анализе вертикальных осадок:

$$S_v(x) = S_{v,max} e^{-\frac{x^2}{2i_x^2}}, \quad (3.3)$$

где $S_{v,max}$ – величина осадки земной поверхности над продольной осью тоннеля; x – расстояние от центра тоннеля до рассматриваемой точки; i_x – параметр ширины мульды, представляющий собой стандартное отклонение функции Гаусса.

Типовой характер мульды оседания в поперечном направлении показан на рисунке 3.10. Максимальный наклон расположен в точке перегиба на расстоянии i_x от центральной продольной оси тоннеля. Точка перегиба отделяет зону выгиба от зоны прогиба.

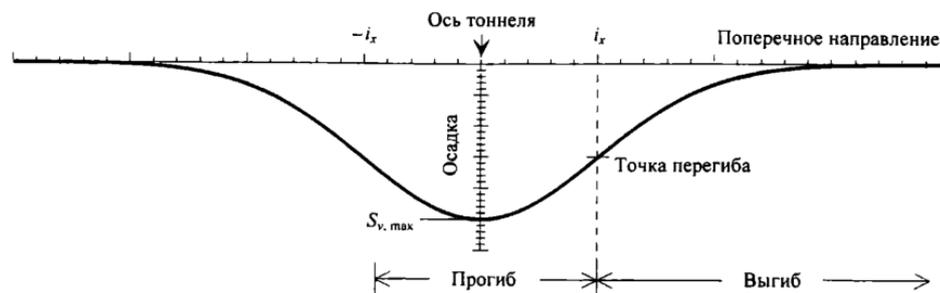


Рисунок 3.10. Типовая осадка поверхности массива в поперечном направлении при проходке ТПМК

Площадь области, ограниченной Гауссовой функцией, по определению равна единице. Следовательно, площадь, определяемая кривой муьды осадки (3.3), представленной выше, выражена формулой:

$$V_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_v dx, \quad (3.4)$$

где V_s – объем муьды осадки на единицу длины тоннеля.

В грунтах с малой водопроницаемостью смещение частиц грунта к тоннельной обделке происходит без дренирования. Другими словами, зазор между тоннельной обделкой и границей разработанной полости полностью заполнен грунтом. Поэтому объем поверхностной муьды осадки равен объему грунта, удаленному сверх объема, занимаемого тоннелем. Обычно он выражен как отношение этого дополнительного «потерянного объема» к объему тоннеля (на единицу его длины):

$$V_{sp} = V_L \frac{\pi D^2}{4}, \quad (3.5)$$

где V_L – потеря объема; D – внешний диаметр тоннеля.

На практике выражение (3.5) применяют в процентах.

Учитывая зависимости (3.4) и (3.5), выражение (3.3) можно преобразовать к виду:

$$S_v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{V_L D^2}{4i_x} e^{-\frac{x^2}{2i_x^2}}. \quad (3.6)$$

Для данного диаметра тоннеля D форма и величина поперечной кривой осадки зависит только от потери объема грунта V_L и ширины муьды i_x . Эти два критических параметра будут обсуждены более подробно далее.

«Потеря объема» грунта V_L равна разности выбранного грунта и теоретического объема тоннеля (на единицу длины тоннеля).

При строительстве тоннелей щитовым способом на деформации поверхности грунта влияют следующие факторы: перебор¹ и выпуск² породы в забое; передвижение щитов даже с небольшим углом атаки; увеличенный строительный зазор между обделкой и грунтовым основанием; податливость обделки; деформации щитов и их вибрации.

Все эти факторы определяют величину «потери объема» грунта, от которой в большой мере зависят осадки дневной поверхности [109, 114].

Современная технология проходки позволяет ограничить перемещения грунта до такой степени, чтобы ущерб от него подземным сооружениям и сооружениям на поверхности был минимальным. Тем не менее, полностью избежать воздействия щитовой проходки на окружающую среду в настоящее время невозможно.

Для оценки ширины впадины поверхности грунта удобно использовать параметр мульды осадки i_x . В поперечном сечении кривой осадки это расстояние от точки перегиба (то есть точки максимального наклона) до оси тоннеля. В работе М. Р. О`Reilly и В. New [310] выполнено большое количество замеров по этим кривым при проходке тоннелей в глинистых породах. В результате обработки экспериментальных данных ими получена следующая линейная зависимость параметра ширины мульды i_x от глубины заложения тоннеля z_0 :

$$i_x = 0.43z_0 + 1.1. \quad (3.7)$$

На основании анализа экспериментальных данных авторами работы сделан вывод о том, что для глинистых грунтов во многих случаях значение коэффициента K , определяющего точку перегиба, можно определять так: $K = 0.5$. В то же время ими указано, что эта величина лежит в диапазоне 0.4 – 0.7 для жесткой и мягкой глины соответственно. Как видно из рисунка 3.11 простая линейная функция достаточно хорошо описывает

¹ выработка большего объема породы по сравнению с объемом тоннеля

² превышенное количество тампонажного раствора или породы за тоннельной обделкой

зависимость, полученную экспериментальным путем в полевых условиях. Тем не менее, для удобства использования с достаточной для инженерных расчетов точностью авторами упрощено уравнение (3.7):

$$i_x = Kz_0. \quad (3.8)$$

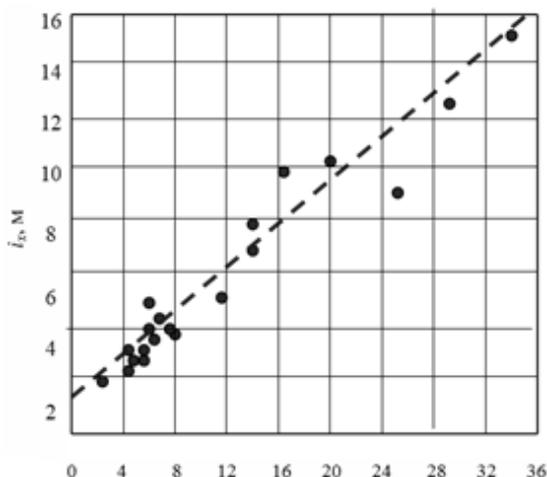


Рисунок 3.11. Зависимость расстояний от точек перегиба i_x поверхности осадки до оси тоннеля от глубины тоннеля z_0

Позднее в работе W. J. Rankin [315] на основании большого количества данных, полученных в полевых условиях, подтверждена величина $K = 0.5$. Таким образом, выведена простая зависимость:

$$i_x = 0.5z_0. \quad (3.9)$$

Кроме полевых замеров учеными Т. Kimura и R. J. Mair [301] выполнены испытания на центрифуге. В результатах испытаний показано, что величина $K = 0.5$ не зависит от жесткости тоннельной конструкции. Авторами сделан вывод, что значение K не зависит от способа проходки тоннеля.

Для сравнительного анализа результатов, полученных двумя предложенными численными методами, произведен расчет мульды осадки поверхности массива по обобщенной полуэмпирической методике, изложенной выше [128, 131].

Диаметр тоннеля $D = 5.0 \text{ м} = 5000 \text{ мм}$;

Глубина заложения оси тоннеля $z_0 = 20.0 \text{ м} = 20000 \text{ мм}$;

Параметр $i_x = 10000$ мм;

Объем мульды осадки на единицу длины тоннеля:

$$V_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_v dx = \sqrt{2\pi} i_x S_{v,max} = 25060 \cdot S_{v,max}. \quad (3.10)$$

Объем «потерянного» грунта на единицу длины тоннеля принят в размере 5.5% объема тоннеля $V_L = 0.055$ [228].

Объем «потерянного» грунта на единицу длины тоннеля:

$$V_{sp} = V_L \frac{\pi D^2}{4} = 1079375 \text{ (мм}^2\text{)}. \quad (3.11)$$

Приравнивание объема мульды осадки к объему «потерянного» грунта

$$25060 \cdot S_{v,max} = 1079375 \quad (3.12)$$

позволяет определить максимальный размер осадки поверхности:

$$S_{v,max} = \frac{1079375}{25060} = 43.0. \quad (3.13)$$

В результате аналитического расчета максимальная осадка поверхности массива над осью тоннеля составляет:

$$S_{v,max} = 43.0 \text{ (мм)}. \quad (3.14)$$

Кривые мульды осадок, полученные численным и обобщенным полуэмпирическим методами, показаны на рисунке 3.12. К результатам расчетных моделей, учитывающих «потерянный объем» грунта, добавлена кривая выгиба, полученная в первой модели без зазора, так как метод Р. В. Attewell и J. Р. Woodman не учитывает разгрузку нижележащих слоев основания, вызванную превышением веса объема выбранного грунта над силой тяжести смонтированной оболочки тоннеля. Расхождение максимальной осадки поверхности массива над осью оболочки, полученной обобщенным полуэмпирическим методом, с максимальной осадкой расчетной модели со слоем объемных конечных элементов зазора составляет 44%, с максимальной осадкой расчетной модели с контактными элементами зазора – 1%. Это говорит о хорошей сходимости результатов одного из

численных методов с известным обобщенным полуэмпирическим расчетом и о корректной работе предложенной расчетной модели с контактными элементами.

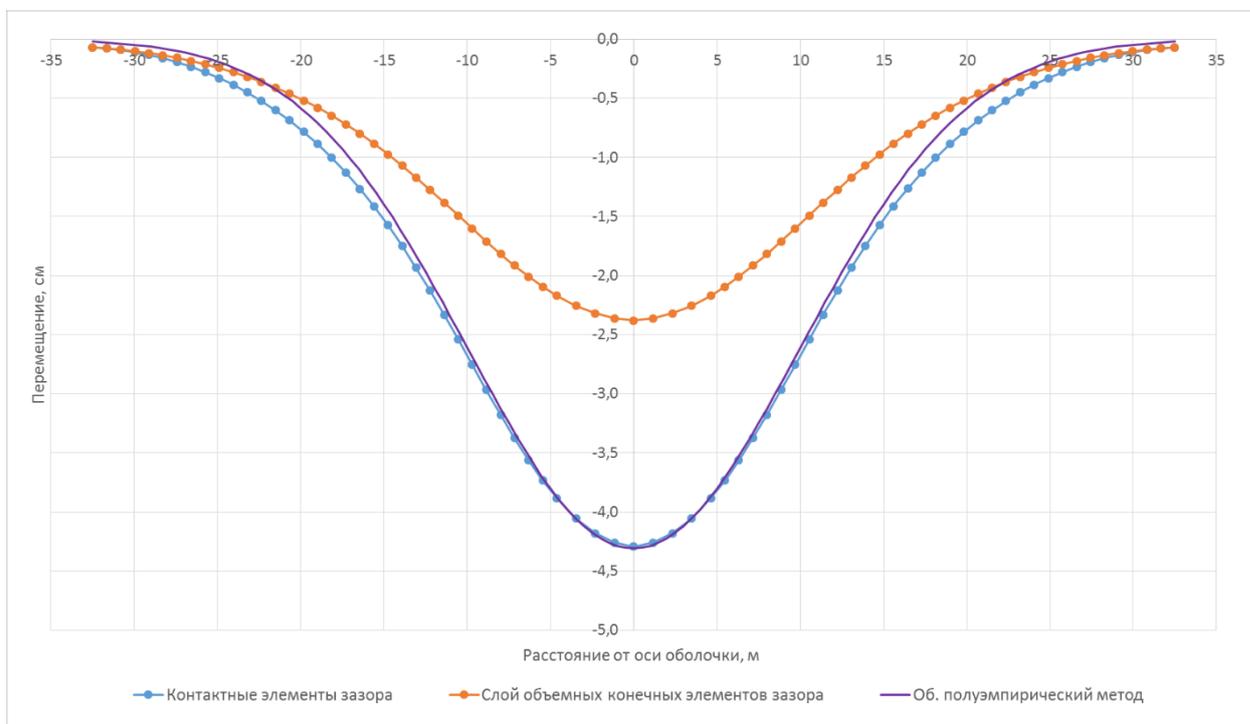


Рисунок 3.12. Кривые осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки, полученные численным и обобщенным полуэмпирическим методами

Р. В. Attewell и J. P. Woodman [273] предложено определять продольный профиль осадки грунта, считая, что тоннель в продольном направлении представляет собой множество точечных источников, каждый из которых вызывает осадки. Теоретическая кривая продольной осадки показана на рисунке 3.13.

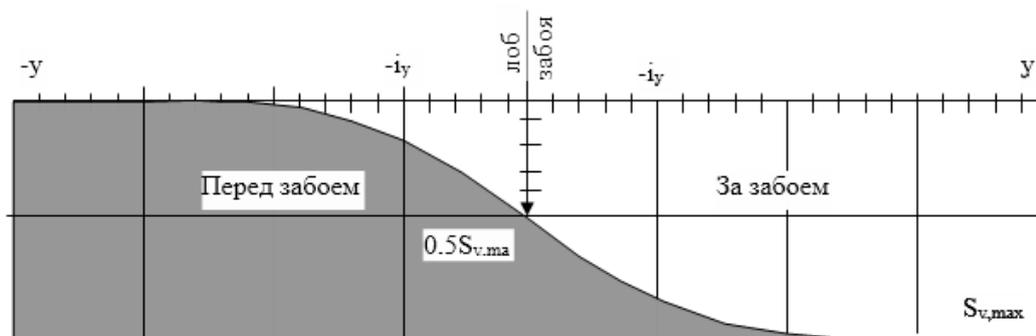


Рисунок 3.13. Кривая осадки поверхности земли вдоль оси тоннеля

Осадка растет в положительном направлении оси y и достигает максимального значения $S_{v,max}$ при $y = \infty$, минимального значения $S_v = 0$ достигает при $y = -\infty$. При $y = 0$ осадка составляет половину от максимального значения $0.5S_{v,max}$.

Мульда оседания поверхности земли вдоль оси тоннеля может быть описана следующей зависимостью:

$$S_v(y)_{x=0} = S_{v,max} \Phi\left(\frac{y}{i}\right), \quad (3.15)$$

где $\Phi(y)$ – кривая суммарной вероятности осадок от точечных источников; y – координата, направленная вдоль оси тоннеля от забоя.

$\Phi(y)$ представлена в виде:

$$\Phi(y) = \frac{1}{i_y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{y^2}{2i_y^2}}. \quad (3.16)$$

На основе табулирования функции (3.15), получена кривая мульды осадок поверхности земли вдоль оси тоннеля. Максимальное осадка над осью тоннеля составляет – 4.30 см в нижнюю сторону, что на 1% больше максимального перемещения, полученного численным методом с использованием контактных элементов зазора, и на 44% больше максимальной осадки расчетной модели со слоем объемных конечных элементов зазора. Сравнительный график кривых, полученных численным и обобщенным полуэмпирическим методами, показан на рисунке 3.14. К результатам расчетных моделей, учитывающих «потерянный объем» грунта, добавлена кривая выгиба, полученная в модели без зазора, так как метод Р. В. Attewell и J. Р. Woodman не учитывает разгрузку нижележащих слоев основания. Из графика можно сделать вывод, что использование контактных элементов при определении осадок поверхности массива вдоль оси оболочки приводит к хорошей сходимости с известным обобщенным полуэмпирическим методом.

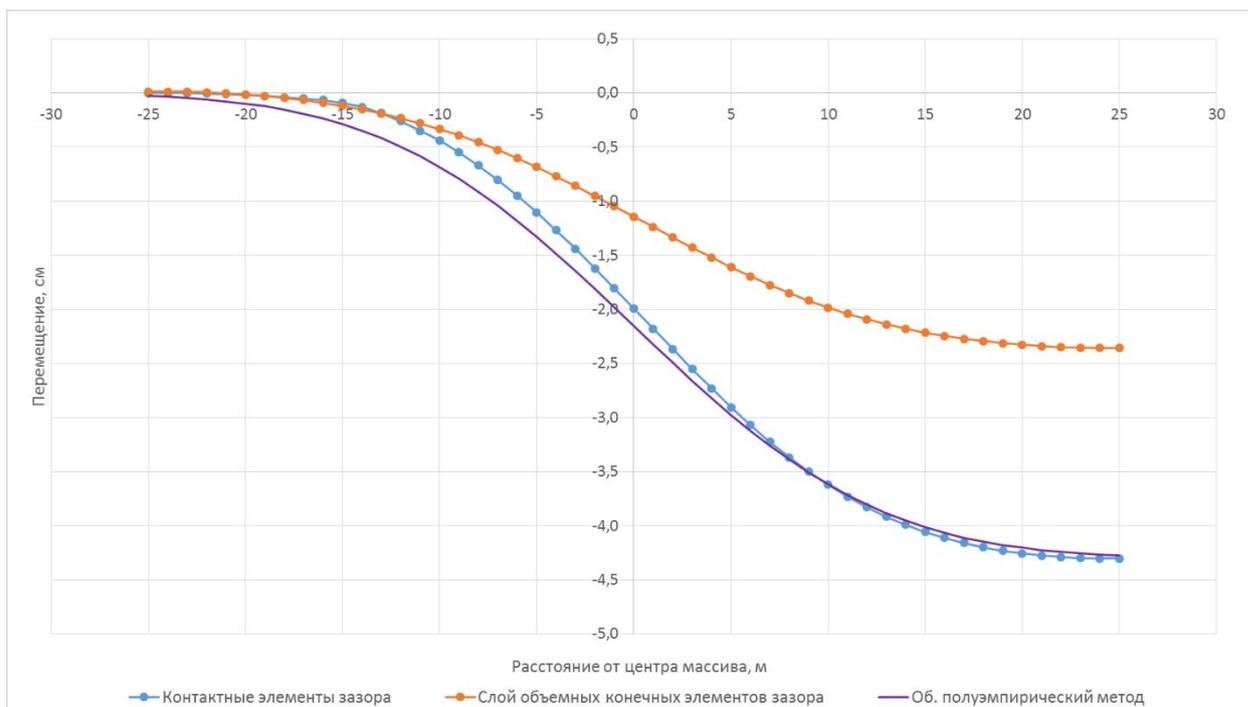


Рисунок 3.14. Кривые осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки, полученные численным и обобщенным полуэмпирическим методами

Разработанными расчетными моделями с использованием двух способов учета зазора между оболочкой и массивом показаны результаты, характер которых соответствует действительности, чего нельзя сказать об общепринятой расчетной модели, не учитывающей зазор.

В то же время если сравнивать предложенные расчетные модели между собой, то модель с контактными элементами зазора правдоподобнее описывает объем дополнительного «потерянного» грунта (подробнее в параграфе 3.3), извлеченного из подземного пространства в процессе ведения работ ТПМК, в связи с чем по результатам расчета максимальные осадки поверхности массива этой расчетной модели в два раза превышают осадки модели, выполненной по второму способу.

Кроме того, применение слоя объемных конечных элементов зазора представляет собой более трудоемкий процесс, так как требует подбора модуля деформации $E_{\text{зазора}}$, при котором заданный зазор будет перекрыт, в то

время как контактными элементами необходимо задать только жесткости на растяжение и сжатие, одинаковые для всех расчетных моделей. К недостаткам использования контактных элементов можно отнести трудоемкость создания этих элементов в силу их многочисленности.

Таким образом, расчетная модель с контактными элементами зазора лучше подходит для учета объема дополнительного «потерянного» грунта, извлеченного из подземного пространства в процессе ведения работ ТПМК, чем обусловлено ее дальнейшее использование в расчетах по определению осадки поверхности массива, вызванной возведением оболочки.

3.6 Оценка ширины массива, окружающего оболочку, необходимой для корректного определения осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки

Г. Н. Савиным [215] для плоских задач проведен анализ распределения напряжений в грунте около отверстий и предложено выбирать размеры расчетного фрагмента грунтового массива в пределах от 3-х до 5-ти диаметров, расположенных между краем отверстия и торцом грунтового массива. С. Б. Косицыным и Чан Суан Линем [251] установлено, что это справедливо и для пространственных задач системы «цилиндрическая оболочка – окружающий массив».

В данном параграфе проведены расчеты пространственных моделей оболочки и окружающего массива с учетом зазора, смоделированного контактными элементами, при разной ширине расчетного фрагмента массива. Дана оценка влияния размеров фрагмента на осадку поверхности массива.

Окружающий массив задан трехмерными конечными элементами в форме восьмиузловых параллелепипедов, в каждом узле по три степени свободы. Цилиндрическая оболочка задана двумерными плоскими четырехузловыми элементами, в каждом узле по шесть степеней свободы.

Нагрузки и граничные условия заданы аналогично параграфу 3.3. В десяти расчетных случаях расстояние L от края оболочки до боковых торцов массива (в поперечном направлении) лежит в диапазоне от $L = 1D$ до $L = 10D$ с шагом D , где D – диаметр оболочки. Расстояние от края оболочки до верхней и нижней границ массива принято равным $3D$ для всех расчетных моделей. Габариты оболочки приняты следующими: наружный диаметр – 3.0 м; внутренний диаметр – 2.4 м; толщина – 0.3 м. Материалы приняты неограниченно линейно упругими. Физико-механические свойства массива: модуль деформации $E_{cp} = 10 \cdot \text{МПа}$, коэффициент поперечной деформации $\mu_{cp} = 0.3$, плотность $\rho_{cp} = 2000 \text{ кг/м}^3$. Физико-механические свойства оболочки: модуль упругости $E_{об} = 3.8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.2$, плотность $\rho_{об} = 2500 \text{ кг/м}^3$.

На рисунках 3.15 и 3.16 показаны набор кривых и поля вертикальных перемещений в массиве, полученные в результате всех десяти расчетных случаев при L от $1D$ до $10D$.

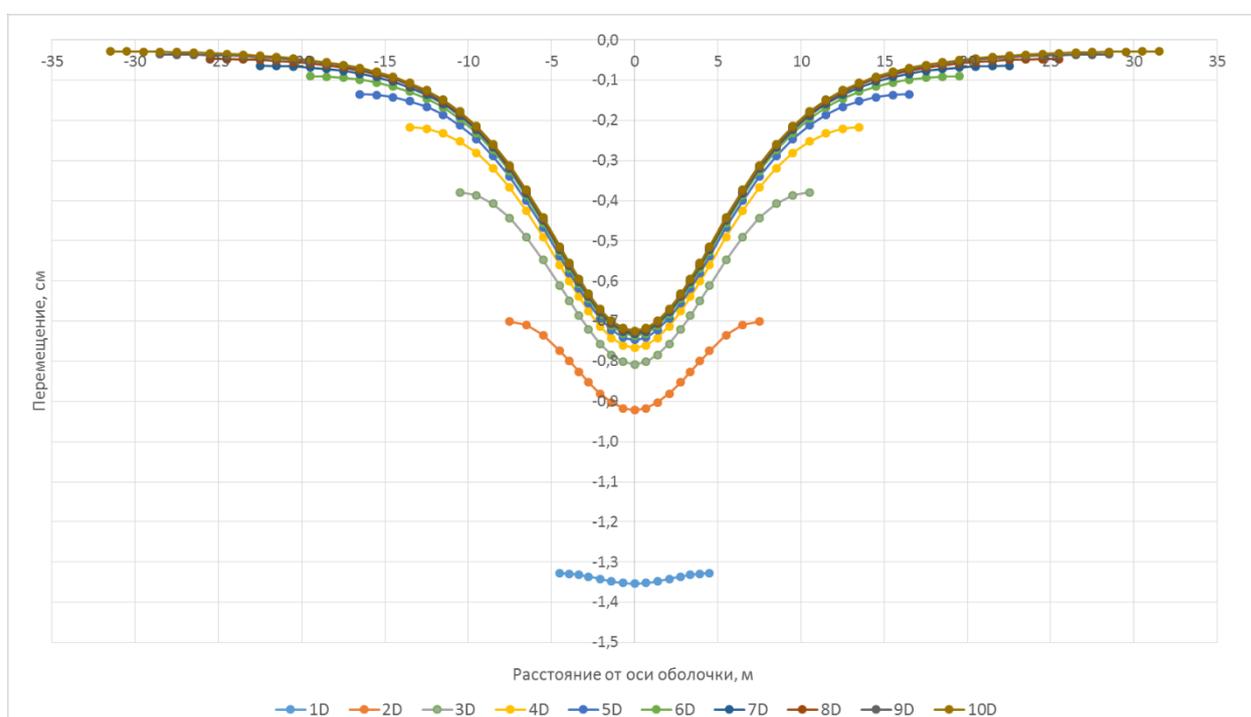


Рисунок 3.15. Набор кривых мульд осадков на поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки при L от $1D$ до $10D$

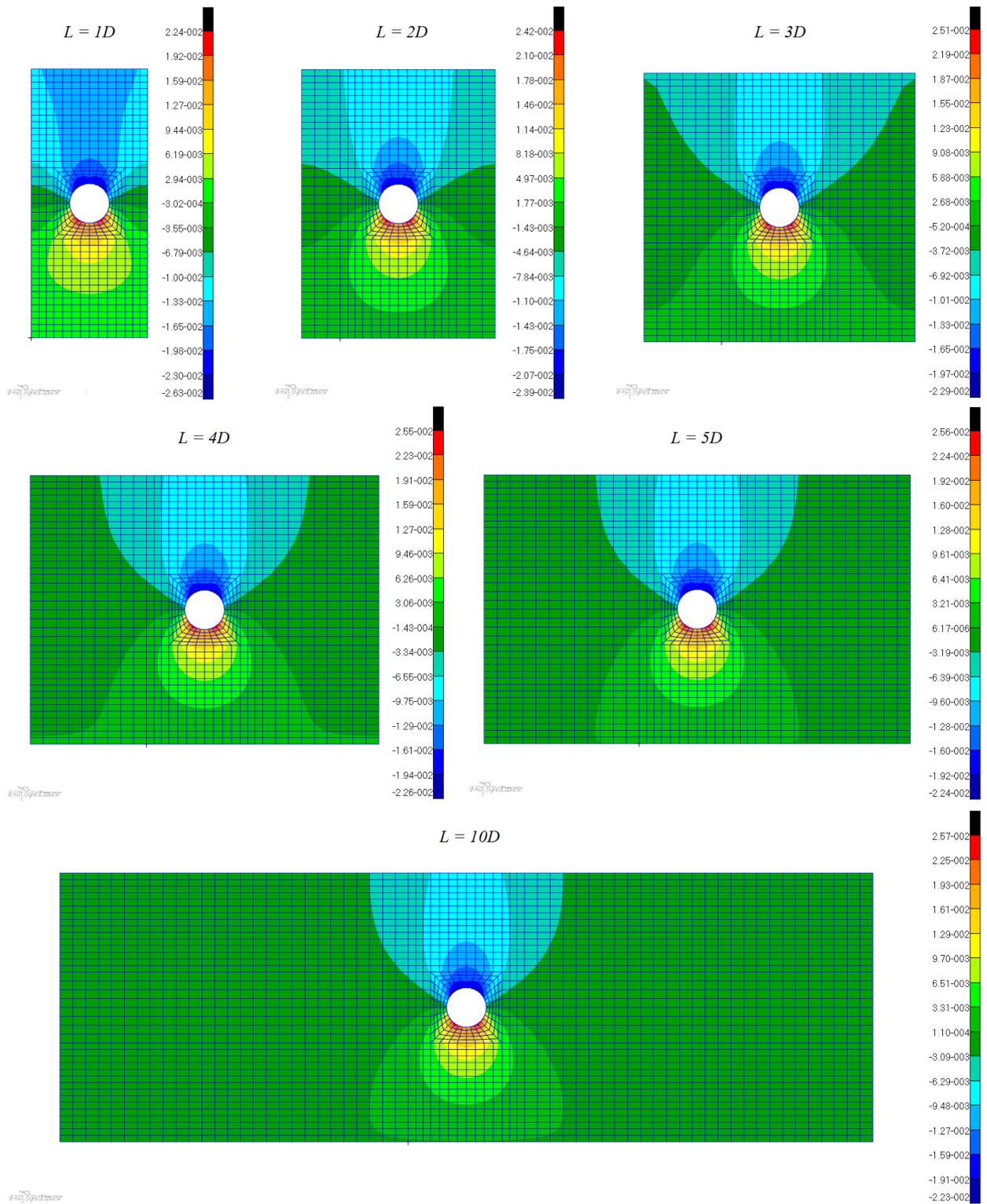


Рисунок 3.16. Поля вертикальных перемещений массива при L от $1D$ до $10D$

Из набора кривых видно, что при значениях L от $1D$ до $5D$ происходит значительное изменение величин осадок и характера мульды, это обусловлено

тем, что из-за малой ширины массива мульда осадок не имеет возможности распространения в стороны от оболочки. Начиная со значений $L \geq 5D$ изменения в характере мульды и величинах осадок незначительны.

В таблице 3.2 приведены максимальные осадки над осью оболочки для всех десяти расчетных случаев, изменение осадки в % над осью оболочки после увеличения L расчетного фрагмента на D и погрешность решения в % по отношению к осадке при максимальной длине L .

Таблица 3.2

Осадка поверхности массива над осью оболочки при L от $1D$ до $10D$

L	Осадка поверхности массива над осью оболочки, см	Изменение осадки после увеличения L на D , %	% ошибки
$1D$	- 1.354	-	87.0
$2D$	- 0.922	31.9	27.3
$3D$	- 0.808	12.4	11.6
$4D$	- 0.766	5.1	5.8
$5D$	- 0.747	2.5	3.2
$6D$	- 0.737	1.3	1.8
$7D$	- 0.732	0.7	1.1
$8D$	- 0.728	0.5	0.6
$9D$	- 0.726	0.3	0.3
$10D$	- 0.724	0.3	0

Таким образом, с учетом полученных результатов расчетов НДС системы можно рекомендовать в практических расчетах по определению осадки поверхности массива принимать размер L массива, удовлетворяющий условию $L \geq 5D$. В общем случае, чем больше размеры массива, тем моделирование задачи лучше, но это приводит к большому количеству узлов

и элементов конечно-элементной сетки, что влечет за собой увеличение ресурсоемкости и временных затрат на решение задачи, поэтому допустимо ограничить L значением $5D$, что совпадает с рекомендациями Г. Н. Савина [215] для плоских задач о распределении напряжений в грунте около отверстий и с рекомендациями С. Б. Косицына и Чан Суан Линя [251] для пространственных задач системы «цилиндрическая оболочка – окружающий массив».

Также необходимо отметить, что создание набора из такого количества расчетных моделей представляет собой трудоемкий и рутинный процесс. Во избежание этого автором диссертации разработана программа для автоматизации процесса создания твердотельной расчетной модели массива и оболочки на командном языке PCL, который служит частью системы MSC PATRAN и разработан специально для создания программ автоматизации анализа [5]. Описание и полный текст программы приведены в Приложении 1.

3.7 Оценка ширины массива, окружающего оболочку, необходимой для корректного определения осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки

В дополнение к параграфу 3.6 проведены расчеты пространственных моделей оболочки и окружающего массива с учетом зазора, смоделированного контактными элементами, при разной длине расчетного фрагмента массива вдоль оси оболочки. Дана оценка влияния размеров фрагмента в продольном направлении к оси оболочки на осадку поверхности массива.

Типы элементов объемного массива и оболочки, нагрузки, граничные условия и материалы аналогичны предыдущему параграфу 3.6.

Во всех расчетных моделях расстояние от края оболочки до боковых торцов массива в поперечном направлении к оси оболочки принято $5D$, где D – диаметр оболочки, в соответствии с рекомендациями предыдущего

параграфа 3.6. Длина оболочки в продольном направлении задана в половину длины массива. В десяти расчетных случаях расстояние L от края оболочки до торцов массива (в продольном направлении) лежит в диапазоне от $L = 1D$ до $L = 10D$ с шагом D . Расстояние от края оболочки до верхней и нижней границ массива принято равным $3D$ для всех расчетных моделей. Габариты оболочки заданы аналогично предыдущему параграфу 3.6: наружный диаметр – 3.0 м; внутренний диаметр – 2.4 м; толщина – 0.3 м.

На рисунке 3.17 и 3.18 показаны набор кривых и поля вертикальных перемещений в массиве, полученных в результате расчета всех десяти моделей при L от $1D$ до $10D$.

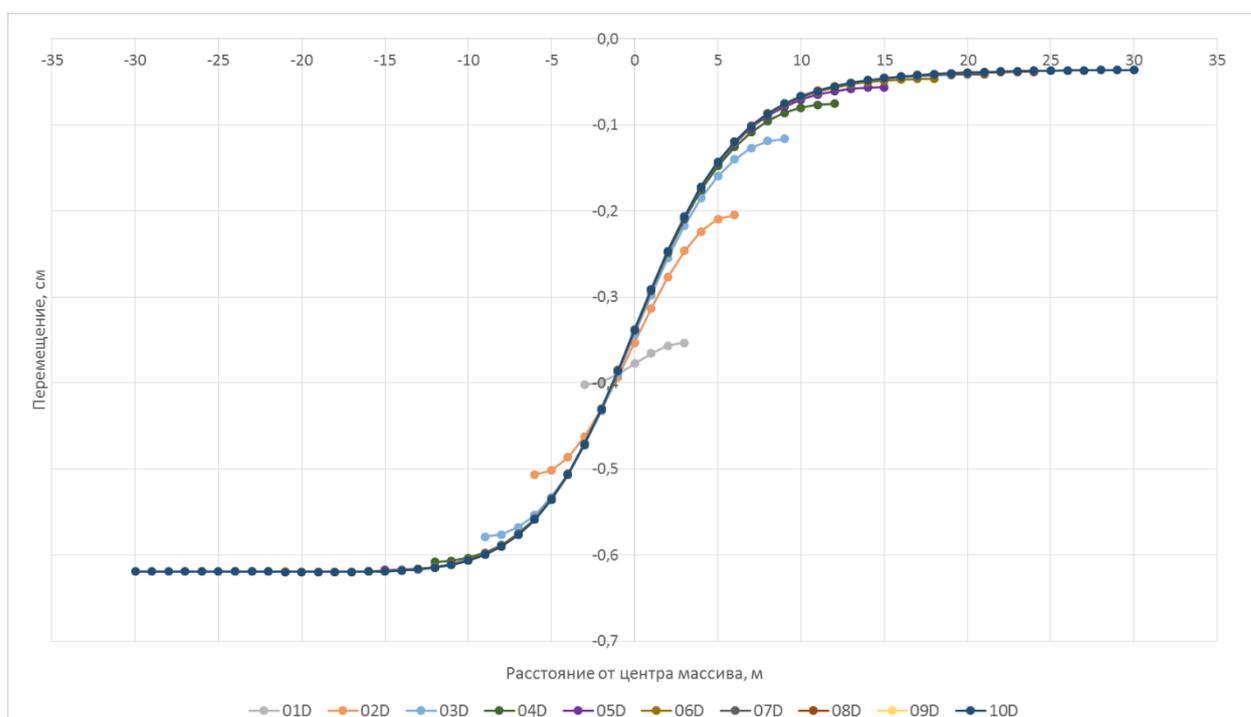


Рисунок 3.17. Набор кривых мульд осадок на поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки при L от $1D$ до $10D$

Из набора кривых видно, что при значениях L от $1D$ до $5D$ происходит значительное изменение величин осадок и характера мульды, это обусловлено тем, что из-за малой длины массива мульда осадок не имеет возможности

распространения вдоль. Начиная со значений $L \geq 5D$ изменения в характере мульды и величинах осадок незначительны.

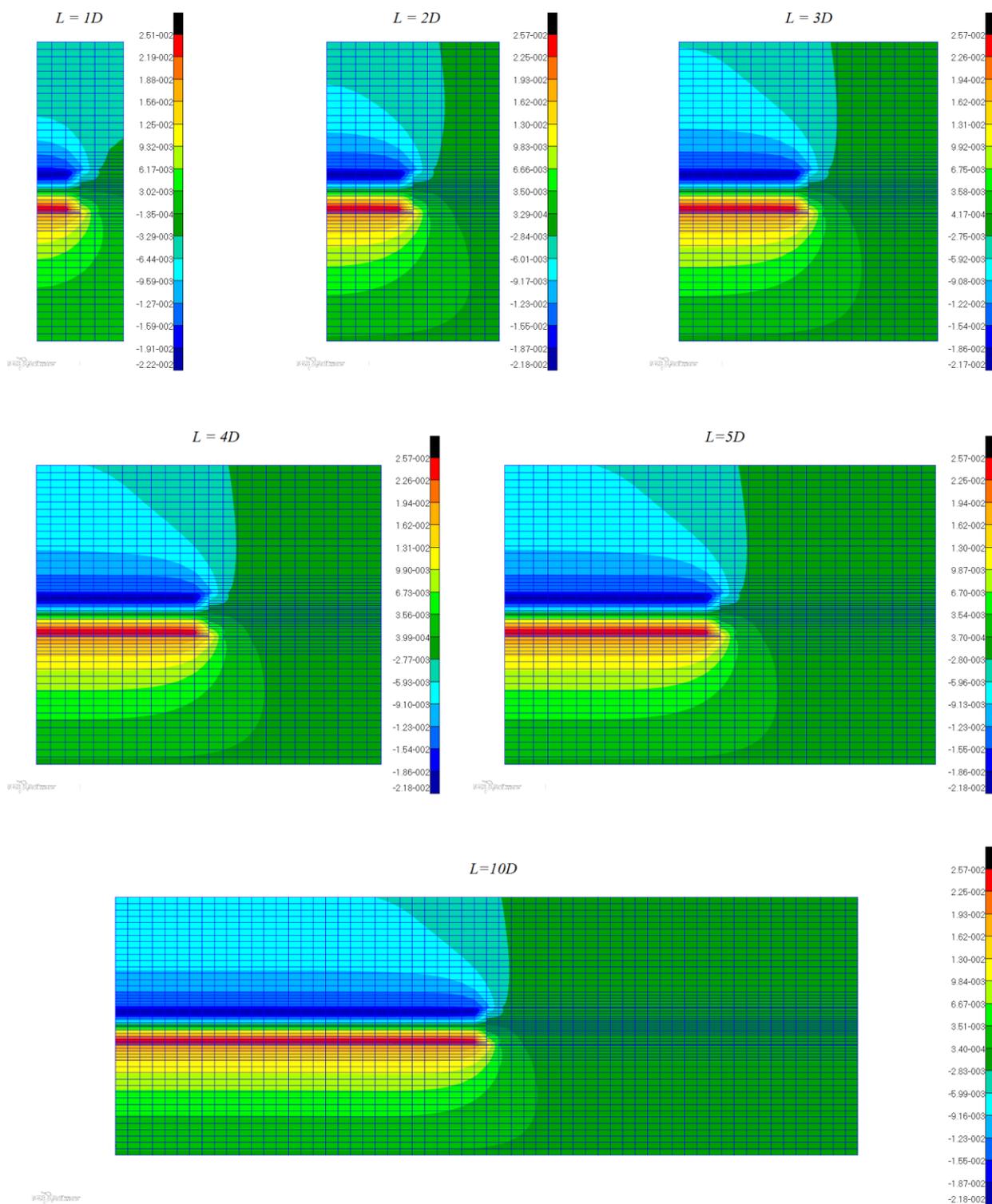


Рисунок 3.18. Поля вертикальных перемещений в массиве при L от $1D$ до $10D$

В таблице 3.3 приведены максимальные осадки над осью оболочки для всех десяти расчетных случаев, изменение осадки в % над осью оболочки после увеличения длины L расчетного фрагмента на D и погрешность решения в % по отношению к осадке при максимальной длине L .

Таблица 3.3

Осадка поверхности массива над осью оболочки при L от $1D$ до $10D$

L	Осадка поверхности массива над осью оболочки, см	Изменение осадки после увеличения L на D , %	% ошибки
$1D$	-0.402	-	35.1
$2D$	-0.506	25.9	18.3
$3D$	-0.578	14.2	6.6
$4D$	-0.607	5.1	1.9
$5D$	-0.617	1.6	0.3
$6D$	-0.618	0.2	0.2
$7D$	-0.619	0.2	0.0
$8D$	-0.619	0.0	0.0
$9D$	-0.619	0.0	0.0
$10D$	-0.619	0.0	0.0

Таким образом, с учетом полученных результатов расчетов НДС системы можно рекомендовать в практических расчетах по определению осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки принимать размер L массива, удовлетворяющий условию $L \geq 5D$. По причинам, описанным в конце параграфа 3.6, допустимо ограничить L значением $5D$, как и при определении осадки в поперечном направлении к оси оболочки.

3.8 Определение мульды оседания поверхности земли при строительстве перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена.

Разработанные методы получили практическое применение при определении мульды оседания участка поверхности земли с эксплуатируемыми железнодорожными путями, расположенного в пределах зоны влияния строительства проектируемых перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена с использованием ТПМК. На рисунке 3.19 показан план расположения проектируемых перегонных тоннелей метрополитена и существующих железнодорожных путей.

Моделирование и расчеты выполнены в пространственной постановке с применением программного комплекса MSC PATRAN – NASTRAN с учетом физической и конструктивной нелинейностей.

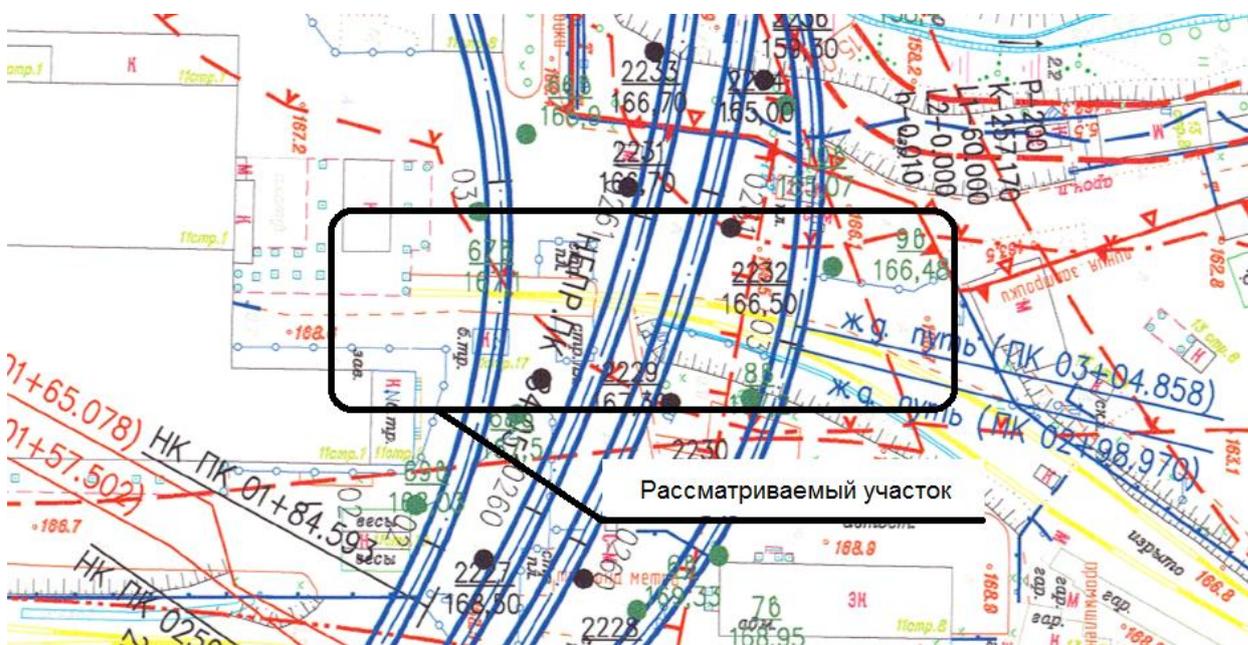


Рисунок 3.19. План расположения проектируемых перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена

Сначала смоделирована система «цилиндрическая оболочка – окружающий массив», аппроксимирующая один из четырех проектируемых перегонных тоннелей метрополитена, для проведения сравнительного анализа полученных результатов с известными аналитическими полуэмпирическими методами.

В первой расчетной модели зазор между оболочкой и массивом отсутствует: контакт задан по принципу «узел в узел» без учета зазора между ними, позволяющего учитывать «потерянный объем» породы, извлеченной из подземного пространства в процессе ведения работ ТПМК. Общий вид расчетной модели показан на рисунке 3.20.

Окружающий массив, аппроксимирующий грунт, задан пространственными конечными элементами в форме восьмиузловых параллелепипедов, в каждом узле по три степени свободы. Цилиндрическая оболочка, моделирующая тоннельную обделку, задана двумерными плоскими четырехузловыми элементами, имеющими в каждом узле по шесть степеней свободы [7, 132, 133].

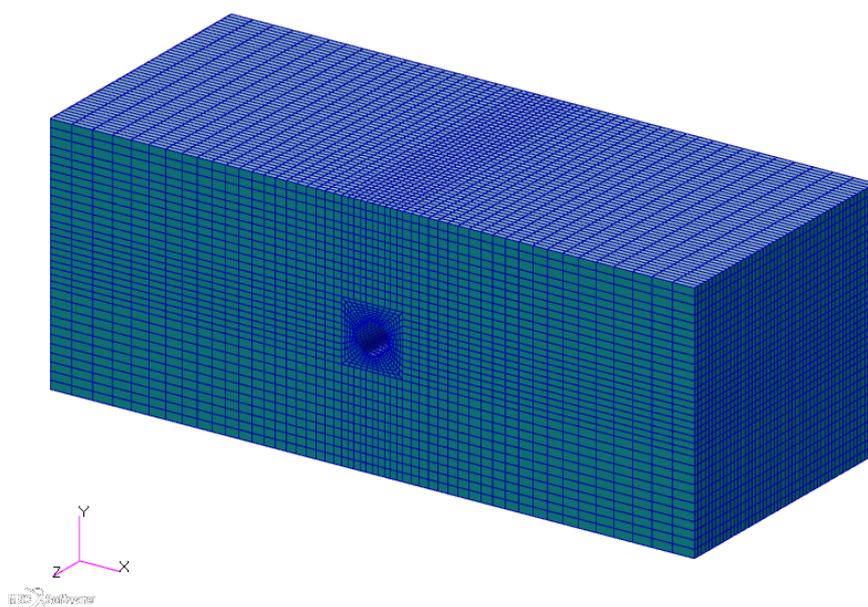


Рисунок 3.20. Общий вид расчетной модели

К расчетной модели приложена нагрузка от собственного веса. Боковые и нижняя границы массива закреплены от перемещений по нормальям к поверхностям. Оболочка по торцам имеет аналогичные опорные закрепления, обеспечивающие геометрическую неизменяемость расчетной модели. Материал оболочки представлен линейно упругой моделью, а материал массива – упруго-пластической моделью Друкера – Прагера. Физико-механические свойства оболочки соответствуют свойствам бетона В45. В таблице 3.4 отображены основные физико-механические свойства массива.

Таблица 3.4

Физико-механические характеристики грунтов

№	Описание грунтов	Плотность ρ , кг/м ³	Козф. попер. деформации μ	Модуль деформации E , МПа	Сцепление C , кПа	Угол внутр. трения φ , °
1	Насыпной грунт	1920	0.30	13	15	13
2	Суглинок	2080	0.37	22	33	21
3	Суглинок	2160	0.35	27	45	23
4	Суглинок	2120	0.35	27	46	24
5	Песок	2000	0.30	30	6	33
6	Песок	2010	0.30	33	4	34

Геометрия оболочки, центральная ось которой расположена на глубине 22.7 м, принята по исходным данным проекта: наружный диаметр – 5.8 м; внутренний диаметр – 5.3 м; толщина – 0.25 м.

По результатам расчета следует отметить, что при моделировании контакта оболочки и окружающего массива по принципу «узел в узел» без учета зазора между ними расчетная модель работает неправдоподобно, поле вертикальных перемещений массива не соответствует действительности: верхняя поверхность массива над осью оболочки испытывает подъем на величину 1.08 см. Объяснение этому приведено в параграфе 3.2.

Масштабированный деформированный вид вертикальных перемещений массива показан на рисунке 3.21.

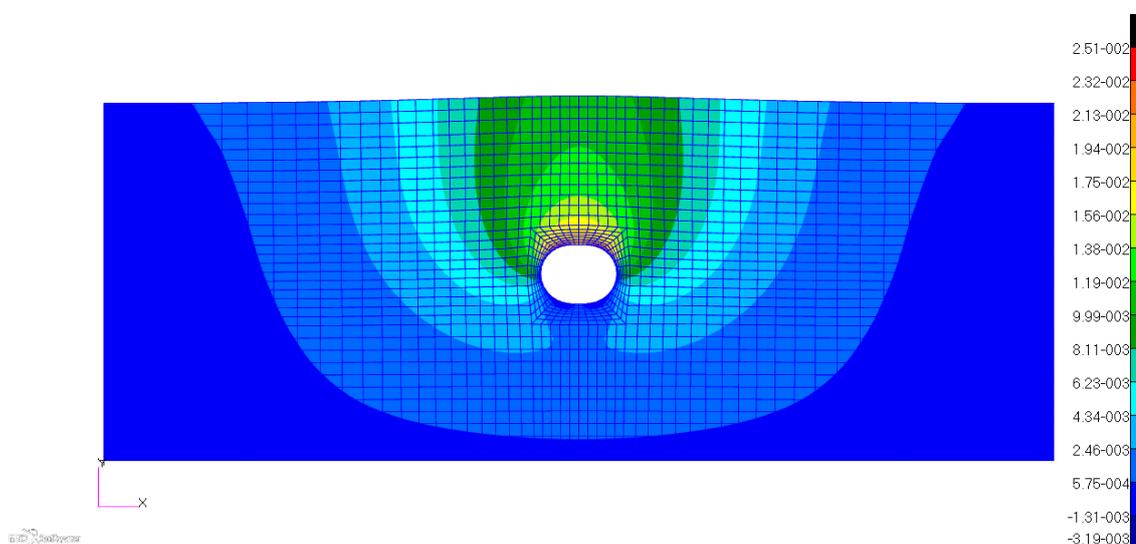


Рисунок 3.21. Масштабированный деформированный вид вертикальных перемещений массива в поперечном направлении к оси оболочки

Для решения вышеизложенной проблемы предложено моделировать зазор между оболочкой и массивом двумя предложенными ранее способами: слоем объемных конечных элементов с низкими деформационными характеристиками и контактными элементами, жесткости которых устремлены к бесконечности при сжатии и к нулю при растяжении. Начальный зазор принят 5.0 см, исходя из геологического строения рассматриваемой области основания (объем зазора на единицу длины оболочки составляет 1.5% от объема оболочки) [228].

Вычисления по предложенным расчетным моделям произведены в физически и конструктивно нелинейных постановках задачи и выполнены в две стадии. На первой стадии определено начальное НДС массива от его собственного веса (бытовое состояние); на второй стадии определено окончательное НДС массива после возведения оболочки.

Для полученных на основе двух расчетных моделей результатов проведен сравнительный анализ, в том числе с полуэмпирическим аналитическим методом.

На рисунке 3.22 показано поле вертикальных перемещений массива по результатам второй стадии расчета модели со слоем объемных конечных элементов зазора. На рисунке 3.23 показано поле вертикальных перемещений массива по результатам второй стадии расчета модели с контактными элементами.

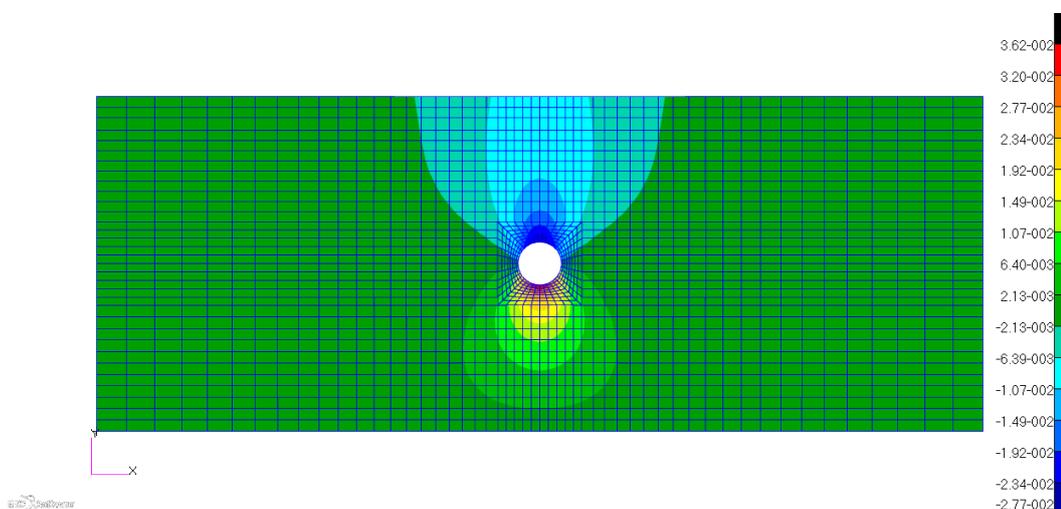


Рисунок 3.22. Поле вертикальных перемещений массива в поперечном направлении к оси оболочки расчетной модели со слоем объемных конечных элементов зазора

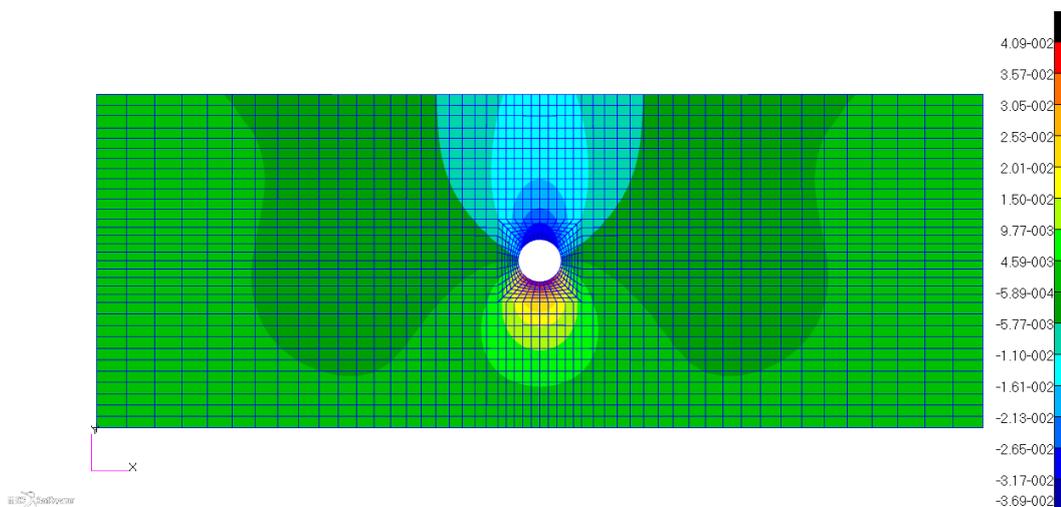


Рисунок 3.23. Поле вертикальных перемещений массива в поперечном направлении к оси оболочки расчетной модели с контактными элементами зазора

При моделировании зазора слоем объемных конечных элементов с низкими деформационными характеристиками максимальное перемещение над осью оболочки составляет – 0.8 см в нижнюю сторону. При моделировании зазора контактными элементами максимальное перемещение над осью оболочки составляет – 1.2 см в нижнюю сторону. Разница полученных перемещений объяснена в параграфе 3.3.

После определения осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки составлена расчетная модель для продольного направления.

В данной расчетной модели оболочка задана на половину длины массива для исследования осадок поверхности вдоль оси оболочки. Зазор создан с помощью контактных элементов. Максимальное перемещение над осью оболочки составляет – 1.2 см в нижнюю сторону. Поле вертикальных перемещений массива вдоль оси оболочки по всей длине расчетной модели показано на рисунке 3.24.

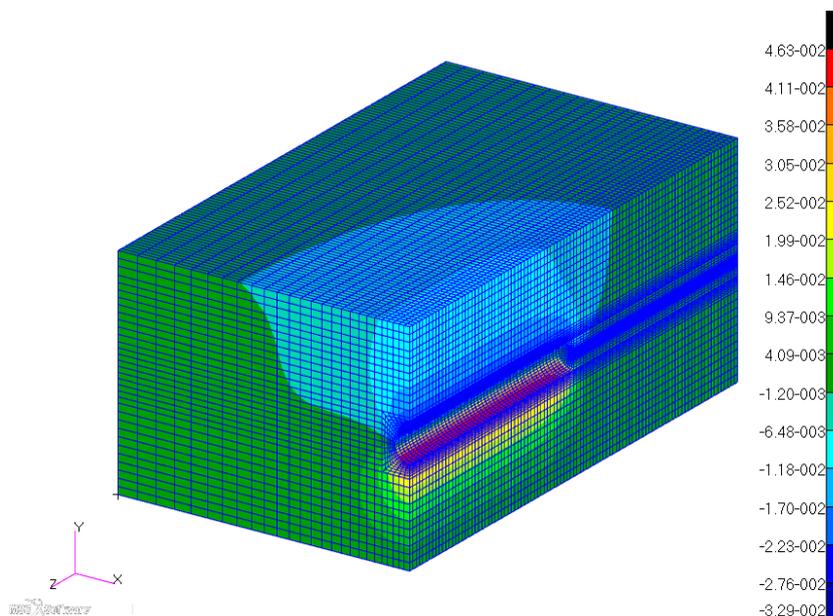


Рисунок 3.24. Поле вертикальных перемещений массива вдоль оси оболочки расчетной модели с контактными элементами зазора

Для сравнительного анализа результатов, полученных двумя численными методами, произведен расчет мульды осадки поверхности массива по обобщенной полуэмпирической методике, изложенной в параграфе 3.5.

Диаметр тоннеля: $D = 5.8 \text{ м} = 5800 \text{ мм}$;

Глубина заложения оси тоннеля $z_0 = 22.7 \text{ м} = 22700 \text{ мм}$;

Параметр $i_x = 11350 \text{ мм}$;

Объем мульды осадки на единицу длины тоннеля:

$$V_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_v dx = \sqrt{2\pi} i_x S_{v,max} = 28443 \cdot S_{v,max}. \quad (3.17)$$

Объем «потерянного» грунта на единицу длины тоннеля принят в размере 1.5% объема тоннеля $V_L = 0.015$ [228].

Объем «потерянного» грунта на единицу длины тоннеля:

$$V_{sp} = V_L \frac{\pi D^2}{4} = 396111 \text{ (мм}^2\text{)}. \quad (3.18)$$

Приравнивание объема мульды осадки к объему «потерянного» грунта

$$28443 \cdot S_{v,max} = 396111 \quad (3.19)$$

позволяет определить максимальный размер осадки поверхности:

$$S_{v,max} = \frac{396111}{28443} = 13.9. \quad (3.20)$$

В результате аналитического расчета максимальная осадка поверхности массива над осью тоннеля составляет:

$$S_{v,max} = 13.9 \text{ (мм)}. \quad (3.21)$$

Кривые мульды осадок, полученные обобщенным полуэмпирическим методом и численными методами, для одиночного тоннеля Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена показаны на рисунке 3.25. Расхождение максимальной осадки поверхности массива над осью оболочки, полученной обобщенным полуэмпирическим методом, с максимальной осадкой расчетной модели со слоем объемных конечных элементов зазора составляет 42%, с максимальной осадкой расчетной модели с контактными

элементами зазора – 12%. Как и в параграфе 3.5 лучшая сходимость получена при использовании контактных элементов зазора.

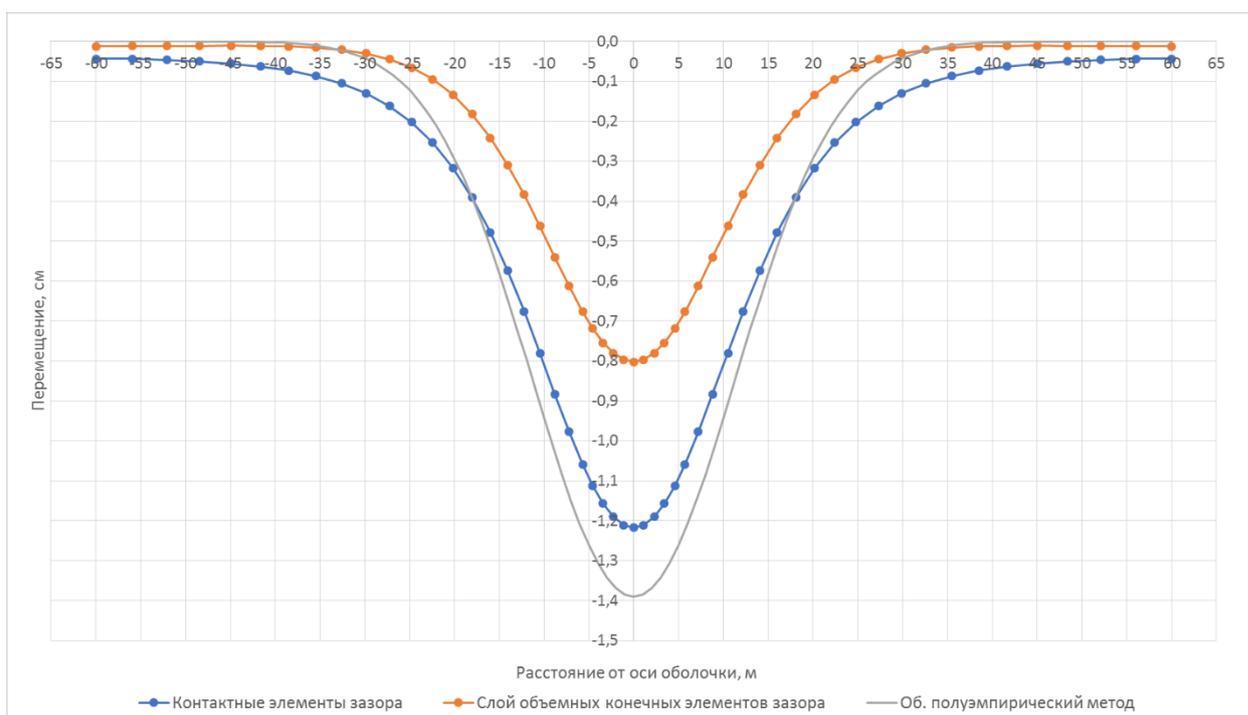


Рисунок 3.25. Кривые осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки, полученные численными и обобщенным полуэмпирическим методами, для одиночного тоннеля Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена

Далее по методике, изложенной в параграфе 3.5, получена кривая мульды осадок поверхности массива вдоль оси оболочки. Максимальное перемещение над осью оболочки составляет – 1,4 см в нижнюю сторону, что на 12% больше максимального перемещения, полученного численным методом с использованием контактных элементов зазора. Сравнительный график кривых для одиночного тоннеля Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена, полученных численным и обобщенным полуэмпирическим методами, показан на рисунке 3.26. Как и в параграфе 3.5 лучшая сходимость получена при использовании контактных элементов зазора.

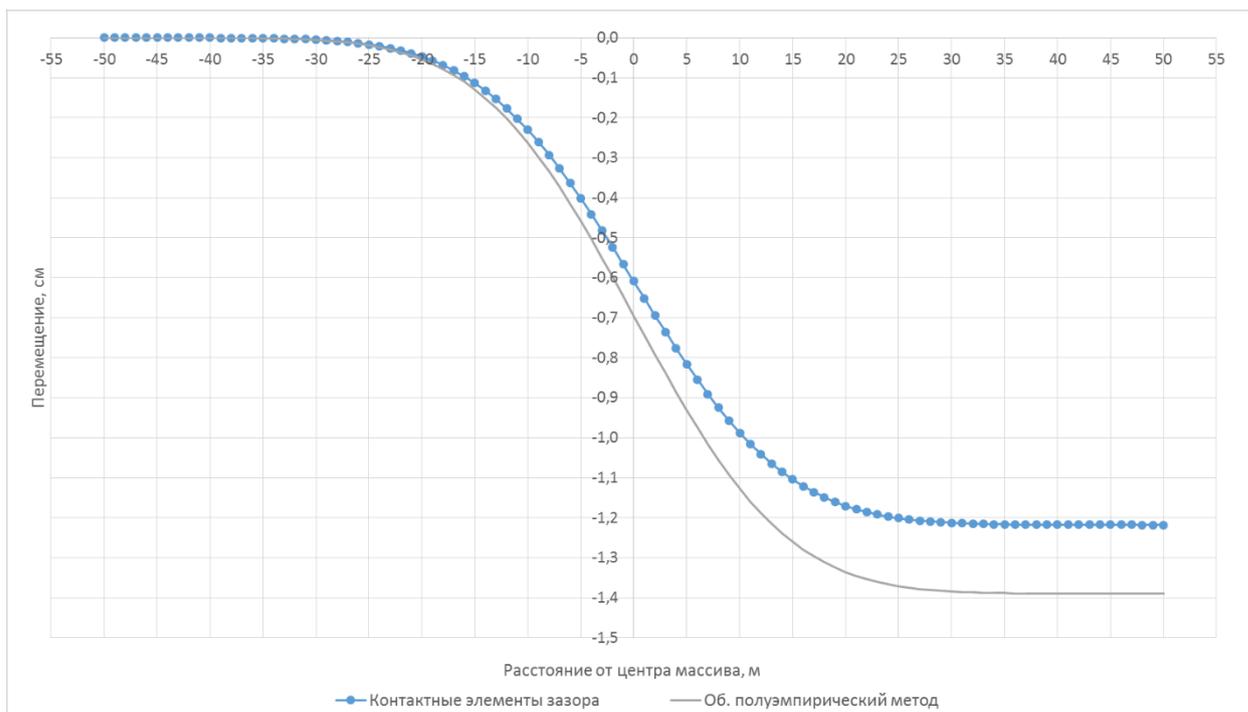


Рисунок 3.26. Кривые осадки поверхности грунтового массива в продольном направлении к оси тоннеля, полученные численным и обобщенным полуэмпирическим методами, для одиночного тоннеля Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена

После проведения сравнительного анализа результатов между численными моделями с одной оболочкой и обобщенным полуэмпирическим методом составлены пространственные расчетные модели для четырех проектируемых перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена, которые позволяют определить осадку поверхности над каждым отдельным тоннелем и учесть их взаимовлияние друг на друга, что весьма затруднительно сделать по обобщенному полуэмпирическому методу.

Составлены две расчетные модели с использованием двух способов учета зазора, описанных ранее.

Каждая расчетная модель включает в себя четыре цилиндрические оболочки на глубине 22,7 м от верхней поверхности массива, аппроксимирующие проектируемые перегонные тоннели, одна из которых лежит под углом к осям остальных оболочек в горизонтальной плоскости и

глубже на 10.3 м [130]. Расположение оболочек в плане показано на рисунке 3.27.

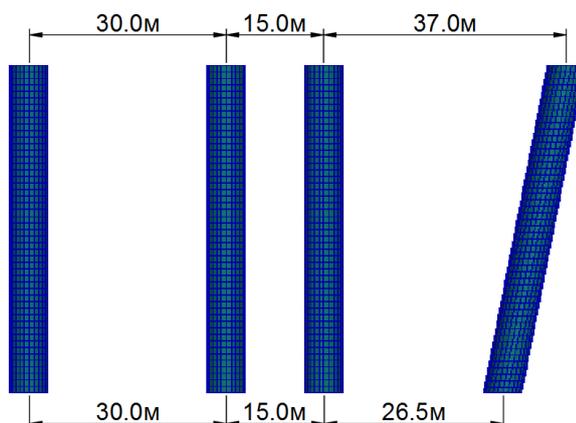


Рисунок 3.27. План расположения оболочек

Дополнительно на поверхности массива заданы стержневые элементы существующего железнодорожного пути в виде рельсовых нитей, характеристики которых соответствуют типу Р65.

Осадки поверхности массива над осями оболочек по результатам расчета при помощи двух составленных моделей показаны в таблице 3.5.

Таблица 3.5

Осадка поверхности массива над осями оболочек

Оболочка, №	1	2	3	4
Моделирование зазора слоем объемных элементов				
Осадка над осью оболочки, см	0.7	0.9	1.0	0.7
Моделирование зазора контактными элементами				
Осадка над осью оболочки, см	1.5	2.2	2.3	1.5

Из таблицы видно, что значения осадок расчетной модели с использованием контактных элементов зазора превышают значения осадок модели с использованием слоя объемных конечных элементов зазора в два

раза. Максимальная осадка над осью оболочки составляет -2.3 см в нижнюю сторону. Поля вертикальных перемещений массива с использованием слоя объемных конечных элементов зазора и контактных элементов зазора показаны на рисунках 3.28 и 3.29 соответственно.

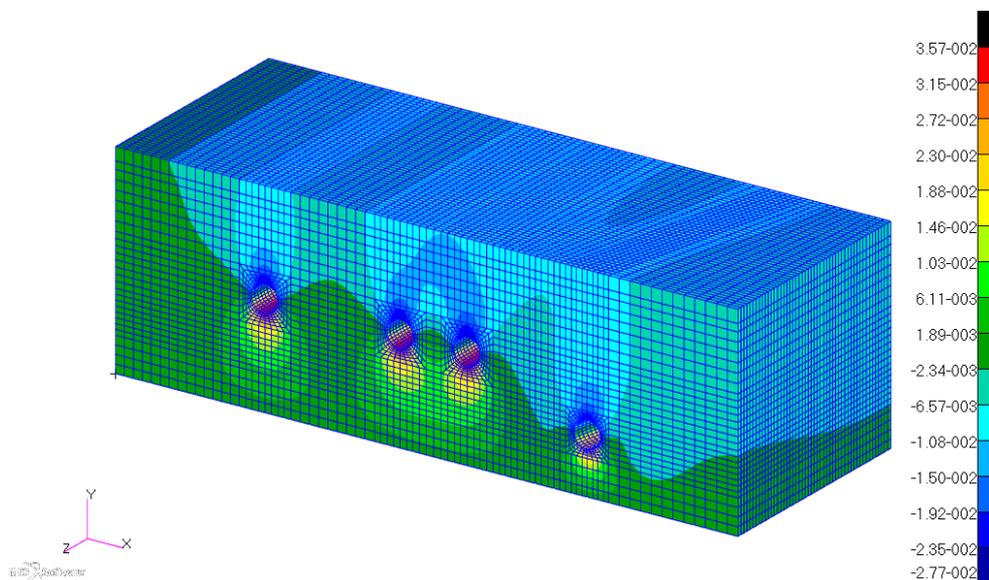


Рисунок 3.28. Поле вертикальных перемещений массива расчетной модели со слоем объемных конечных элементов зазора

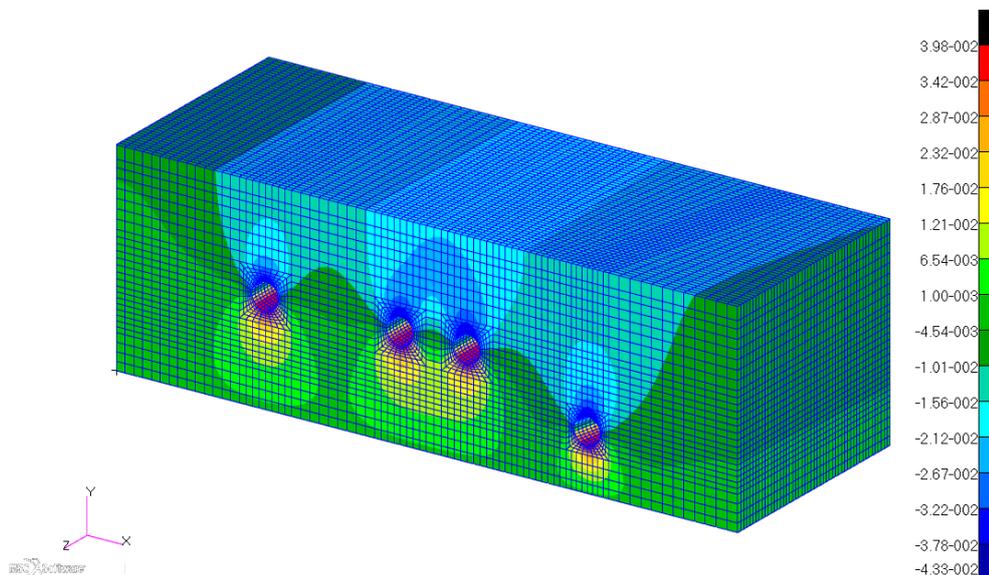


Рисунок 3.29. Поле вертикальных перемещений массива расчетной модели с контактными элементами зазора

Проведен сравнительный анализ полученных результатов с геодезическим мониторингом осадок поверхности в зоне влияния строительства проектируемых перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена [232]. Осадки поверхности измерены в двух точках: существующий железнодорожный путь и опора контактной сети (расположена в 5 м от продольной оси ж/д пути). В таблице 3.6 показаны максимальные перемещения основания по результатам численных расчетов с применением контактных элементов зазора и по данным геодезического мониторинга, а также разница между ними в %.

Таблица 3.6

Максимальные перемещения основания по результатам численных расчетов и по данным геодезического мониторинга

Точка измерения	Существующий ж/д путь	Опора контактной сети
Численный расчет, см	2.30	2.14
Геодезический мониторинг, см	2.75	2.40
Разница осадок, %	16	11

На основе значений, приведенных в таблице 3.6, сделан вывод, что использование контактных элементов зазора при определении мульды осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки приводит к достаточно хорошей сходимости с результатами геодезического мониторинга.

На рисунке 3.30 показаны кривая осадки поверхности по результатам численных расчетов и максимальные перемещения существующего ж/д пути и опоры контактной сети, полученные из геодезического мониторинга. Масштабированный деформированный вид существующего ж/д пути показан на рисунке 3.31.



Рисунок 3.30. Кривая осадки поверхности по результатам численных расчетов и максимальные перемещения существующего ж/д пути и опоры контактной сети, полученные из геодезического мониторинга

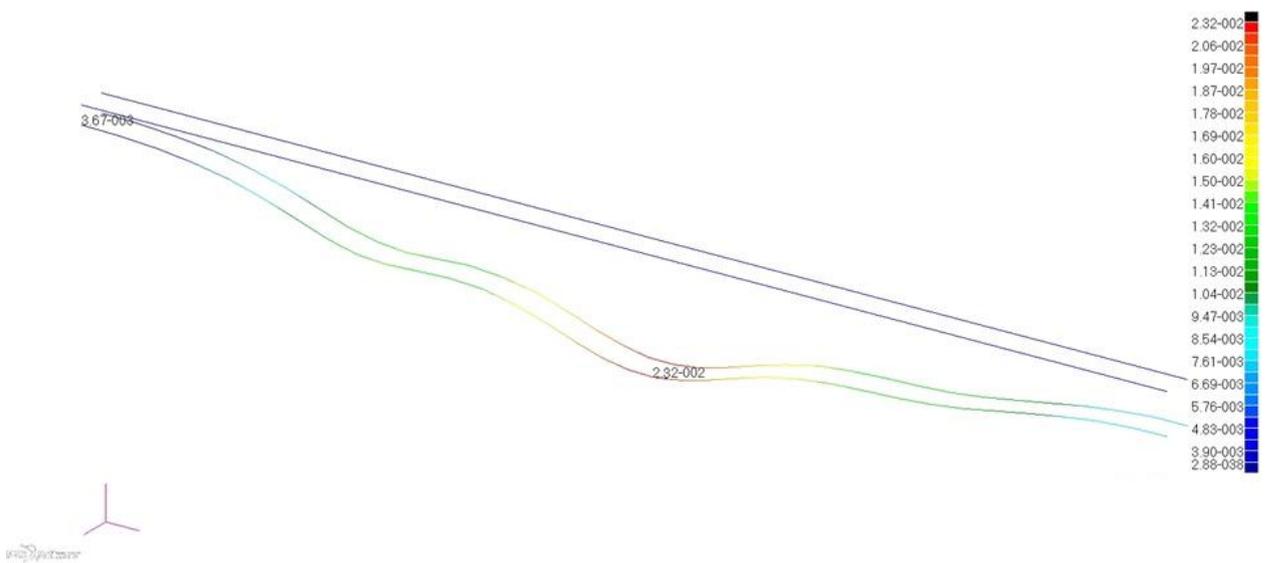


Рисунок 3.31. Масштабированный деформированный вид существующего ж/д пути

3.9 Выводы по главе 3

1. Разработана и реализована методика, основанная на пространственных расчетных моделях с использованием двух способов создания зазора между цилиндрической оболочкой и окружающим массивом, позволяющая учитывать «потерянный объем» грунта от работы ТПМК. Расчеты по разработанной методике дают результаты, характер которых соответствует действительности, чего нельзя сказать об общепринятой расчетной модели, не учитывающей зазор между оболочкой и массивом.

В то же время если сравнивать разработанные расчетные модели между собой, то применение способа с контактными элементами зазора правдоподобнее описывает объем дополнительного «потерянного» грунта и дает результаты ближе к известному обобщенному полуэмпирическому методу (подробнее в параграфе 3.5). Таким образом, расчетную модель с использованием контактных элементов зазора можно рекомендовать для использования в дальнейших расчетах по определению осадки поверхности массива в поперечном и продольном направлениях к оси оболочки.

2. Проведено исследование, позволившее определить размеры фрагмента массива, необходимые для достоверного расчета осадки его верхней поверхности в поперечном и продольном направлениях к оси оболочки по разработанным расчетным моделям, учитывающим зазор. Ширина фрагмента массива должна обеспечивать затухание неоднородности получаемого НДС, вызванной наличием оболочки. С учетом полученных результатов расчетов НДС системы можно рекомендовать в практических расчетах по определению осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки принимать расстояние L от края оболочки до боковых торцов массива (в поперечном направлении), удовлетворяющее условию $L \geq 5D$, где D – диаметр оболочки. При определении осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки можно рекомендовать принимать расстояние L от

края оболочки до торцов массива (в продольном направлении), также удовлетворяющее условию $L \geq 5D$. В общем случае, чем больше размеры массива, тем моделирование задачи лучше, но это приводит к большому количеству узлов и элементов конечно-элементной сетки, что влечет за собой увеличение ресурсоемкости и временных затрат на решение задачи, поэтому допустимо ограничить L значением $5D$ для обоих расчетных случаев.

3. Написана и реализована программа для автоматизации процесса создания твердотельной расчетной модели цилиндрической оболочки, окружающего массива и контактных элементов зазора на командном языке PCL, который служит частью системы MSC PATRAN и разработан специально для создания программ автоматизации анализа, позволяющих избежать трудоемких и рутинных процессов. Использование программы существенно сокращает время создания расчетной модели и помогает избежать ошибок, которые возникают при построении модели вручную. Разработанная программа нашла применение в исследованиях по определению размеров фрагмента массива, необходимых для достоверного расчета осадки его верхней поверхности в поперечном и продольном направлениях к оси оболочки по предложенным расчетным моделям, учитывающим зазор.

4. Разработанная методика нашла практическое применение при определении мутьды оседания участка поверхности земли с эксплуатируемыми железнодорожными путями, расположенного в пределах зоны влияния строительства проектируемых перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена.

Для полученных по предложенной методике результатов расчета одиночной оболочки и окружающего массива проведен сравнительный анализ. На основе анализа сделан вывод, что использование контактных элементов зазора при определении осадки поверхности массива в поперечном

направлении к оси оболочки приводит к хорошей сходимости с известным обобщенным полуэмпирическим методом.

После проведения сравнительного анализа результатов между численными моделями с одной оболочкой и обобщенным полуэмпирическим методом составлены пространственные расчетные модели для четырех проектируемых перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена, которые позволили определить осадку поверхности над каждым отдельным тоннелем и учесть их взаимовлияние друг на друга, что весьма затруднительно сделать по обобщенному полуэмпирическому методу. Выполнен сравнительный анализ для полученных из численного расчета с использованием контактных элементов зазора максимальных перемещений поверхности и результатов геодезического мониторинга, в котором между ними выявлена хорошая сходимость.

ГЛАВА 4 ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УЧЕТА СТАДИЙНОСТИ В РАСЧЕТАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СОВМЕСТНО С ОКРУЖАЮЩИМ ОСНОВАНИЕМ

4.1 Введение

Промышленное и гражданское строительство занимается возведением объектов различного назначения, к которым относятся мосты, тоннели, транспортные магистрали, промышленные предприятия, жилые дома и т. д. Перечисленные сооружения могут быть как капитальными, так и временными. Вне зависимости от назначения и вида сооружения часто технология строительства объекта предполагает его возведение в несколько этапов. Количество этапов зависит от сложности возводимого объекта и условий, в которых осуществляется строительство. С точки зрения строительной механики необходимо обратить внимание на то, что после каждого этапа строительства объекта в части возведенной конструкции возникает определенное НДС, которое является начальным для следующего этапа строительства и оказывает существенное влияние на окончательное НДС сооружения. Данный фактор имеет важное значение в прочностных расчетах сооружений.

Работам по возведению сооружения обычно предшествуют инженерные прочностные расчеты. Расчеты могут проводиться как аналитическими, так и численными методами. В данных расчетах, как правило, сооружение принято свободным от начальных деформаций и напряжений. Однако, как отмечено выше, в возводимых объектах возникает определенное НДС после каждого этапа строительства. Накопление напряжений и деформаций в конструкциях происходит на протяжении всего процесса строительства. Примерами таких объектов служат высотные здания, сооружаемые поэтажно; башни и мачты, с посекционным возведением; мосты, в пролетных строениях которых

возникают значительные монтажные усилия; транспортные тоннели, сформированные путем этапного добавления колец обделки. Помимо этого, при реставрации и капитальном ремонте действующих объектов наличие существующего НДС также оказывает влияние на предстоящие работы. Таким образом, значимость учета НДС от каждого этапа строительства перечисленных объектов при прочностных расчетах очевидна [6, 295].

В процессе строительства тоннеля поэтапно происходят изменения в расчетной схеме объекта «оболочка – массив грунта». Далее изложена методика расчетов систем с поэтапно меняющейся расчетной моделью, и составлены несколько расчетных случаев для определения влияния учета этапов сооружения на НДС цилиндрической оболочки транспортного тоннеля, взаимодействующего с окружающим основанием. Наследственная пространственно-временная задача решена численным методом с учетом стадийности от начала до окончания работ. Полученные результаты от нескольких расчетных случаев проанализированы, даны соответствующие рекомендации.

4.2 Методика определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки и окружающего основания с учетом изменения расчетной модели во времени

Для решения наследственной пространственно-временной задачи определения НДС цилиндрической оболочки и окружающего основания разработана методика, основанная на возможностях программного комплекса ANSYS, верифицированного Российской академией архитектуры и строительных наук (РААСН) [29]. Преимуществом данного программного комплекса служит наличие опции «рождение и смерть конечных элементов» («Birth and Death Finite Elements»). Данная опция позволяет провести численный анализ с учетом стадий сооружения различных строительных

объектов, в частности цилиндрической оболочки. Для работы опции необходимо указать конечные элементы, подлежащие активации или деактивации, и стадии расчета, которые соответствуют тому или иному состоянию указанных конечных элементов. Активация и деактивация конечных элементов происходит на основе одного из критериев: положение в пространстве, НДС и др. Путем умножения жесткости элемента на близкую к нулю величину происходит деактивация конечного элемента, или «смерть». Также с деактивированного конечного элемента сняты все нагрузки и отключены механизмы передачи нагрузок на соседние элементы. Возвращение исходных значений жесткости, нагрузок и массы происходит при активации элемента.

При использовании опции «рождение и смерть конечных элементов» необходимо принимать во внимание некоторые особенности. Во-первых, чтобы избежать сильного искажения деактивированных элементов в процессе деформирования расчетной модели, необходимо наложить на них связи по перемещениям или другим степеням свободы, которые будут сняты при активации данных элементов. Во-вторых, при активации или деактивации конечных элементов происходит скачкообразное изменение расчетной модели, что может вызвать проблемы с численной сходимостью решения. Избежать проблемы возможно путем сокращения числа элементов, подлежащих изменению статуса существования на одной стадии решения. В-третьих, при отображении результатов расчета деактивированные элементы должны быть скрыты, так как они имеют нефизичные значения величин перемещений и внутренних усилий.

Предложенная пространственная твердотельная расчетная модель состоит из цилиндрической оболочки и окружающего основания. Диаметр цилиндрической оболочки составляет $D = 3$ м, толщина оболочки $t = 0.3$ м, расстояние между боковыми краями оболочки и боковыми торцами основания составляет $W = 5D$, расстояние от верхнего и нижнего краев оболочки до

верхнего и нижнего торцов основания составляет $H = 5D$. Цилиндрическая оболочка составлена из 32 отдельных колец шириной 1 м, основание в месте расположения колец оболочки также разделено на 32 части в виде цельных цилиндров шириной 1 м. Перед включением в работу кольца оболочки необходимо отключить часть основания, которая будет замещена активированным кольцом.

Известно, что в процессе работы ТПМК изымает объем породы больше, чем требует конструкция сооружаемого тоннеля. В расчетной модели задан зазор между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием для учета этой особенности. Также стоит отметить, что оболочка построена с учетом эксцентриситета между геометрической формой поперечного сечения, необходимой для создания конструктивного положения элементов, и средней линией оболочки, вдоль которой приложена нагрузка и вычислены результаты.

Тело основания разбито на объемные двадцатиузловые конечные элементы, цилиндрическая оболочка разделена на плоские четырехузловые элементы. Размеры плоских элементов составляют $0.15 \text{ м} \times 0.15 \text{ м}$. Локальные системы координат оболочечных элементов сонаправлены для корректного отображения результатов. Общий вид расчетной модели представлен на рисунке 4.1. Вид цилиндрической оболочки показан на рисунке 4.2.

На основание наложены связи по перемещениям в перпендикулярных направлениях к боковым и нижнему торцам массива. Нагрузка состоит из собственного веса цилиндрической оболочки и окружающего основания.

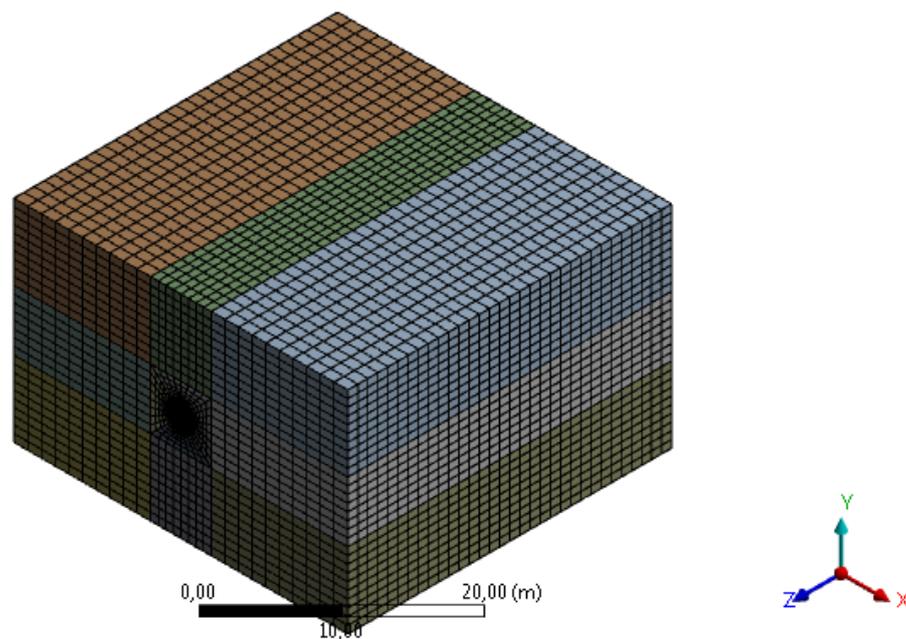


Рисунок 4.1. Общий вид расчетной модели

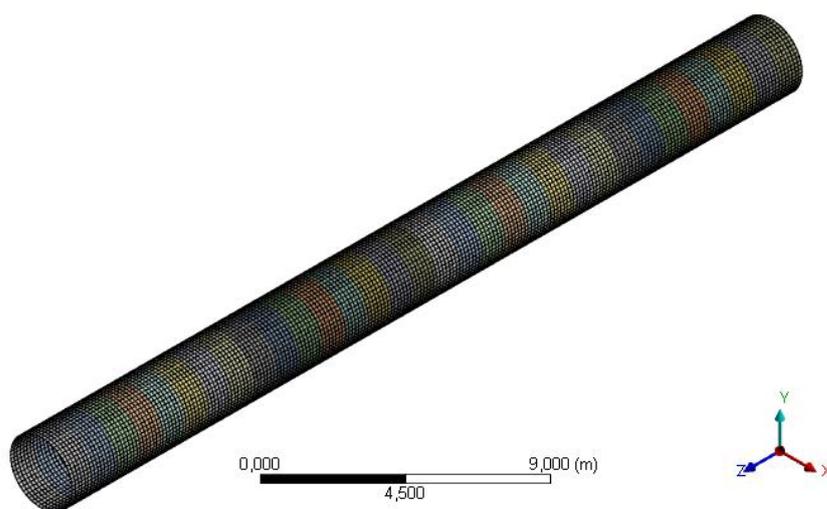


Рисунок 4.2. Вид цилиндрической оболочки

Упруго-пластическая модель Мора – Кулона (O. Mohr, С. А. Coulomb) использована для материала основания со следующими параметрами: модуль деформации $E_{gp} = 10 \cdot \text{МПа}$, коэффициент поперечной деформации $\mu_{gp} = 0.3$, плотность $\rho_{gp} = 2000 \text{ кг/м}^3$, сцепление $C = 10 \cdot \text{кПа}$, угол внутреннего трения $\varphi = 25^\circ$. Идеально упругая модель принята для материала цилиндрической

оболочки со следующими параметрами: модуль упругости $E_{об} = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.2$, плотность $\rho_{об} = 2300$ кг/м³. Модель материала основания предполагает расчет в физически нелинейной постановке.

Контактное взаимодействие между цилиндрической оболочкой и основанием реализовано с помощью контактных элементов CONTA174 и TARGE170. Эти элементы нанесены на соответствующие поверхности тел двух типов (рисунок 4.3). Подробнее контактное взаимодействие с применением данных элементов описано в Приложении 2.



Рисунок 4.3. Два типа контактных поверхностей

Расчет проведен в геометрически, физически и конструктивно нелинейной постановках [244].

Конструктивную нелинейность необходимо учитывать из-за особенностей работы предложенной расчетной модели. В процессе деформирования в модели происходят скачкообразные изменения: использование опции «рождение и смерть элементов», изменение состояния закреплений элементов и т. д. В общем случае конструктивную нелинейность необходимо учитывать, когда в расчетной модели присутствуют следующие процессы: монтаж и демонтаж элементов сооружения; включение или отключение связей; изменение состояния нагружения. Конструктивная нелинейность предполагает как скачкообразное, так и непрерывное изменение расчетной модели (рисунок 4.4).

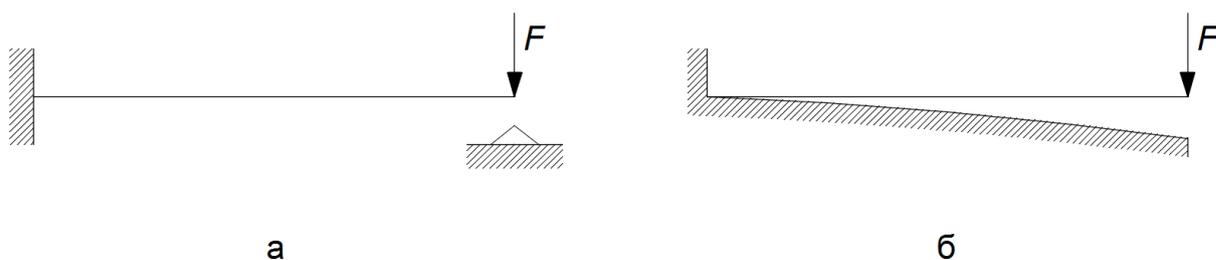


Рисунок 4.4. Изменение расчетной модели: а) скачкообразное изменение; б) непрерывное изменение

Для проведения исследования по определению влияния учета этапного возведения конструкции на НДС цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, реализовано шесть расчетных случаев с разным количеством стадий. Расчетные случаи составлены с условием, что в каждом следующем расчетном случае количество колец цилиндрической оболочки, включаемых в работу за одну стадию, увеличено вдвое относительно предыдущего случая. Количество стадий расчета, напротив, вдвое уменьшено относительно предыдущего расчетного случая. Таким образом, в первом расчетном случае определение НДС рассматриваемой модели составлено из 33 стадий: на первой (нулевой) стадии вычислено бытовое состояние основания без цилиндрической оболочки, на последующих 32 стадиях вычислено НДС модели после включения элементов каждого отдельного кольца оболочки и отключения элементов соответствующей части основания в виде цельного цилиндра в месте установки кольца. Второй расчетный случай составлен из 17 стадий, так как за одну стадию в работу включено не одно, а два кольца оболочки. В итоге составлены расчетные случаи с 32, 16, 8, 4, 2 и 1 стадиями расчета (в каждом случае дополнительно одна стадия (нулевая) отведена на определение бытового состояния основания).

По полученным результатам расчета выполнен сравнительный анализ эквивалентных максимальных напряжений по Мизесу во внешних волокнах

для 1, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 и 32 колец цилиндрической оболочки. Эквивалентные максимальные напряжения по Мизесу определены по формуле [323]:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (4.1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения.

Кривые изменения напряжений в оболочке в зависимости от количества стадий в расчетном случае показаны на рисунках 4.5 – 4.13. Дополнительно на каждый график нанесена величина напряжений при расчете без учета стадийности.

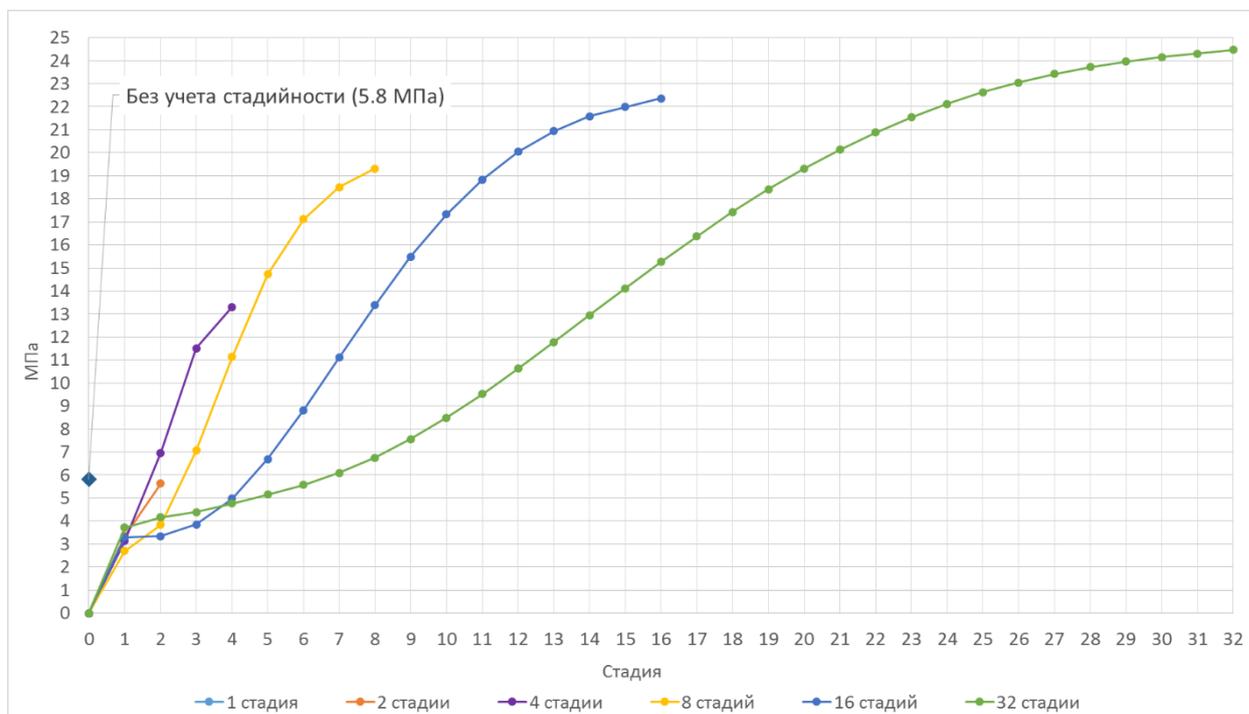


Рисунок 4.5. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 01 кольца оболочки

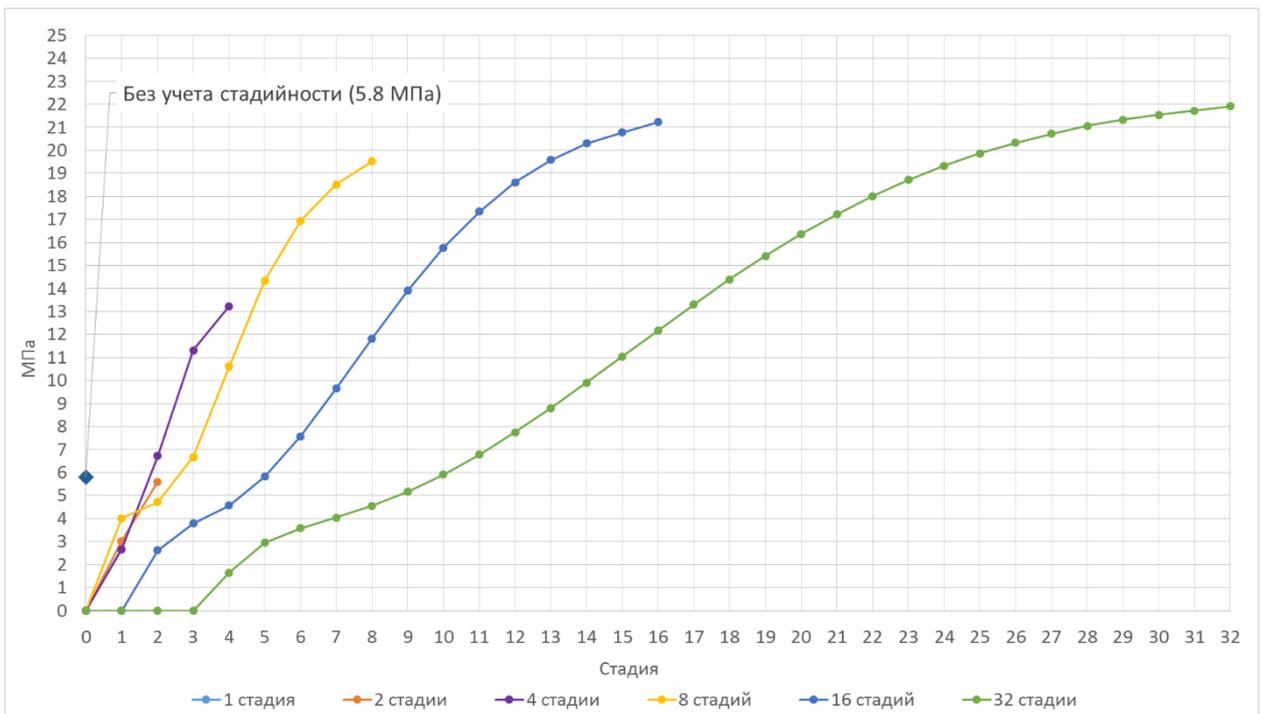


Рисунок 4.6. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 04 кольца оболочки

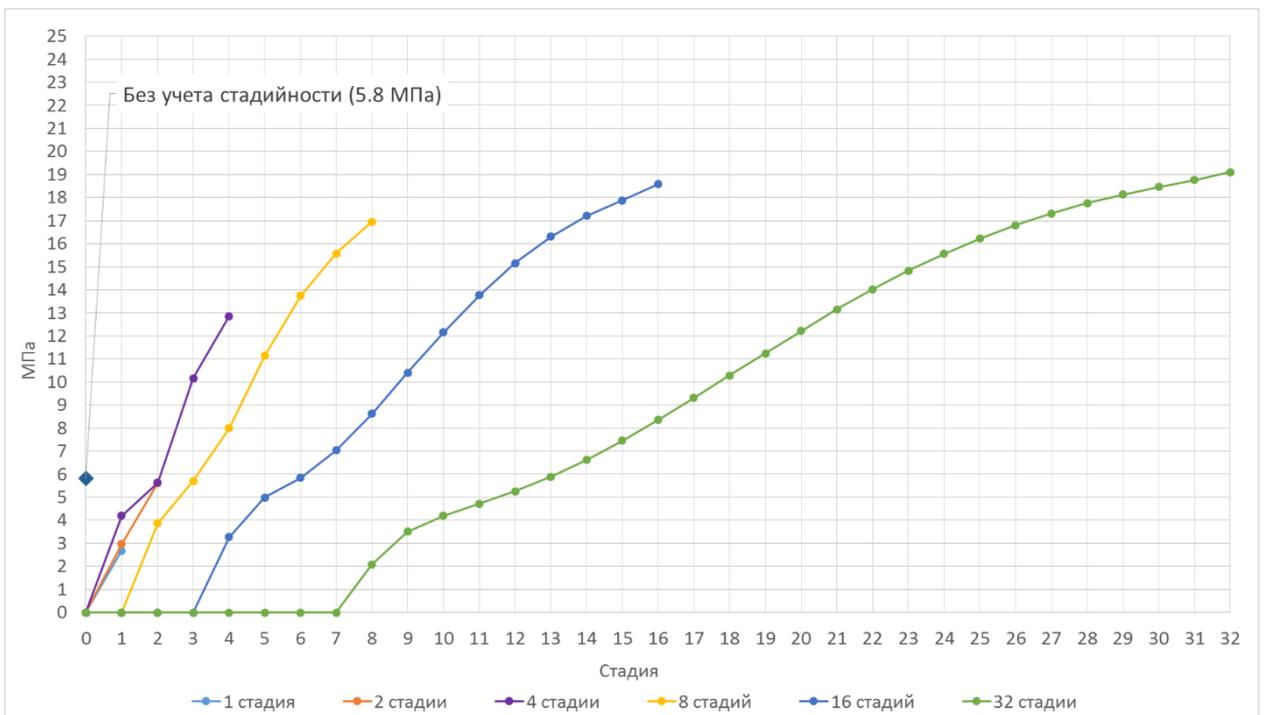


Рисунок 4.7. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 08 кольца оболочки

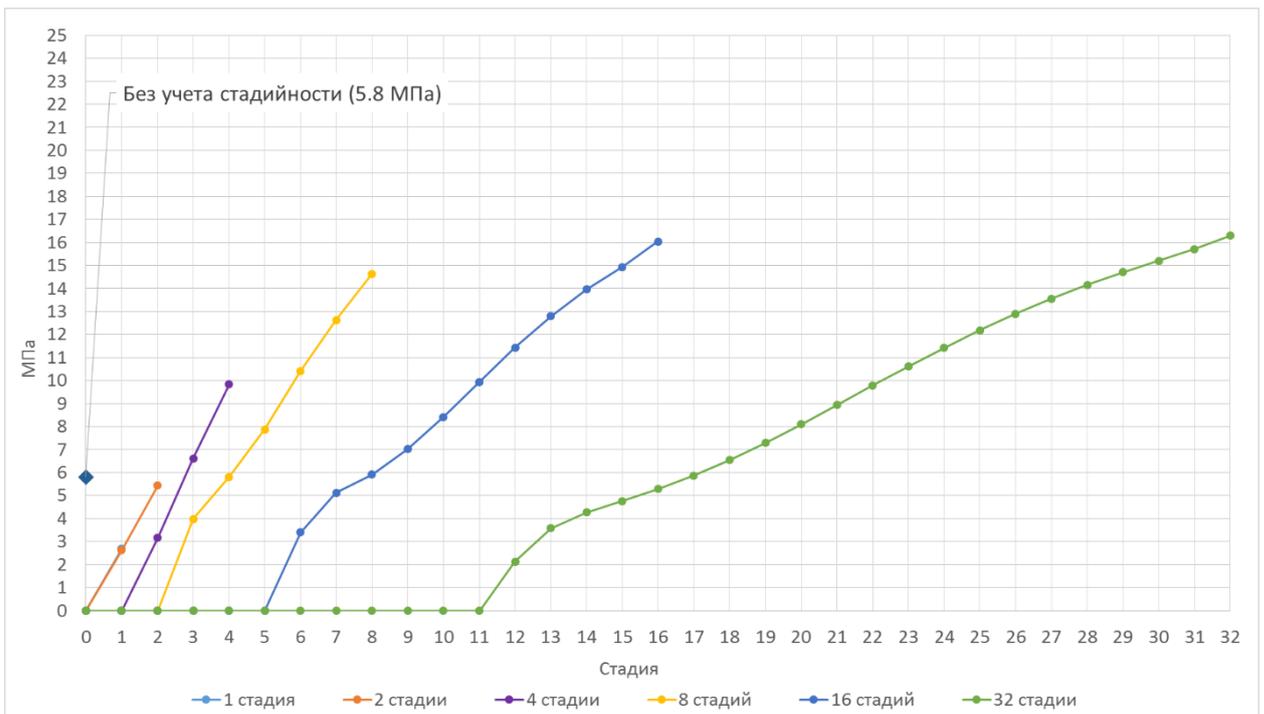


Рисунок 4.8. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 12 кольца оболочки

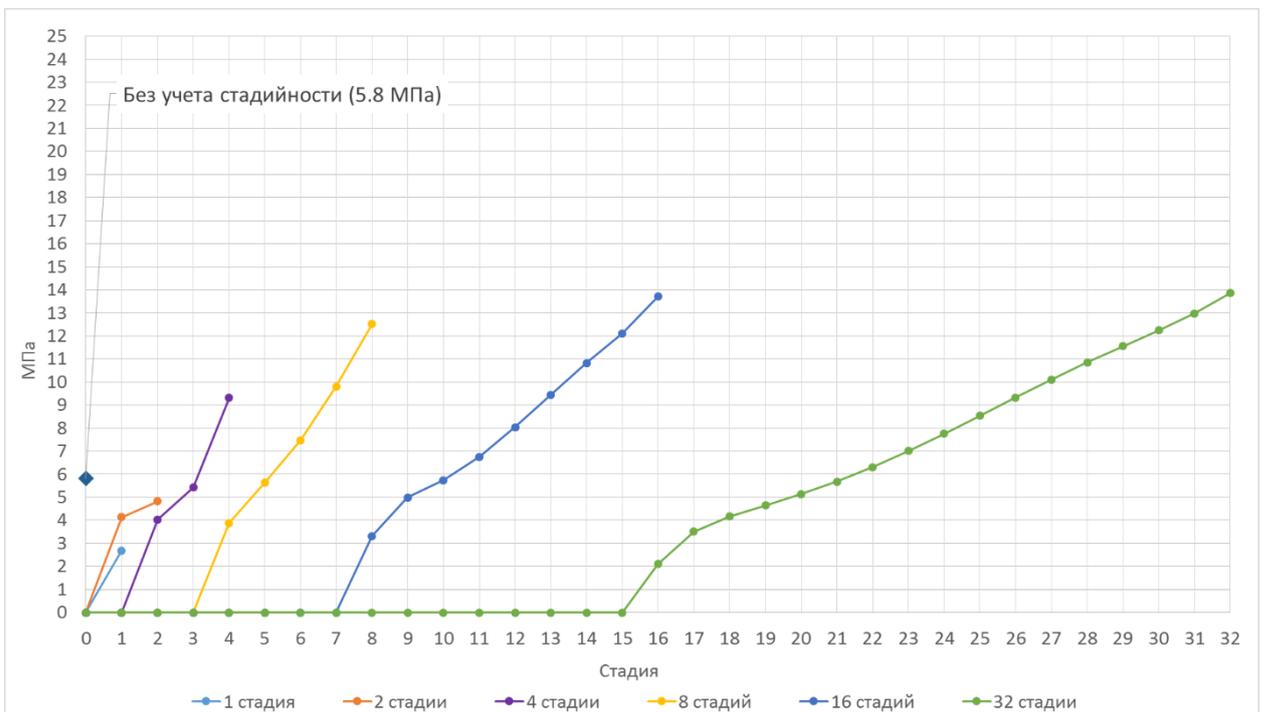


Рисунок 4.9. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 16 кольца оболочки

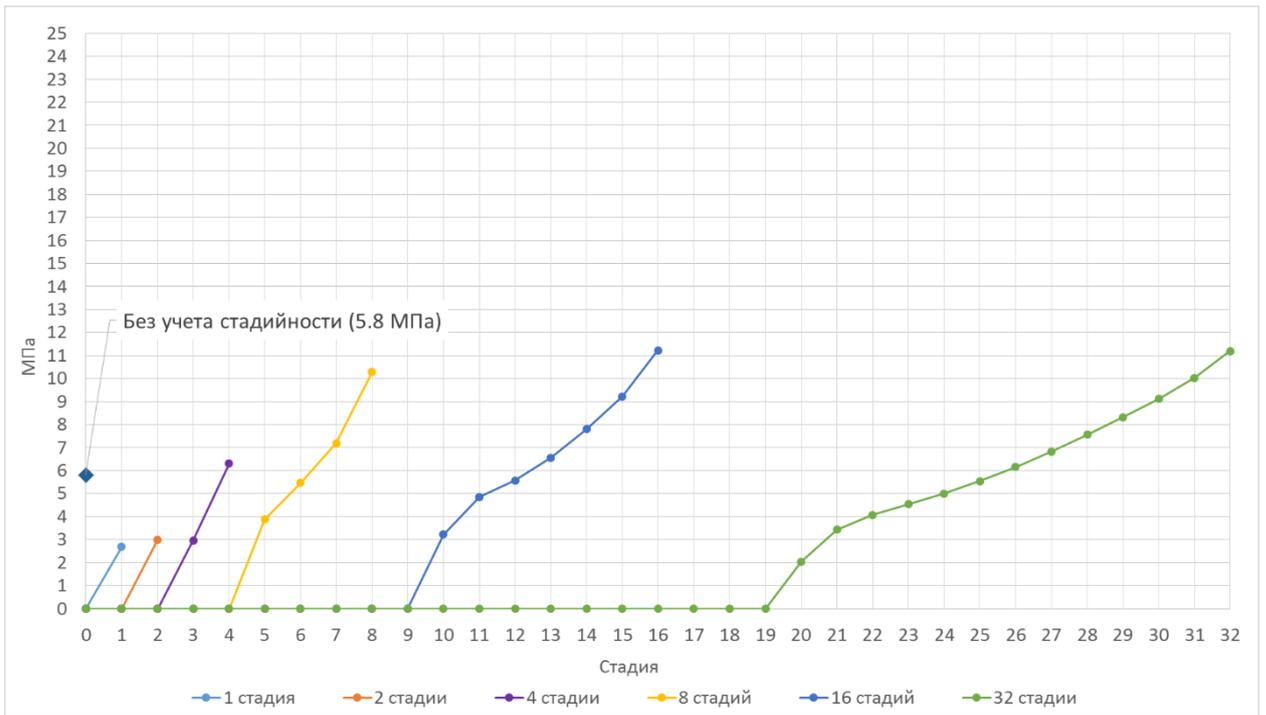


Рисунок 4.10. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 20 кольца оболочки

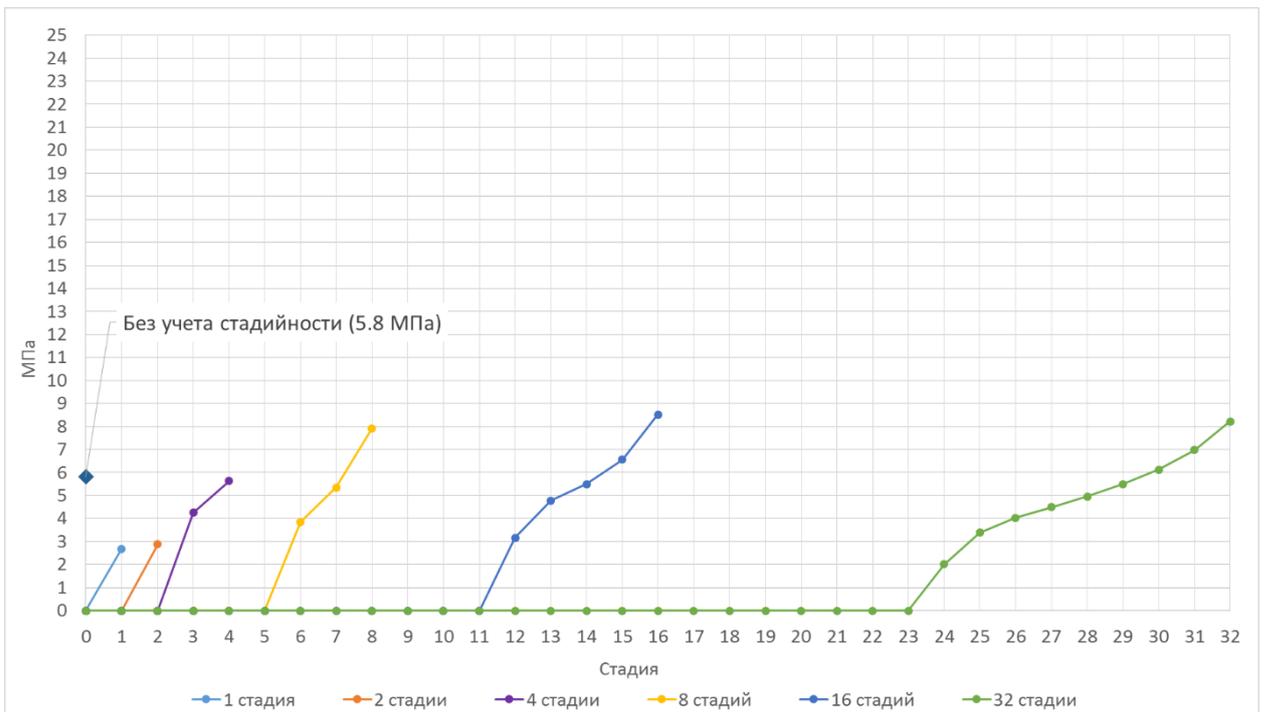


Рисунок 4.11. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 24 кольца оболочки

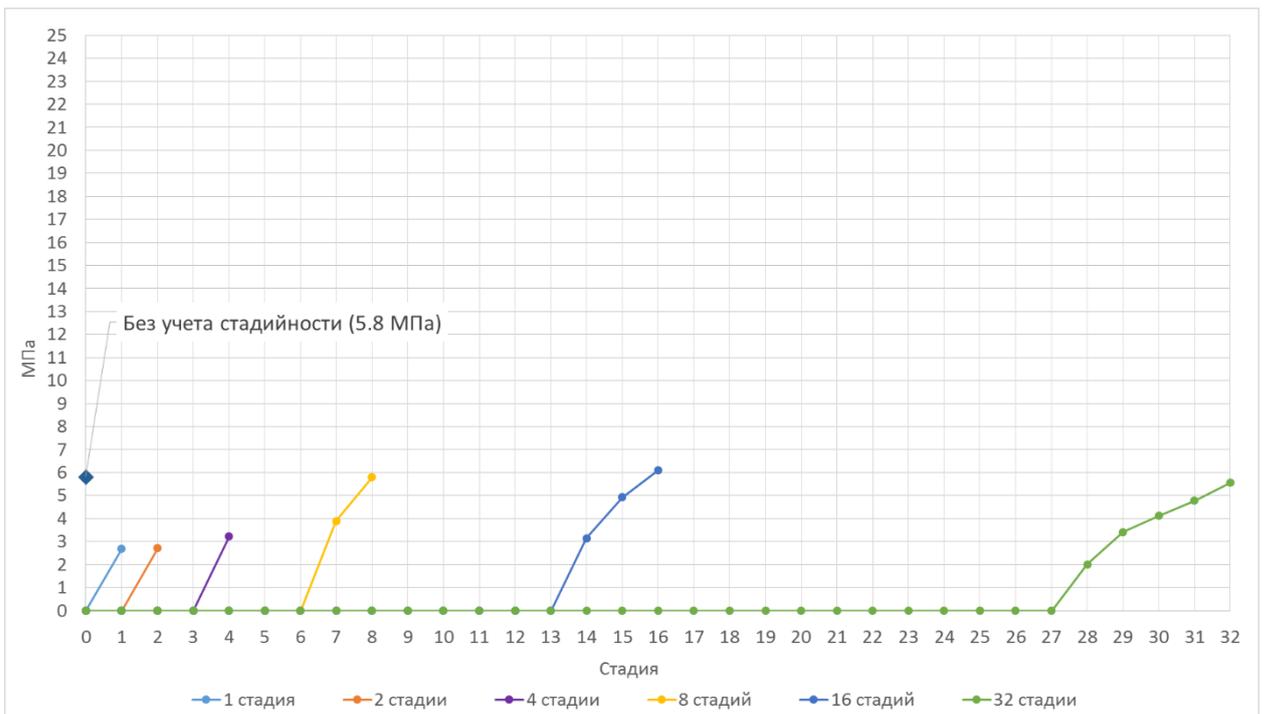


Рисунок 4.12. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 28 кольца оболочки

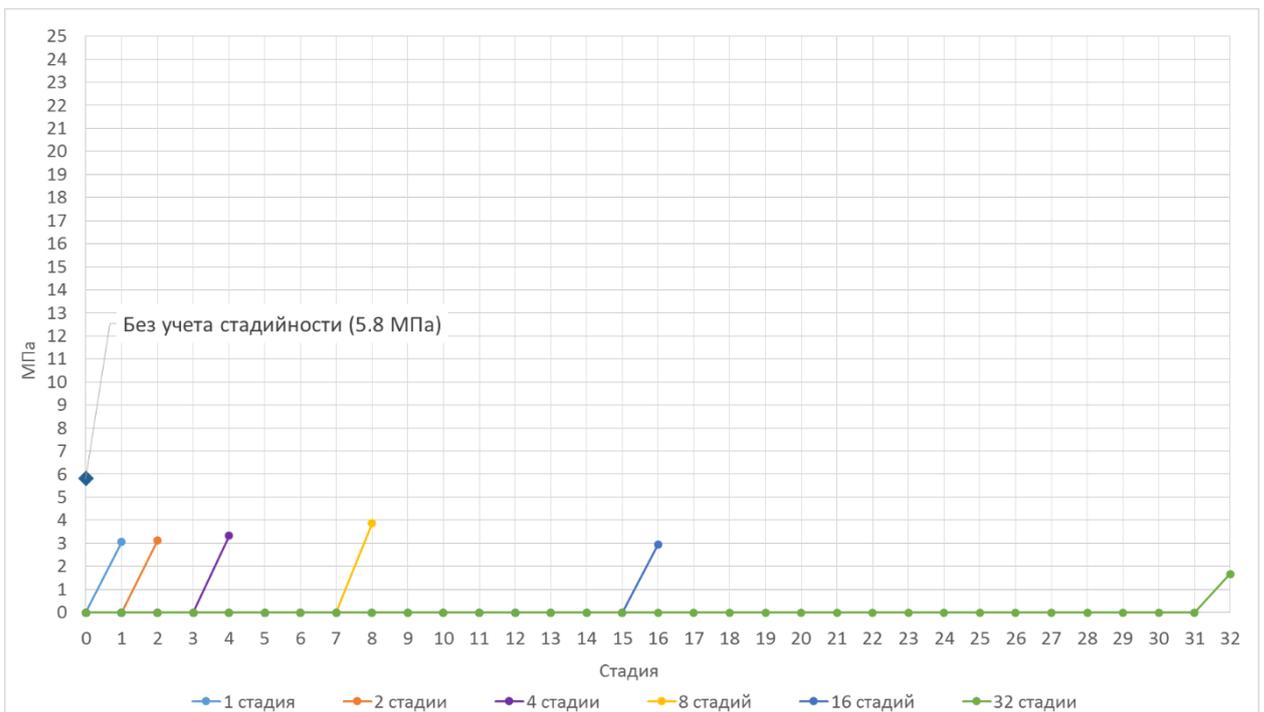


Рисунок 4.13. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 32 кольца оболочки

По полученным графикам напряжений можно сделать вывод, что величины максимальных напряжений в шести расчетных случаях с разным количеством стадий существенно разные. Обратим внимание, что после расчетного случая из 8 стадий следующие расчетные случаи с большим количеством стадий не приводят к существенным изменениям величин максимальных напряжений в диапазоне с 4 по 28 кольцо цилиндрической оболочки. Также отметим, что напряжения в первом кольце оболочки существенно вырастают, если сравнивать расчетный случай из 8 стадий с расчетными случаями из 16 и 32 стадиями. В последнем кольце оболочки, напротив, напряжения существенно падают, если сравнивать расчетный случай из 8 стадий с расчетными случаями из 16 и 32 стадиями. Объяснением этому служит то, что при включении в работу на первой стадии расчета первого кольца оболочки (или первых двух, или первых четырех колец в зависимости от расчетного случая) в каждой следующей стадии расчета на него в результате перераспределения усилий в расчетной модели поступает дополнительная нагрузка от окружающего основания и каждого включаемого в работу кольца оболочки. По поводу последнего кольца оболочки можно сказать, что большая часть нагрузок от окружающего основания уже перераспределена на работающие кольца оболочки, а добавляемых колец более нет, поэтому на последнее кольцо действует меньшая часть нагрузок.

Кроме этого, в каждом кольце цилиндрической оболочки, исключая последнее, в расчетных случаях с количеством стадий меньше 8 максимальные напряжения существенно занижены. Причиной этому служит то, что в данных случаях все кольца оболочки или наибольшая часть колец вступают в работу в одной стадии, за счет чего нагрузка с окружающего основания переходит на оболочку равномерно. Также в кольцах оболочки при малом количестве стадий действуют незначительные или совсем отсутствуют остаточные напряжения с предыдущих стадий расчета [125].

Разница в процентах максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в кольцах оболочки во всех расчетных случаях относительно напряжений, полученных в расчетном случае с 32 стадиями показана в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Разница в процентах максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу

Кольцо оболочки, №	Без учета стадийности	1 стадия	2 стадии	4 стадии	8 стадий	16 стадий
1	321.2 %	682.2 %	334.6 %	84.0 %	26.7 %	9.4 %
4	277.3 %	713.9 %	291.6 %	65.7 %	12.3 %	3.3 %
8	228.8 %	610.7 %	240.5 %	48.6 %	12.7 %	2.8 %
12	180.5 %	506.5 %	199.8 %	65.7 %	11.4 %	1.6 %
16	138.6 %	415.8 %	187.6 %	48.8 %	10.8 %	1.1 %
20	92.6 %	316.3 %	273.5 %	77.4 %	8.8 %	– 0.3 %
24	41.3 %	205.6 %	184.9 %	45.7 %	3.7 %	– 3.6 %
28	– 4.5 %	106.7 %	104.0 %	72.3 %	– 4.4 %	– 9.0 %
32	– 71.4 %	– 45.7 %	– 46.9 %	– 50.0 %	– 57.0 %	– 43.6 %

В расчетном случае без учета стадийности, который чаще всего используется в практических расчетах, максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в оболочке составили 5.8 МПа. Из таблицы 4.1 видно,

что это существенно отличается от напряжений, полученных в расчетном случае с 32 стадиями. Это говорит о необходимости учета стадийности при решении подобных задач.

На рисунке 4.14 показано распределение максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки при расчетном случае из 32 стадий. Максимальные значения напряжений наблюдаются в центре нижнего свода оболочки, а минимальные – по бокам.

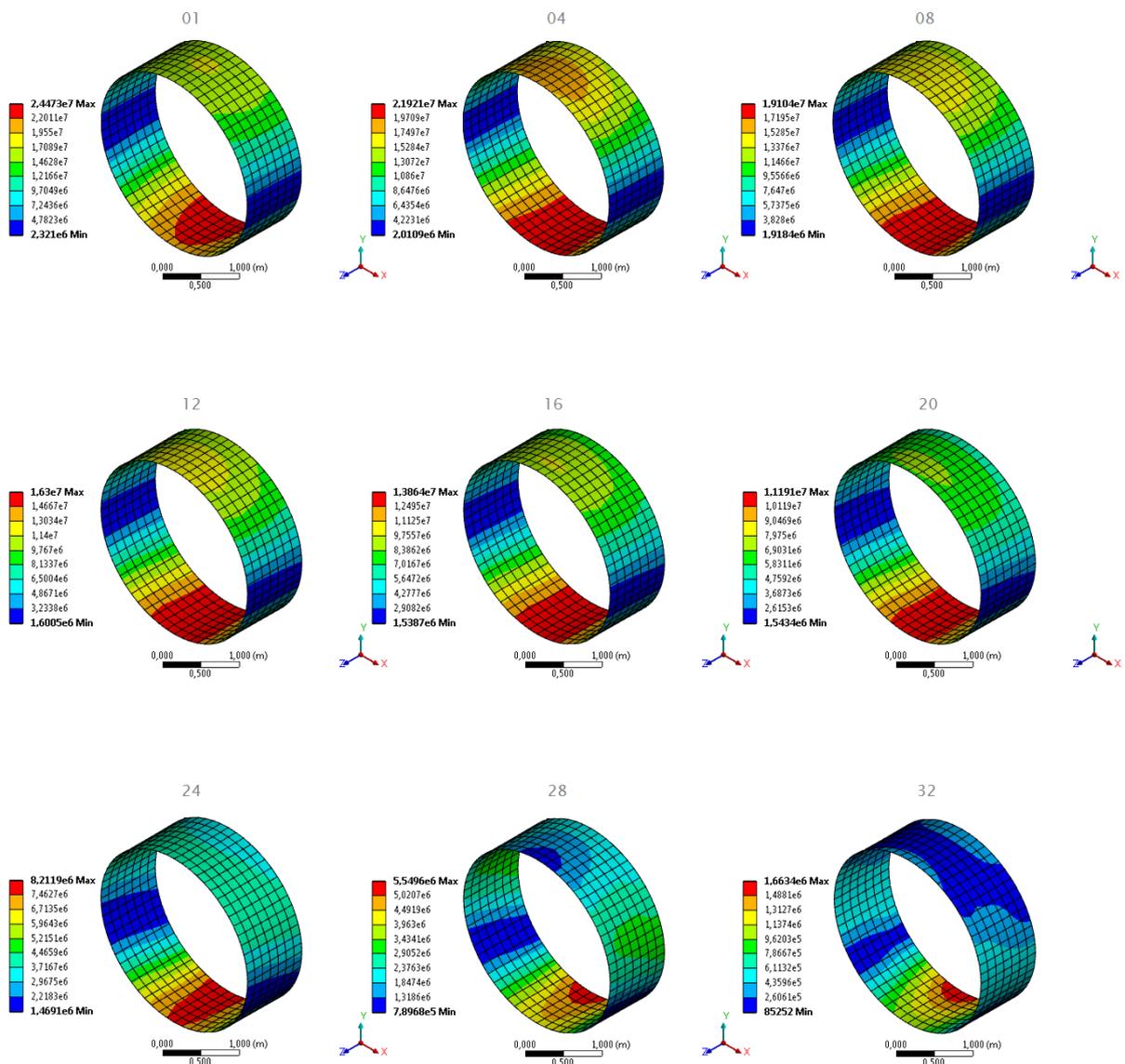


Рисунок 4.14. Распределение максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки при 32 расчетных стадиях

4.3 Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки и окружающего основания с учетом изменения расчетной модели во времени и коэффициента трения

Далее рассмотрен случай с учетом коэффициента трения f между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием. Учет коэффициента трения f позволяет ближе к действительности смоделировать совместную работу цилиндрической оболочки и окружающего основания.

Физико-механические свойства основания приняты как для сухого грунта, а свойства оболочки как для бетона, поэтому коэффициент трения f принят равным 0.6 [204]. Расчет с учетом коэффициента трения f между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием проведен для составленного ранее расчетного случая с 32 стадиями.

Влияния учета коэффициента трения f между оболочкой и окружающим основанием на внутренние усилия в оболочке определено сравнительным анализом максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в теле оболочки между моделями с учетом и без учета коэффициента трения f . Внутренние усилия рассмотрены в 1, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 и 32 кольцах оболочки, как и в предыдущем параграфе.

Кривые изменения максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки сравниваемых моделей с учетом и без учета коэффициента трения f показаны на рисунках 4.15 – 4.23. Дополнительно на каждый график нанесена величина напряжений при расчете без учета стадийности.

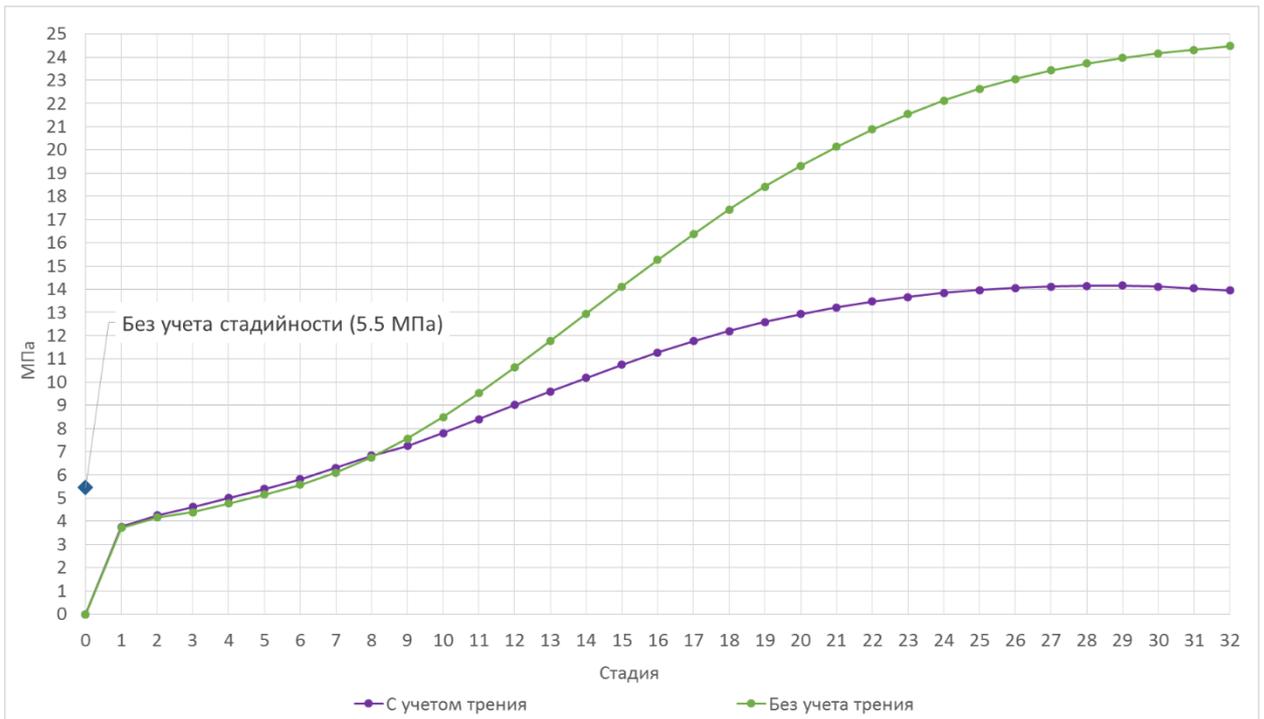


Рисунок 4.15. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 01 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

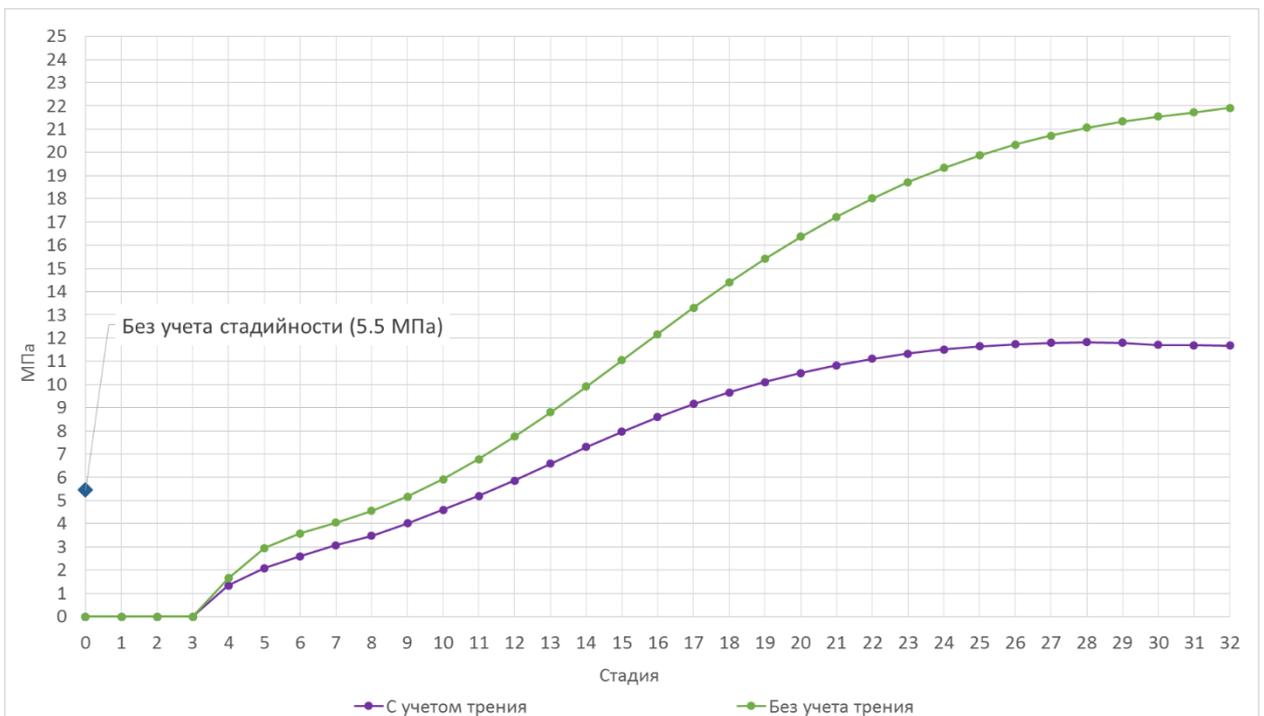


Рисунок 4.16. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 04 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

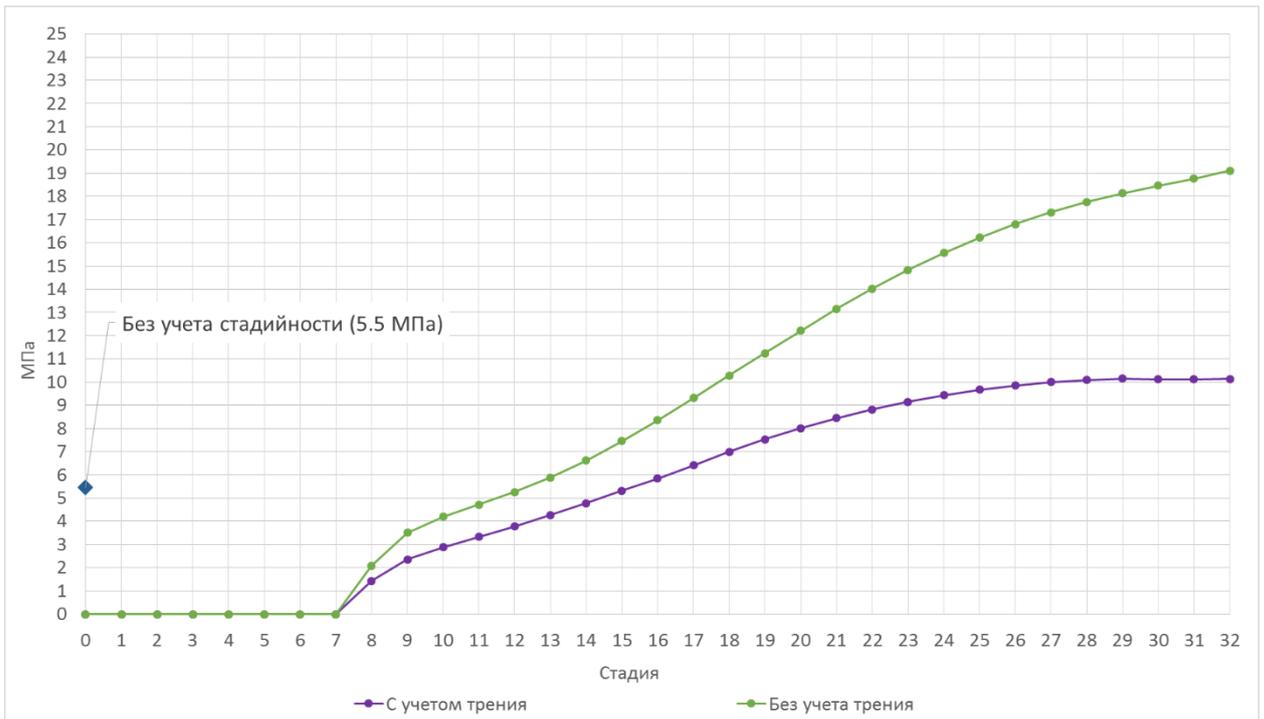


Рисунок 4.17. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 08 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

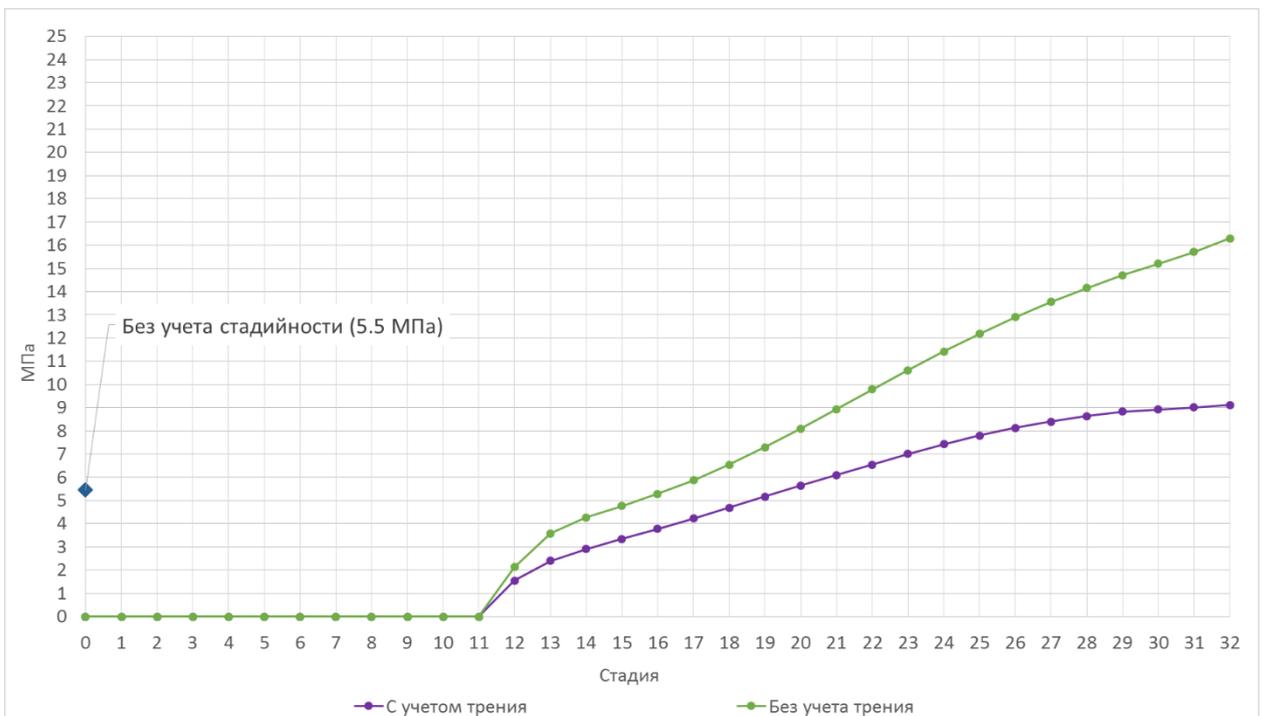


Рисунок 4.18. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 12 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

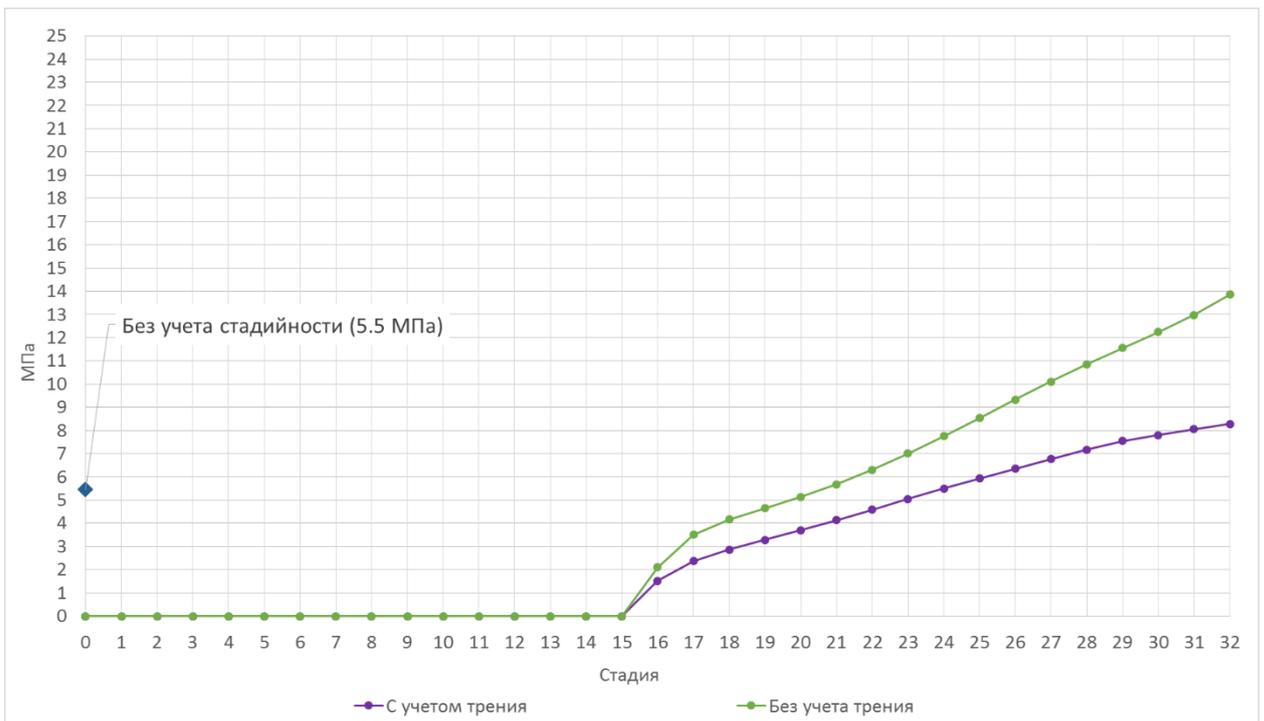


Рисунок 4.19. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 16 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

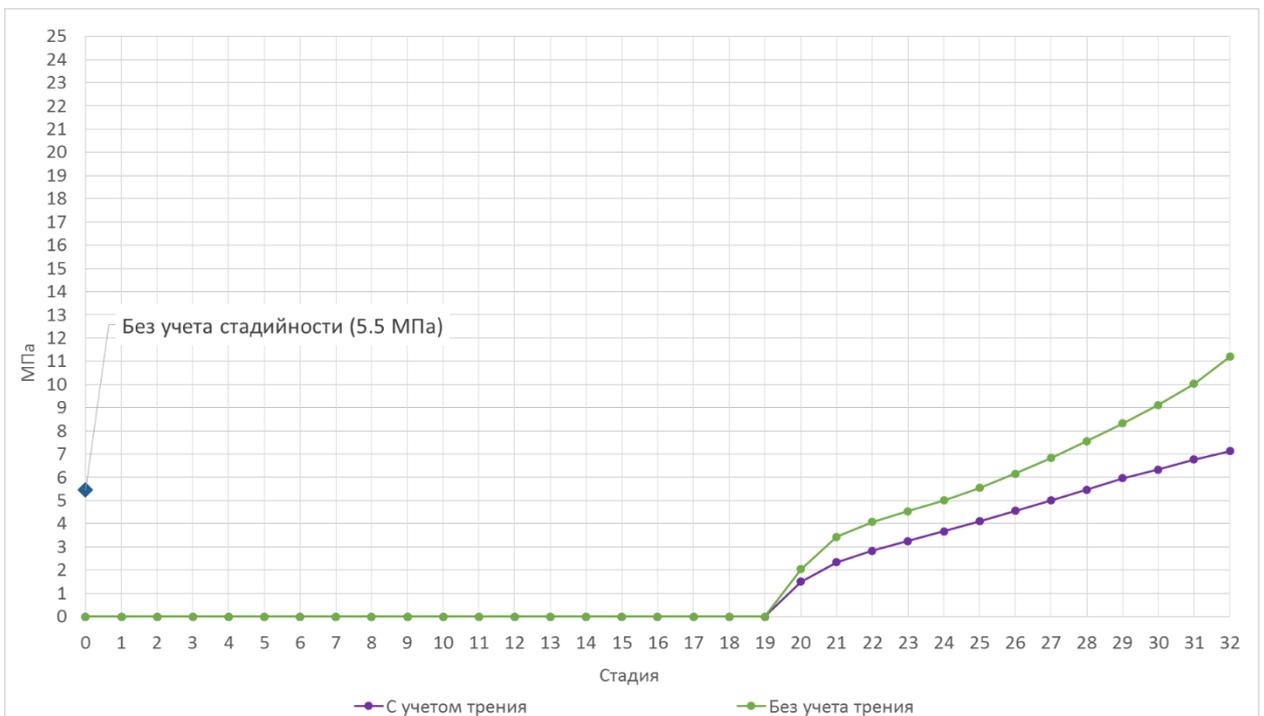


Рисунок 4.20. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 20 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

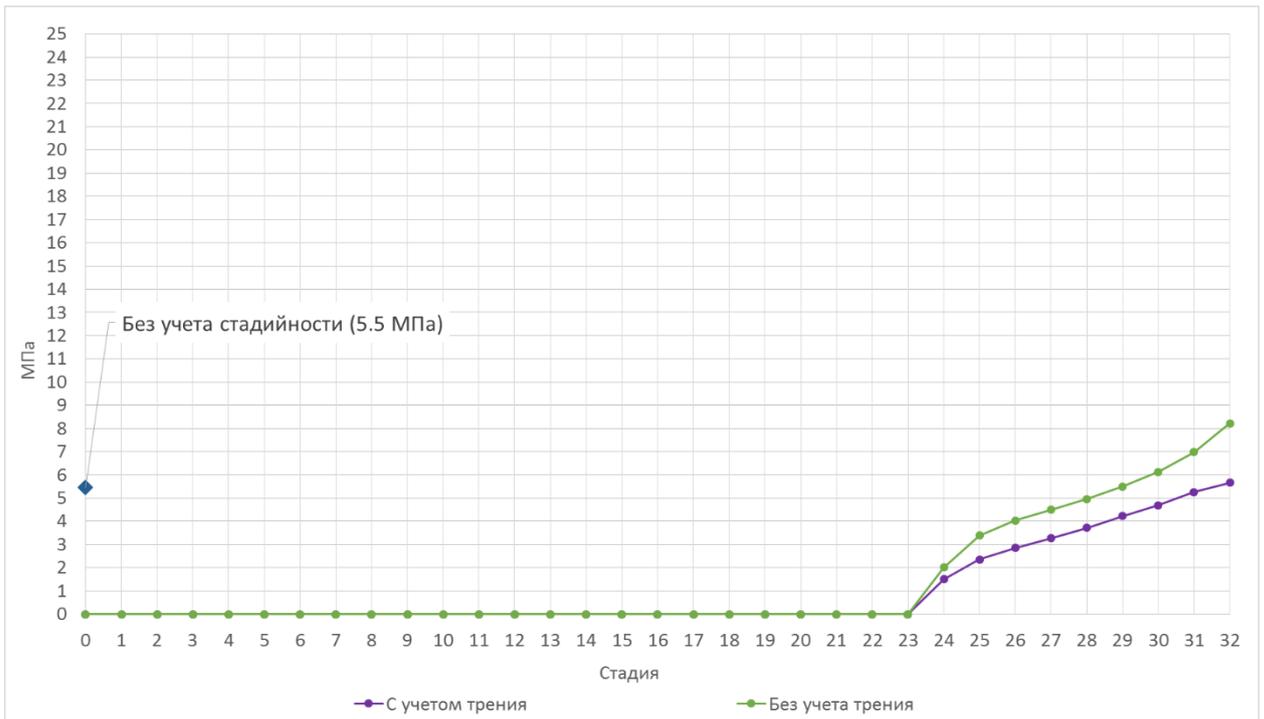


Рисунок 4.21. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 24 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

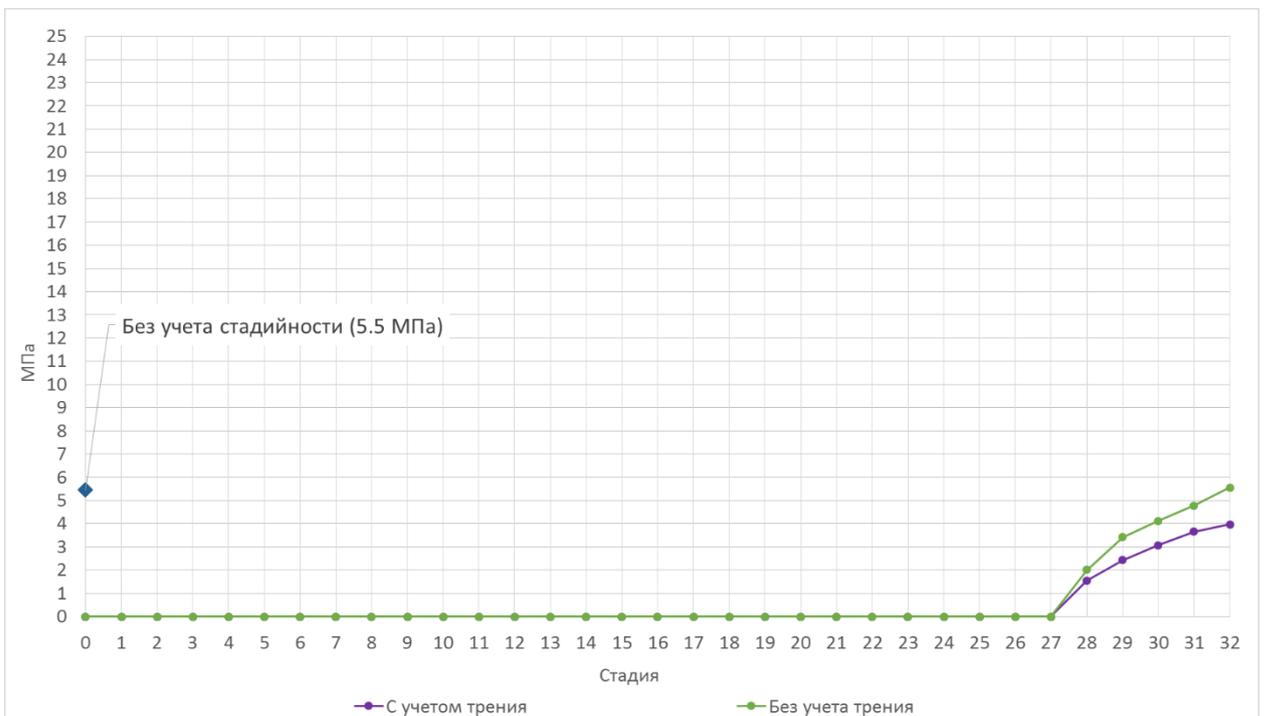


Рисунок 4.22. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 28 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

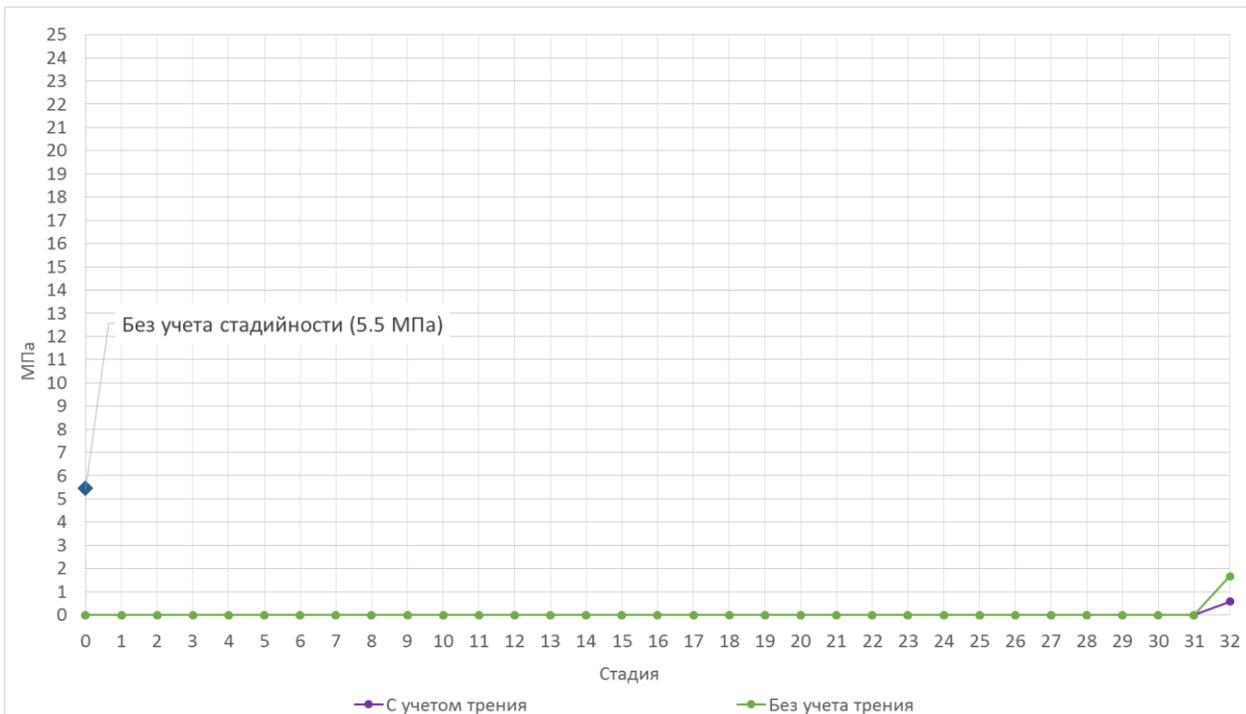


Рисунок 4.23. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 32 кольца оболочки с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием

По графикам максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу можно сделать вывод, что учет коэффициента трения f значительно снижает величину максимальных напряжений. Это объясняется тем, что у оболочки и окружающего основания за счет учета коэффициента трения f улучшено взаимодействие и часть нагрузок передана с оболочки на основание [126, 296]. Отметим, что характер кривых напряжений мало отличен от характера кривых, полученных без учета трения в предыдущем параграфе.

На рисунке 4.24 показано распределение максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки расчетной модели с учетом трения. Максимальные значения напряжений наблюдаются в центре нижнего свода оболочки, а минимальные – по бокам.

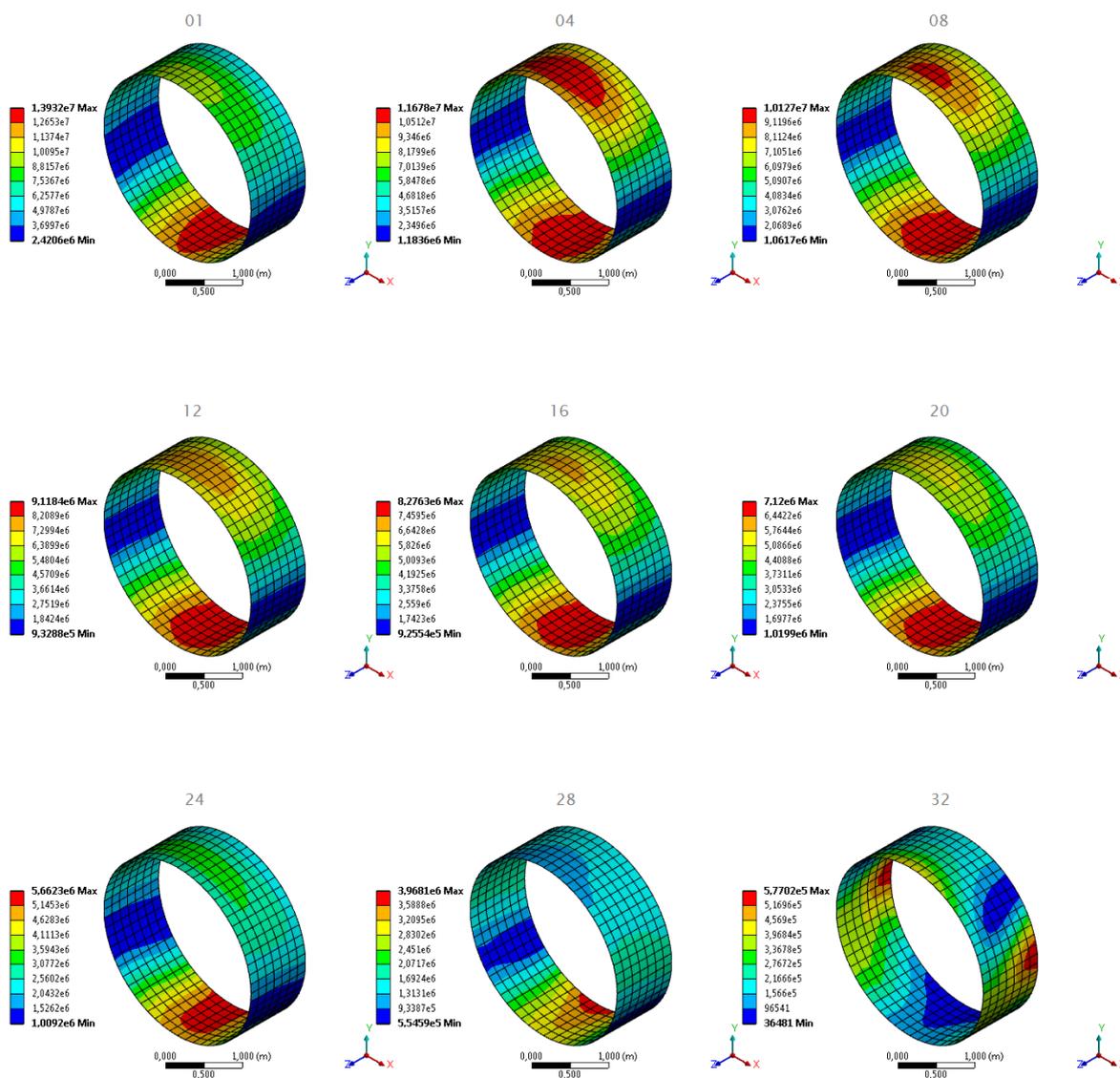


Рисунок 4.24. Распределение максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки расчетной модели с учетом трения

В таблице 4.2 показаны максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу для расчетных случаев с учетом и без учета коэффициента трения f в рассматриваемых кольцах оболочки, а также разница этих напряжений в процентах. В среднем в каждом кольце оболочки напряжения снизились на 43 %.

Таблица 4.2

Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу для расчетных случаев с учетом и без учета коэффициента трения f

Кольцо оболочки, №	Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа		Разница напряжений, %
	Без учета трения	С учетом трения	
1	24.5	14.2	42 %
4	21.9	11.8	46 %
8	19.1	10.1	47 %
12	16.3	9.1	44 %
16	13.9	8.3	40 %
20	11.2	7.1	37 %
24	8.2	5.7	31 %
28	5.6	4.0	29 %
32	1.7	0.5	70 %

В расчетном случае без учета стадийности максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в оболочке составили 5.5 МПа. В таблице 4.3 показаны напряжения от расчетных случаев с учетом и без учета стадийности (коэффициент трения f учитывался), а также разница этих напряжений в процентах. По сравнению с данными таблицы 4.1 для расчетного случая без учета стадийности разница между напряжениями стала меньше.

Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу для расчетных случаев с учетом и без учета стадийности

Кольцо оболочки, №	Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа		Разница напряжений, %
	Без учета стадийности	С учетом стадийности	
1	5.5	14.2	160 %
4	5.5	11.8	117 %
8	5.5	10.1	86 %
12	5.5	9.1	67 %
16	5.5	8.3	52 %
20	5.5	7.1	31 %
24	5.5	5.7	4 %
28	5.5	4.0	– 27 %
32	5.5	0.5	– 89 %

4.4 Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки и окружающего основания с учетом изменения расчетной модели во времени и коэффициента трения для оболочки с упруго-пластической моделью материала

В следующем расчетном случае сделана попытка учесть разницу между предельным напряжением бетона при сжатии и предельным напряжением бетона при растяжении в материале оболочки. Физико-механические свойства оболочки заданы согласно упруго-пластической модели Друкера – Прагера со следующими параметрами: модуль упругости $E_{об} = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.18$, плотность $\rho_{об} = 2300$ кг/м³, предел прочности при

одноосном растяжении $R_t = 2.5$ МПа, предел прочности при одноосном сжатии $R_c = 42.0$ МПа, предел прочности при двuosном сжатии $R_b = 50.0$ МПа.

Расчет проведен с 32 стадиями. Как и в предыдущем расчетном случае учтен коэффициент трения f между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием. Влияния учета упруго-пластической модели материала на внутренние усилия в оболочке определено сравнительным анализом максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в теле оболочки с предыдущим расчетным случаем, где оболочка имеет линейную модель материала. Внутренние усилия рассмотрены в 1, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 и 32 кольцах оболочки, как и в предыдущем параграфе.

Графики изменения максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки сравниваемых моделей с учетом и без учета пластичности материала показаны на рисунках 4.25 – 4.33. Дополнительно на каждый график нанесена величина напряжений при расчете без учета стадийности.

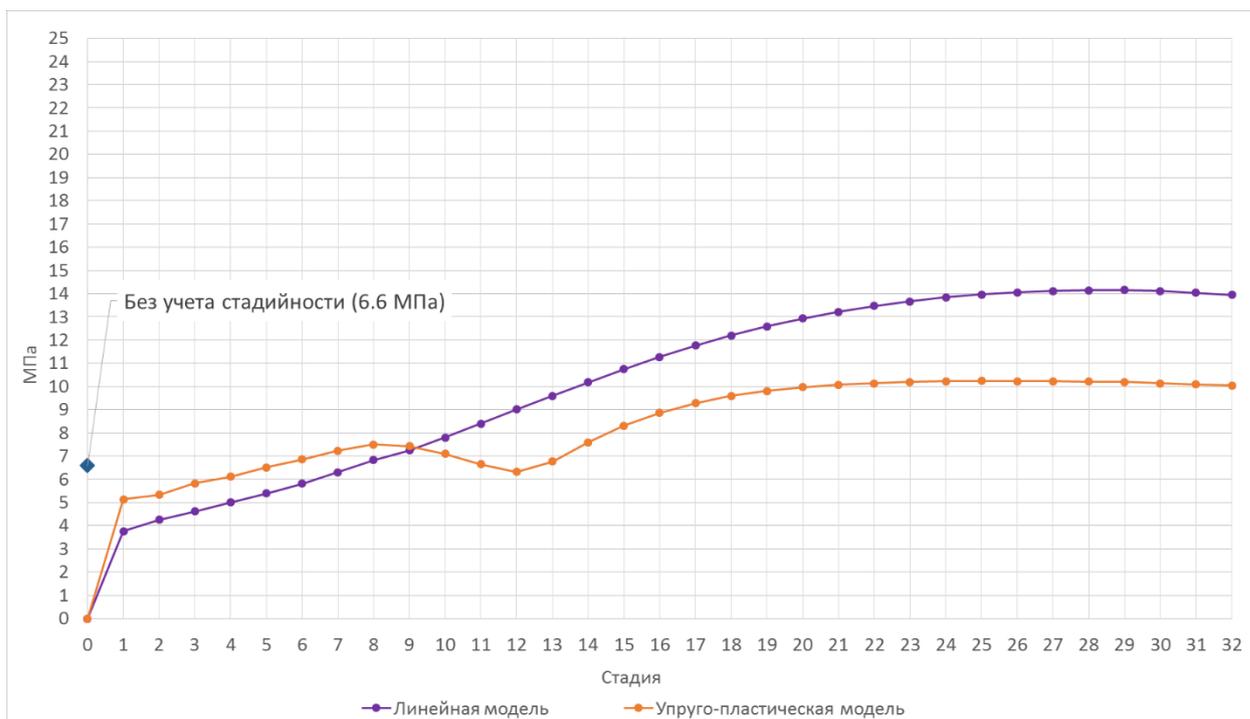


Рисунок 4.25. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 01 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

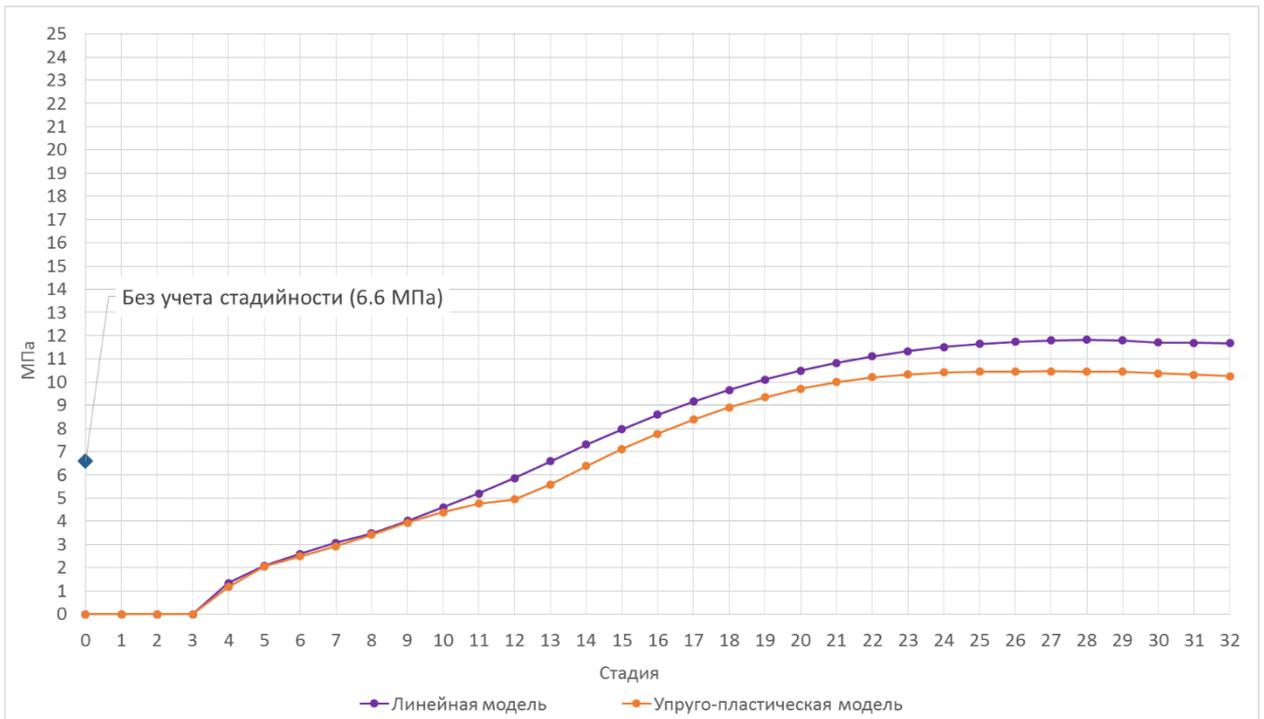


Рисунок 4.26. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 04 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

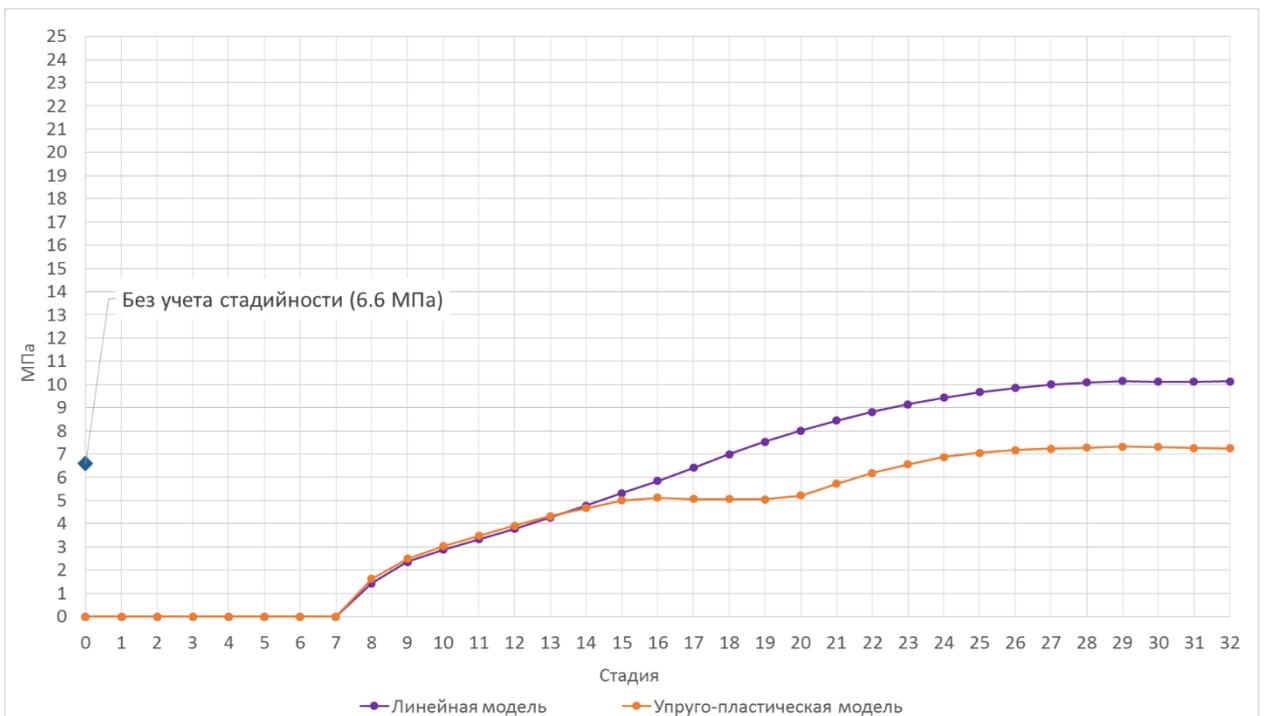


Рисунок 4.27. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 08 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

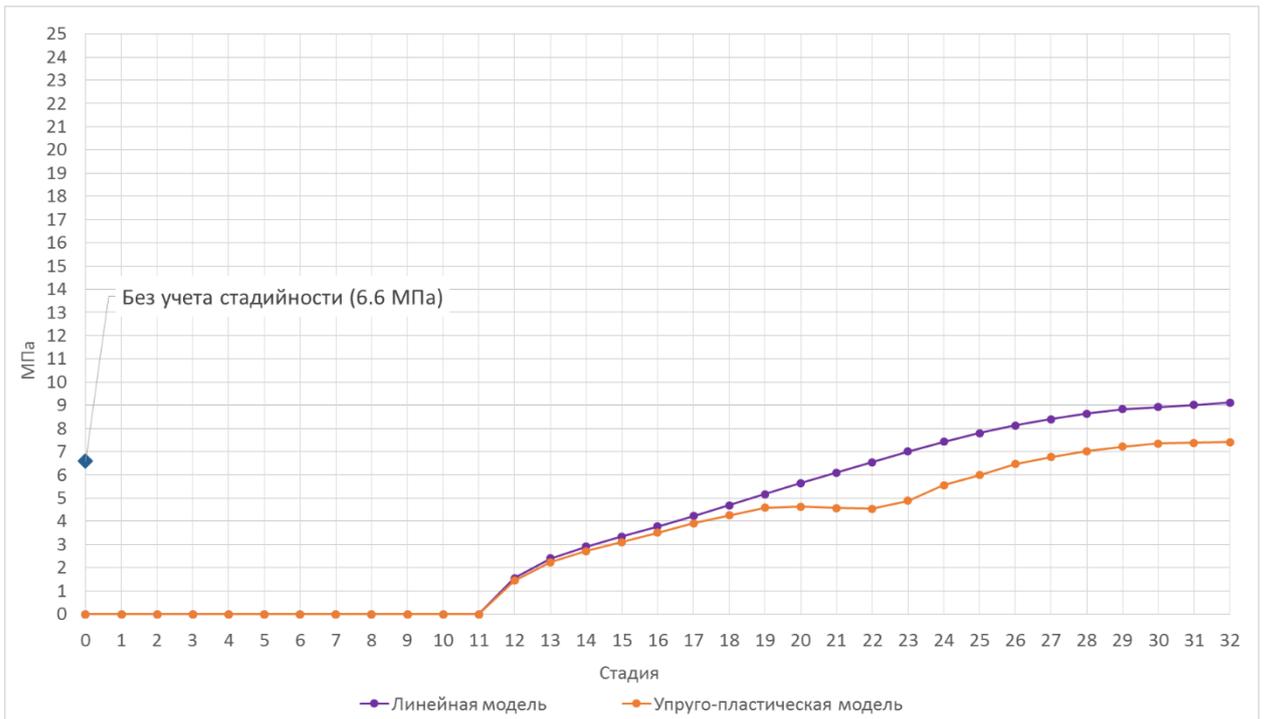


Рисунок 4.28. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 12 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

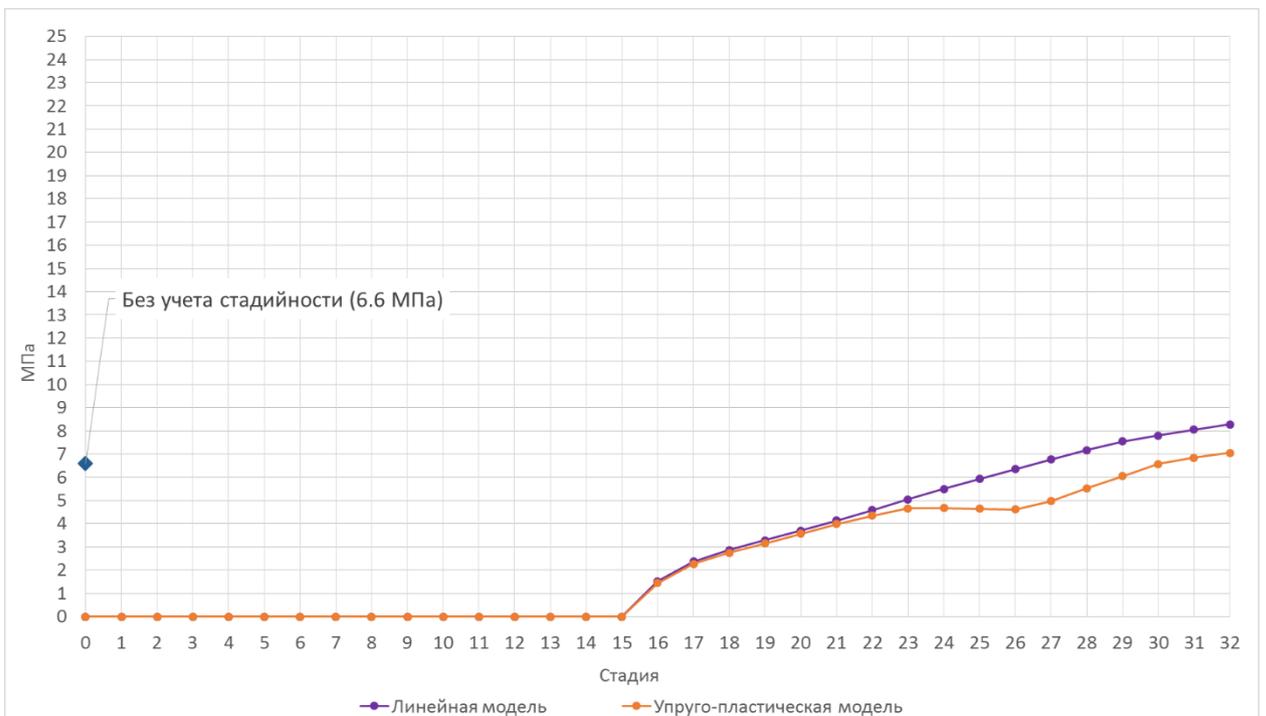


Рисунок 4.29. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 16 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

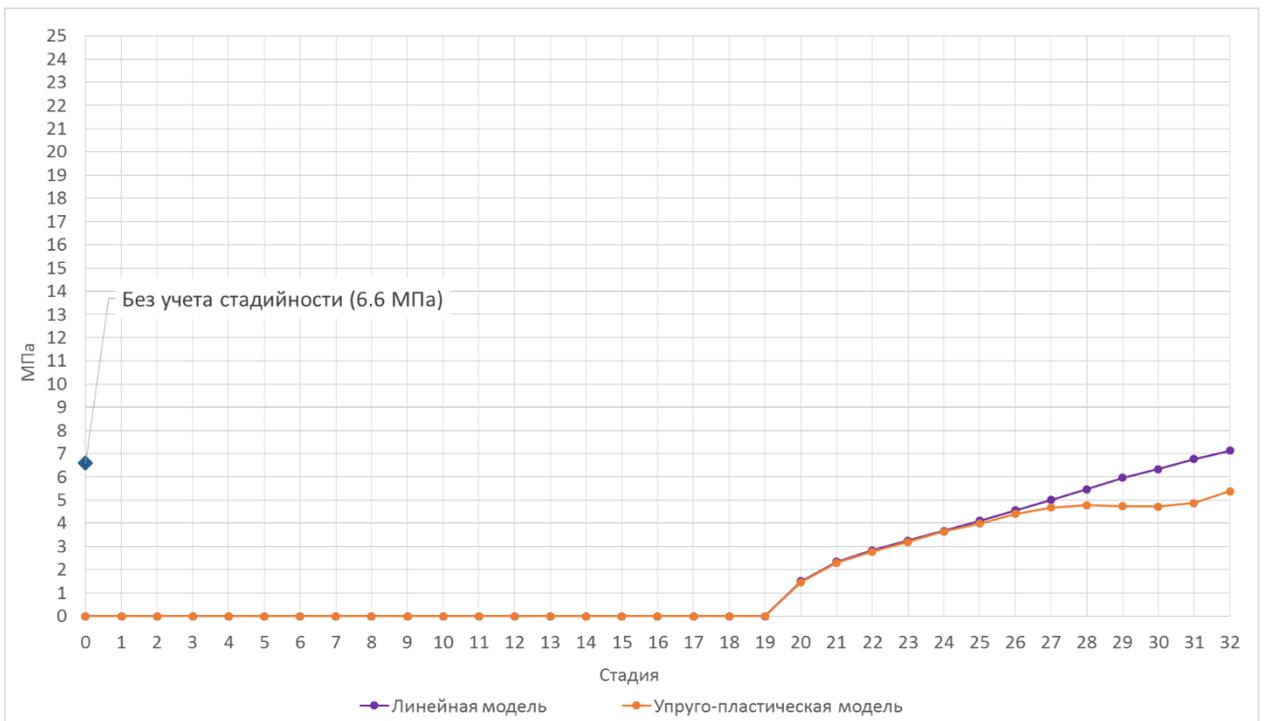


Рисунок 4.30 Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 20 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

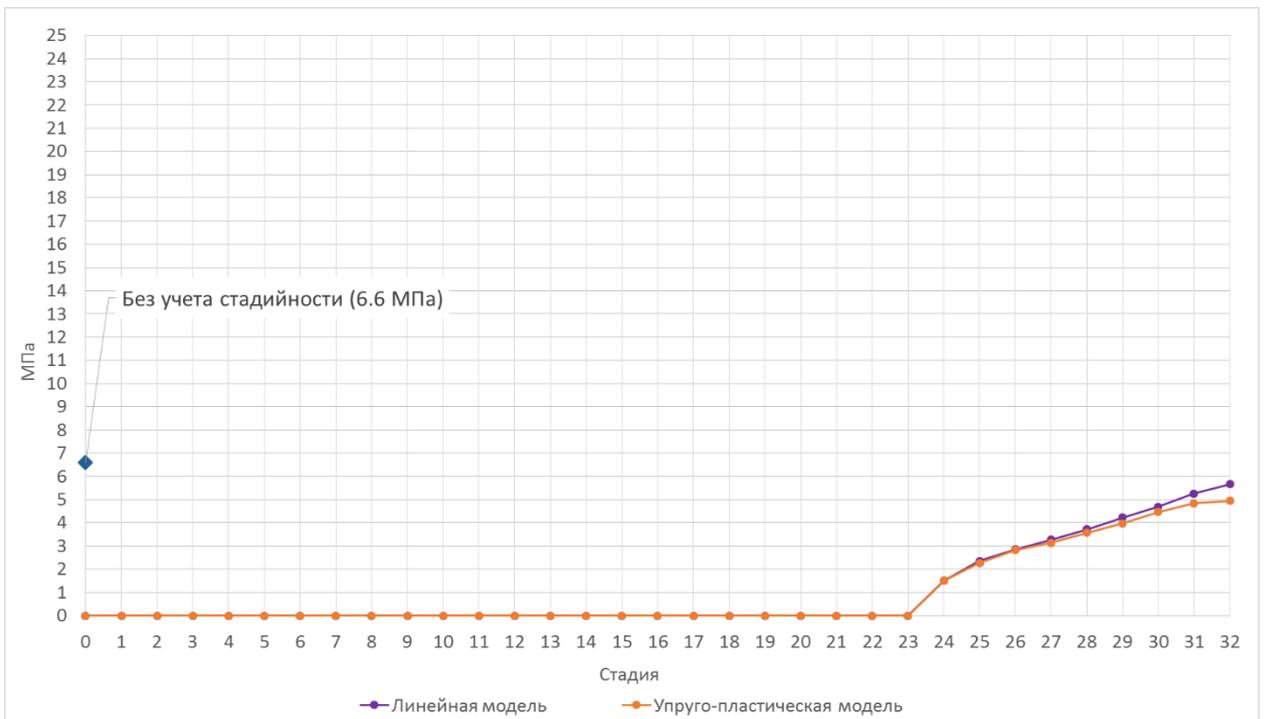


Рисунок 4.31. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 24 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

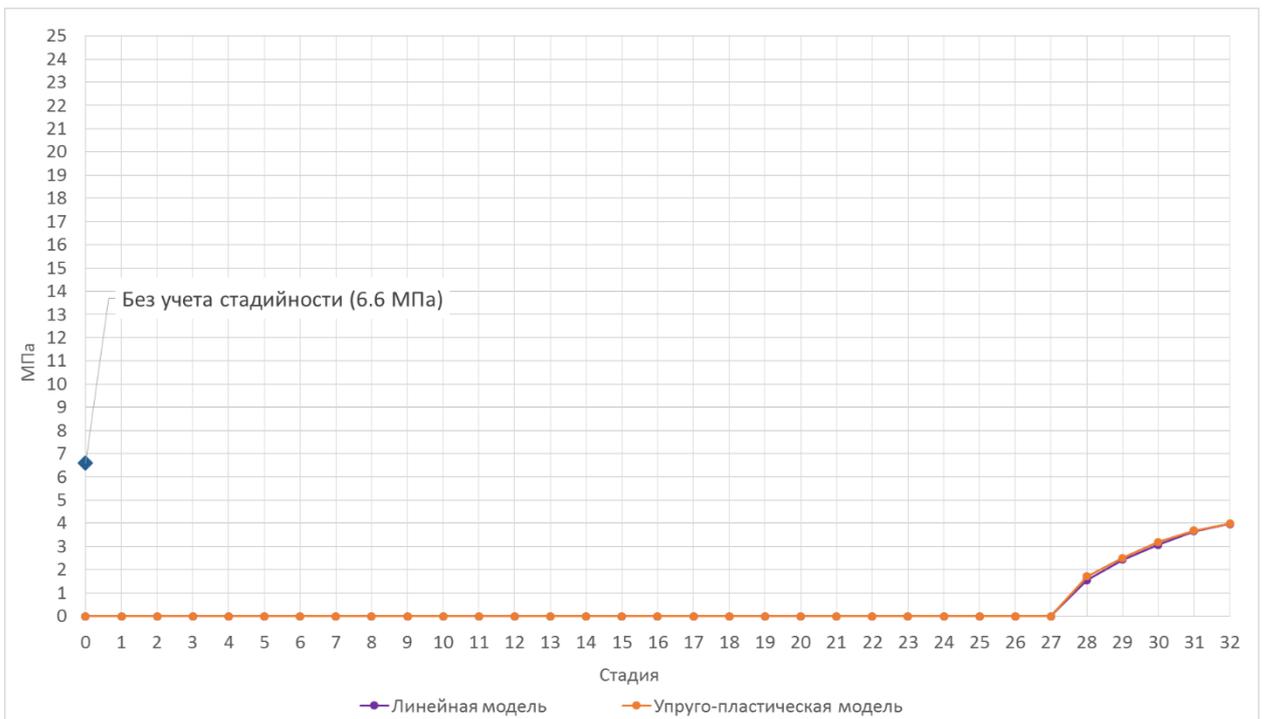


Рисунок 4.32. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 28 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

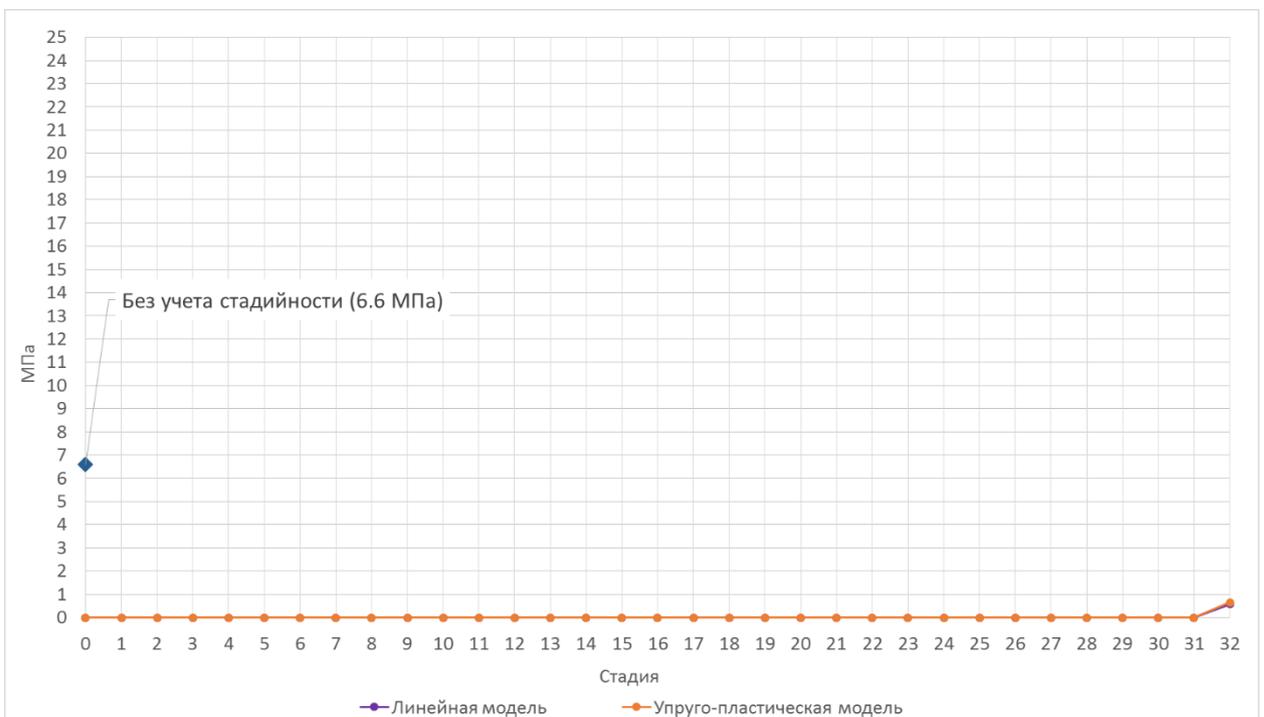


Рисунок 4.33. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 32 кольца оболочки с учетом и без учета пластичности материала оболочки

По графикам максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу можно сделать вывод, что учет пластичности модели материала оболочки заметно снижает величину максимальных напряжений. Отметим, что характер кривых напряжений отличен от характера кривых, полученных в предыдущем параграфе.

В таблице 4.4 показаны максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу для расчетных случаев с учетом и без учета пластичности модели материала оболочки, а также разница этих напряжений в процентах. В среднем в каждом кольце оболочки напряжения снизились на 17 %.

Таблица 4.4

Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу для расчетных случаев с учетом и без учета пластичности материала оболочки

Кольцо оболочки, №	Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа		Разница напряжений, %
	Без учета пластичности модели материала для оболочки	С учетом пластичности модели материала для оболочки	
1	14.2	10.2	28 %
4	11.8	10.5	11 %
8	10.1	7.3	28 %
12	9.1	7.4	19 %
16	8.3	7.1	14 %
20	7.1	5.4	24 %
24	5.7	4.9	14 %
28	4.0	3.9	3 %
32	0.7	0.6	14 %

В расчетном случае без учета стадийности максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в оболочке составили 6.6 МПа. В таблице 4.5 показаны напряжения от расчетных случаев с учетом и без учета стадийности (с учетом упруго-пластической модели материала для оболочки и коэффициента трения f), а также разница этих напряжений в процентах. По сравнению с данными таблицы 4.3 разница между напряжениями стала меньше.

Таблица 4.5

Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу для расчетных случаев с учетом и без учета стадийности

Кольцо оболочки, №	Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа		Разница напряжений, %
	Без учета стадийности	С учетом стадийности	
1	6.6	10.2	55 %
4	6.6	10.5	59 %
8	6.6	7.3	11 %
12	6.6	7.4	12 %
16	6.6	7.1	7 %
20	6.6	5.4	– 18 %
24	6.6	4.9	– 25 %
28	6.6	3.9	– 39 %
32	6.6	0.6	– 90 %

На рисунке 4.34 показано распределение максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки расчетной модели с учетом пластичности модели материала оболочки. Расположение максимальных и минимальных значений эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах зависит от порядкового номера колец оболочки.

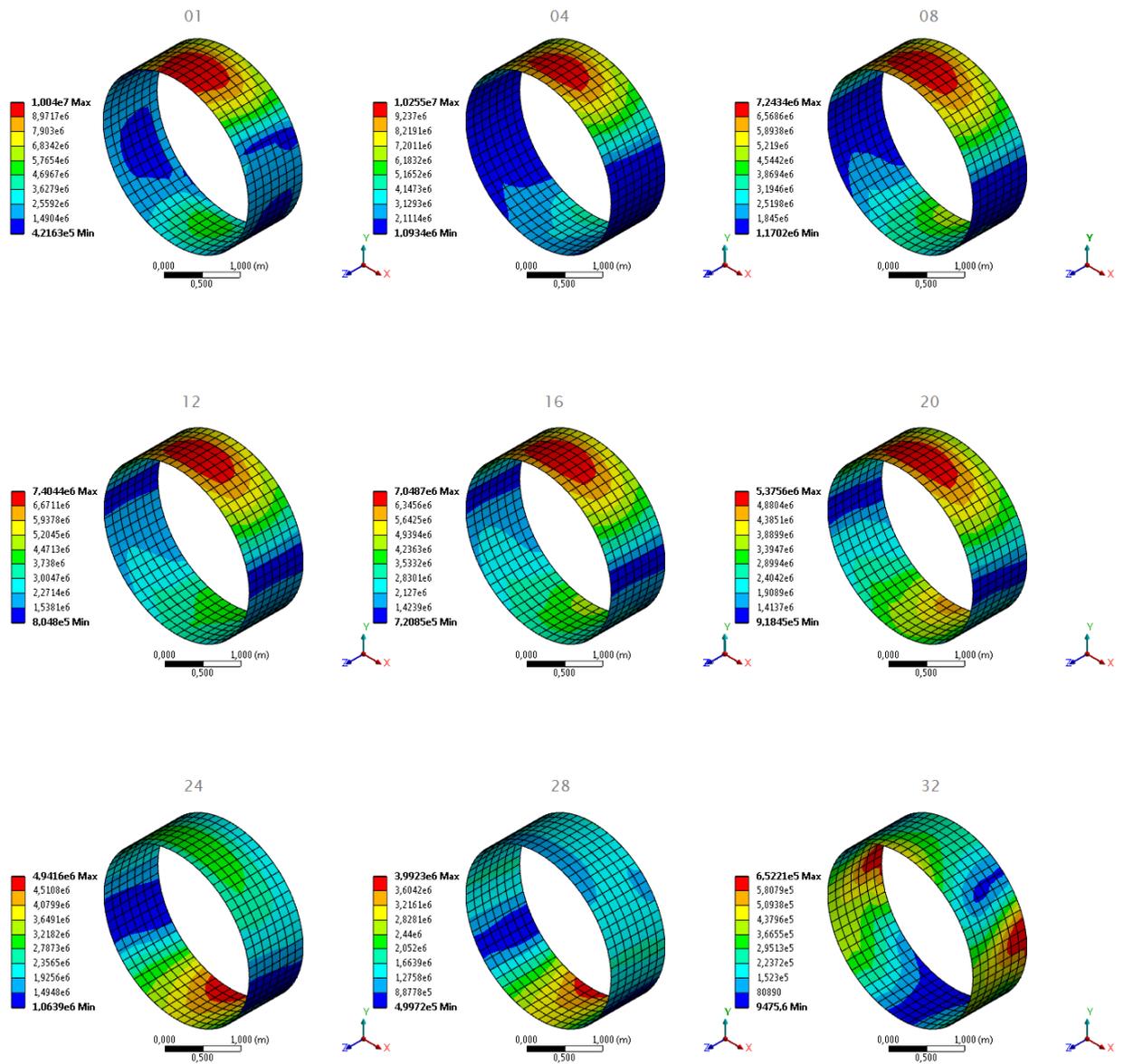


Рисунок 4.34. Распределение максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки при 32 расчетных стадиях с учетом трения и пластичности модели материала оболочки

Максимальные пластические деформации возникают во втором кольце оболочки. Эквивалентные пластические деформации определены по формуле [323]:

$$\varepsilon_e^p = \frac{1}{1 + \mu} \sqrt{\frac{1}{2} [(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p)^2 + (\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p)^2]}, \quad (4.2)$$

где μ – коэффициент Пуассона; ε_1^p , ε_2^p , ε_3^p – главные пластические деформации.

Распределение эквивалентных пластических деформаций во втором кольце оболочки показано на рисунке 4.35. Кривая изменения эквивалентных пластических деформаций во втором кольце оболочки в процессе 32 стадий возведения показана на рисунке 4.36.

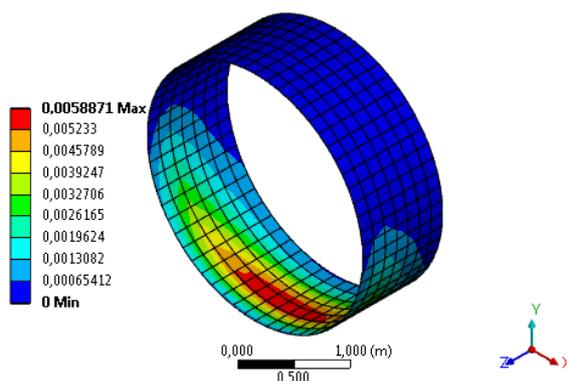


Рисунок 4.35. Распределение эквивалентных пластических деформаций во втором кольце оболочки

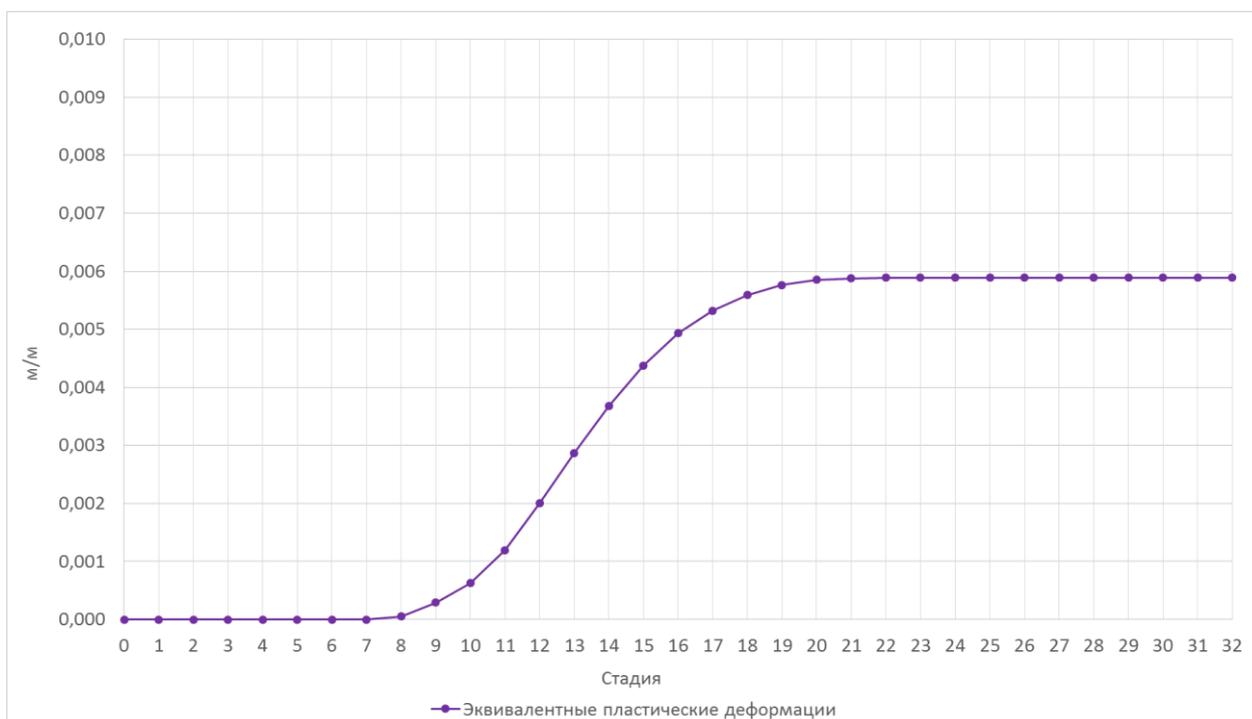


Рисунок 4.36. Кривая изменения эквивалентных пластических деформаций во втором кольце оболочки

4.5 Влияние поэтапно возводимой цилиндрической оболочки на напряженно-деформированные состояния существующей близлежащей оболочки и их единого окружающего основания

Проблема оценки влияния строительства оболочки нового тоннеля, на НДС оболочки уже существующего тоннеля, построенного ранее, возникла при проектировании первого варианта тоннельного перехода в Лефортово в г. Москве (вариант с двумя тоннелями глубокого заложения). В итоге от него отказались, построив только один тоннель глубокого заложения, а второй (мелкого заложения) разместили в стороне, частично используя существующие транспортные магистрали.

Расчеты подобных систем известны в плоской постановке задачи. Например, С. Б. Косицыным и Д. Б. Долотказиным исследовано влияние некоторых особенностей тоннельного перехода в Лефортово в г. Москве на его НДС методом конечных элементов [136].

Разработана пространственная расчетная модель с двумя параллельно расположенными цилиндрическими оболочками и единым окружающим основанием. Задача исследования: определить особенности НДС существующей цилиндрической оболочки и окружающего основания, обусловленные поэтапным возведением второй близлежащей оболочки.

Геометрические характеристики цилиндрических оболочек в составленной расчетной модели приближены к исходным данным работы [136]. Диаметр оболочек составил $D = 13.5$ м, толщина $t = 0.7$ м, глубина заложения центральных осей $Z = 25.0$ м, расстояние между осями – $2D$. Расстояние между боковыми краями оболочки и боковыми торцами основания составляет $W = 5D$. Расстояние от нижних краев оболочек до нижнего торца основания равно $H = 3D$. Обе цилиндрических оболочки составлены из 32 отдельных колец шириной 2.8 м.

Типы конечных элементов, свойства материалов, граничные условия и нагрузки взяты идентично параграфу 4.2. Также в расчетной модели задан зазор между цилиндрическими оболочками и окружающим основанием (для учета особенности работы ТПМК) и коэффициент трения $f = 0.6$.

Процесс определения НДС составлен из 65 стадий: на первой (нулевой) стадии вычислено бытовое состояние основания без цилиндрических оболочек, на последующих 64 стадиях вычислено НДС модели после включения элементов каждого отдельного кольца оболочки (по 32 стадии на каждую оболочку). Изменение НДС рассмотрено для элементов оболочки, установленной первой, чтобы оценить оказываемое на нее влияние от возведения второй оболочки.

Общий вид расчетной модели представлен на рисунке 4.37. Вид цилиндрических оболочек показан на рисунке 4.38.

Кривые изменения максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внешних волокнах колец оболочки, установленной первой, показаны на рисунках 4.39 – 4.47. Вертикальные зеленые линии на графиках соответствуют концу 32 стадии и разделяют этапы возведения первой и второй оболочек.

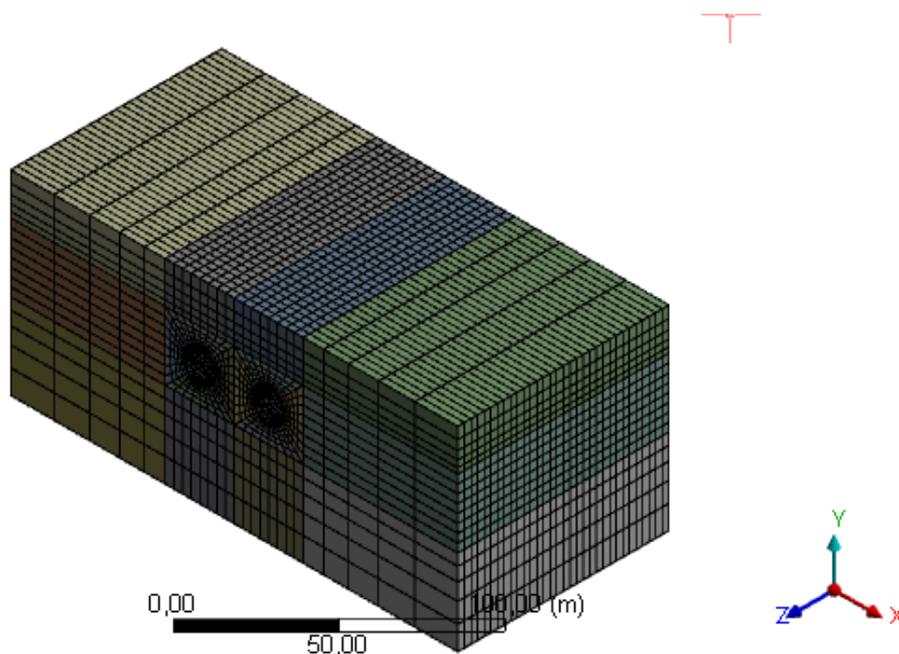


Рисунок 4.37. Общий вид расчетной модели

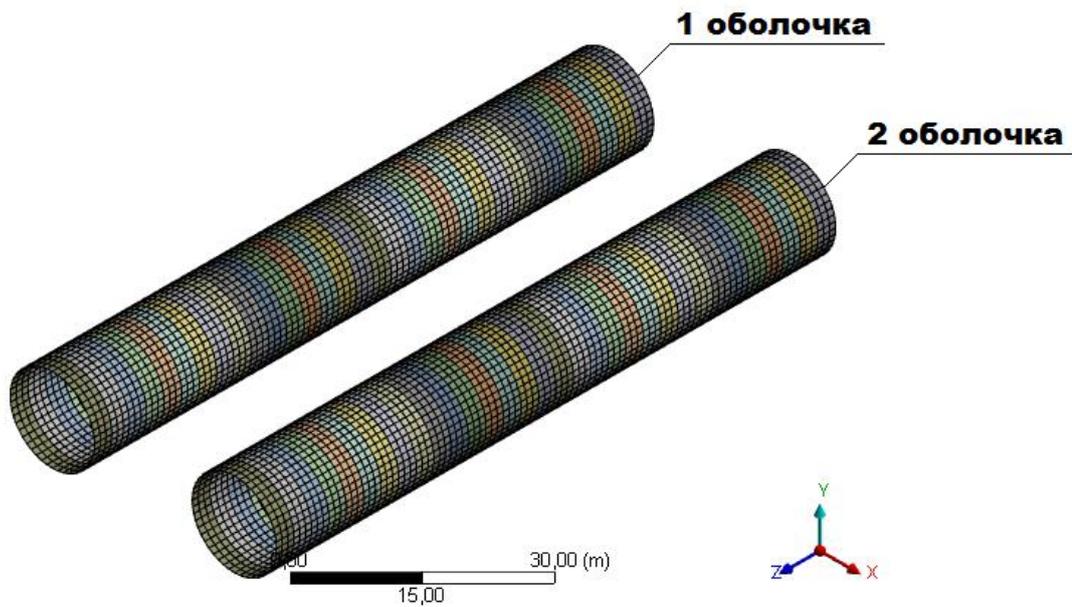


Рисунок 4.38. Вид цилиндрических оболочек

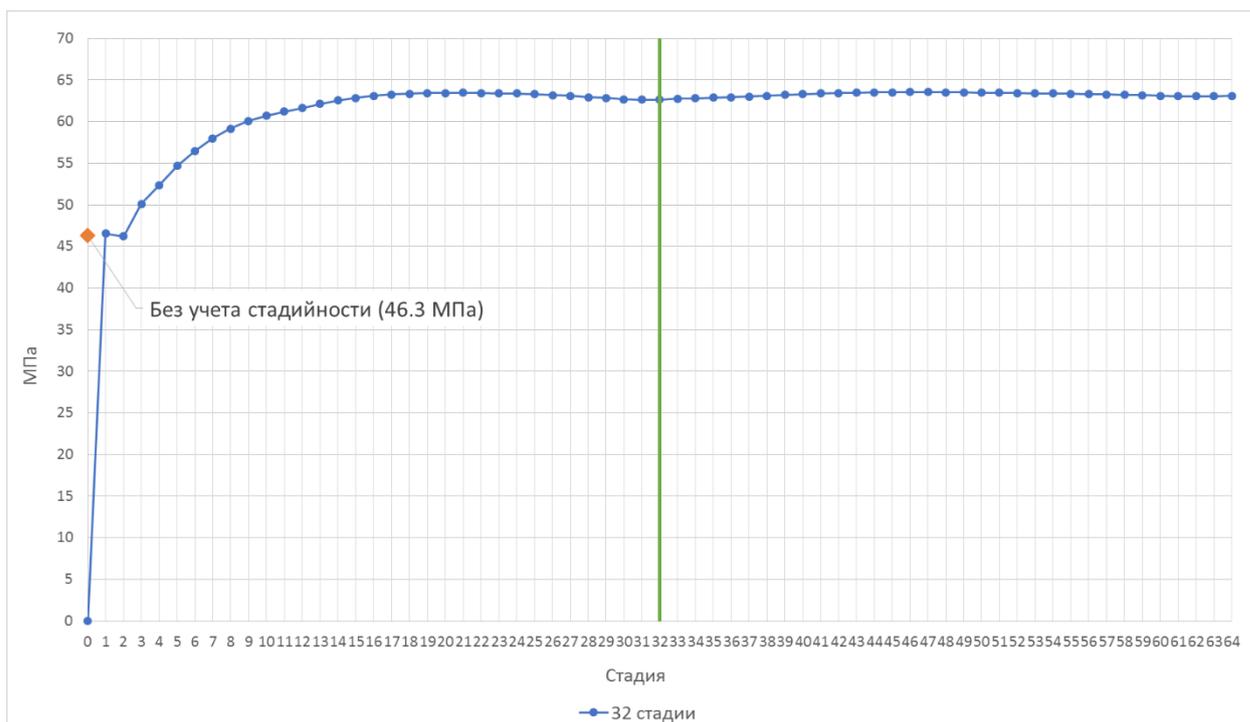


Рисунок 4.39. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 01 кольца первой оболочки

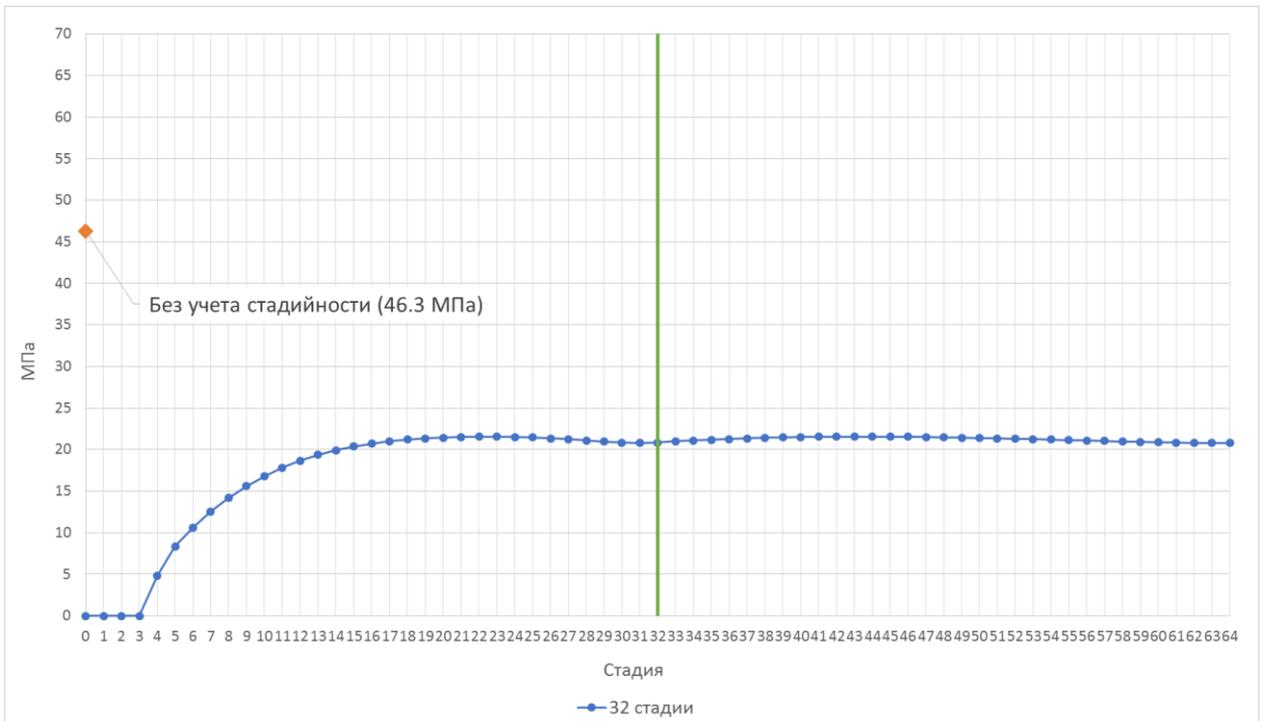


Рисунок 4.40. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 04 кольца первой оболочки

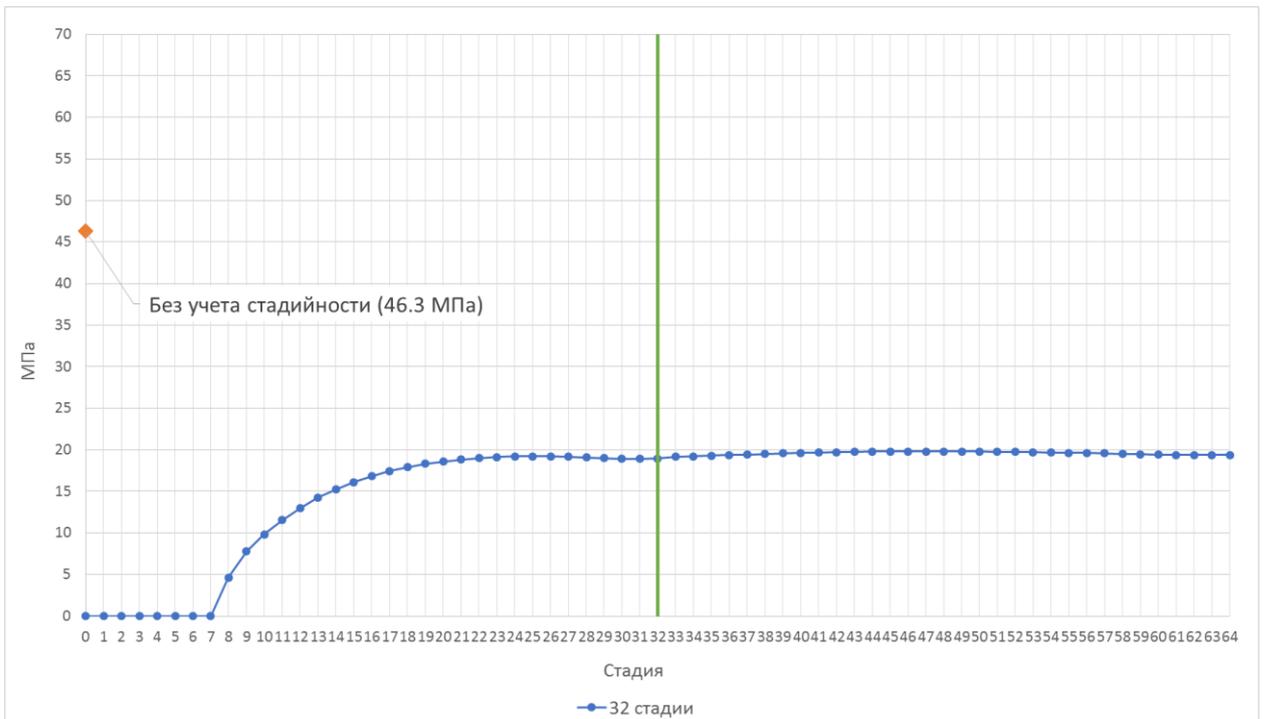


Рисунок 4.41. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 08 кольца первой оболочки

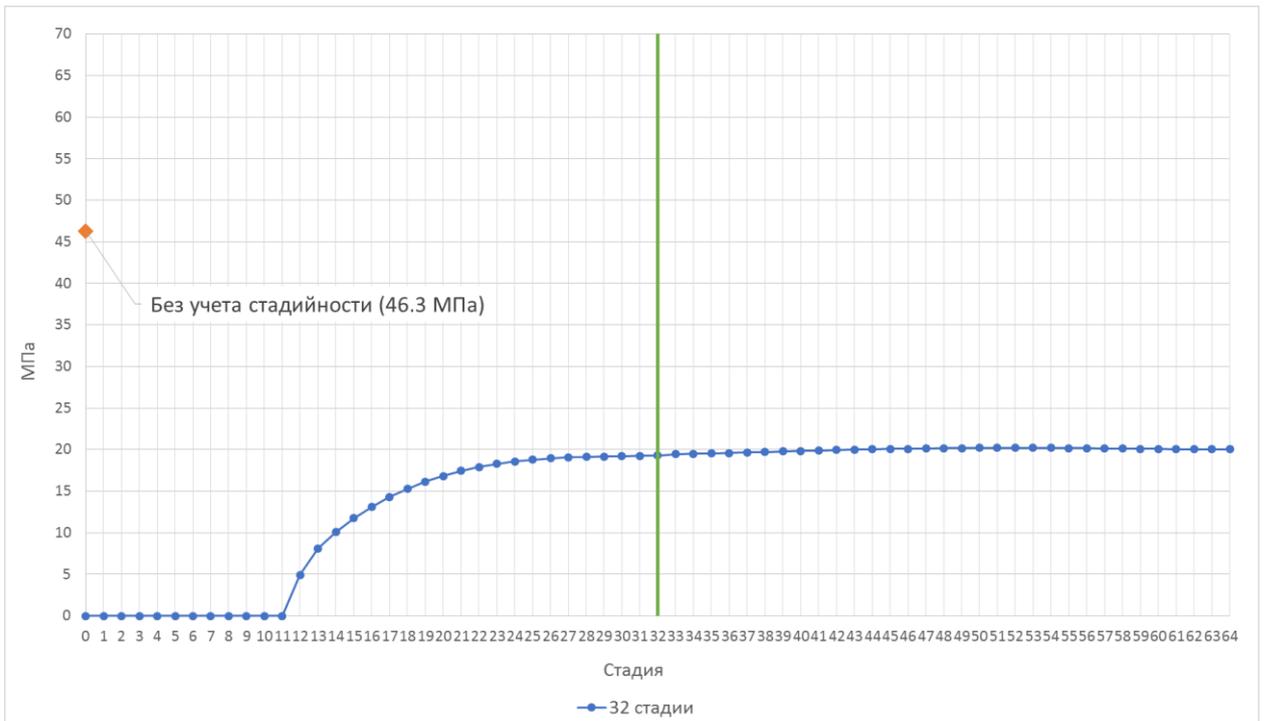


Рисунок 4.42. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 12 кольца первой оболочки

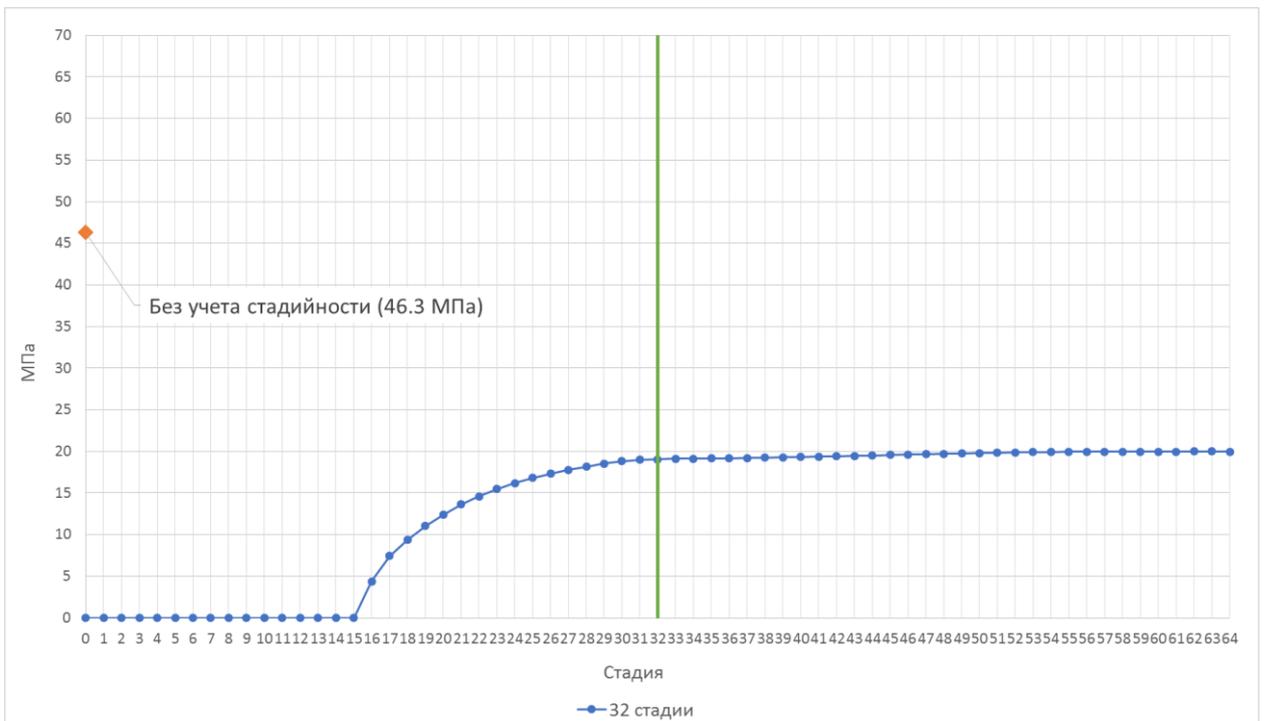


Рисунок 4.43. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 16 кольца первой оболочки

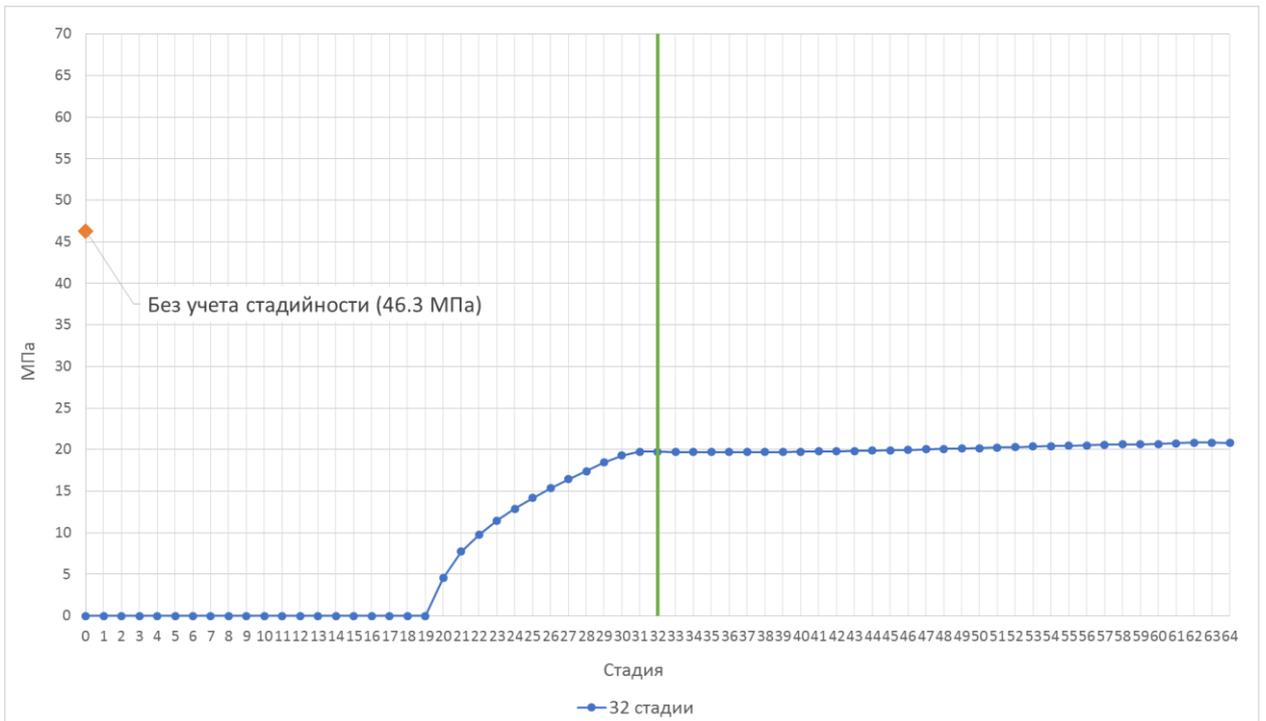


Рисунок 4.44. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 20 кольца первой оболочки

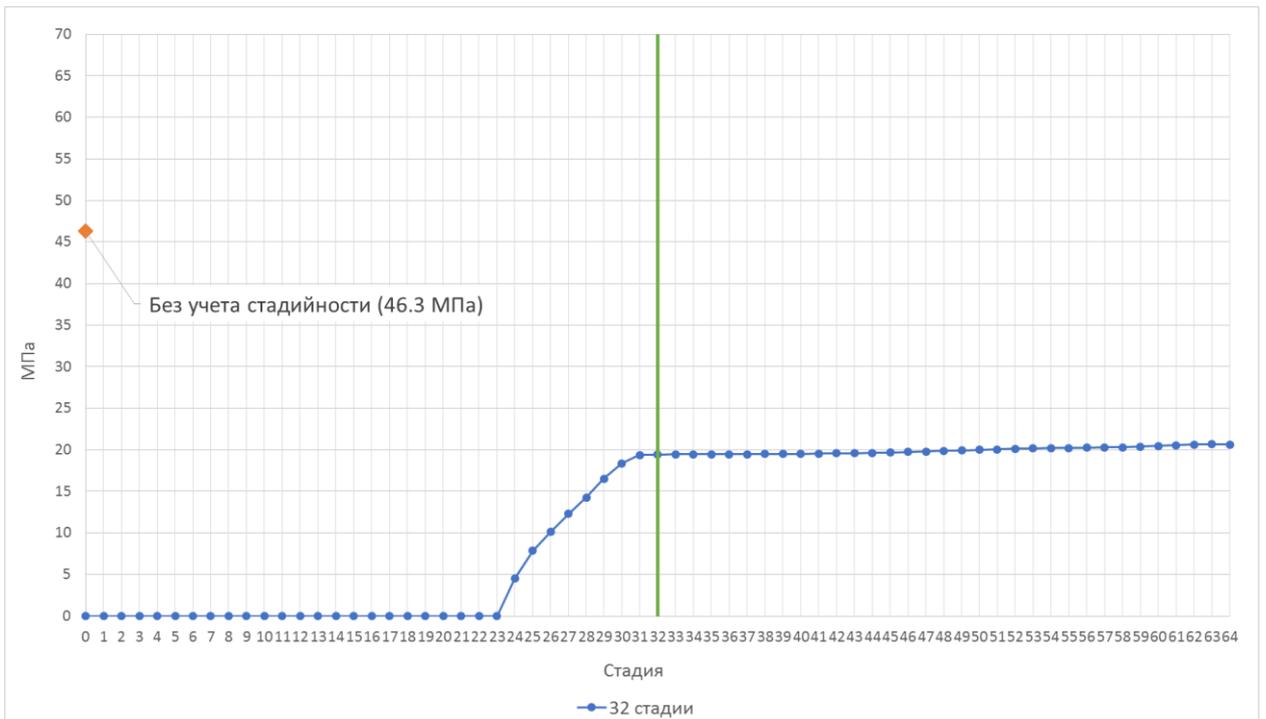


Рисунок 4.45. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 24 кольца первой оболочки

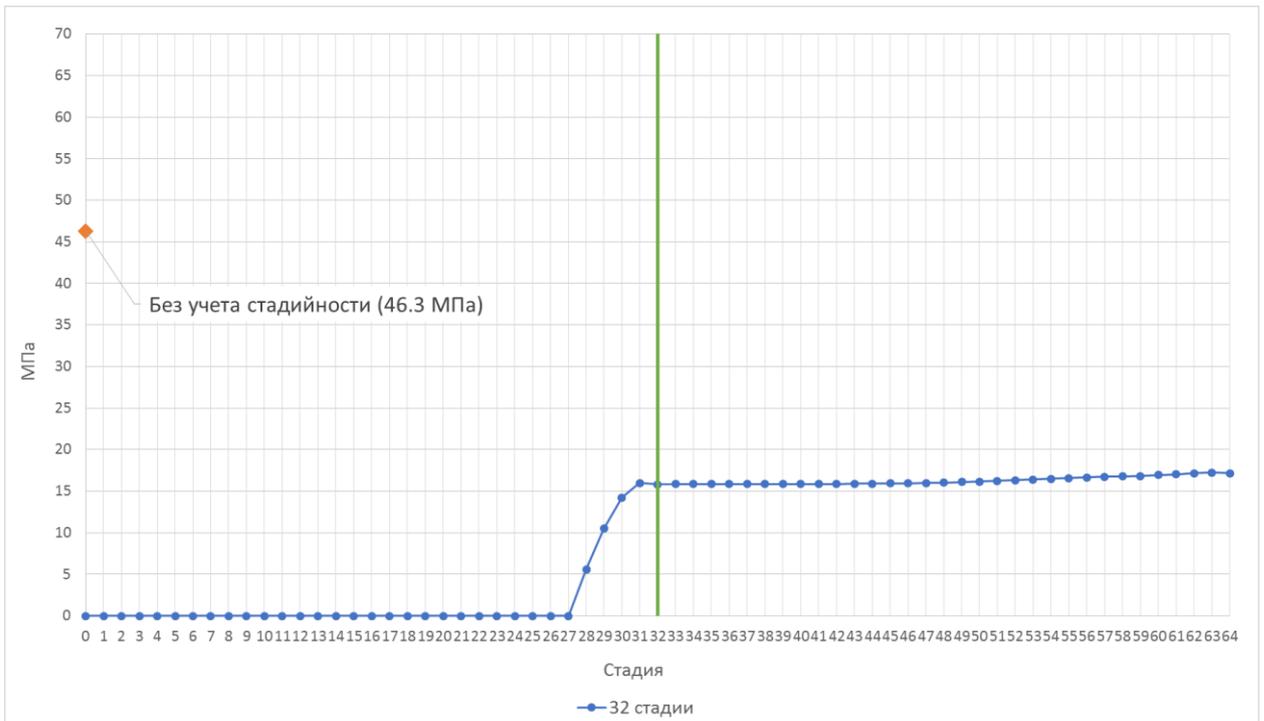


Рисунок 4.46. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 28 кольца первой оболочки

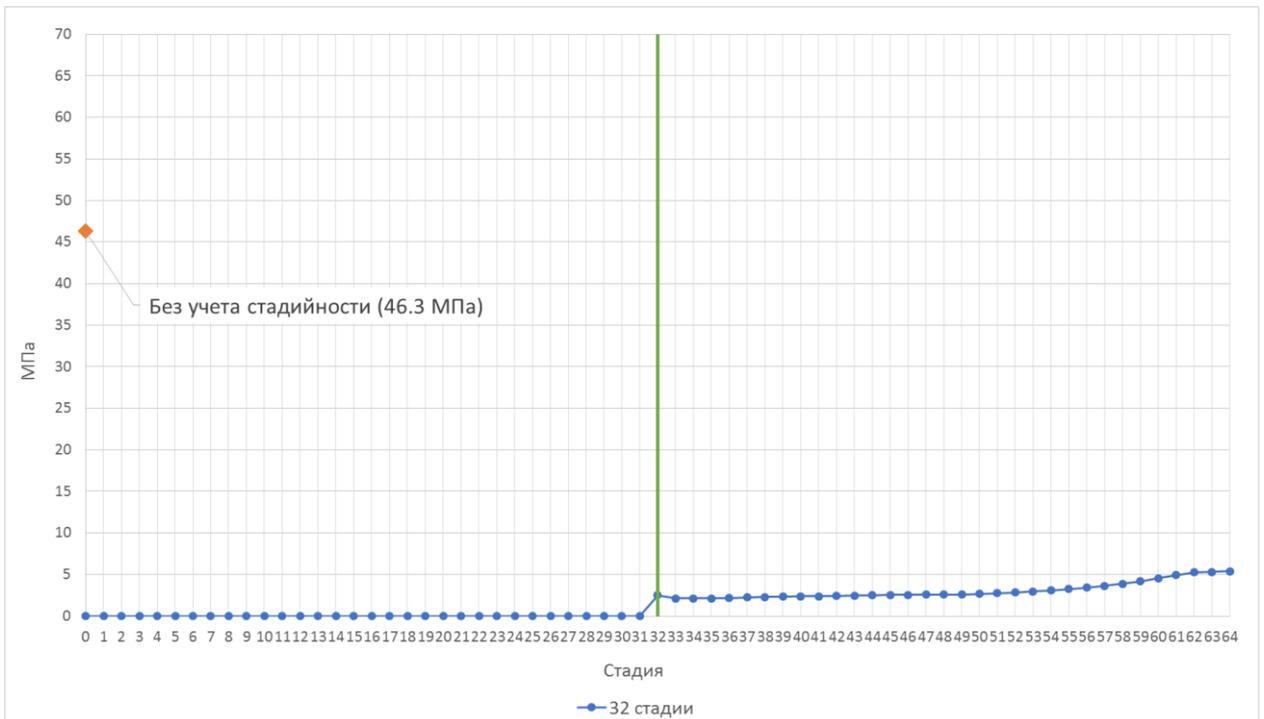


Рисунок 4.47. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу во внешних волокнах 32 кольца первой оболочки

В таблице 4.6 показаны величины прироста напряжений, вызванные возведением второй оболочки, и их доля в процентах для рассмотренных колец первой оболочки.

Таблица 4.6

Прирост максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в рассмотренных кольцах первой оболочки

Кольцо оболочки, №	Прирост напряжений, МПа	%
1	0.08	0.1
4	0.04	0.2
8	0.59	3.1
12	0.91	4.7
16	0.94	4.9
20	1.11	5.6
24	1.26	6.5
28	1.25	7.8
32	2.89	116.8

По полученным результатам видно, что возведение второй оболочки оказывает незначительное влияние на уже существующую оболочку, кроме последнего кольца, где прирост напряжений составляет 116.8 %. Это вызвано тем, что если при возведении первой оболочки ее последнее кольцо недогружено больше остальных, то во время возведения второй оболочки это кольцо воспринимает новую нагрузку в равной степени с остальными. В кольцах с 1 по 28 увеличение напряжений не превышает 7.8 %.

В расчетном случае без учета стадийности максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в оболочках составили 46.3 МПа. В таблице 4.7

показаны напряжения в первой оболочке от расчетных случаев с учетом и без учета стадийности, а также разница этих напряжений в процентах.

Таблица 4.7

Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу для расчетных случаев с учетом и без учета стадийности

Кольцо оболочки, №	Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа		Разница напряжений, %
	Без учета стадийности	С учетом стадийности	
1	46.3	63.5	37 %
4	46.3	21.6	– 53 %
8	46.3	19.8	– 57 %
12	46.3	20.2	– 56 %
16	46.3	20.0	– 57 %
20	46.3	20.8	– 55 %
24	46.3	20.7	– 55 %
28	46.3	17.2	– 63 %
32	46.3	5.4	– 88 %

Здесь, в отличие от параграфов 4.2 – 4.4, отсутствие учета стадийности приводит к заметно большим напряжениям во всех кольцах рассматриваемой оболочки, кроме первого.

4.6 Выводы по главе 4

1. Разработана методика расчета системы «оболочка – окружающее основание» с учетом изменения расчетной схемы во времени при одностороннем контактном взаимодействии между оболочкой и основанием и упруго-пластических моделях материалов объектов исследования.

2. Исследовано влияние учета поэтапного возведения конструкции на НДС цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, с использованием численных методов. Рассмотрено контактное взаимодействие цилиндрической оболочки конечных размеров с окружающим объемным массивом как без учета, так и с учетом трения между объектами. Модель материала массива описана соотношениями Мора – Кулона, а материал оболочки рассмотрен в двух вариантах: как линейный и как модель Друкера – Прагера.

3. Установлено, что величины внутренних усилий в теле цилиндрической оболочки сильно зависят от количества стадий в расчетном случае. Внутренние усилия существенно занижены, если расчетный случай имеет меньше 8 стадий. Объяснением служит то, что в расчетных случаях с малым количеством стадий все кольца оболочки или их наибольшая часть вступают в работу одновременно, за счет чего нагрузка с окружающего основания переходит на оболочку равномерно. Помимо этого, при малом количестве стадий в кольцах оболочки действуют незначительные или совсем отсутствуют остаточные напряжения с предыдущих стадий расчета.

Сравнение с результатами, полученными в расчетном случае без учета стадийности, также показало необходимость учета изменений расчетной модели во времени при решении подобных задач.

4. Выявлено, что для колец цилиндрической оболочки в диапазоне с 4 по 28 кольцо величины максимальных напряжений от расчетных случаев с 8, 16 и 32 стадиями расчета отличаются незначительно. Также отметим, что

напряжения в первом кольце оболочки существенно вырастают, если сравнивать расчетный случай из 8 стадий с расчетными случаями из 16 и 32 стадиями. В последнем кольце оболочки, напротив, напряжения существенно падают, если сравнивать расчетный случай из 8 стадий с расчетными случаями из 16 и 32 стадиями.

5. Опираясь на полученные результаты, рекомендовано в практических расчетах принимать 8 и более расчетных стадий возведения оболочки. Однако, в связи с большим количеством временных и вычислительных ресурсов пространственных расчетов допустимо принимать 8 расчетных стадий, при этом стоит иметь в виду, что в первых и последних кольцах оболочки максимальные эквивалентные напряжения будут занижены и завышены соответственно.

6. Показано, что учет коэффициента трения f значительно снижает величину максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в цилиндрической оболочке. В среднем в каждом кольце оболочки напряжения снизились на 43 %. Объяснением служит то, что у оболочки и окружающего основания за счет учета коэффициента трения f улучшено взаимодействие и часть нагрузок передана с оболочки на основание. Отмечено, что характер изменения напряжений в процессе перехода от стадии к стадии мало отличен от характера изменения напряжений, полученным в расчетном случае без учета трения.

7. Установлено, что учет упруго-пластической модели материала для оболочки заметно снижает величину максимальных напряжений. В среднем в каждом кольце оболочки напряжения снизились на 17 %. Отмечено, что характер кривых напряжений отличен от характера кривых, полученных в расчетном случае с линейным материалом оболочки.

8. Рассмотрены особенности НДС системы, состоящей из двух параллельно расположенных цилиндрических оболочек и их единого окружающего основания, а именно определено влияние, оказываемое на

первую оболочку поэтапным возведением второй близлежащей оболочки. Полученные результаты показали, что данное влияние является незначительным и прирост напряжений для всех рассмотренных колец первой оболочки не превышает 7.8 %, кроме последнего кольца, где увеличение напряжений составляет 116.8 %.

Дополнительно проведено сравнение полученного НДС первой оболочки с результатами расчетного случая без учета стадийности, которое показало необходимость учета изменений расчетной модели во времени при определении НДС оболочек в подобных задачах.

ГЛАВА 5 КРИТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА И ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ОКРУЖАЮЩИМ ОСНОВАНИЕМ

В настоящей главе приведена методика определения критических нагрузок потери устойчивости равновесия цилиндрических оболочек, взаимодействующих с окружающим основанием. Проведен численный анализ системы «оболочка – основание» с целью определения критической нагрузки, при которой оболочка, взаимодействующая с окружающим основанием, теряет устойчивость равновесия. Определены формы потери устойчивости в линейной и геометрически нелинейной постановках задач с последующим сравнительным анализом результатов.

Похожие задачи о потере устойчивости цилиндрических оболочек рассмотрены в работах С. Кириакидеса и Ч. Д. Бэбкока [236, 298, 299], которые посвящены явлению распространения вмятин в стальных трубчатых элементах с учетом пластических свойств материала. Распространение вмятин показано как в условиях воздушной и водной сред, так и в полости ограничивающего основания. Также в работе Э. Чейтера, Дж. У. Хатчинсона и К. У. Нила [236] рассмотрено распространение выпучины по линейно упругому стержню, лежащему на нелинейно упругом основании. Задача исследования состояла в выявлении общих закономерностей распространения вмятин в упругих конструкциях.

5.1 Верификация численного метода на примере определения критической нагрузки равномерно сжатого кольца

В целях верификации численной методики определения критических нагрузок рассмотрена задача о потере устойчивости равномерно сжатого

кольца, точное аналитическое решение которой приведено в книге С. П. Тимошенко [235].

Составлена плоская расчетная схема кольца диаметром $D = 5$ м из стержневых элементов. Поперечное сечение задано прямоугольным: ширина $b = 1$ м, высота $h = 0.25$ м. Кольцо имеет следующие характеристики: модуль упругости $E = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.18$. Материал принят неограниченно линейно упругим.

Для получения решения кольцу необходимо задать начальное несовершенство в виде небольшого изменения его круглой формы равновесия (овализации) путем приложения в точках A и B двух противоположно направленных сил величиной 3500 кН, от действия которых точки A и B смещаются к центру кольца на 0.1 м. Необходимо определить критическую нагрузку, при которой происходит потеря устойчивости кольца. Расчет проведен в линейной постановке. На рисунке 5.1 показана расчетная схема. Штриховой линией изображена начальная круглая форма кольца, а сплошная линия показывает измененное овализированное кольцо, к которому приложена равномерно распределенная нагрузка q .

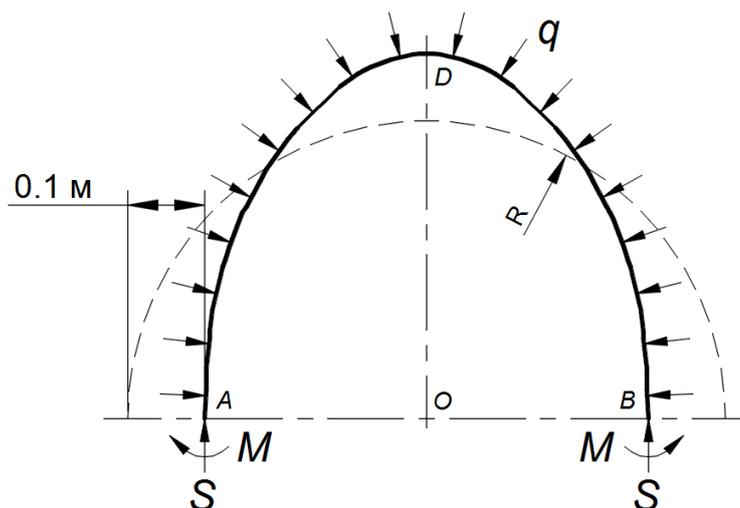


Рисунок 5.1. Расчетная схема для определения критической нагрузки равномерно сжатого кольца

Нижняя часть кольца заменена продольной сжимающей силой S и изгибающим моментом M .

По результатам численного расчета критическая нагрузка составила 7672 кН/м. По книге С. П. Тимошенко [235] критическая нагрузка для случая равномерного сжатия кольца с небольшим изменением круглой формы равновесия определена по следующей формуле:

$$q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3}. \quad (5.1)$$

Подставив в формулу (5.1) исходные данные, получим:

$$q_{кр} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 0.13 \cdot 10^{-2}}{2.5^3} = 7488 \text{ (кН/м)}. \quad (5.2)$$

Разница с численным решением составила около 2 %.

Полученный результат говорит о хорошей сходимости численного метода с аналитическим решением из книги С. П. Тимошенко [235].

5.2 Определение и анализ критической нагрузки и форм потери устойчивости стержневой модели системы «оболочка – основание»

Расчет проведен в плоской постановке при различных условиях взаимодействия оболочки с окружающим основанием.

1. Линейный расчет с двусторонними связями между оболочкой и окружающим основанием. Модель предполагает полный контакт между оболочкой и окружающим основанием, не учитывающий возможность нарушения контакта (отлипания). Материалы заданы линейно упругими.

2. Линейный расчет с односторонними связями между оболочкой и окружающим основанием. Модель взаимодействует с основанием посредством упругих контактов, работающих только на сжатие. Материалы заданы линейно упругими.

3. Нелинейный расчет с односторонними связями между оболочкой и окружающим основанием. Модель взаимодействует с основанием

посредством упругих контактов, работающих только на сжатие, но в отличие от второго варианта при расчете учтена геометрическая нелинейность. Материалы заданы линейно упругими.

Исследования проведены на базе конечно-элементного программного комплекса MSC PATRAN – NASTRAN. Первая расчетная модель составлена из стержневых элементов оболочки и контактных элементов, имитирующих грунт, с коэффициентом постели упругого основания $k = 100$ МПа/м (соответствует глинистому основанию) [247]. Жесткость контактного элемента при сжатии вычислена по формуле $S_t = k \cdot b \cdot L_e = 2.45 \cdot 10^7$ Н/м, где k – коэффициент постели упругого основания, b – ширина элемента оболочки, L_e – длина элемента оболочки. Диаметр оболочки составляет $D = 5$ м, поперечное сечение принято прямоугольным $1 \text{ м} \times 0.25 \text{ м}$.

Глубина заложения продольной оси оболочки составляет $3.5D$. Объемный вес основания принят $\gamma = 1600$ кг/м³, коэффициент поперечной деформации $\mu = 0.3$. Вертикальная нагрузка q_v , действующая на оболочку, определена от действия собственного веса основания:

$$q_v = \gamma z, \quad (5.3)$$

где γ – объемный вес основания; z – расстояние от поверхности основания.

Боковая нагрузка q_r , действующая на оболочку, определена с помощью коэффициента бокового давления ξ :

$$q_r = \xi \gamma z, \quad (5.4)$$

где ξ – коэффициент бокового давления.

В результате получены следующие распределенные нагрузки, приложенные к оболочке: вертикальная постоянная нагрузка $\gamma z_1 = 235.4$ кН/м, горизонтальная трапециевидная нагрузка – при $z_1 = 3D$ составляет $\xi \gamma z_1 = 94.2$ кН/м, при $z_2 = 4D$ составляет $\xi \gamma z_2 = 125.5$ кН/м. На рисунке 5.2 показана схема нагружения оболочки.

Также в каждой расчетной модели присутствует горизонтальная возмущающая сила, приложенная к верхней точке оболочки. Данная сила

вынуждает систему среагировать на кососимметричную форму потери устойчивости, по которой возможна потеря устойчивости расчетной модели при меньшей критической нагрузке. Величина горизонтальной возмущающей силы составила 500 Н.

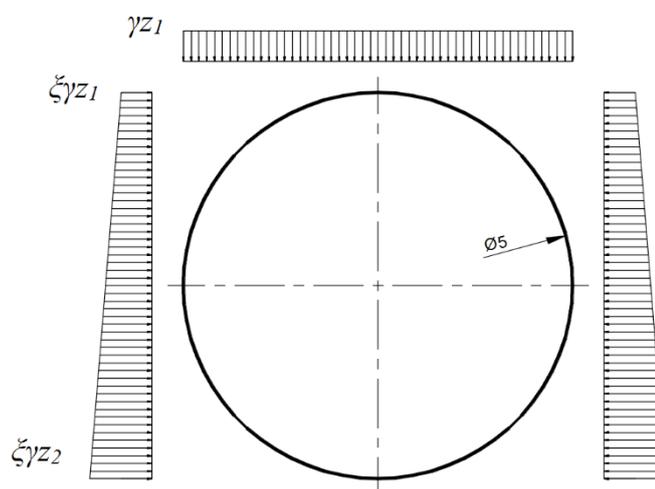


Рисунок 5.2. Схема нагружения оболочки

Материал оболочки принят неограниченно линейно упругим. Физико-механические свойства оболочки соответствуют свойствам бетона: модуль упругости $E_{об} = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.18$, плотность $\rho_{об} = 2300$ кг/м³. На свободные узлы контактных элементов наложены связи по всем степеням свободы, кроме того, все узлы закреплены от перемещений из плоскости, что обеспечивает геометрическую неизменяемость системы.

5.2.1 Линейный расчет стержневой модели системы «оболочка – основание» с двусторонними связями

Упругий контакт между оболочкой и окружающим основанием задан двусторонним, работающим как на сжатие, так и на растяжение. Такая модель

достаточно широко распространена в расчетах подземных сооружений. Задача решена в линейной постановке.

Следует отметить, что рассмотренная модель с двусторонним контактом имеет существенный недостаток: в верхней зоне контакта элементы оболочки «тянут» за собой элементы основания, что на практике не происходит.

Расчет устойчивости выполнен при помощи процедуры определения собственных значений методом Ланцоша, описание которого приведено в параграфе 2.10.

На рисунке 5.3 представлена форма потери устойчивости стержневой модели системы «оболочка – основание». Критическая нагрузка определена как «запас устойчивости» по отношению к действующей нагрузке γz_1 . Величина критической нагрузки составляет $235\gamma z_1$. На рисунке 5.4 показаны контактные элементы, работающие на сжатие.

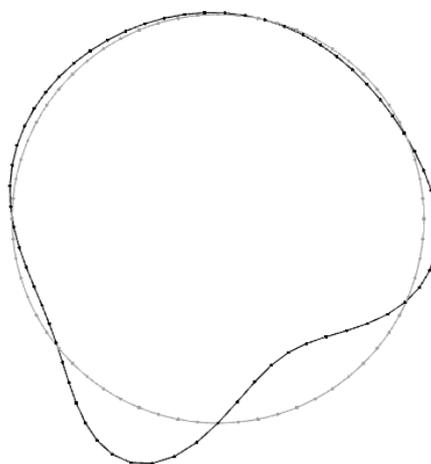


Рисунок 5.3. Форма потери устойчивости стержневой модели системы «оболочка – основание» при линейном расчете с двусторонними связями

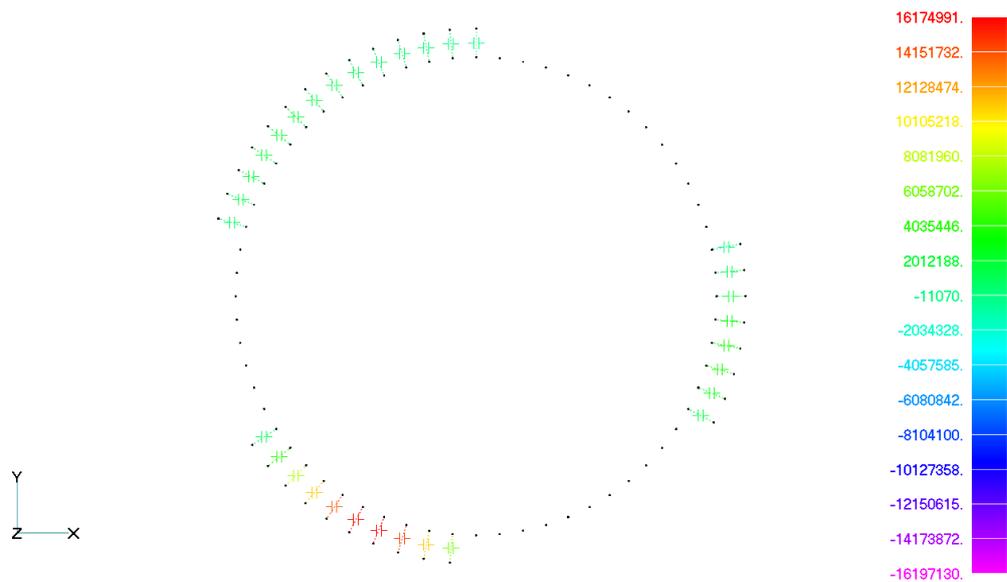


Рисунок 5.4. Распределение усилий в контактных элементах стержневой модели системы «оболочка – основание» при линейном расчете с двусторонними связями

5.2.2 Линейный расчет стержневой модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями

Упругий контакт между оболочкой и окружающим основанием задан односторонним, работающим только на сжатие, имеющим нулевую жесткость при растяжении.

В данной модели вместо того, чтобы задавать контактным элементам нулевую жесткость на растяжение, проведен предварительный расчет с последующим удалением контактных элементов, в которых возникло растягивающее усилие (рисунок 5.5). После этого проведен повторный расчет.

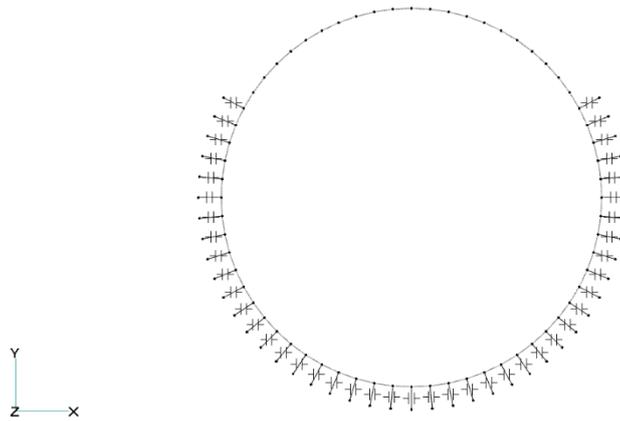


Рисунок 5.5. Вид отредактированной стержневой модели системы «оболочка – основание» при линейном расчете с односторонними связями после предварительного расчета

Обратим внимание, что такая модель основания реалистичнее первой модели, так как здесь основание работает только на сжатие.

Расчет устойчивости выполнен при помощи процедуры определения собственных значений методом Ланцоша. На рисунке 5.6 представлена форма потери устойчивости стержневой модели системы «оболочка – основание». Величина критической нагрузки составила $105\gamma z_1$. По результатам повторного расчета зона отлипания изменилась. На рисунке 5.7 показаны контактные элементы, работающие на сжатие после повторного расчета.

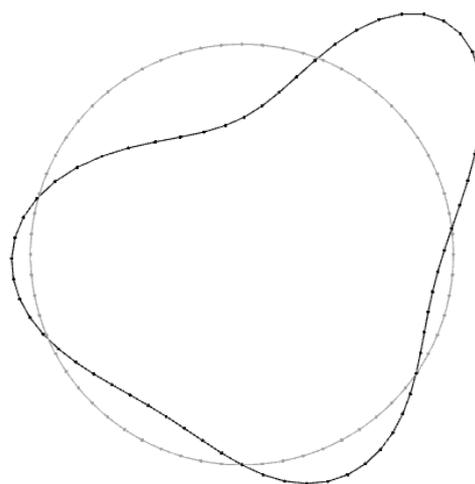


Рисунок 5.6. Форма потери устойчивости стержневой модели системы «оболочка – основание» при линейном расчете с односторонними связями

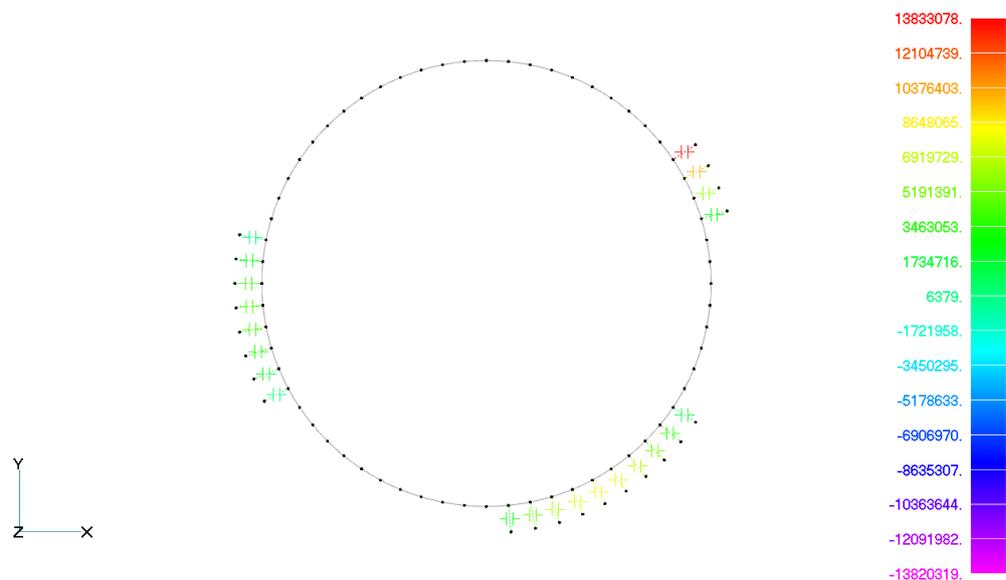


Рисунок 5.7. Распределение усилий в контактных элементах стержневой модели системы «оболочка – основание» при линейном расчете с односторонними связями

5.2.3 Нелинейный расчет стержневой модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями

Упругий контакт между оболочкой и окружающим основанием задан односторонним, работающим только на сжатие, имеющим нулевую жесткость при растяжении.

В отличие от предыдущих моделей здесь применен нелинейный расчет. Нелинейность обусловлена необходимостью посредством итерационного процесса отыскания зоны растягивающихся контактных элементов (область отлипания оболочки от основания) и изменяющегося во времени положения оболочки. За счет возможного отлипания величина критической нагрузки уменьшилась.

На рисунке 5.8 представлен деформированный вид стержневой модели системы «оболочка – основание» перед потерей устойчивости. Величина критической нагрузки составила $69\gamma z_1$. На рисунке 5.9 показаны контактные элементы, работающие на сжатие перед потерей устойчивости. На

рисунке 5.10 представлена форма потери устойчивости стержневой модели системы «оболочка – основание» после потери устойчивости. Эту форму следует рассматривать как чисто математический результат. Практического значения она не имеет, так как на самом деле внизу оболочки расположен массив грунта, который в данной задаче не учитывался. Данный массив не дает реализоваться указанной послекритической форме.

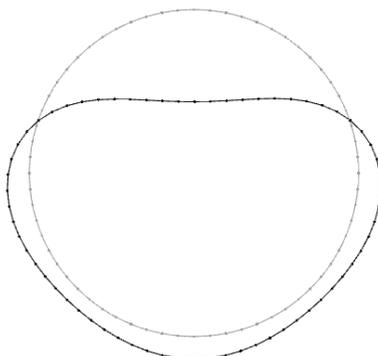


Рисунок 5.8. Деформированный вид стержневой модели системы «оболочка – основание» при нелинейном расчете с односторонними связями перед потерей устойчивости

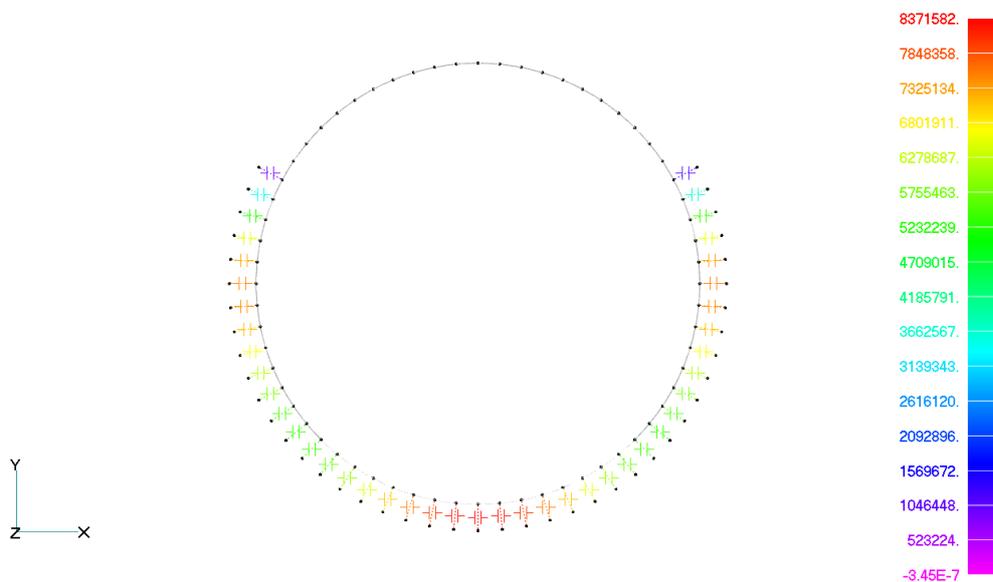


Рисунок 5.9. Распределение усилий в контактных элементах стержневой модели системы «оболочка – основание» при нелинейном расчете с односторонними связями перед потерей устойчивости

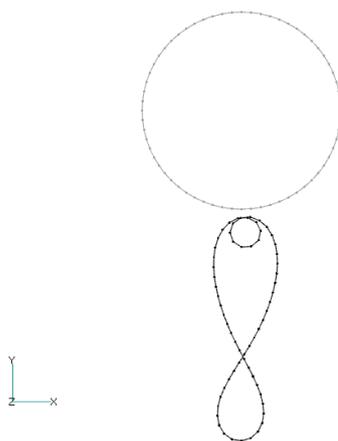


Рисунок 5.10. Деформированный вид стержневой модели системы «оболочка – основание» при нелинейном расчете с односторонними связями после потери устойчивости

На рисунке 5.11 показана кривая зависимости перемещения верхнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки. На графике виден момент потери устойчивости системы. Для учета закритического поведения системы выполнен дополнительный расчет с использованием метода «длины дуги» (Arc Length Method). Полученный график зависимости перемещения верхнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки также показан на рисунке 5.11.

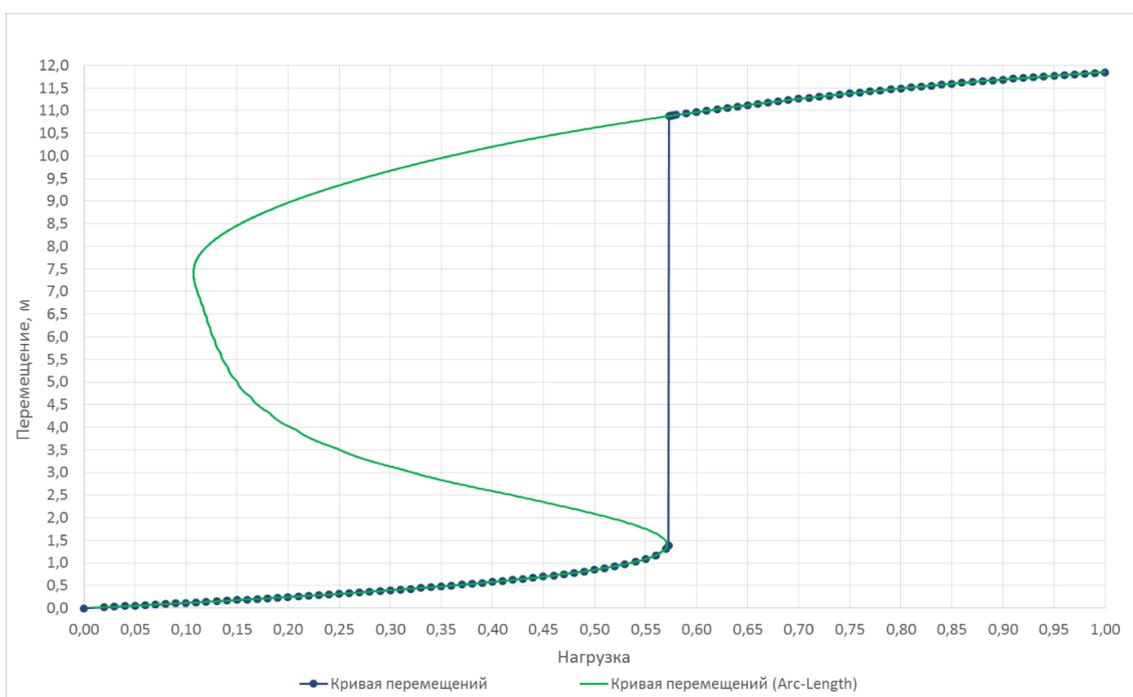


Рисунок 5.11. Кривые зависимости перемещения верхнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки стержневой модели системы «оболочка – основание»

В таблице 5.1 приведены значения критической нагрузки для трех выполненных расчетных случаев стержневой модели системы «оболочка – основание».

Таблица 5.1

Вид анализа	Величина критической нагрузки
Линейный (с двусторонними связями)	$235\gamma z_1$
Линейный (с односторонними связями)	$105\gamma z_1$
Нелинейный	$69\gamma z_1$

Из полученных результатов следует, что в расчетах на устойчивость при больших перемещениях системы нелинейный расчет, который использует пошаговое приложение нагрузки, учитывая деформации системы, дает критическую нагрузку ниже, чем линейные расчеты, при которых перемещения малые [127].

5.3 Определение критической нагрузки и форм потери устойчивости плоской модели системы «оболочка – основание»

Численный анализ плоской системы «оболочка – основание» выполнен в программном комплексе MSC PATRAN–NASTRAN.

Расчетная модель составлена из стержневых элементов оболочки, двумерных плоских четырехузловых элементов, имитирующих основание, и контактных элементов между оболочкой и основанием.

Диаметр оболочки составляет $D = 5$ м, поперечное сечение принято прямоугольным $1 \text{ м} \times 0.25 \text{ м}$. Расстояние от края оболочки до боковых торцов окружающего основания по рекомендациям Г. Н. Савина [215] для плоской задачи принято равным $L = 5D$, где D – диаметр оболочки. Расстояние от края

оболочки до верхней и нижней границ окружающего основания принято равным $3D$. К расчетной модели приложена нагрузка от собственного веса основания и оболочки. Также в каждой расчетной модели присутствует горизонтальная возмущающая сила, приложенная к верхней точке оболочки. Данная сила вынуждает систему среагировать на кососимметричную форму потери устойчивости. Величина горизонтальной возмущающей силы составляет 500 Н. Боковые и нижняя границы окружающего основания закреплены от перемещений по нормальям к поверхностям. Оболочка по торцам имеет аналогичные опорные закрепления, обеспечивающие геометрическую неизменяемость расчетной модели. Материалы приняты неограниченно линейно упругими. Физико-механические свойства оболочки соответствуют свойствам бетона: модуль упругости $E_{об} = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.18$, плотность $\rho_{об} = 2300$ кг/м³. Физико-механические свойства окружающего основания приняты следующими: модуль деформации $E_{сп} = 14$ МПа, коэффициент поперечной деформации $\mu_{сп} = 0.3$, плотность $\rho_{сп} = 1600$ кг/м³.

Расчеты плоской модели системы «оболочка – основание» с жесткими и с односторонними связями между оболочкой и окружающим основанием проведены в линейной и нелинейной постановках соответственно.

5.3.1 Линейный расчет плоской модели системы «оболочка – основание» с жесткими связями

Расчет устойчивости выполнен при помощи процедуры определения собственных значений методом Ланцоша. Связи между оболочкой и окружающим основанием заданы жесткими. На рисунке 5.12 представлена форма потери устойчивости плоской модели системы «оболочка-основание». Потеря устойчивости происходит в нижних слоях основания. Величина критической нагрузки составила $10.4\gamma z_1$.

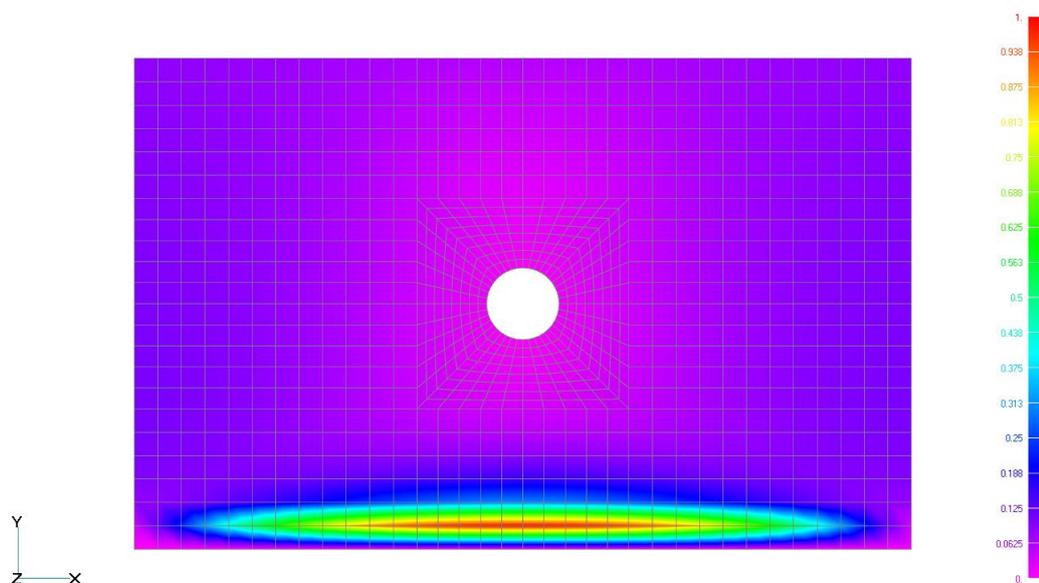


Рисунок 5.12. Форма потери устойчивости плоской модели системы «оболочка – основание» при линейном расчете с односторонними связями

5.3.2 Нелинейный расчет плоской модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями

Связи между оболочкой и окружающим основанием заданы односторонними, жесткости которых устремлены к бесконечности при сжатии ($K_a = 1 \cdot 10^7$ Н/м) и к нулю при растяжении ($K_b = 1 \cdot 10^{-7}$ Н/м). В отличие от предыдущей модели здесь применен нелинейный расчет. Нелинейность обусловлена необходимостью посредством итерационного процесса отыскания зоны растягивающихся контактных элементов (область отлипания оболочки от основания) и изменяющегося во времени положения оболочки. За счет учета нелинейности величина критической нагрузки увеличилась.

На рисунке 5.13 представлено поле полных перемещений плоской модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки. Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Величина критической нагрузки составила $23.4\gamma z_1$.

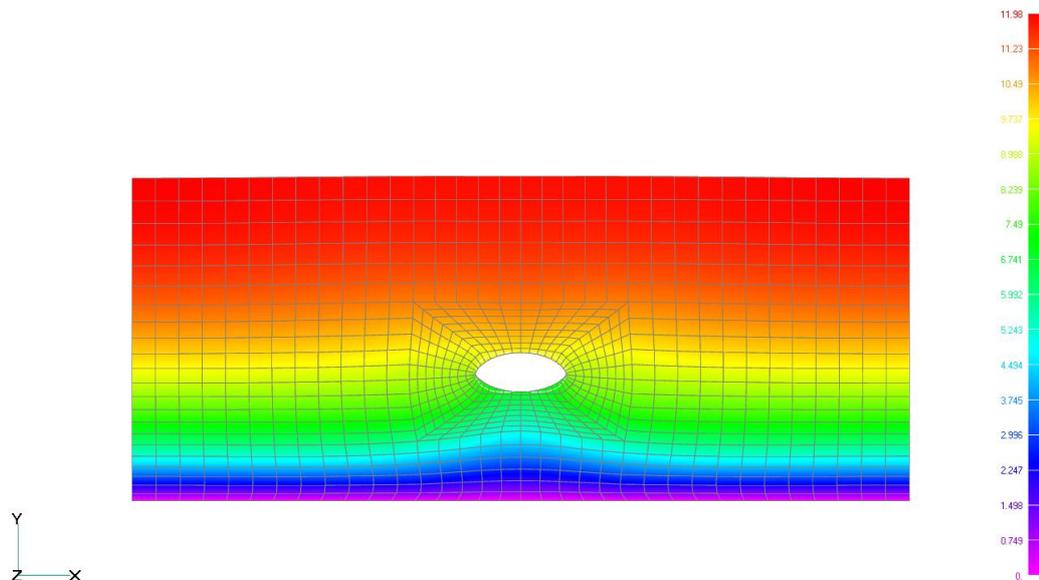


Рисунок 5.13. Поле полных перемещений плоской модели системы «оболочка – основание» при нелинейном расчете с односторонними связями

На рисунке 5.14 показана кривая зависимости перемещения верхнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

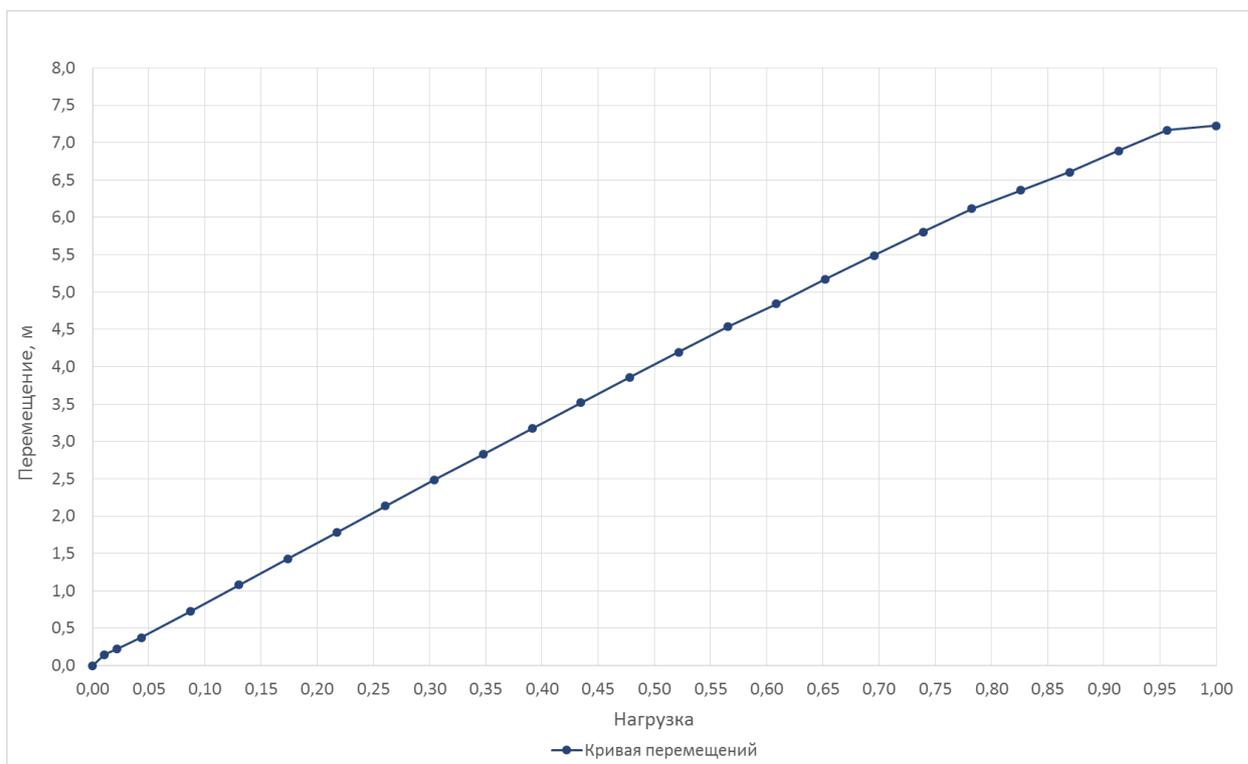


Рисунок 5.14. Кривая зависимости перемещения верхнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки плоской модели системы «оболочка – основание»

Ниже в таблице 5.2 приведены значения критической нагрузки для двух выполненных расчетов плоской модели системы «оболочка – основание»:

Таблица 5.2

Вид анализа	Величина критической нагрузки
Линейный	$10.4\gamma z_I$
Нелинейный	$23.4\gamma z_I$

При переходе от стержневой модели системы «оболочка – основание» к плоской значение критической нагрузки снизилось с $69\gamma z_I$ до $23.4\gamma z_I$. Таким образом, по результатам расчета плоской модели системы «оболочка – основание» с использованием двумерных плоских четырехузловых элементов основания получены значительно меньшие значения критической нагрузки относительно стержневой модели системы «оболочка – основание», где основание аппроксимировано контактными элементами [127].

Далее рассмотрена пространственная модель системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки.

5.4 Определение критической нагрузки и форм потери устойчивости пространственной модели системы «оболочка – основание». Случай бесконечно длинной цилиндрической оболочки

Численный анализ пространственной системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки выполнен в программном комплексе ANSYS. К расчету из бесконечно длинной цилиндрической оболочки и окружающего основания выделена пространственная полоса шириной 1 м. Расчетная модель составлена из двумерных плоских четырехузловых элементов оболочки и трехмерных

тетраэдральных десятиузловых элементов окружающего основания. Взаимодействие между оболочкой и окружающим основанием обеспечено с помощью контактных пар, нанесенных на соответствующие поверхности.

Расчет проведен в пространственной постановке при различных условиях взаимодействия оболочки с окружающим основанием.

1. Линейный расчет с двусторонними связями между оболочкой и окружающим основанием. Модель предполагает полный контакт между оболочкой и окружающим основанием, не учитывающий возможность нарушения контакта (отлипания). Материалы заданы линейно упругими.

2. Нелинейный расчет с односторонними связями между оболочкой и окружающим основанием. Оболочка взаимодействует с основанием посредством контактных пар без учета коэффициента трения. Материалы заданы линейно упругими.

3. Нелинейный расчет с односторонними связями между оболочкой и окружающим основанием. Оболочка взаимодействует с основанием посредством контактных пар с учетом коэффициента трения. Материалы заданы линейно упругими.

4. Нелинейный расчет с односторонними связями между оболочкой и окружающим основанием. Оболочка взаимодействует с основанием посредством контактных пар без учета коэффициента трения. Свойства материалов заданы упруго-пластическими моделями.

5. Нелинейный расчет с односторонними связями между оболочкой и окружающим основанием. Оболочка взаимодействует с основанием посредством контактных пар с учетом коэффициента трения. Свойства материалов заданы упруго-пластическими моделями.

5.4.1 Линейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с двусторонними связями при линейно упругой модели материала

Диаметр оболочки составляет $D = 5$ м, поперечное сечение принято прямоугольным $1 \text{ м} \times 0.25 \text{ м}$. Расстояние от края оболочки до боковых торцов окружающего основания по рекомендациям С. Б. Косицына и Чан Суан Линя [251] для пространственной задачи принято равным $L = 5D$, где D – диаметр оболочки. Расстояние от края оболочки до верхней и нижней границ окружающего основания принято равным $3D$. К расчетной модели приложена нагрузка от собственного веса основания и оболочки. В этот и последующие расчетные случаи добавлена горизонтальная возмущающая сила, приложенная к верхней точке оболочки. Данная сила вынуждает систему среагировать на кососимметричную форму потери устойчивости. Величина горизонтальной возмущающей силы составляет 500 Н. Боковые и нижняя границы окружающего основания закреплены от перемещений по нормальям к поверхностям. Оболочка по торцам имеет аналогичные опорные закрепления, обеспечивающие геометрическую неизменяемость расчетной модели.

Материалы приняты неограниченно линейно упругими. Физико-механические свойства оболочки соответствуют свойствам бетона: модуль упругости $E_{об} = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.18$, плотность $\rho_{об} = 2300$ кг/м³. Физико-механические свойства окружающего основания приняты следующими: модуль деформации $E_{гр} = 14$ МПа, коэффициент поперечной деформации $\mu_{гр} = 0.3$, плотность $\rho_{гр} = 1600$ кг/м³.

Конечно-элементная сетка оболочки и окружающего массива связаны по принципу «узел в узел». Общий вид расчетной модели представлен на рисунке 5.15.

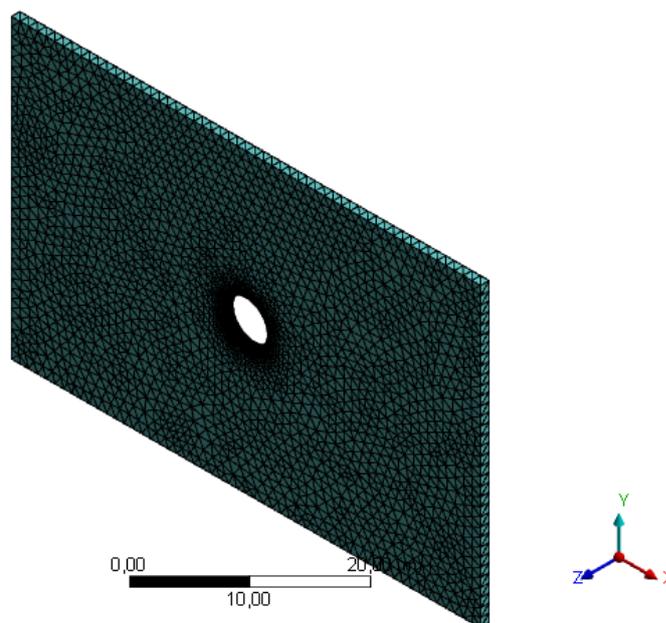


Рисунок 5.15. Общий вид пространственной расчетной модели системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки

В программном комплексе ANSYS существует два метода анализа потери устойчивости: процедура решения задачи на собственные значения или прямое пошаговое решение задачи статики.

Определение критических сил и форм потери устойчивости выполняется с учетом начального напряженно-деформированного состояния рассматриваемой конструкции. Это позволяет использовать процедуру решения задачи на собственные значения в связке с модулем решения задач механики деформируемого твердого тела в статической постановке, позволяющим предварительно выполнить линейный расчет напряженно-деформированного состояния конструкции.

На рисунке 5.16 представлена форма потери устойчивости пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки. Потеря устойчивости происходит в нижних слоях основания. Величина критической нагрузки составила $35.1 \gamma z_l$.

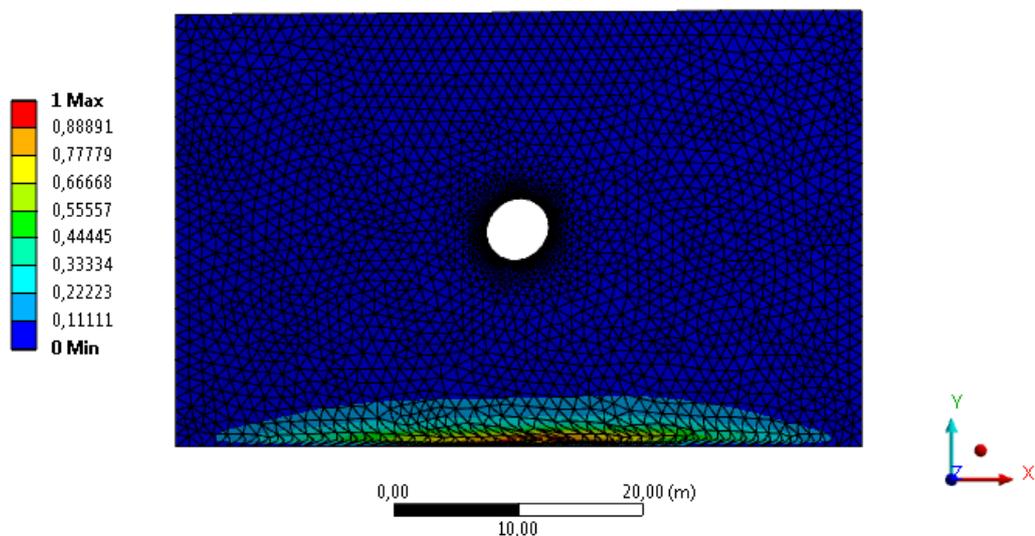


Рисунок 5.16. Форма потери устойчивости пространственной модели системы «оболочка – основание» при линейном расчете с двусторонними связями

5.4.2 Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями без учета коэффициента трения по линейно упругой модели материала

В отличие от предыдущей модели здесь применен нелинейный расчет. Нелинейность обусловлена необходимостью посредством итерационного процесса отыскания зоны контакта элементов (область отлипания оболочки от основания) и определения изменяющегося во времени положения оболочки. Материалы приняты неограниченно линейно упругими с характеристиками из предыдущего параграфа. Расчет проведен с односторонними связями между оболочкой и окружающим основанием без учета коэффициента трения.

На рисунке 5.17 представлено поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки. Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Величина критической нагрузки составила $33,9\gamma z_1$.

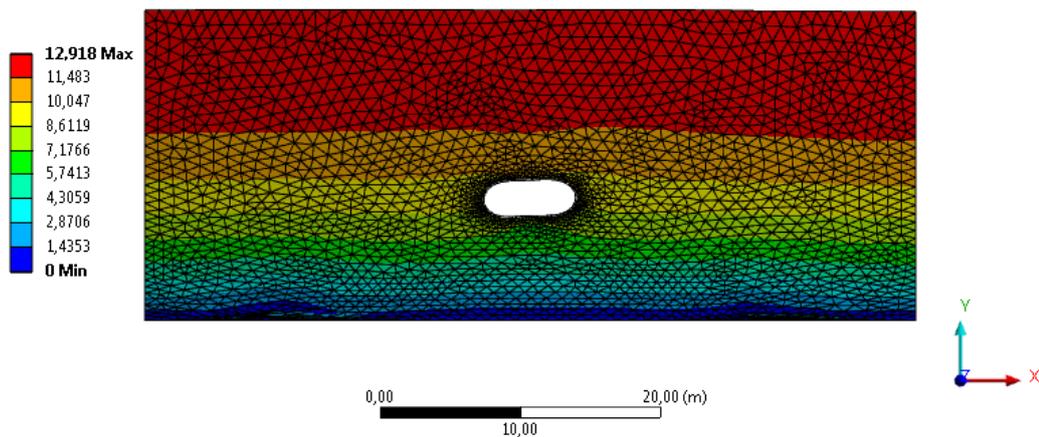


Рисунок 5.17. Поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки

На рисунке 5.18 показана кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

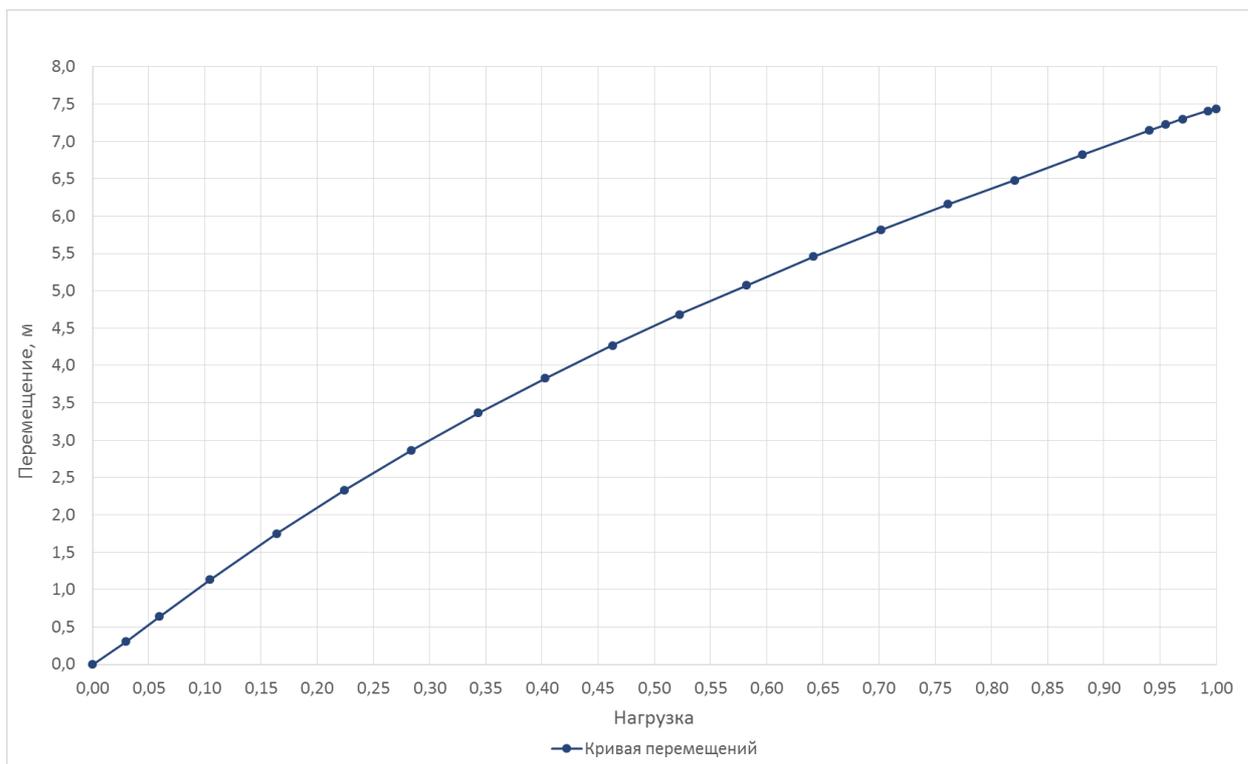


Рисунок 5.18. Кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки пространственной модели системы «оболочка – основание»

5.4.3 Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями и учетом коэффициента трения при линейно упругой модели материала

В данной модели учтен коэффициент трения между оболочкой и окружающим основанием. Коэффициент трения f принят равным 0.6, так как физико-механические свойства основания приняты как для сухого грунта, а свойства оболочки как для бетона [204]. Расчет проведен в нелинейной постановке. Материалы приняты неограниченно линейно упругими с физико-механическими характеристиками из предыдущего параграфа.

На рисунке 5.19 представлено поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки. Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Величина критической нагрузки составила $34.2\gamma z_l$.

По результатам видно, что учет коэффициента трения не приводит к значительным изменениям критической нагрузки относительно предыдущего расчетного случая.

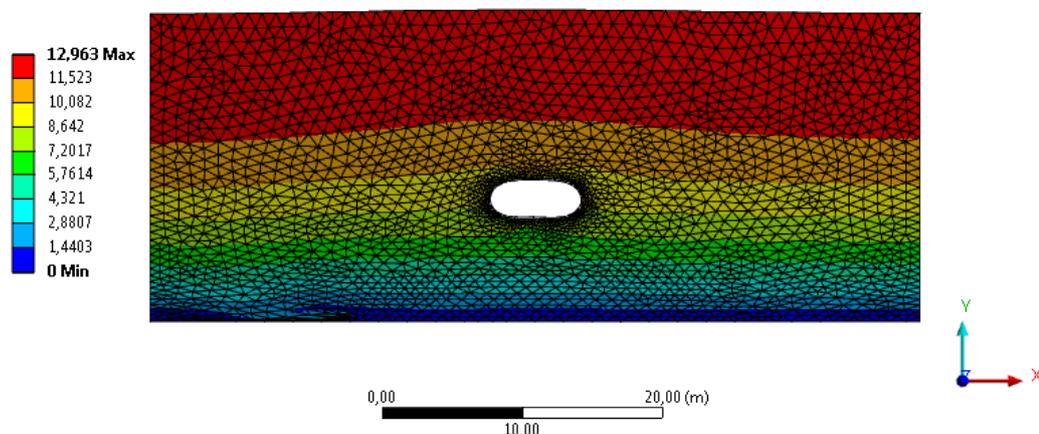


Рисунок 5.19. Поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки

На рисунке 5.20 показана кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

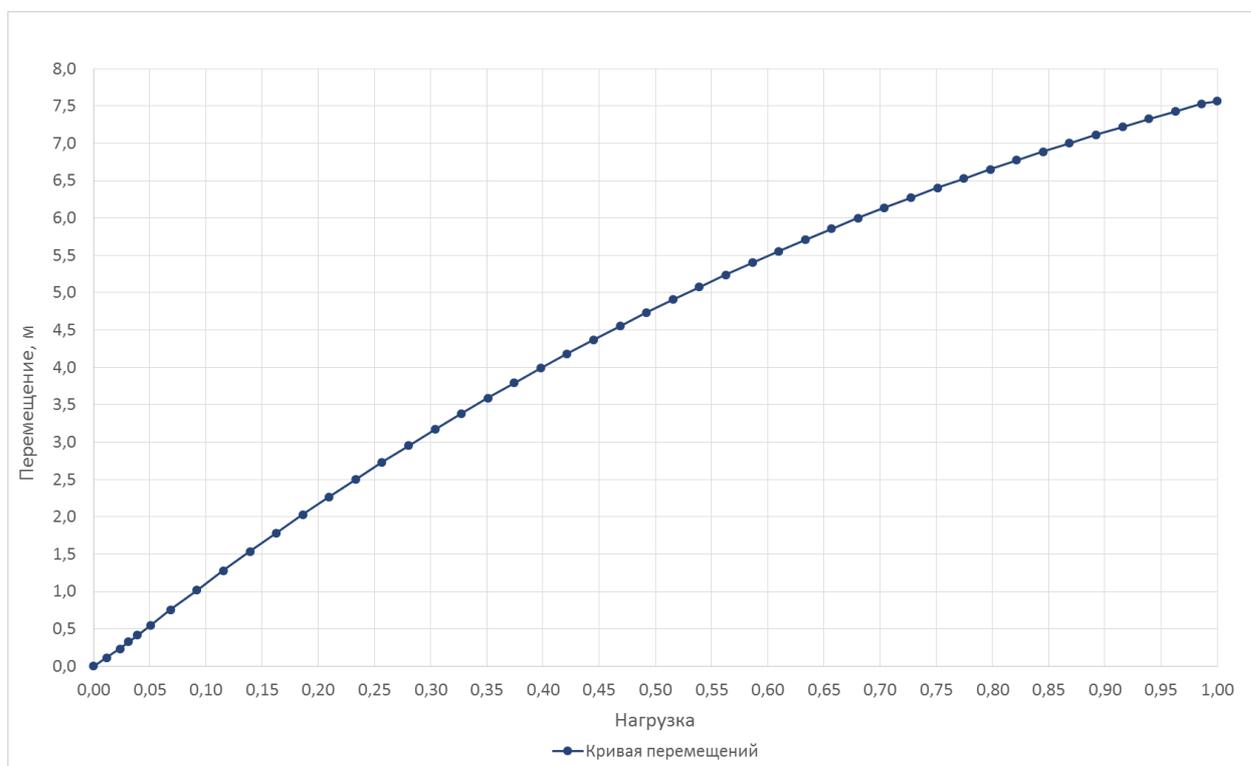


Рисунок 5.20. Кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки пространственной модели системы «оболочка – основание»

5.4.4 Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями без учета коэффициента трения при упруго-пластической модели материала

Известно, что предельное напряжение бетона при сжатии значительно выше предельного напряжения бетона при растяжении. В следующем расчетном случае сделана попытка учесть эту разницу между предельными напряжениями в материале оболочки. Для этого в оболочке задан упруго-пластический материал по модели Друкера – Прагера. Для окружающего

массива задан упруго-пластический материал по модели Мора – Кулона. Расчет проведен в нелинейной постановке. Нелинейность обусловлена необходимостью посредством итерационного процесса отыскания зоны контакта элементов (область отлипания оболочки от основания), определения изменяющегося во времени положения оболочки и развития пластических деформаций в теле оболочки и окружающего основания.

Физико-механические свойства оболочки заданы по модели Друкера – Прагера со следующими параметрами: модуль упругости $E_{об} = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.18$, плотность $\rho_{об} = 2300$ кг/м³, предел прочности при одноосном растяжении $R_t = 2.5$ МПа, предел прочности при одноосном сжатии $R_c = 42.0$ МПа, предел прочности при двухосном сжатии $R_b = 50.0$ МПа. Физико-механические свойства окружающего основания заданы по модели Мора – Кулона со следующими параметрами: модуль деформации $E_{сп} = 14 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент поперечной деформации $\mu_{сп} = 0.3$, плотность $\rho_{сп} = 1600$ кг/м³, сцепление $C_{сп} = 10$ кПа, угол внутреннего трения $\varphi_{сп} = 20^\circ$.

На рисунке 5.21 представлено поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки. Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Величина критической нагрузки составила $3.9\gamma z_1$.

По результатам видно, что с применением упруго-пластической модели материала значение критической нагрузки существенно ниже относительно предыдущих расчетных случаев.

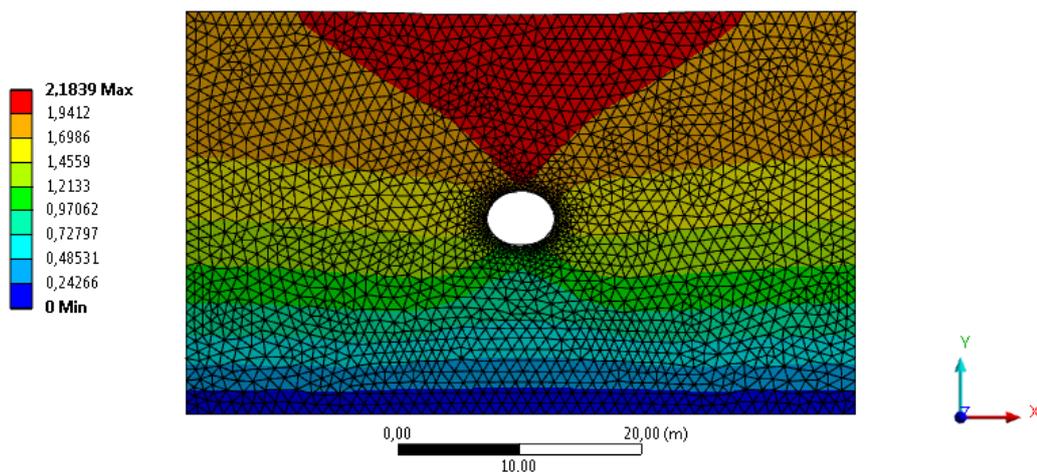


Рисунок 5.21. Поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки

На рисунке 5.22 показана кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

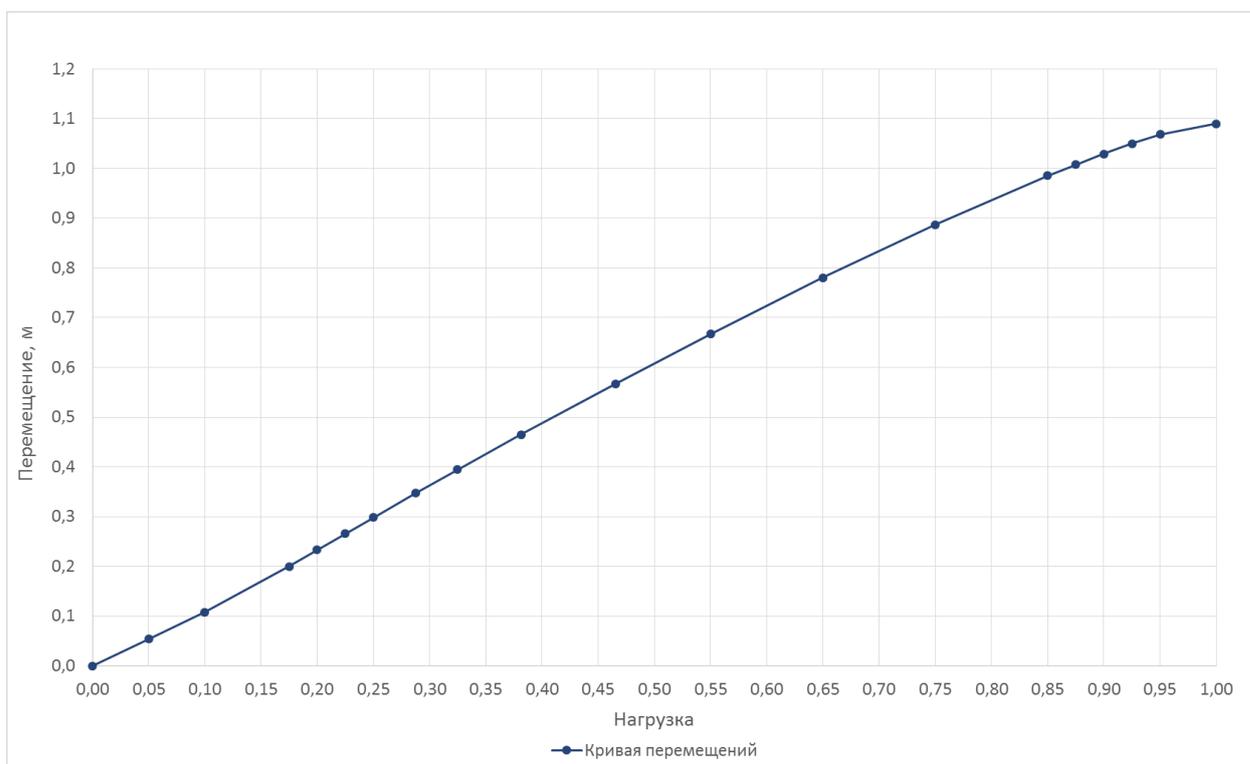


Рисунок 5.22. Кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки пространственной модели системы «оболочка – основание»

5.4.5 Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями с учетом коэффициента трения при упруго-пластической модели материала

В данной модели учтен коэффициент трения между оболочкой и окружающим основанием. Коэффициент трения f принят равным 0.6. Расчет проведен в нелинейной постановке.

Для оболочки принят упруго-пластический материал по модели Друкера – Прагера, для окружающего массива задан упруго-пластический материал по модели Мора – Кулона. Физико-механические характеристики материалов взяты из предыдущего параграфа.

На рисунке 5.23 представлено поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки. Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Распределение пластических деформаций в теле окружающего основания и оболочки показаны на рисунке 5.24 и рисунке 5.25 соответственно. Величина критической нагрузки составила $4.4\gamma z_l$.

Таким образом, учет коэффициента трения в расчетной модели дает несколько большее значение критической нагрузки, как и в случае с линейно упругой моделью материала.

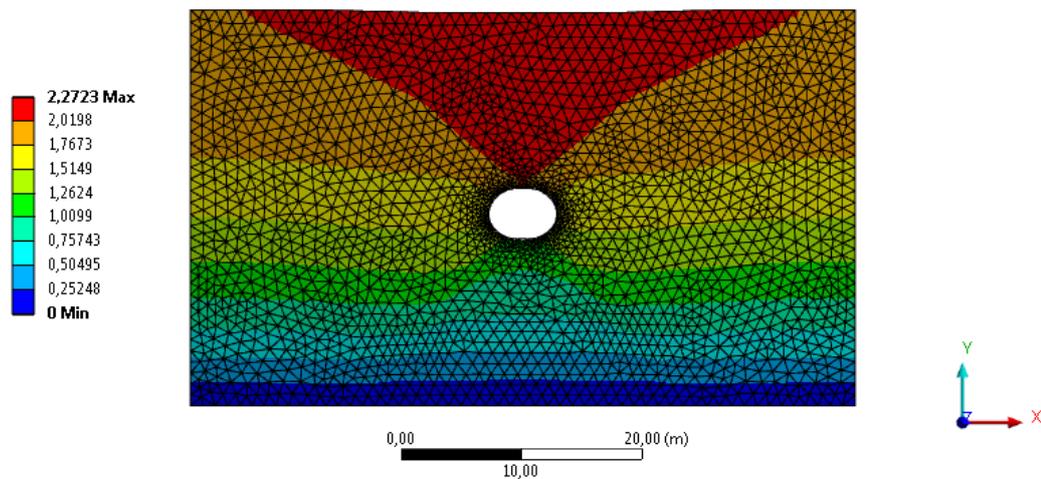


Рисунок 5.23. Поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки

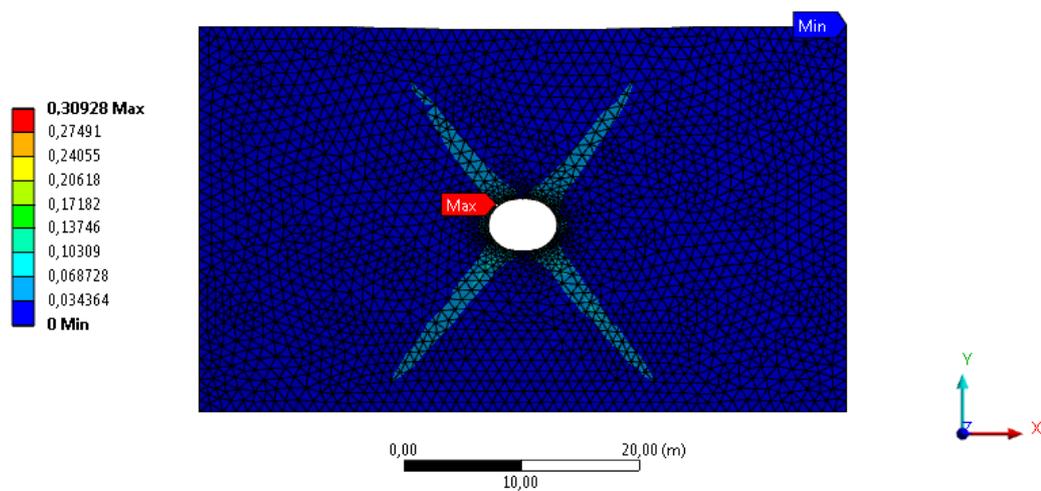


Рисунок 5.24. Распределение пластических деформаций в теле окружающего основания

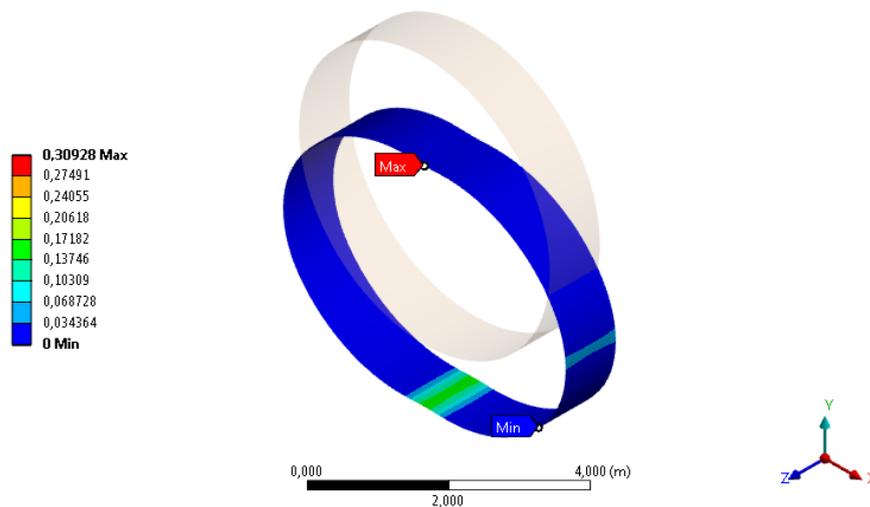


Рисунок 5.25. Распределение пластических деформаций в теле оболочки

Максимальное главное напряжение в теле оболочки составило 2.7 МПа в верхнем своде цилиндрической оболочки. Минимальное главное напряжение составило – 55.5 МПа в нижнем своде. Распределения максимальных и минимальных главных напряжений в теле оболочки показаны на рисунке 5.26 и 5.27 соответственно.

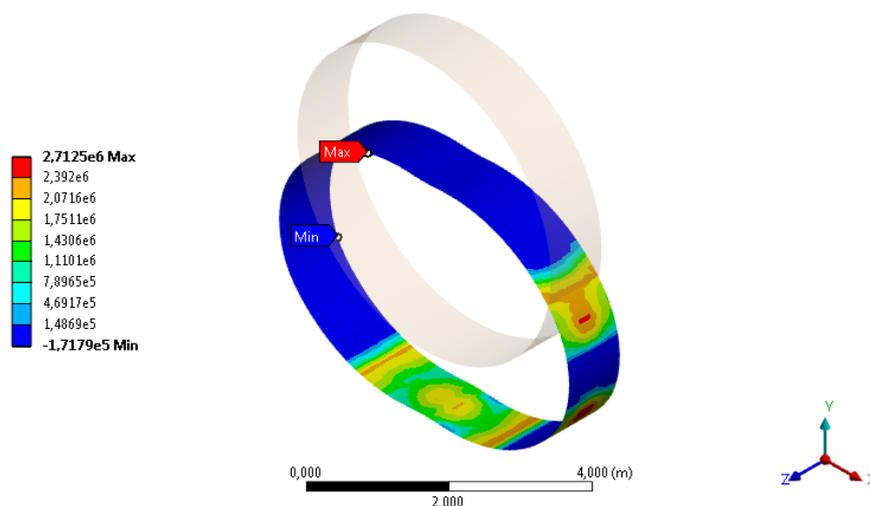


Рисунок 5.26. Распределение максимальных главных напряжений в оболочке

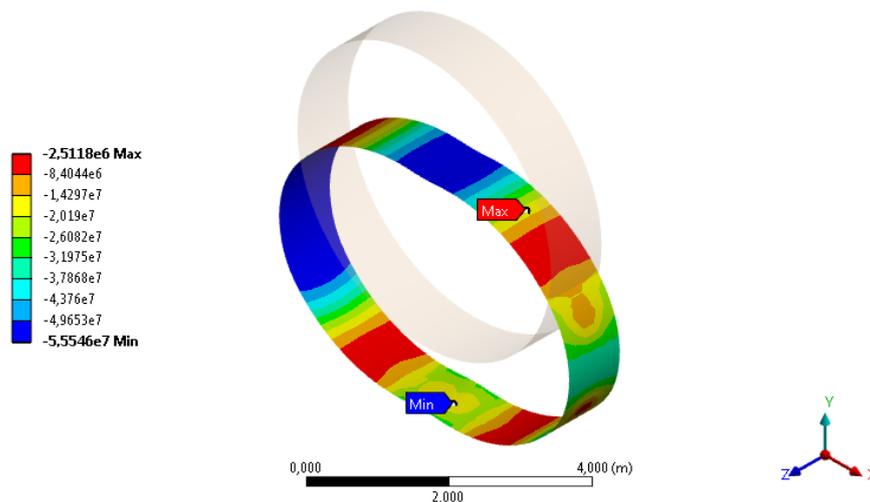


Рисунок 5.27. Распределение минимальных главных напряжений в оболочке

На рисунке 5.28 показана кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

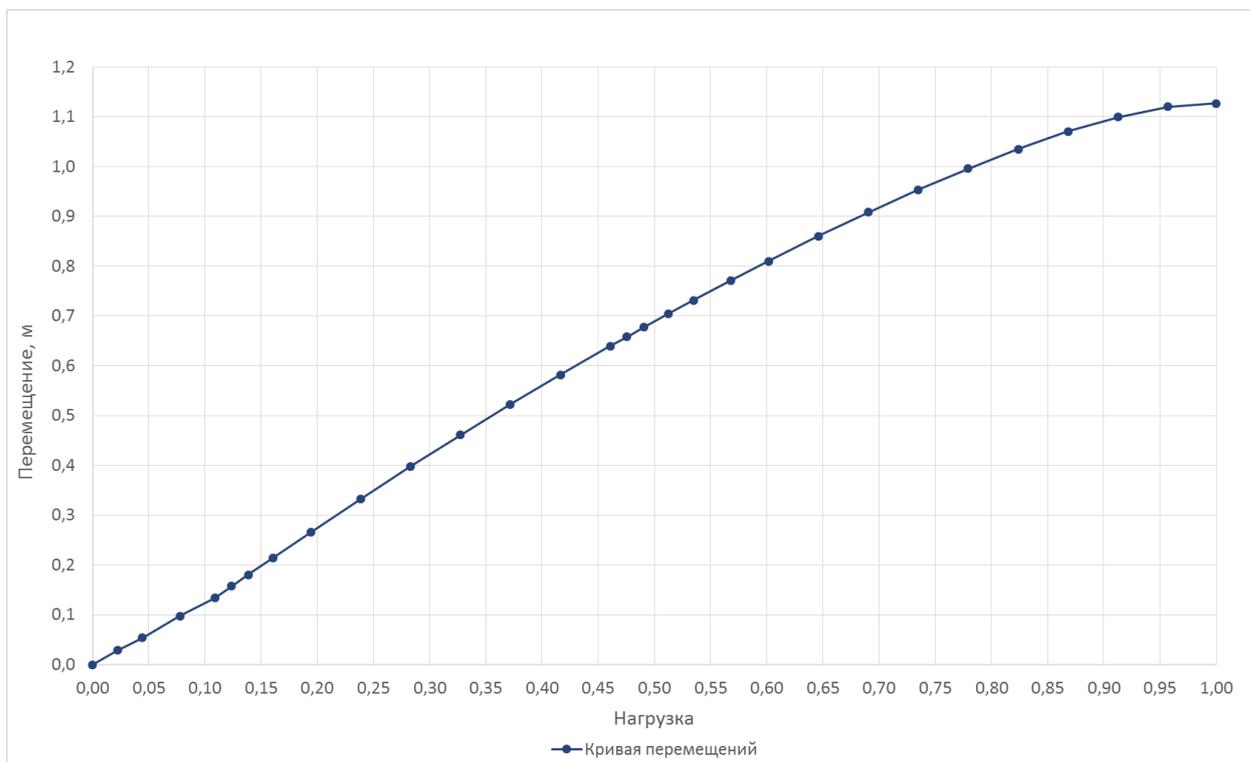


Рисунок 5.28. Кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки пространственной модели системы «оболочка – основание»

В таблице 5.3 приведены значения критической нагрузки для пяти выполненных расчетных случаев пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки.

Таблица 5.3

Вид анализа	Величина критической нагрузки
Линейный расчет с двусторонними связями при линейно упругих моделях материалов	$35.1\gamma z_I$
Нелинейный расчет с односторонними связями без учета коэффициента трения при линейно упругих моделях материалов	$33.9\gamma z_I$
Нелинейный расчет с односторонними связями с учетом коэффициента трения при линейно упругих моделях материалов	$34.2\gamma z_I$
Нелинейный расчет с односторонними связями без учета коэффициента трения при упруго-пластических моделях материалов	$3.9\gamma z_I$
Нелинейный расчет с односторонними связями с учетом коэффициента трения при упруго-пластических моделях материалов	$4.4\gamma z_I$

При переходе от стержневой модели системы «оболочка – основание» к плоской значение критической нагрузки снизилось с $69\gamma z_I$ до $23.4\gamma z_I$, а при переходе от плоской модели к пространственной – с $23.4\gamma z_I$ до $4.4\gamma z_I$. Таким образом, по результатам расчета пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки получены значительно меньшие значения критической нагрузки относительно стержневой и плоской моделей системы «оболочка – основание». В большей степени на это влияет использование упруго-пластической модели материала.

Также необходимо отметить, что «запас устойчивости» $4.4\gamma z_I$ по отношению к действующей нагрузке не является в полной мере достаточным для вводимых в эксплуатацию сооружений [4, 294].

Далее рассмотрена пространственная модель системы «оболочка – основание» с неоднородными физико-механическими свойствами основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки.

5.5 Численный анализ пространственной модели системы «оболочка – основание». Случай неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки

Численный анализ пространственной системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки выполнен в программном комплексе ANSYS. Расчетная модель составлена из двумерных плоских четырехузловых элементов оболочки и трехмерных тетраэдральных десятиузловых элементов окружающего основания. Взаимодействие между оболочкой и окружающим основанием обеспечено с помощью контактных пар, нанесенных на соответствующие поверхности.

Диаметр оболочки составляет $D = 5$ м, толщина оболочки – 0.25 м. Расстояние от края оболочки до боковых торцов окружающего основания по рекомендациям С. Б. Косицына и Чан Суан Линя [251] для пространственной задачи принято равным $L = 5D$. Расстояние от края оболочки до верхней и нижней границ окружающего основания принято равным $3D$. Длина цилиндрической оболочки составляет $6D$. К расчетной модели приложена нагрузка от собственного веса основания и оболочки. В каждый расчетный случай добавлена горизонтальная возмущающая сила, приложенная к верху оболочки. Данная сила вынуждает систему среагировать на кососимметричную форму потери устойчивости. Величина горизонтальной возмущающей силы составляет 500 Н. Боковые и нижняя границы окружающего основания закреплены от перемещений по нормальям к поверхностям. Оболочка по торцам имеет аналогичные опорные закрепления, обеспечивающие геометрическую неизменяемость расчетной модели.

Отличительная особенность пространственной модели системы «оболочка – основание» состоит в неоднородности физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки. Физико-механические свойства оболочки заданы по модели Друкера – Прагера со следующими параметрами: модуль упругости $E_{об} = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0.18$, плотность $\rho_{об} = 2300$ кг/м³, предел прочности при одноосном растяжении $R_t = 2.5$ МПа, предел прочности при одноосном сжатии $R_c = 42.0$ МПа, предел прочности при двухосном сжатии $R_b = 50.0$ МПа. Основание разделено на два равных массива. Физико-механические свойства окружающего основания заданы по модели Мора – Кулона с параметрами, приведенными в таблице 5.4. Общий вид расчетной модели представлен на рисунке 5.29, конечно-элементная сетка цилиндрической оболочки показана на рисунке 5.30.

Таблица 5.4

№	Плотность ρ , кг/м ³	Коэф. попер. деформации μ	Модуль деформации E , МПа	Сцепление C , кПа	Угол внутр. трения φ , °
1	1600	0.30	14	10	20
2	1800	0.30	16	10	25

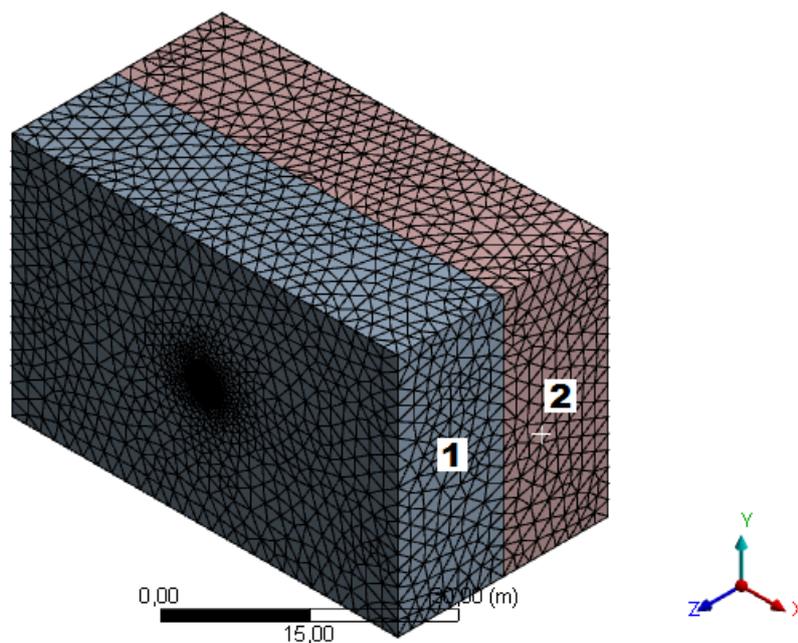


Рисунок 5.29. Общий вид пространственной расчетной модели системы «оболочка – основание»

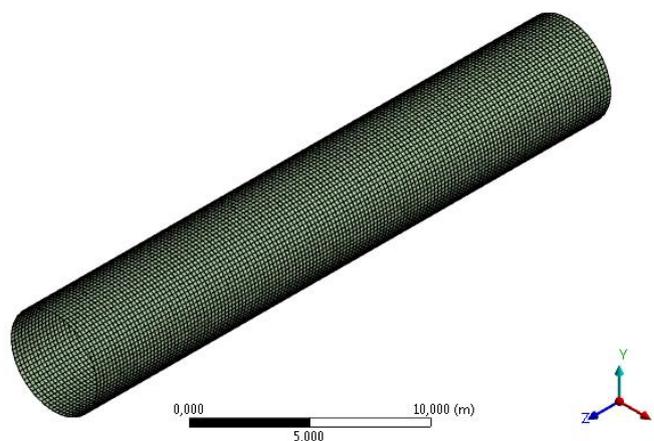


Рисунок 5.30. Конечно-элементная сетка цилиндрической оболочки

Расчет проведен в нелинейной постановке с учетом геометрической нелинейности, односторонних связей между оболочкой и окружающим основанием и упруго-пластических моделей материалов. Составлено два расчетных случая: с учетом и без учета коэффициента трения в контактной паре между оболочкой и окружающим основанием.

5.5.1 Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями без учета коэффициента трения при упруго-пластической модели материала

В данном расчетном случае не учтен коэффициент трения между оболочкой и окружающим основанием. Расчет проведен в геометрически, физически и конструктивно нелинейной постановке. Нелинейность обусловлена необходимостью посредством итерационного процесса отыскания зоны контакта элементов (область отлипания оболочки от основания) и определения изменяющегося во времени положения оболочки.

На рисунке 5.31 представлено поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки. Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Величина критической нагрузки составляет $4.5\gamma z_1$.

На рисунке 5.32 видно, что наибольшие перемещения наблюдаются на участке оболочки, расположенном в пределах первого массива основания с меньшими физико-механическими характеристиками.

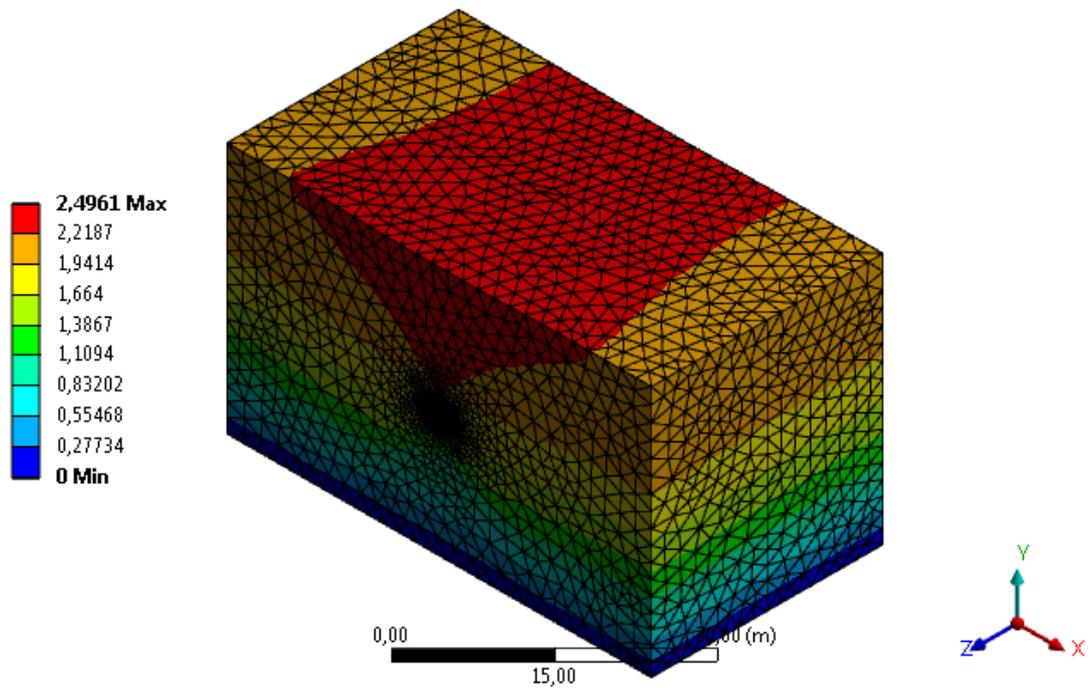


Рисунок 5.31. Поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки

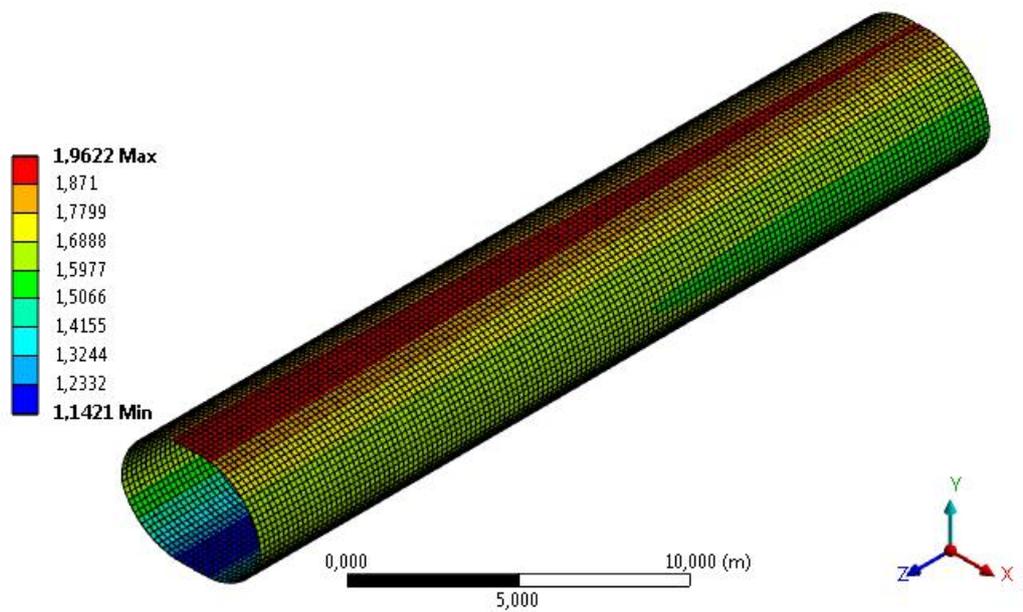


Рисунок 5.32. Поле полных перемещений цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки

На рисунке 5.33 показана кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

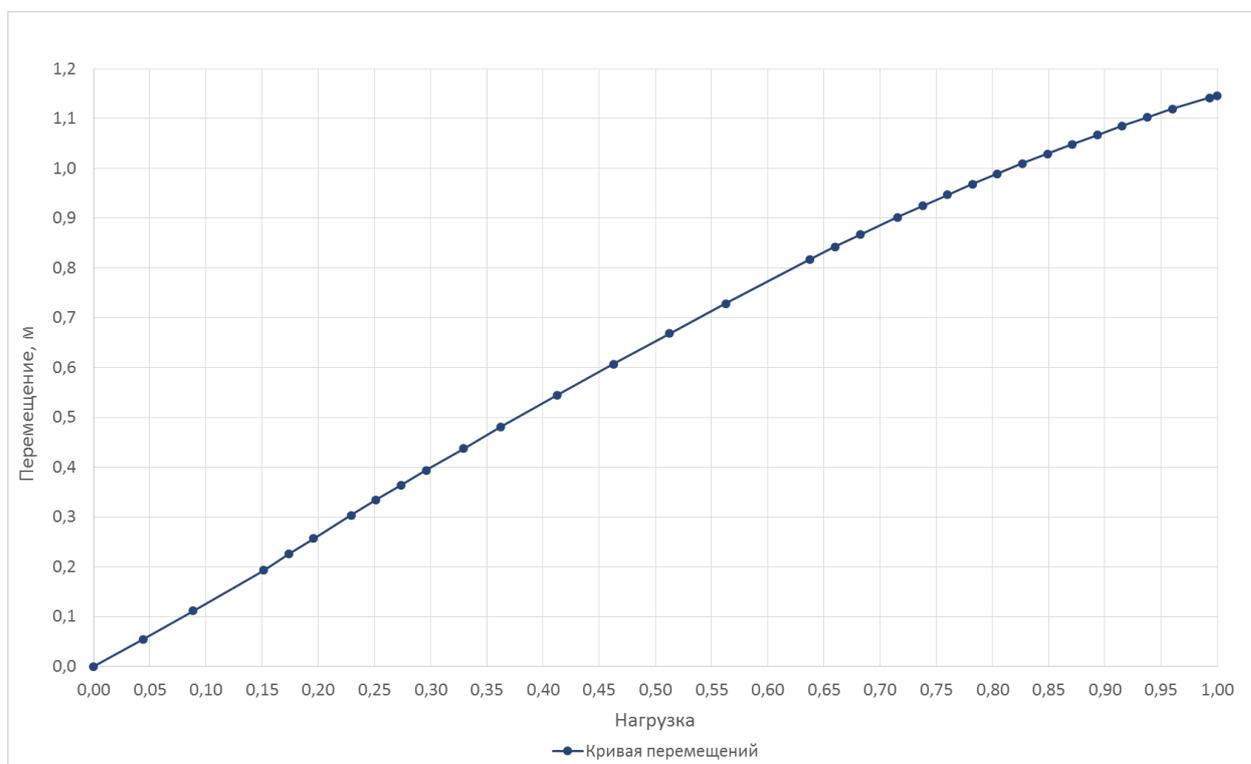


Рисунок 5.33. Кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки пространственной модели системы «оболочка – основание»

5.5.2 Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с односторонними связями с учетом коэффициента трения при упруго-пластической модели материала

В данной модели учтен коэффициент трения между оболочкой и окружающим основанием. Коэффициент трения f принят равным 0.6, так как физико-механические свойства основания приняты как для сухого грунта, а свойства оболочки как для бетона. Расчет проведен в нелинейной постановке, как и в предшествующем разделе.

Для оболочки принят упруго-пластический материал по модели Друкера – Прагера, для окружающего массива задан упруго-пластический материал по модели Мора – Кулона. Физико-механические характеристики материалов взяты из предыдущего раздела.

На рисунке 5.34 представлено поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки. На рисунке 5.35 показано поле полных перемещений цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки в масштабированном виде (вид сбоку левой половины оболочки). Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Распределение пластических деформаций в теле окружающего основания и оболочки показаны на рисунке 5.36 и рисунке 5.37 соответственно. Величина критической нагрузки составила $4.6\gamma z_1$.

Полученные значения критических нагрузок близки к значениям, полученным в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки. Распределения пластических деформаций в теле основания и оболочки также схожи с полученными в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки.

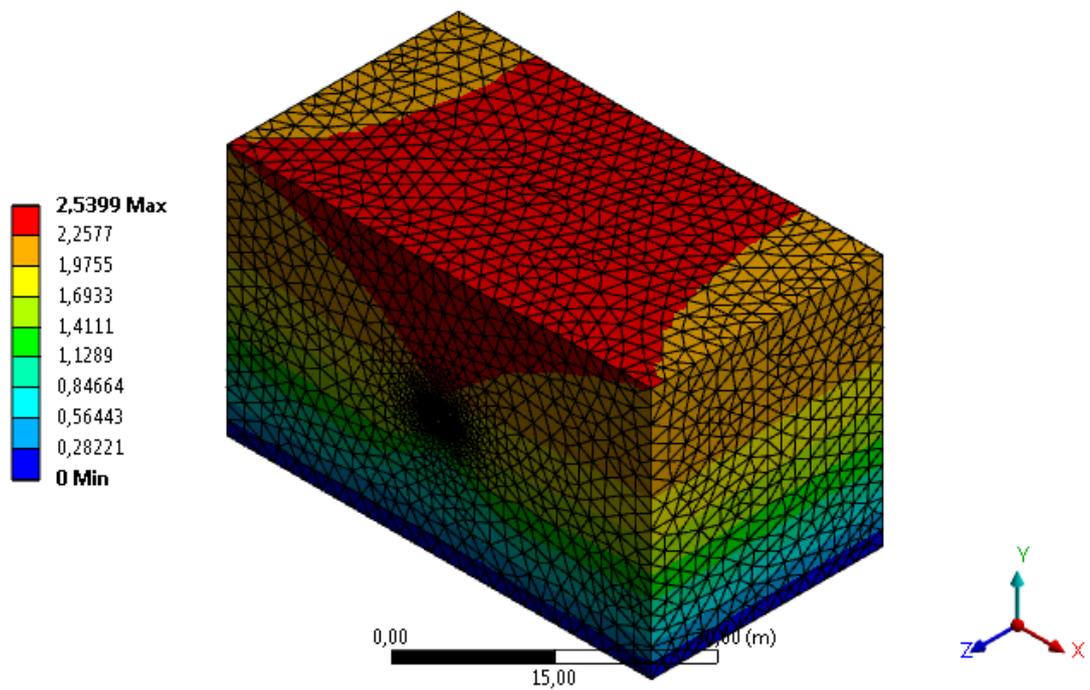


Рисунок 5.34. Поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки

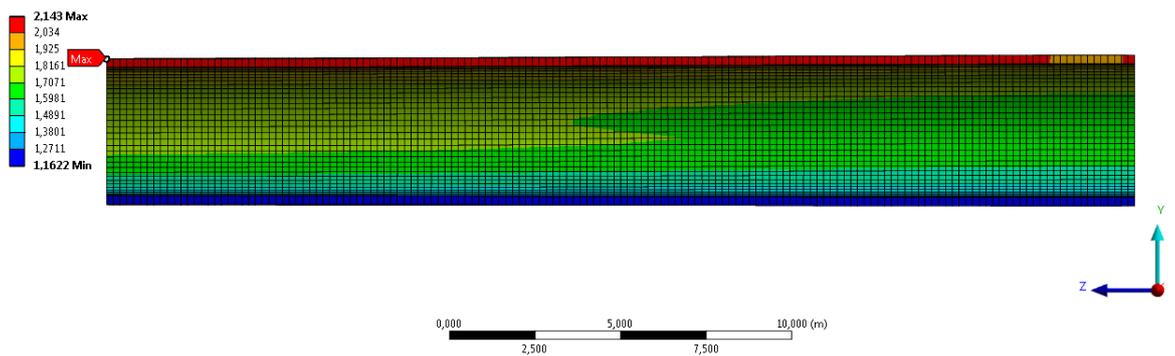


Рисунок 5.35. Поле полных перемещений цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки в масштабированном виде (включено отображение толщины элементов оболочки)

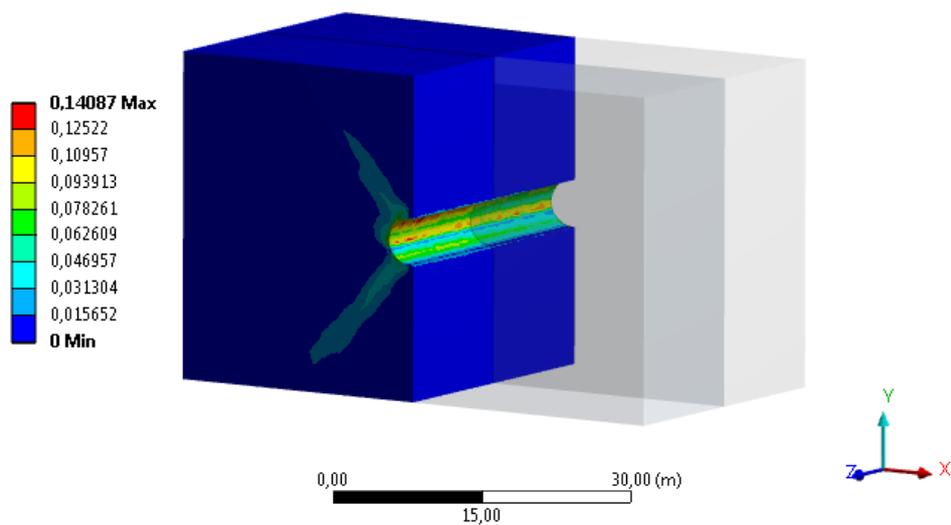


Рисунок 5.36. Распределение пластических деформаций в теле окружающего основания

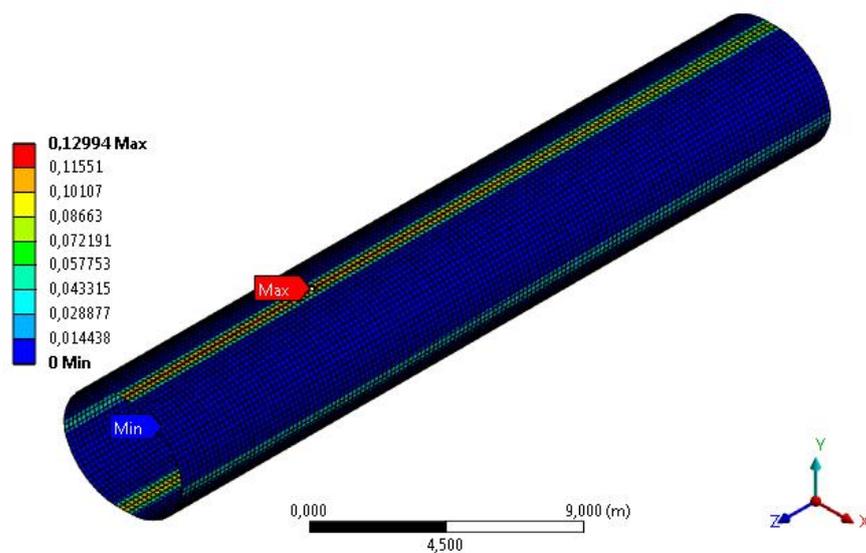


Рисунок 5.37. Распределение пластических деформаций в теле оболочки

По рисункам 5.36 – 5.37 видно (максимумы величин отмечены красными флажками), что наибольшие перемещения и пластические деформации сосредоточены на участке оболочки, расположенном в пределах первого массива основания с меньшими физико-механическими характеристиками.

Следовательно, потеря устойчивости цилиндрической оболочки характерна для этой области.

Следует отметить, что по результатам расчета характер деформаций оболочки схож с деформациями, полученными в работе С. Кириакидеса и Ч. Д. Бэбкока [236] для стальных трубчатых элементов при распространении вмятины с учетом пластических свойств материала (рисунок 5.38).

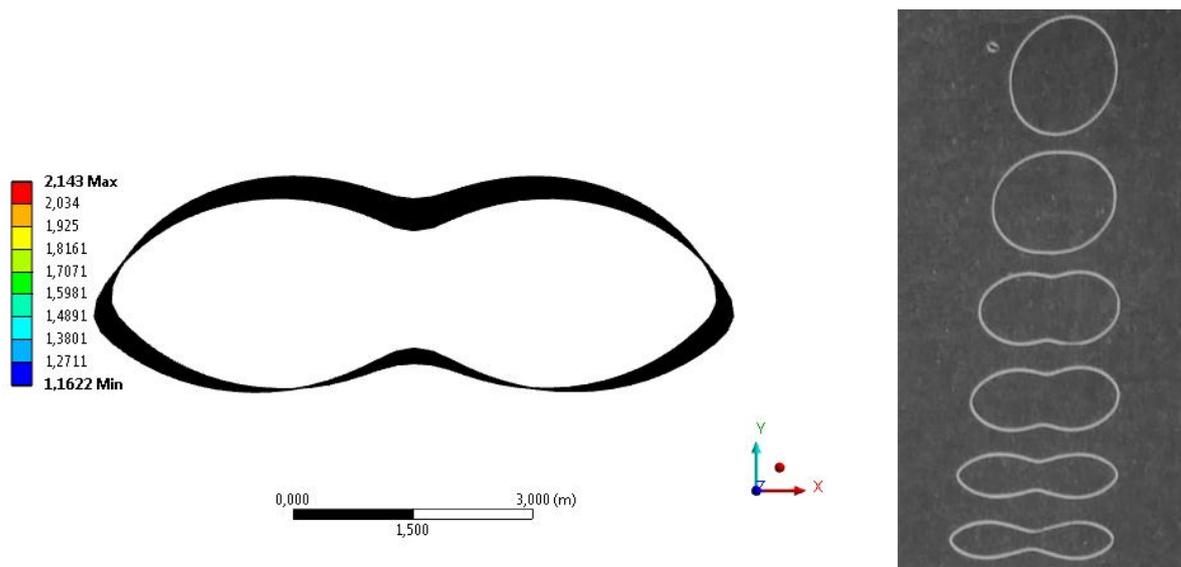


Рисунок 5.38. Масштабированный вид перемещений оболочки по результатам нашего расчета (слева) и профили поперечных сечений трубы из работы С. Кириакидеса и Ч. Д. Бэбкока (справа)

Максимальное главное напряжение в теле оболочки составило 2.7 МПа в верхнем своде цилиндрической оболочки. Минимальное главное напряжение составило – 55.6 МПа в нижнем своде. Распределение максимальных и минимальных главных напряжений в теле оболочки показаны на рисунках 5.39 и 5.40 соответственно.

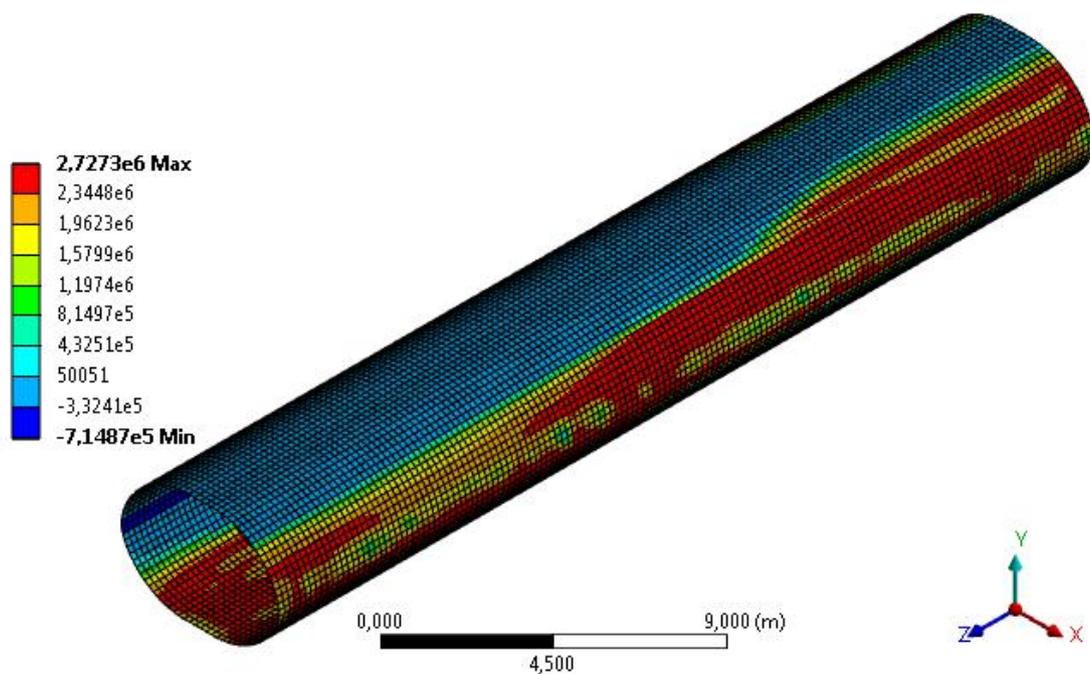


Рисунок 5.39. Распределение максимальных главных напряжений в оболочке

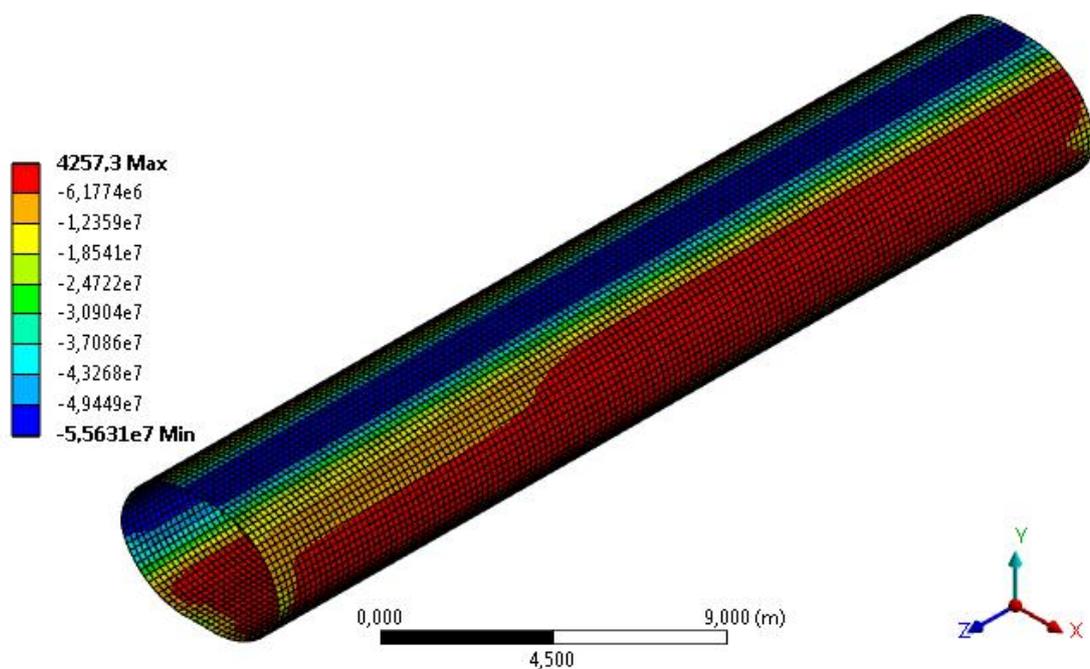


Рисунок 5.40. Распределение минимальных главных напряжений в оболочке

На рисунке 5.41 показана кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

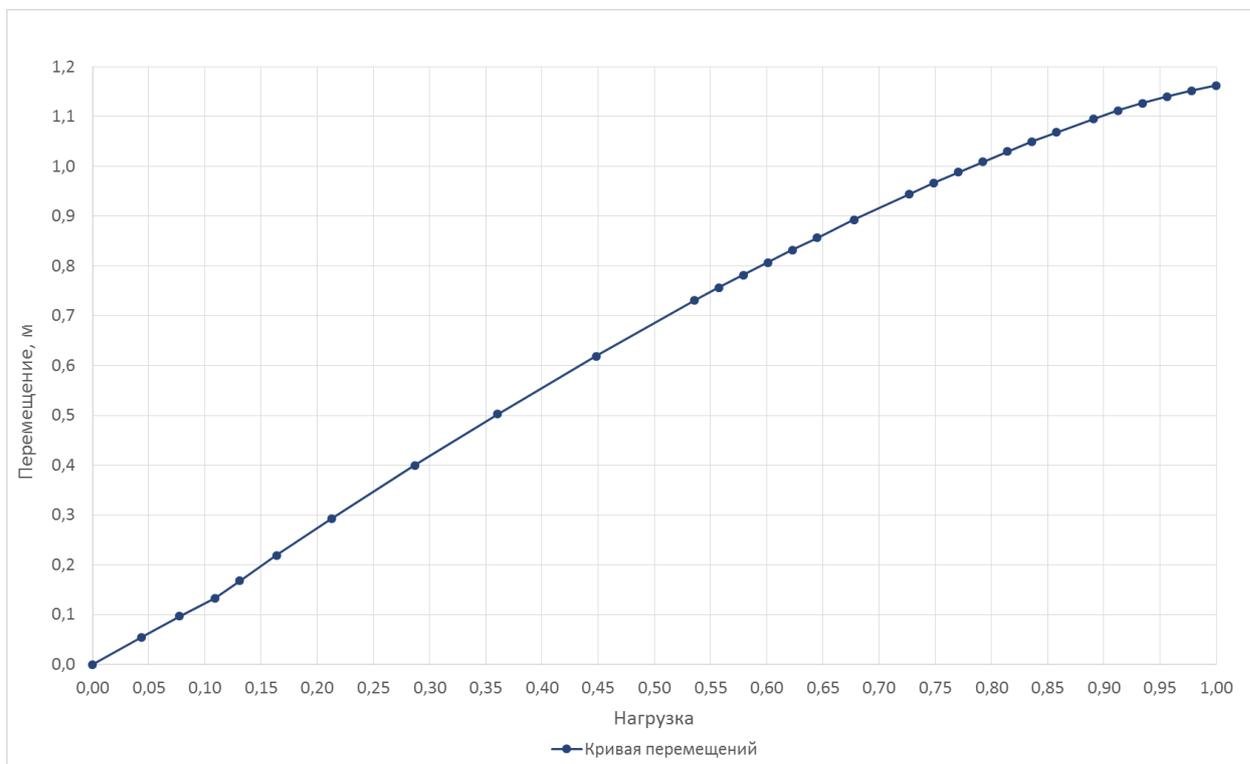


Рисунок 5.41. Кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки пространственной модели системы «оболочка – основание»

В таблице 5.5 приведены значения критической нагрузки для двух выполненных расчетных случаев пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки.

Таблица 5.5

Вид анализа	Величина критической нагрузки
Нелинейный расчет с односторонними связями без учета	$4.5\gamma z_1$

коэффициента трения при упруго-пластических моделях материалов	
Нелинейный расчет с односторонними связями с учетом коэффициента трения при упруго-пластических моделях материалов	4.6 γz_I

При переходе от случая бесконечно длинной цилиндрической оболочки к случаю неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки значение критической нагрузки получает незначительное изменение – с 4.4 γz_I до 4.6 γz_I . Это объяснено тем, что обе задачи решены в пространственной постановке с применением упруго-пластических моделей материалов. Однако стоит заметить, что моделирование основания с неоднородностью физико-механических свойств вдоль продольной оси цилиндрической оболочки показывает, что потеря устойчивости оболочки происходит на участке более слабого основания.

5.6 Выводы по главе 5

1. Разработаны и реализованы методика и алгоритм получения критических нагрузок и форм потери устойчивости цилиндрической оболочки в условиях контактного взаимодействия с окружающим основанием при различных моделях материалов оболочки и основания. Дан анализ критических нагрузок, полученных при разных постановках задач.

2. Составлены стержневые, плоские и пространственные модели системы «оболочка – основание». Пространственные модели составлены с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и основанием, а также с линейно упругой и упруго-пластической моделями материалов. Определены критические нагрузки и формы потери устойчивости оболочки стержневых,

плоских и пространственных моделей системы «оболочка – основание» в результате численного анализа составленных расчетных моделей при линейном и нелинейном расчетных случаях.

При переходе от стержневой модели системы «оболочка – основание» к плоской значение критической нагрузки снизилось с $69\gamma z_I$ до $23.4\gamma z_I$, а при переходе от плоской модели к пространственной – с $23.4\gamma z_I$ до $4.4\gamma z_I$ в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки и до $4.6\gamma z_I$ в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки. В большей степени на это влияет использование упруго-пластической модели материала.

Необходимо отметить, что «запас устойчивости» $4.4\gamma z_I$ по отношению к действующей нагрузке не является в полной мере достаточным для вводимых в эксплуатацию сооружений.

3. Установлено, что в расчетах на устойчивость при больших перемещениях системы нелинейный расчет, путем пошагового приложения нагрузки, позволяет отыскивать зоны отсутствия контактов элементов (область отлипания оболочки от основания) и определять изменяющееся во времени положение оболочки, что исключает завышенные значения критической нагрузки, полученные в результате линейного расчета, при котором перемещения малые.

4. По результатам анализа расчетов пространственных моделей системы «оболочка – основание» определено, что использование упруго-пластических моделей материала оболочки и окружающего основания позволяет избежать завышенных значений критической нагрузки, полученных при использовании линейно упругой модели материала.

5. Установлено, что учет коэффициента трения обеспечивает более корректную совместную работу оболочки и окружающего основания и позволяет получить несколько большие значения критической нагрузки, как при линейно упругой модели материала, так и при упруго-пластической.

6. Численным анализом пространственной системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки показано, что потеря устойчивости оболочки происходит на участке более слабого основания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая результаты проведенных исследований, сформулируем следующие выводы.

1. Разработана численная методика учета строительного зазора между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием, основанная на пространственных расчетных моделях с использованием двух способов создания зазора, позволяющих учитывать «потерянный объем» грунта от работы тоннелепроходческого механизированного комплекса. Расчетные модели сопоставлены между собой и с известным полуэмпирическим методом. Лучшие результаты показала модель с контактными элементами, аппроксимирующими зазор, в расчетах по определению осадки поверхности массива как в поперечном, так и в продольном направлениях к оси оболочки.

2. Определены размеры пространственного фрагмента массива, необходимые для получения достоверных результатов расчета осадки верхней поверхности в поперечном и продольном направлениях к оси оболочки по разработанным расчетным моделям, учитывающим зазор. С учетом полученных результатов расчетов НДС системы можно рекомендовать в практических расчетах по определению осадки поверхности массива в поперечном направлении к оси оболочки принимать расстояние L от края оболочки до боковых торцов массива (в поперечном направлении), удовлетворяющее условию $L \geq 5D$, где D – диаметр оболочки. При определении осадки поверхности массива в продольном направлении к оси оболочки можно рекомендовать принимать расстояние L от края оболочки до торцов массива (в продольном направлении), также удовлетворяющее условию $L \geq 5D$.

3. Разработана программа для автоматизации процесса создания твердотельной расчетной модели цилиндрической оболочки, окружающего

массива и контактных элементов зазора на командном языке PCL, который служит частью системы MSC PATRAN.

4. Решена практическая задача по определению мульды оседания участка поверхности земли с эксплуатируемыми железнодорожными путями Московской железной дороги, расположенного в пределах зоны влияния строительства проектируемых перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена от станции метро «Раменки» до станции метро «Расказовка». Полученные результаты сопоставлены с данными геодезического мониторинга.

5. Разработана и реализована методика, основанная на пространственных расчетных моделях, изменяющихся во времени, позволяющих учесть разное количество этапов возведения цилиндрических оболочек, взаимодействующих с окружающим основанием. Модели учитывают одностороннее контактное взаимодействие, строительный зазор и физическую нелинейность материалов. Исследовано влияние учета поэтапного возведения конструкции на НДС цилиндрической оболочки конечных размеров, взаимодействующей с окружающим основанием, с использованием численных методов. Установлено, что величины внутренних усилий в теле цилиндрической оболочки сильно зависят от количества стадий в расчетном случае. Опираясь на полученные результаты, рекомендовано в практических расчетах принимать 8 и более расчетных стадий возведения оболочки.

6. Установлено, что учет коэффициента трения в стадийных расчетных случаях значительно снижает величину максимальных напряжений в цилиндрической оболочке. Показано, что введение в расчет упруго-пластической модели материала для оболочки также заметно снижает величину максимальных напряжений.

7. Определены особенности НДС системы, состоящей из двух параллельно расположенных цилиндрических оболочек и окружающего

основания, а именно: определено влияние, оказываемое на первую оболочку поэтапным возведением второй близлежащей оболочки. Полученные результаты показали, что данное влияние является в целом незначительным и прирост напряжений для всех рассмотренных колец первой оболочки не превысил 7.8 %, кроме последнего кольца, где увеличение напряжений составило 116.8 %.

8. Разработаны и реализованы методика и алгоритм получения критических нагрузок и форм потери устойчивости цилиндрической оболочки при различных моделях материалов и условиях контактного взаимодействия с окружающим основанием. Составлены стержневые, плоские и пространственные модели системы «оболочка – основание». Пространственные расчетные схемы построены с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и основанием, а также в рамках линейно упругой и упруго-пластической моделей материалов. Проведен численный анализ системы с целью определения критической нагрузки, при которой конструкция оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием, теряет устойчивость равновесия, и форм потери устойчивости в линейном и нелинейном расчетных случаях с последующим сравнительным анализом результатов.

9. Установлено, что в расчетах на устойчивость при больших перемещениях системы нелинейный расчет путем пошагового приложения нагрузки и итерационной процедуры позволяет отыскивать зоны отсутствия контакта элементов (область отлипания оболочки от основания) и определять изменяющееся во времени положение оболочки, что исключает завышенные значения критической нагрузки, полученные при линейном расчете, когда перемещения малые. Также определено, что учет коэффициента трения обеспечивает лучшую совместную работу оболочки и окружающего основания и позволяет получить несколько большие значения критической

нагрузки, как при линейной упругой модели материала, так и при упруго-пластической.

10. Численным анализом пространственной системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки установлено, что потеря устойчивости оболочки происходит на участке более слабого основания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айнбиндер, А. Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость / А. Б. Айнбиндер. – М.: Недра, 1991. – 288 с.
2. Айнбиндер, А. Б. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость: справочное пособие / А. Б. Айнбиндер, А. Г. Камерштейн. – М.: Недра, 1982. – 341 с.
3. Акимов, П. А. Аналитические и полуаналитические методы решения многоточечных задач расчета конструкций: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Акимов Павел Алексеевич. – Москва, 2000. – 230 с.
4. Акулич, В. Ю. Определение критической нагрузки цилиндрической оболочки, взаимодействующей с окружающим основанием / В. Ю. Акулич // Труды научно-практической конференции «Неделя науки – 2020». «Наука МИИТа – транспорту» М.: МИИТ, 2020. – С. II-31.
5. Акулич, В. Ю. Построение пространственных твердотельных расчетных моделей с использованием языка PCL / В. Ю. Акулич // Труды научно-практической конференции «Неделя науки – 2019». «Наука МИИТа – транспорту» М.: МИИТ, 2019. – С. II-3.
6. Акулич, В. Ю. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки тоннеля с учетом изменения расчетной модели во времени / В. Ю. Акулич // Труды научно-практической конференции «Неделя науки – 2018». «Наука МИИТа – транспорту» М.: МИИТ, 2018. – С. II-80.
7. Акулич, В. Ю. Геотехнический прогноз влияния строительства проектируемых тоннелей метрополитена методом щитовой проходки на осадки земной поверхности с использованием комплекса MSC PATRAN – NASTRAN / В. Ю. Акулич // Труды научно-практической конференции «Неделя науки – 2017». «Наука МИИТа – транспорту» М.: МИИТ, 2017. – С. II-1.

8. Александров, А. В. Методы расчета стержневых систем, пластинок и оболочек с использованием ЭВМ / А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников, В. А. Смирнов; под. общ. ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1976. – 248 с.

9. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.

10. Александров, А. В. Численное решение линейных дифференциальных уравнений при помощи матрицы дифференцирования // Тр. МИИТ. – М., 1961. – Вып. 131. – С. 253 – 266.

11. Аленин, В. П. Итерационные методы расчета систем с внешними и внутренними односторонними связями: дис. ... д-ра тех. наук: 05.23.17 / Аленин Виктор Петрович. – Волгоград, 2002. – 327 с.

12. Алешин, В. В. Численный анализ прочности подземных трубопроводов / В. В. Алешин, В. Е. Селезнев, Г. С. Клишин и др.; под. общ. ред. В. В. Алешина, В. Е. Селезнева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 320 с.

13. Алумяэ, Н. А. Одна вариационная формулировка для исследования тонкостенных упругих оболочек в после критической стадии / Н. А. Алумяэ // ПММ. – 1950. – Т. 14. – Вып. 2. – С. 197 – 203.

14. Алумяэ, Н. А. Дифференциальные уравнения состояния равновесия тонкостенных упругих оболочек в после критической стадии / Н. А. Алумяэ // ПММ. – 1949. – Т. 13. – Вып. 1. – С. 95 – 107.

15. Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 448 с.

16. Аргирис, Дж. Вычислительные машины и механика / Дж. Аргирис // Теоретическая и прикладная механика. Труды международного конгресса IUTAM. – М.: Мир, 1979. – С. 15 – 99.

17. Артемьева, А. А. Исследование больших упругопластических деформаций оболочек вращения при сложных нагружениях растяжением и

кручением / А. А. Артемьева, В. Г. Баженов, Д. В. Жегалов, Д. А. Казаков, Е. В. Нагорных // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 22 – 30.

18. Афанасова, О. В. Расчет двухслойных обделок напорных тоннелей, пересекаемых по диаметру границей раздела пород с разными деформационными характеристиками, на действие внутреннего напора воды / О. В. Афанасова // Известия Тульского государственного университета. Серия «Геомеханика. Механика подземных сооружений». – 2003. – Вып. 1. – С. 35 – 38.

19. Ашпиз, Е. С. Основная площадка при осевых нагрузках 27 ТС / Е. С. Ашпиз, В. В. Виноградов // Путь и путевое хозяйство. – 2019. – № 12. – С. 22 – 25.

20. Баженов, В. Г. Экспериментально-расчетный метод исследования больших упругопластических деформаций цилиндрических оболочек при растяжении до разрыва и построение диаграмм деформирования при неоднородном напряженно-деформированном состоянии / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, С. Л. Осетров, Е. В. Павленкова // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 116 – 124.

21. Баженов, В. Г. Теоретическое и экспериментальное исследование упругопластических процессов деформирования и предельных состояний тел вращения при комбинированных нагружениях кручением-растяжением (сжатием) / В. Г. Баженов, М. С. Баранова, Д. В. Жегалов, Е. В. Павленкова // Упругость и неупругость. Материалы Междунар. научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. – 2011. – С. 113 – 116.

22. Байдин, О. В. Учет температурных деформаций при расчете замкнутых цилиндрических оболочек вариационным методом / О. В. Байдин, С. М. Шаповалов, А. В. Шевченко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. – № 5(226). – С. 6 – 9.

23. Барашков, В. Н. Напряженно-деформированное состояние упругопластических оболочек вращения при действии динамической и статической нагрузки / В. Н. Барашков, А. В. Герасимов // Вестник ТГАСУ. – 2016. – № 5. – С. 102 – 109.

24. Басов, К. А. ANSYS: справочник пользователя / К. А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

25. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 512 с.

26. Бегичев, М. М. Численный анализ устойчивости стержневых систем и оболочек при упругих и пластических деформациях с учетом начальных несовершенств: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Бегичев Максим Михайлович. – Москва, 2013. – 229 с.

27. Белостоцкий, А. М. Расчетное обоснование механической безопасности стадионов к чемпионату мира по футболу 2018 года / А. М. Белостоцкий, П. А. Акимов, А. А. Аул, Д. С. Дмитриев, Ю. Н. Дядченко, А. И. Нагибович, К. И. Островский, А. С. Павлов // Academia. Архитектура и строительство. – 2018. – № 3. – С. 118 – 129.

28. Белостоцкий, А. М. Научно-исследовательский центр СтаДиО. 25 лет на фронте численного моделирования / А. М. Белостоцкий, П. А. Акимов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2016. – Vol. 12. – Issue 1. – Pp. 8 – 45.

29. Белостоцкий, А. М. Верификационный отчет по программному комплексу ANSYS Mechanical. Т. 1 / А. М. Белостоцкий, С. И. Дубинский, А. А. Аул, А. И. Нагибович, И. Н. Афанасьева, О. А. Козырев, А. С. Павлов. – Москва, 2009. – 638 с.

30. Белостоцкий, А. М. Суперэлементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт

расчетных исследований / А. М. Белостоцкий, М. В. Белый // Труды XVIII Международной конференции ВЕМ&FEM-2000. – СПб., 2000. – С. 65 – 69.

31. Белостоцкий, А. М. Построение эффективных пространственных моделей для статического и динамического расчета систем «сооружение – основание» / А. М. Белостоцкий // Труды ЦНИИСК им. Кучеренко. – М., 1990. – С. 175 – 180.

32. Белый, М. В. Полуитерационный многосеточный метод и его программная реализация для решения пространственных краевых задач / М. В. Белый, В. Е. Булгаков, А. Б. Золотов // ЖВМ и МФ. – 1987. – Т. 27. – № 6. – С. 875 – 888.

33. Бен Хелал Монсеф Бен Мулди Расчет тонкостенных пространственных систем, контактирующих с упругой средой: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Бен Хелал Монсеф Бен Мулди. – Москва, 2000. – 110 с.

34. Богнер, Ф. Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов / Ф. Богнер, Р. Фокс, Л. Шмит // Ракетная техника и космонавтика. – 1967. – Т. 5. – № 4. – С. 170 – 175.

35. Болотин, В. В. О методах оценки влияния начальных прогибов на устойчивость цилиндрических оболочек / В. В. Болотин // Вопросы оптимального использования ЭЦВМ в расчете сложных конструкций. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1973. – С. 43 – 51.

36. Болотин, В. В. К расчету цилиндров из волокнистого упруго-пластического материала / В. В. Болотин, Б. П. Макаров, В. В. Парцевский, Г. Н. Федосеев // Доклады научно-технической конф. МЭИ «Динамика и прочность машин». – М.: Изд. МЭИ, 1969. – С. 66 – 78.

37. Бондарь, В. С. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения / В. С. Бондарь, В. В. Даншин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 176 с.

38. Бородавкин, П. П. Прочность магистральных трубопроводов / П. П. Бородавкин, А. М. Синюков. – М.: Недра, 1984. – 245 с.

39. Боткин, А. И. О прочности сыпучих и хрупких материалов / А. И. Боткин // Изв. ВНИИ гидротехники. – 1940. – Т. 26. – С. 205 – 236.
40. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
41. Булычев, Н. С. Расчет крепи капитальных горных выработок / Н. С. Булычев, Б. З. Амусин, А. Г. Оловянный. – М.: Недра, 1974. – 320 с.
42. Бурман, З. И. Суперэлементный расчет подкрепленных оболочек / З. И. Бурман, О. М. Аксенов, В. И. Лукашенко, М. Т. Тимофеев. – М.: Машиностроение, 1982. – 256 с.
43. Варвак, П. М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П. М. Варвак, Л. П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.
44. Васин, Р. А. Теория упругопластических процессов и экспериментальная пластичность / Р. А. Васин // Упругость и неупругость. Материалы Междунар. научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. – 2011. – С. 44 – 51.
45. Васин, Р. А. Развитие экспериментально-вычислительного метода решения нелинейных задач механики / Р. А. Васин, П. А. Моссаковский, М. Ю. Рязанцева // Сб. тр. Межд. н.-т. конф. «Инновации в машиностроении». – Минск, 2008. – С. 129 – 135.
46. Васин, Р. А. Определяющие соотношения теории пластичности / Р. А. Васин // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Серия: Механика деформируемого твердого тела. – 1990. – Т. 21 – С. 3 – 75.
47. Васин, Р. А. Об экспериментальном исследовании функционалов пластичности в теории упругопластических процессов / Р. А. Васин // Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Наука, 1988. – С. 40 – 57.
48. Виноградов, С. В. Расчет подземных трубопроводов на внешние нагрузки / С. В. Виноградов. – М.: Стройиздат, 1980. – 135 с.

49. Власов, В. З. Избранные труды в 3-х томах / В. З. Власов. – М.: Изд-во академии наук СССР, 1962 – 1964.
50. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
51. Власов, В. З. Общая теория оболочек и ее применение в технике / В. З. Власов. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
52. Власов, В. З. Новый метод расчета складчатых покрытий и цилиндрических оболочек / В. З. Власов. – Госстройиздат, 1933.
53. Вожова, Н. В. Определение предельного давления в пересекающихся цилиндрических оболочках на основе упругопластического анализа: дис. ... канд. тех. наук: 01.02.06 / Вожова Наталья Вячеславовна. – Москва, 2011. – 144 с.
54. Вольмир, А. С. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для вузов / А. С. Вольмир, Ю. П. Григорьев, А. И. Коданев, В. А. Марьин, В. В. Новицкий. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
55. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
56. Вольмир, А. С. Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. – М.: Гостехиздат, 1956. – 420 с.
57. Ворович, И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 376 с.
58. Габбасов, Р. Ф. Численное решение задач строительной механики с разрывными параметрами: дис. ... д-ра тех. наук: 02.02.03 / Габбасов Радек Фатыхович. – Москва, 1989. – 343 с.
59. Галеркин, Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки / Б. Г. Галеркин // ПММ. – 1944. – Т. 8. – Вып. 6.
60. Галеркин, Б. Г. Напряжения и перемещения в круговом цилиндрическом трубопроводе / Б. Г. Галеркин, Я. И. Перельман // Изв. научно-исслед. ин-та гидротехники. – 1940. – Т. 27. – С. 160 – 191.

61. Галеркин, Б. Г. Равновесие упругой цилиндрической оболочки / Б. Г. Галеркин // Докл. АН СССР. – 1934. – Т. 4. – № 5–6. – С. 270 – 275.
62. Галеркин, Б. Г. Напряженное состояние цилиндрической трубы в упругой среде / Б. Г. Галеркин // Труды ЛИПС. – 1929. – Вып. 100. – С. 185 – 194.
63. Галимов, К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек / К. З. Галимов. – Казань: Изд. Казан. гос. ун-та, 1975. – 326 с.
64. Галин, Л. А. Упруго-пластические задачи / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
65. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
66. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М.: Наука, 1967.
67. Голованов, А. И. Моделирование больших упругопластических деформаций оболочек. Теоретические основы конечно-элементных моделей / А. И. Голованов // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – Вып. 72. – С. 5 – 17.
68. Голованов, А. И. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / А. И. Голованов, М. С. Корнишин. – Казань: Казанс. физ.-техн. ин-т, 1989. – 270 с.
69. Голушко, С. К. О двух численных методах решения многоточечных нелинейных краевых задач / С. К. Голушко, В. В. Горшков, А. В. Юрченко // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7. – № 2 – С. 24 – 34.
70. Гольденвейзер, А. А. Теория упругих тонких оболочек / А. А. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
71. Гоник, Е. Г. Экспериментальный и теоретический анализ изгиба и упругопластического выпучивания тонкостенных цилиндрических оболочек с сыпучим наполнителем: дис. ... канд. тех. наук: 01.02.06 / Гоник Екатерина Григорьевна. – Нижний Новгород, 2019. – 128 с.

72. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликов, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.

73. Горбунов-Посадов, М. И. Осадки фундаментов на слое грунта, подстилаемом скальным основанием / М. И. Горбунов-Посадов. – М.: Госстройиздат, 1946. – 60 с.

74. Горбачев, К. П. Метод конечных элементов в расчетах прочности / К. П. Горбачев – Л.: Судостроение, 1985. – 156 с.

75. Городецкий, А. С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А. С. Городецкий, В. И. Зоворицкий, А. И. Лантух-Лященко, А. О. Рассказов. – М.: Транспорт, 1981. – 143 с.

76. Городецкий, А. С. Расчет пространственных тонкостенных конструкций методом конечного элемента / А. С. Городецкий // ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. – Киев: Будивельник, 1972. – С. 75 – 86.

77. Готман, А. Л. Расчет ограждения глубоких котлованов с учетом закрепления грунта / А. Л. Готман, Ю. А. Готман // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2019. – № 4. – С. 2 – 7.

78. Готман, Н. З. Определение модуля деформации закрепленного цементацией грунта / Н. З. Готман, А. Л. Готман // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2017. – № 1(39). – С. 138 – 144.

79. Григолюк, Э. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций / Э. И. Григолюк, В. И. Мамай. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 272 с.

80. Григолюк, Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.

81. Григолюк, Э. И. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 359 с.

82. Грудев, И. Д. Устойчивость стержневых элементов в составе стальных конструкций / И. Д. Грудев. – М.: МИК, 2005. – 320 с.

83. Гуляев, В. И. Устойчивость нелинейных механических систем / В. И. Гуляев, В. А. Баженов, Е. А. Гоцуляк. – Львов: Вища школа, 1982. – 254 с.

84. Гуреева, Н. А. Анализ линейного и нелинейного деформирования тел в криволинейных координатах на основе смешанного метода конечных элементов: дис. ... д-ра тех. наук: 01.02.04 / Гуреева Наталья Анатольевна. – Волгоград, 2016. – 392 с.

85. Джабуа, А. А. Влияние деформации сдвига на расчетные усилия в «сундукообразной» оболочке / А. А. Джабуа // Труды Грузинск. политехнич. ин-та. – 1949. – № 18.

86. Джанелидзе, Г. Ю. Статика упругих тонкостенных стержней / Г. Ю. Джанелидзе, Я. Г. Пановко. – М.: Гостехиздат, 1948. – 208 с.

87. Дишнигер, Ф. Оболочки. Тонкостенные железобетонные купола и своды / Ф. Дишнигер. – М., Л.: Госстройиздат, 1932. – 270 с.

88. Егоров, К. Е. К вопросу деформации основания конечной толщины / К. Е. Егоров // Механика грунтов: труды ин-та НИИ оснований и подземных сооружений, 1958. – Вып. 34. – С. 5 – 33.

89. Елгаев, В. С. Обеспечение безопасности зданий при скоростной проходке тоннелей щитовым способом: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.02 / Елгаев Всеволод Сергеевич. – Москва, 2013. – 116 с.

90. Железнов, Л. П. Решение задач нелинейного деформирования и устойчивости оболочек методом конечных элементов: дис. ... д-ра тех. наук: 05.07.03 / Железнов Лев Петрович. – Новосибирск, 2009. – 440 с.

91. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – М.: Стройиздат, 1962. – 240 с.

92. Зверьяев, Е. М. Выделение согласованных уравнений классической теории оболочек из трехмерных уравнений теории упругости / Е. М. Зверьяев //

Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2019.
– Т. 15. – № 2. – С. 135 – 148.

93. Зверьяев, Е. М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек /
Е. М. Зверьяев // Препринты ИПМ Им. М. В. Келдыша. – 2016. – № 33.
– С. 1 – 25.

94. Зверьяев, Е. М. Итерационный метод построения НДС тонкой
оболочки / Е. М. Зверьяев, Г. И. Макаров // Строительная механика и расчет
сооружений. – 2012. – № 3(242). – С. 55 – 60.

95. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.:
Мир, 1975. – 542 с.

96. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в
механике сплошных сред / О. Зенкевич, И. Чанг. – М.: «НЕДРА», 1974.
– 240 с.

97. Золотов, А. Б. Численные и аналитические методы расчета
строительных конструкций / А. Б. Золотов, П. А. Акимов, В. Н. Сидоров,
М. Л. Мозгалева. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.

98. Золотов, А. Б. Математические методы в строительной механике (с
основами теории обобщенных функций) / А. Б. Золотов, П. А. Акимов,
В. Н. Сидоров, М. Л. Мозгалева. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.

99. Золотов, А. Б. Постановка и алгоритмы численного решения краевых
задач строительной механики методом стандартной области: дис. ... д-ра техн.
наук: 05.23.17 / Золотов Александр Борисович – М., 1989.

100. Зубчанинов, В. Г. Экспериментальная пластичность. Кн.1. Процессы
сложного деформирования / В. Г. Зубчанинов, Н. Л. Охлопков,
В. В. Гараников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.

101. Зубчанинов, В. Г. Экспериментальная пластичность. Кн.2. Процессы
сложного нагружения / В. Г. Зубчанинов, Н. Л. Охлопков, В. В. Гараников.
– Тверь: ТГТУ, 2004. – 184 с.

102. Зылев, В. Б. Устойчивость прямоугольного тонкостенного профиля при нагружении по схеме чистого изгиба / В. Б. Зылев, П. О. Платнов, И. В. Алферов // Качество. Инновации. Образование. – 2020. – № 2(166). – С. 41 – 45.

103. Зылев, В. Б. Результаты исследования устойчивости арок при учете конечных перемещений / В. Б. Зылев, А. В. Штейн // Вычислительные методы в исследовании строительных конструкций. – М.: ЦНИИСК им. Кучеренко, 1987. – С. 101 – 106.

104. Зылев, В. Б. Расчет плоской стержневой системы на большие прогибы методом конечных элементов / В. Б. Зылев, Г. П. Соловьев // Расчет транспортных и строительных конструкций с применением ЭВМ. Межвузовский сборник. – М.: МИИТ, 1981. – С. 95 – 101.

105. Игнатьев, А. В. Развитие метода конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики: дис. ... д-ра тех. наук: 05.23.17 / Игнатьев Александр Владимирович. – Волгоград, 2019. – 283 с.

106. Ильин, В. П. К расчету устойчивости длинной цилиндрической оболочки при чистом изгибе / В. П. Ильин // Теоретическая механика, сопротивление материалов, строительная механика. – Л.: ЛИСИ, 1964. – С. 27 – 32.

107. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М.: Изд. Моск. ун-та, 1978. – 288 с.

108. Ильюшин, А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 376 с.

109. Исаев, О. Н. Перебор грунта при строительстве коммуникационных тоннелей щитовым способом / О. Н. Исаев, Р. Ф. Шарафутдинов // Механизация строительства. – 2012. – № 6(816). – С. 2 – 7.

110. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с.

111. Камерштейн, А. Г. Расчет трубопроводов на прочность: Справочная книга / А. Г. Камерштейн, В. В. Рождественский, М. Н. Ручимский. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 424 с.

112. Кантин, Д. Смещения криволинейных конечных элементов как жесткого целого / Д. Кантин // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – Т. 8. – № 7. – С. 84 – 88.

113. Кантин, Д. Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки / Д. Кантин, Р. Клаф // Ракетная техника и космонавтика. – 1968. – Т. 6. – № 6. – С. 82 – 88.

114. Карасев, М. А. Анализ причин деформации земной поверхности и характер формирования мульды оседания, вызванной строительством транспортных тоннелей / М. А. Карасев // Записки Горного института. – 2011. – Т. 190. – С. 163 – 171.

115. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 421 с.

116. Киликовская, О. А. Задача о толстостенной трубе из сжимаемого упруго-пластического материала при совместном действии внутреннего и внешнего давления / О. А. Киликовская, Н. В. Овчинникова, М. Н. Пендюрина // Упругость и неупругость. Материалы Междунар. научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. – 2011. – С. 148 – 151.

117. Клейн, Г. К. Расчет подземных трубопроводов / Г. К. Клейн. – М.: Госстройиздат, 1957. – 195 с.

118. Клепиков, С. Н. Расчет конструкций на упругом основании / С. Н. Клепиков. – Киев: Будивельник, 1967. – 184 с.

119. Клованич, С. Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / С. Ф. Клованич. – Запорожье, 2009. – 400 с.

120. Клочков, Ю. В. Математическая модель дискретизации цилиндра с эллиптическим днищем из разнородных материалов / Ю. В. Клочков,

Т. А. Киселева, О. В. Вахнина // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – № 6. – С. 56 – 62.

121. Клочков, Ю. В. Расчет оснований и фундаментов на основе метода конечных элементов в смешанной формулировке с учетом физической нелинейности / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Н. А. Гуреева // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2013. – № 30(49). – С. 87 – 94.

122. Клочков, Ю. В. Сравнение напряжений, вычисленных на основе скалярной и векторной интерполяций МКЭ в сочлененных оболочках из разнородных материалов / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. А. Киселева // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 5(250). – С. 70 – 76.

123. Комиссарова, И. И. Изгиб стенок составных цилиндрических оболочек: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Комиссарова Ирина Игоревна. – Вологда, 2001. – 141 с.

124. Коренев, Б. Г. Конструкции, лежащие на упругом основании / Б. Г. Коренев // В кн.: Строит. Механика в СССР в 1917 – 1967 гг. – М.: Госстройиздат, 1969. – С. 112 – 134.

125. Косицын, С. Б. Численный анализ учета стадийности в расчетах оболочки совместно с массивом грунта / С. Б. Косицын, В. Ю. Акулич // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2019. – Volume 15. – Issue 3. – Pp. 84 – 95.

126. Косицын, С. Б. Численный анализ напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени / С. Б. Косицын, В. С. Федоров, В. Ю. Акулич // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2019. – № 3(55). – С. 84 – 93.

127. Косицын, С. Б. Определение критической нагрузки потери устойчивости стержневой и плоской моделей круговой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием / С. Б. Косицын, В. Ю. Акулич //

Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – Обзорно-аналитический и научно-технический журнал. – 2019. – Т. 15. – № 4. – С. 291 – 298.

128. Косицын, С. Б. Об одном численном способе определения осадки поверхности грунтового массива, вызванной сооружением оболочки обделки тоннеля / С. Б. Косицын, В. Ю. Акулич // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Volume 14. – Issue 1. – Pp. 78 – 91.

129. Косицын, С. Б. Геотехнический прогноз влияния строительства проектируемого тоннеля метрополитена методом щитовой проходки на осадки земной поверхности / С. Б. Косицын, В. С. Федоров, В. Ю. Акулич // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2017. – № 4(48). – С. 90 – 98.

130. Косицын, С. Б. О численных методах определения мульды оседания поверхности грунтового массива, вызванной сооружением оболочки тоннеля / С. Б. Косицын, В. Ю. Акулич // Сб. науч. тр. РААСН. Т. 2. – М.: Издательство АСВ, 2019. – С. 303 – 315.

131. Косицын, С. Б. Численная методика определения осадок земной поверхности, связанных с воздействием тоннелепроходческого комплекса на грунтовый массив / С. Б. Косицын, В. Ю. Акулич // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. – М.: МАДИ, 2018. – № 2(16). – С. 21.

132. Косицын, С. Б. Геотехнический прогноз влияния строительства проектируемых тоннелей метрополитена методом щитовой проходки на осадки земной поверхности с использованием комплекса MSC PATRAN – NASTRAN / С. Б. Косицын, А. А. Зайцев, А. В. Замуховский, В. Ю. Акулич // Сб. науч. тр., посвящ. 70-летию П. А. Ляшенко. – Краснодар: КубГАУ, 2018. – С. 62 – 67.

133. Косицын, С. Б. Численный способ проверки безопасности состояния инфраструктуры железнодорожного пути при глубинном пересечении перегонными тоннелями метрополитена / С. Б. Косицын, В. Ю. Акулич, А. А. Зайцев // Труды XV международной научно-технической конференции.

Современные проблемы проектирования, строительства и эксплуатации железнодорожного пути. Москва 4 – 5 апреля. – М.: 2018. – С. 137 – 143.

134. Косицын, С. Б. Об устойчивости жестко заделанных круговых арок и цилиндрических оболочек под действием сосредоточенной силы / С. Б. Косицын, Г. А. Мануйлов // Юбилейный сборник докладов, посвященный 100-летию со дня рождения В. З. Власова и 85-летию каф. «Строительная механика». – М.: МГСУ, 2006. – С. 99 – 108.

135. Косицын, С. Б. Расчет стержневых систем, взаимодействующих с упругим основанием, методом конечных элементов с использованием программного комплекса MSC/NASTRAN FOR WINDOWS: учебное пособие / С. Б. Косицын, Д. Б. Долотказин. – М.: МИИТ, 2004. – 116 с.

136. Косицын, С. Б. Исследование влияния некоторых особенностей тоннельного перехода в Лефортово в г. Москве на его напряженно-деформированное состояние / С. Б. Косицын, Д. Б. Долотказин // Вестник Российского университета дружбы народов. Специальный выпуск «Геометрия и расчет тонкостенных пространственных конструкций». – М.: Изд-во РУДН, 2002. – № 1. – С. 90 – 94.

137. Косицын, С. Б. Об одном численном методе решения геометрически нелинейных осесимметричных задач изгиба пологих оболочек / С. Б. Косицын, Г. А. Мануйлов // Материалы по металлическим конструкциям. Выпуск 19. – М.: Стройиздат, 1977. – С. 192 – 204.

138. Косицын, С. Б. Неклассические криволинейные конечноэлементные модели в линейных и нелинейных задачах строительной механики: дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17 / Косицын Сергей Борисович – М., 1993. – 424 с.

139. Кривошапко, С. Н. Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий / С. Н. Кривошапко, И. А. Мамиева. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 328 с.

140. Кривошапко, С. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С. Н. Кривошапко, В. Н. Иванов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.

141. Кривошапко, С. Н. Уникальные сооружения в форме линейчатых, зонтичных поверхностей, поверхностей вращения и переноса: Серия «Строительные конструкции и материалы» / С. Н. Кривошапко, Л. А. Алборова // Вып. 2. – М.: ОАО ВНИИНТПИ, 2008. – С. 1 – 42.

142. Крылов, А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании / А. Н. Крылов. – М.: Изд-во АН СССР, 1930. – 127 с.

143. Кузнецов, В. И. Работы советских ученых в области теории расчета сооружений на упругом основании / В. И. Кузнецов // Труды по истории техники. – М.: Изд-во АН СССР. – 1954. – Вып. 8. – 184 с.

144. Кузнецов, Ю. М. Элементы с явным выражением жестких смещений в расчете тонких цилиндрических оболочек / Ю. М. Кузнецов, А. И. Голованов // Прочность и устойчивость оболочек. Труды семинара. – Выпуск XIX. – Часть II. – Казанс. физ.-техн. ин-т КФАН СССР. – Казань, 1986. – С. 83 – 93.

145. Купчикова, Н. В. Численные исследования работы системы «свайное основание – усиливающие элементы» методом конечных элементов / Н. В. Купчикова // Строительство и реконструкция. – 2013. – № 6(50). – С. 28 – 35.

146. Курбацкий, Е. Н. Критический анализ состояния нормативной документации по расчету сооружений на землетрясения / Е. Н. Курбацкий, Г. Э. Мазур, В. Л. Мондрус // АCADEMIA. Архитектура и строительство. – 2017. – № 2. – С. 95 – 102.

147. Курбацкий, Е. Н. Напряженно-деформированное состояние грунта при распространении поверхностных волн Рэлея / Е. Н. Курбацкий, Нгуен Ван Хунг // Известия вузов. Строительство. – 2015. – № 1(673). – С. 15 – 27.

148. Лалин, В. В. Расчетное обоснование конструкции надземного участка газопровода в условиях Крайнего Севера / В. В. Лалин, А. В. Яваров // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. Т. 257. СПб.: Издательство «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева», 2010. – С. 112 – 115.

149. Лалин, В. В. Современные технологии расчета магистральных трубопроводов / В. В. Лалин, А. В. Яваров // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 3. – С. 43 – 47.

150. Лаптев, П. В. Конечно-элементное решение некоторых трехмерных задач упругопластического деформирования и устойчивости стержней и оболочек: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.06 / Лаптев Павел Владимирович. – Нижний Новгород, 2004. – 135 с.

151. Ленский, В. С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах / В. С. Ленский // В сб. «Упругость и неупругость», Вып. 5. Изд-во Моск. ун-та, 1978. – С.65 – 96.

152. Ленский, В. С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций / В. С. Ленский // В сб. «Вопросы теории пластичности». Изд-во АН СССР. М., 1961. – С. 58 – 82.

153. Леонтьев, Н. Н. Основы теории балок и плит на деформируемом основании: учебное пособие / Н. Н. Леонтьев, А. Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, Н. Н. Анохин. – М.: МИСИ, 1982. – 119 с.

154. Лукашевич, А. А. Решение контактных задач для упругих систем с односторонними связями методом пошагового анализа: дис. ... д-ра тех. наук: 05.23.17 / Лукашевич Анатолий Анатольевич. – Санкт-Петербург, 2011. – 283 с.

155. Лукашевич, А. А. Современные численные методы строительной механики: учебное пособие / А. А. Лукашевич. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2003. – 135 с.

156. Лукьянова, А. Н. Моделирование контактной задачи с помощью программы ANSYS: учеб.-метод. пособие / А. Н. Лукьянова. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 52 с.
157. Лурье, А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек / А. И. Лурье. – М.: Госгехиздат, 1947. – 252 с.
158. Лурье, А. И. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности круглого цилиндра / А.И. Лурье // Прикладная математика и механика. – 1946. – Т. 10. – № 3. – С. 397 – 406.
159. Лурье, А. И. Равновесие упругой симметрично-нагруженной сферической оболочки / А. И. Лурье // ПММ. – 1943. – № 6. – С. 393 – 404.
160. Лурье, А. И. Общая теория упругих тонких оболочек / А. И. Лурье // ПММ. – 1940. – Вып. 2. – С. 7 – 34.
161. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: учебник / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 401 с.
162. Малышев, М. В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений / М. В. Малышев. – М.: Стройиздат, 1980. – 134 с.
163. Мануйлов, Г. А. Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некратными критическими нагрузками / Г. А. Мануйлов, С. Б. Косицын, И. Е. Грудцына // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2020. – Т. 16. – № 1. – С. 54 – 61.
164. Мануйлов, Г. А. Особенности численного моделирования и решения задач устойчивости упругих пластин и оболочек / Г. А. Мануйлов, С. Б. Косицын, М. М. Бегичев // Труды Международной научно-практической конференции «Инженерные системы-2010». – М.: РУДН, 2010. – С. 227 – 236.
165. Мещеряков, В. Б. Статика, динамика и устойчивость тонкостенных стержней с учетом деформаций сдвига / В. Б. Мещеряков. – М.: Издательство АСВ, 2014. – 264 с.
166. Мондрус, В. Л. Воздействие движения поездов метрополитена неглубокого заложения на городскую застройку / В. Л. Мондрус,

В. А. Митрошин // Промышленное и гражданское строительство. – 2020. – № 9. – С. 14 – 20.

167. Мордовин, Е. Д. Методика расчета цилиндрических оболочек при периодических краевых нагрузках / Е. Д. Мордовин // Вестник ТГТУ. – 2009. – Т. 15. – № 2.

168. Муравлев, А. В. Экспериментальное построение функционалов пластичности для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических образцах / А. В. Муравлев // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика, №5, 1996. – С. 74 – 80.

169. Муштари, Х. М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х. М. Муштари, К. З. Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 351 с.

170. Муштари, Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия / Х. М. Муштари // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 3. – 1938. – Т. 9. – С. 71 – 150.

171. Муштари, Х. М. Об устойчивости круглой тонкой цилиндрической оболочки при кручении / Х. М. Муштари // Тр. Казан. авиац. ин-та, 1934. – № 2.

172. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 647 с.

173. Наумова, Г. А. Расчет трубопроводных конструкций с эксплуатационными повреждениями / Г. А. Наумова, И. Г. Овчинников, С. В. Снарский. – Волгоград: Издательство ВолгГАСУ, 2009. – 168 с.

174. Нгуен Хоанг Ань Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету оболочек: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Нгуен Хоанг Ань. – Москва, 2015. – 126 с.

175. Немчинов, Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов) / Ю. И. Немчинов. – Киев: Будивельник, 1980. – 232 с.

176. Нерубайло, Б. В. О напряженном состоянии цилиндрической оболочки, нагруженной по отрезкам направляющей окружности /

Б. В. Нерубайло, В. П. Ольшанский // Прик. мех. и техн. физика. – 1996. – Вып. 37. – № 6. – С. 34 – 35.

177. Никифорова, Н. С. Аprobация метода прогноза осадок зданий в зоне подземного строительства в г. Хошимин / Н. С. Никифорова, Нгуен Ван Хоа, А. З. Тер-Мартirosян // Системотехника строительства. Киберфизические строительные системы. – М.: МГСУ, 2019. – С. 398 – 400.

178. Никифорова, Н. С. Закономерности деформирования оснований зданий вблизи глубоких котлованов и защитные мероприятия: дис. ... д-ра тех. наук: 05.23.02 / Никифорова Надежда Сергеевна. – Москва, 2008. – 324 с.

179. Николаев, Н. В. Напряженно-деформированное состояние корродированной стенки вертикального стального цилиндрического резервуара при ее усилении бандажными кольцами / Н. В. Николаев // Изв. Вузов: Строительство. – 1993 – № 5 – 6. – С. 8 – 11.

180. Никулина, Р. И. Упругопластический изгиб пологих цилиндрических оболочек с опорными ребрами: дис. ... канд. тех. наук: 01.02.03 / Никулина Римма Ивановна. – Свердловск, 1984. – 168 с.

181. Новожилов, В. В. Микронапряжения в конструкционных материалах / В. В. Новожилов, Ю. И. Кадашевич. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.

182. Новожилов, В. В. Краткий очерк развития теории оболочек в СССР / В. В. Новожилов // Исследования по теории оболочек и пластин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. Вып. 6 – 7. – С. 3 – 22.

183. Новожилов, В. В. О перспективах построения критерия прочности при сложном нагружении / В. В. Новожилов, О. Г. Рыбакина // Прочность при малом числе циклов нагружения. – М.: Наука, 1969. – С. 71 – 80.

184. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судостроение, 1962. – 431 с.

185. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – М.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.

186. Новожилов, В. В. О погрешности одной из гипотез теории оболочек / В. В. Новожилов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 38. – № 5 – 6. – С. 174 – 179.

187. Новожилов, В. В. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек / В. В. Новожилов, Р. М. Финкельштейн // ПММ. – 1943. – Т. 7. – Вып. 5. – С. 331 – 340.

188. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

189. Оганесян, Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. – Ереван: Издательство АН Армянской ССР, 1979.

190. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

191. Ольшанский, В. П. Действие сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку, подкрепленную продольным ребром / В. П. Ольшанский // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – № 2. – С. 54 – 56.

192. Ольшанский, В. П. О максимальном прогибе цилиндрической оболочки, под сосредоточенной силой / В. П. Ольшанский // Проблемы прочности. – 1990. – № 10. – С. 45 – 46.

193. Охлопков, Н. Л. Закономерности процессов упругопластического деформирования металлов при сложном напряженном состоянии и нагружении: дис. ... д-ра тех. наук: 01.02.04 / Охлопков Николай Леонидович. – Тверь, 1997. – 434 с.

194. Паймушин, В. Н. О геометрически нелинейных уравнениях теории безмоментных оболочек с приложениями к задачам о неклассических формах потери устойчивости цилиндра / В. Н. Паймушин, В. И. Шалашилин // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70. – № 1. – С. 100 – 110.

195. Палатников, Е. А. Прямоугольная плита на упругом основании / Е. А. Палатников. – М.: Стройиздат, 1964. – 236 с.

196. Папкович, П. Ф. Строительная механика корабля / П. Ф. Папкович. – М.: Судпромиздат, 1941. – 459 с.
197. Парамонов, В. Н. Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники / В. Н. Парамонов. – СПб.: Группа компаний «Геореконструкция», 2012. – 262 с.
198. Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
199. Пастернак, П. Л. Практический расчет складок и цилиндрических оболочек с учетом изгибающих моментов / П. Л. Пастернак // «Проект и стандарт». – 1933. – № 2.
200. Пастернак, П. Л. Практический расчет складок и цилиндрических оболочек с учетом изгибающих моментов / П. Л. Пастернак. – Информац. бюл. НКТП, 1932.
201. Перельмутер, А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Киев, Изд-во «Сталь», 2002. – 600 с.
202. Погорелов, А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
203. Попов, Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на упругом основании / Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 1961. – Вып. 2. – С. 342 – 355.
204. Пособие по проектированию оснований зданий и сооружений (к СНиП 2.02.01-83). – М.: Стройиздат, 1986. – 417 с.
205. Постнов, В. А. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / В. А. Постнов, С. А. Дмитриев и др. – Л.: Судостроение, 1979.
206. Постнов, В. А. Метод конечных элементов в расчете судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

207. Потапов, В. Д. Строительная механика. Статика упругих систем / В. Д. Потапов, А. В. Александров, С. Б. Косицын, Д. Б. Долотказин. – М.: Высшая школа, 2007. – Книга 1. – 512 с.
208. Прагер, В. Проблемы теории пластичности / В. Прагер. – М.: Гос. Изд. Физ.-мат. Лит., 1958. – 136 с.
209. Пузыревский, Н. П. Расчеты фундаментов / Н. П. Пузыревский. – Петроград: [Студенческ. б-ка И.И.П.С.], 1923. – 440 с.
210. Решение задач нелинейной статики в MSC.NASTRAN: Руководство пользователя / MSC.Software Corporation. – 1999. – 86 с.
211. Розин, Л. А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов / Л. А. Розин. – Л.: Энергия, 1971. – 214 с.
212. Руппенейт, К. В. Некоторые вопросы механики горных пород / К. В. Руппенейт. – М.: Углетехиздат, 1954.
213. Рыбалков, Л. С. Осесимметричное упругое деформирование круговой цилиндрической оболочки / Л. С. Рыбалков // Изд. АН СССР, Механика твердого тела. – 1990. – № 3. – С. 132.
214. Рыбалков, Л. С. Круговая цилиндрическая оболочка, нерегулярно подкрепленная шпангоутами / Л. С. Рыбалков // Проблемы строительной механики и прочности ЛА / Моск. авиац. ин-т. – 1990. – С. 58 – 63.
215. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – Киев: Наукова Думка, 1968. – 891 с.
216. Саинов, М. П. Вычислительная программа по расчету напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин: опыт создания, методики и алгоритмы / М. П. Саинов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2016. – Vol. 12. – Issue 1. – Pp. 8 – 45.
217. Седов, Л. И. Механика сплошной среды Т. 1 / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1983. – 528 с.

218. Седов, Л. И. Механика сплошной среды Т. 2 / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1984. – 560 с.
219. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
220. Селезнев, В. Е. Математическое моделирование магистральных трубопроводных систем. Дополнительные главы / В. Е. Селезнев, В. В. Алешин, С. Н. Прялов. – Под общ. ред. В. Е. Селезнева. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 356 с.
221. Селезнев, В. Е. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов / В. Е. Селезнев, В. В. Алешин, С. Н. Прялов. – М.: КомКнига, 2005. – 496 с.
222. Селезнев, В. Е. Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем / В. Е. Селезнев, В. В. Алешин, Г. С. Клишин. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 448 с.
223. Семенов, А. А. Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Семенов Алексей Александрович. – Санкт-Петербург, 2014. – 189 с.
224. Симвулиди, И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. – М.: Высшая школа, 1987. – 576 с.
225. Смирнов, А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
226. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
227. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.

228. СП 249.1325800.2016 Коммуникации подземные. Проектирование и строительство закрытым и открытым способами. – М.: Стандартиформ, 2018. – 100 с.
229. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – И.: Мир, 1977. – 350 с.
230. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
231. Тарасенко, А. А. Модель резервуара в среде Ansys Workbench 14.5 / А. А. Тарасенко, П. В. Чепур, С. В. Чирков, Д. А. Тарасенко // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10 – 15. – С. 3404 – 3408.
232. Технический отчет №1 «Геодезический мониторинг железнодорожной инфраструктуры и путей Киевского направления Московской железной дороги (точка №7) на участке от станции «Солнечная» до остановочного пункта «Новопеределкино» при проходке перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии метрополитена от станции метро «Раменки» до станции метро «Рассказовка». – Москва, 2019. – 127 с.
233. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
234. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
235. Тимошенко, С. П. Устойчивость упругих систем / С. П. Тимошенко. – М.: Гостехтеориздат, 1955. – 568 с.
236. Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Под ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханта. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 424 с.
237. Трусделл, К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
238. Трушин, С. И. Метод конечных элементов. Теория и задачи / С. И. Трушин. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 256 с.

239. Трушин, С. И. Устойчивость цилиндрических оболочек из упругопластического материала в процессе статического нагружения и разгрузки / С. И. Трушин, С. А. Иванов // Промышленное и гражданское строительство. – 2012. – № 3. – С. 33 – 34.

240. Трушин, С. И. Анализ устойчивости нелинейно деформируемых сетчатых оболочек / С. И. Трушин, А. В. Михайлов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2007. – № 3. – С. 18 – 22.

241. Трушин, С. И. Решение задач устойчивости гибких упругопластических оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига: дис. ... д-ра тех. наук: 05.23.17 / Трушин Сергей Иванович. – М., 1999. – 277 с.

242. Фадеев, А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике / А. Б. Фадеев. – М.: Недра, 1987. – 221 с.

243. Федоренко, Р. П. Введение в вычислительную физику / Р. П. Федоренко. – М.: Издательство Московского физико-технического института, 1994. – 528 с.

244. Федорова, Н. Н. Основы работы в ANSYS 17 / Н. Н. Федорова, С. А. Вальгер, М. Н. Данилов, Ю. В. Захарова. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 210 с.

245. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и труды по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1967. – 376 с.

246. Феодосьев, В. И. Об одном способе решения задач устойчивости деформируемых систем / В. И. Феодосьев // ПММ. – 1963. – Т. 27. – № 5. – С. 833 – 841.

247. Фесик, С. П. Справочник по сопротивлению материалов / С. П. Фесик. – Киев: Будивельник, 1982. – 280 с.

248. Хофф, Н. Дж. Прощелкивание несовершенных тонкостенных круговых цилиндрических оболочек конечной длины / Н. Дж. Хофф, К. У. Нарисимхан // Труды ASME, Серия E, Прикладная механика. – 1971. – № 1. – С. 154 – 163.

249. Христианович, С. А. Механика сплошной среды / С. А. Христианович. – М.: Наука, 1981. – 485 с.

250. Цурков, И. С. К вопросу об упруго-пластическом изгибе металлических панелей пологих оболочек при конечных прогибах / И. С. Цурков // Инженерный журнал. – 1961. – Т. 1. – Вып. 1.

251. Чан Суан Линь Напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек, в том числе взаимодействующих с окружающим грунтом, при упругих и упруго-пластических деформациях: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Чан Суан Линь. – Москва, 2015. – 176 с.

252. Чепур, П. В. Влияние параметров неравномерной осадки на возникновение предельных состояний в резервуаре / П. В. Чепур, А. А. Тарасенко // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8 – 7. – С. 1560 – 1564.

253. Черных, К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. / К. Ф. Черных. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1964. – 395 с.

254. Черных, К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. / К. Ф. Черных. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1962. – 274 с.

255. Чичелов, В. А. Расчеты напряженно-деформируемого состояния трубопроводов, эксплуатируемых в сложных условиях, в нелинейной постановке / В. А. Чичелов, Р. М. Зарипов, Г. Е. Коробков и др. // М.: ИРЦ Газпром, 2006. – 80 с.

256. Шагивалеев, К. Ф. Расчет на прочность замкнутой цилиндрической оболочки / К. Ф. Шагивалеев. – Саратов: Изд-во ун-та, 1991. – 207 с.

257. Шапошников, Н. Н. Расчет круговых тоннельных обделок на упругом основании, характеризуемом двумя коэффициентами постели / Н. Н. Шапошников // Научн. тр. Московского института инженеров железнодорожного транспорта. – 1961. – Вып. 131. – С. 296 – 305.

258. Шатров, С. Б. Использование языка PCL в среде MSC/PATRAN для создания специальных приложений / С. Б. Шатров, А. В. Миронов. – Москва: MSC, 1999. – 123 с.

259. Шахраманов, Г. С. Расчет тонкостенных цилиндрических оболочек по обобщенным формулам / Г. С. Шахраманов // Труды Ин-та строит. дела АН Груз. ССР. – 1956. – Т. 1.

260. Шевченко, К. Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением / К. Н. Шевченко. – М.: Высшая школа, 1970. – 352 с.

261. Шехтер, О. Я. Об определении осадок в грунтах с подстилающим слоем под фундаментом / О. Я. Шехтер // Гидротехническое строительство. – 1937. – № 10. – С. 21 – 22.

262. Штаерман, И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.

263. Штаерман, И. Я. Основные идеи современной теории куполов и сводов / И. Я. Штаерман // Тр. Всесоюзн. конф. по бетону и железобетону. Оболочки и стержневые железобетонные конструкции. – М., Л.: ГНТИ, 1932. – С. 3 – 16.

264. Шубович, А. А. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке при различных вариантах интерполяции перемещений: дис. ... канд. тех. наук: 01.02.04 / Шубович Александр Анатольевич. – Волгоград, 2012. – 220 с.

265. Яваров, А. В. Геометрически нелинейная стержневая модель в задачах расчета подземных трубопроводов: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Яваров Александр Валерьевич. – Санкт-Петербург, 2013. – 151 с.

266. Якупов, Н. М. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии / Н. М. Якупов, М. Н. Серазутдинов. – Казань: ИМН РАН. – 1993. – 206 с.

267. Aron, H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale / H. Aron // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1874. – № 78. – Pp. 136 – 174.

268. Ashwell, D. G. Strain elements, with application to arches, rings and cylindrical shells / D. G. Ashwell // Finite Element for Thin Shells and Curved Members. – New York, Wiley, 1976. – Ch. 6. – Pp. 91 – 111.

269. Ashwell, D. G. The behaviour with diminishing curvature of strain-based arch finite elements / D. G. Ashwell // Journal of Sound and Vibration. – 1973. – Vol. 28. – No. 1. – Pp. 133 – 137.

270. Ashwell, D. G. On the finite element calculation of stress distributions in arches / D. G. Ashwell, A. B. Sabir // International Journal of Mechanical Sciences. – 1974. – Vol. 16. – No. 1. – Pp. 21 – 29.

271. Ashwell, D. G. A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain function / D. G. Ashwell, A. B. Sabir // International Journal of Mechanical Sciences. – 1972. – Vol. 14. – No. 3. – Pp. 171 – 183.

272. Ashwell, D. G. Limitations of certain curved finite elements when applied to arches / D. G. Ashwell, A. B. Sabir // International Journal of Mechanical Sciences. – 1971. – Vol. 13. – No. 2. – Pp. 133 – 139.

273. Attewell, P. B. Predicting the dynamics of ground settlement and its derivatives caused by tunneling in soil / P. B. Attewell, J. P. Woodman // Ground Engineering. – 1982. – Vol. 15. – No. 7. – Pp. 13 – 22, 36.

274. Brebbia, C. A. Analysis of plates and shells using finite elements / C. A. Brebbia, H. A. Hadid // Revue Roumaine des Sciences Techniques. Mecanique Appliquee. – 1973. – Vol. 18. – No. 5. – Pp. 939 – 962.

275. Bridge, R. Q. Large deflection analysis of portal frames / R. Q. Bridge // Civ. Eng. Trans. Inst. Eng. Austral. – 1979. – Vol. 2. – Pp. 75 – 79.

276. Cauchy, A. Sur l'equilibre et le mouvement d'une plaque solide / A. Cauchy // Exercice de mathematique. – 1828. – Vol. 3.

277. Cantin, G. Rigid-body motions and equilibrium in finite elements / G. Cantin // *Finite Element for Thin Shells and Curved Members*. – New York, Wiley, 1976. – Ch. 4. – Pp. 55 – 61.
278. Clebsch, A. Theorie de l'elasticite des corps solides / A. Clebsch. – Paris, 1883. – 980 p.
279. Clough, G. W. Finite element analysis of advanced shield tunnelling in soils / G. W. Clough, T. Shirasuna, R. J. Finno // *5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.* – 1985. – Vol. 2. – Pp. 1167 – 1174.
280. Clough, R. W. The finite element method in plane stress analysis / R. W. Clough // *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*. Pittsburg. – 1960. – Pp. 345 – 378.
281. Cohn, M. Z. Analysis up to collapse of elasto-plastic arches / M. Z. Cohn, M. Abdel-Rohman // *Comput. And Struct.* – 1976. – No. 6. – Pp. 511 – 517.
282. Connor, J. Stiffness matrix for shallow rectangular shell element / J. Connor, C. A. Brebbia // *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*. – 1967. – Vol. 93. – Pp. 43 – 65.
283. Coulomb, C. A. Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs, a la architecture / C. A. Coulomb // *Mem. Acad. Roy. Div. Sav.* – 1776. – Vol. 7. Pp. 343 – 387.
284. Drucker, D. C. Soil mechanics and plastic analysis for limit design / D. C. Drucker, W. Prager // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1952. – Vol. 10. – Pp. 157 – 165.
285. Donnell, L. H. A discussion of thin shell theory / L. H. Donnell // *Proc. 5th Internat. Congr. Appl. Mech.* – New York, 1939. – Pp. 66 – 70.
286. Franzius, J. N. Behaviour of buildings due to tunnel induced subsidence: thesis Doctor of Philosophy / Jan Niklas Franzius. Imperial College of Science, Technology and Medicine. – UK, 2003. – 360 p.

287. Fujii, T. Active failure mechanism of a deep circular shaft in dry sand / T. Fujii, T. Hagiwara, O. Kusukabe // Proc. Int. Symp. Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground. – UK, 1996. – Pp. 137 – 142.
288. Galishnikova, V. V. Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames / V. V. Galishnikova, P. Dunaiski, P. J. Pahl // Stellenbosch (Republic of South Africa): SUNMeDIA. – 2009. – 382 p.
289. Gallagher, R. H. The development and evaluation of matrix methods for thin shell structural analysis / R. H. Gallagher. – Bell Aerosystems, Buffalo, New York, Report No. 8500-902011, June, 1966.
290. Hackbush, W. Multi-grid Methods and Applications / W. Hackbush. – Berlin; N.Y.: Springer-Verlag, 1985.
291. Huber, M. Specific work of strain as a measure of material effort / M. Huber // Towarzystwo Politechniczne, Czas. Techniczne. – Lwów, 1903.
292. Kirchhoff, G. R. Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. / G. R. Kirchhoff. – B. G. Teubner, Leipzig, 1876. – 466 p.
293. Kirchhoff, G. R. Über das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem schein / G. R. Kirchhoff // J. Fuer die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – Pp. 51 – 88.
294. Kosytsyn, S. Buckling load of an infinitely long cylindrical shell interacting with the soil environment / S. Kosytsyn, V. Akulich // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Volume 1425. – Pp. 1 – 9.
295. Kosytsyn, S. Stress-strain state of a cylindrical shell of a tunnel using construction stage analysis / S. Kosytsyn, V. Akulich // Communications - Scientific Letters of the University of Zilina. – 2019. – Volume 21. – Pp. 76 – 80.
296. Kositsyn, S. B. Numerical analysis of a cylindrical shell and soil considering changes in a computational model over time / S. B. Kositsyn, V. S. Fedorov, V. Yu. Akulich, V. I. Kolchunov // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2019. – Issue 4(44). – Pp. 82 – 91.

297. Kositsyn, S. B. Geotechnical projection of the influence of the construction of the designed metropolitene tunnel by the method of shield passage on the sedimentation of the earth's surface / S. B. Kositsyn, V. S. Fedorov, V. Yu. Akulich // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2018. – Issue 1(37). – Pp. 81 – 91.

298. Kyriakides, S. Large deflection collapse analysis of an inelastic inextensional ring under external pressure / S. Kyriakides, C. D. Babcock // Int. J. of Solids and Structures. – 1981. – V. 17. – Pp. 981 – 993.

299. Kyriakides, S. The Propagating Buckle in Marine Pipelines: Final Report to the American Petroleum Institute, Aeronautical Laboratories / S. Kyriakides, C. D. Babcock. – Pasadena, California: California Institute of Technology, 1980.

300. Love, A. On the small free vibrations and deformation of thin elastic shell / A. Love // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1888. – Vol. 179 (A). – Pp. 491 – 546.

301. Mair, R. J. Centrifugal modeling of tunnel construction in soft clay: thesis Doctor of Philosophy / R. J. Mair. University of Cambridge. – UK, 1979.

302. von Mises, R. Die Knicksicherheit von Fachwerken / R. von Mises, I. Ratzendorfer // ZAMM. – 1925. – B. 5, H. 3.

303. von Mises, R. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand / R. von Mises // Göttin. Nachr. Math. Phys. – 1913. – Vol. 1. – Pp. 582 – 592.

304. Mohr, O. Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials? / O. Mohr // Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. – 1900. – Vol. 44.

305. MSC Nastran 2018. Quick Reference Guide / MSC Software Corporation. – 2017. – 3315 p.

306. MSC Patran 2016. User's Guide / MSC Software Corporation. – 2016. – 228 p.

307. Nayak, G. C. Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening / G. C. Nayak, O. C. Zienkiewicz // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1972. – Vol. 5(1). – Pp. 113 – 135.
308. Naylor, D. J. Finite elements in geotechnical engineering / D. J. Naylor, G. N. Pande, B. Simpson, R. Tabb. – Swansea: Pineridge Press, 1981. – 245 p.
309. Nyaoro, D. L. Analysis of soil-structure interaction by finite elements: thesis Doctor of Philosophy / Dalmas Lucas Nyaoro. Imperial College, University of London. – UK, 1989. – 389 p.
310. O`Reilly, M. P. Settlement above tunnels in the United kingdom – their magnitude and prediction / M. P. O`Reilly, B. New // Proc. Int. Symposium Tunneling – 82. London: Institution of Mining and Metallurgy. – 1982.
311. Peck, R. B. Deep excavations and tunneling in soft ground / R. B. Peck // Proc. 7-th ICSMFE, Mexico. – 1969.
312. Poisson, S. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solides / S. Poisson // Paris, Mem. de l' Acad. Sci., 1829. — Vol. 8.
313. Przemieniecki, J. S. Theory of matrix structural analysis / J. S. Przemieniecki. – McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
314. Qashu, R. K. Large deflection and stability of rigid frames / R. K. Qashu, D. A. DaDeppo // J. Eng. Mech. – 1983. – Vol. 109. – No. 3. – Pp. 765 – 780.
315. Rankin, W. J. Ground movements resulting from urban tunneling: predictions and effects / W. J. Rankin // Engineering geology of underground movements, the Geological Society, London. – 1988.
316. Reissner, E. Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells / E. Reissner // J. Math. Phys. – 1952. – Vol. 31. – No. 1.
317. Sabir, A. B. Strain-based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders / A. B. Sabir // Nuclear Engineering and Design. – 1983. – Vol. 76. – No. 2. – Pp. 111 – 120.

318. Sabir, A. B. An extension from the shallow to the non-shallow stiffness matrix for a cylindrical shell finite element / A. B. Sabir // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 1970. – Vol. 12. – No. 3. – Pp. 287 – 292.
319. Sabir, A. B. A shallow shell finite element for general shell analysis / A. B. Sabir, F. Ramadhani // *Variational Methods in Engineering*. Southampton, 1985. – Pp. 5/3 – 5/13.
320. Sabir, A. B. A curved, cylindrical shell, finite element / A. B. Sabir, A. C. Lock // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 1972. – Vol. 14. – No. 2. – Pp. 125 – 135.
321. Sabir, A. B. A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems / A. B. Sabir, D. G. Ashwell // *Journal of Sound and Vibration*. – 1971. – Vol. 18. – No. 4. – Pp. 555 – 563.
322. Sabir, A. B. A stiffness matrix for shallow shell finite elements / A. B. Sabir, D. G. Ashwell // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 1969. – Vol. 11. – No. 3. – Pp. 269 – 279.
323. Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications / ANSYS, Inc. – 2009. – 1226 p.
324. Timoshenko, S. P. History of Strength of Materials / S. P. Timoshenko. – McGraw-Hill, New York, 1953.
325. Tresca, H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions / H. Tresca // *C. R. Acad. Sci. Paris*. – 1864. – Vol. 59. – 754 p.
326. Truesdell, C. Essays in the History of Mechanics / C. Truesdell. – Springer-Verlag, Berlin, 1968.
327. Travush, V. I. Computer Modeling as Evaluation Method of Column Base Bearing Capacity in Tower Buildings / V. I. Travush, A. S. Martirosyan, G. G. Kashevarova // *Procedia Engineering*. – 2016. – Vol. 153. – Pp. 773 – 780.
328. Vasios, N. Nonlinear Analysis of Structures. The Arc Length Method: Formulation, Implementation and Applications / Nikolaos Vasios // *Materials Science & Mechanical Engineering*. – 2015. – 38 p.

329. Viladkar, M. N. Convenient Forms of Yield Criteria in Elasto-Plastic Analysis of Geological Materials / M. N. Viladkar, J. Noorzaei, P. N. Godbole // Computers & Structures. – 1995. – Vol. 54. – No. 2. – Pp. 327 – 337.

330. Wriggers, P. Computational Contact Mechanics / P. Wriggers. – Berlin-Heidelberg: Springer, 2006. – 521 p.

331. Yoshimura, Y. On the mechanism of buckling of a circular cylindrical shell under axial compression / Y. Yoshimura // Rep. of Inst. Sci. and tech. – University of Tokyo. – 1951. – Vol. 5. – No. 5. – Pp. 179 – 198.

332. Zienkiewicz, O. C. Finite Element Procedures in the Solution of Plate and Shell Problems / O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung // Ch. 8 in: Stress Analysis. Wiley. – 1965.

333. Zienkiewicz, O. C. Finite Element Method of Analysis for Arch Dam Shells and Comparison with Finite Difference Procedures / O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung // Proc. of Symp. on Theory of Arch Dams. Southampton Univ. – 1965.

Приложение 1. Программа для автоматизации процесса создания расчетной модели цилиндрической оболочки и окружающего основания на командном языке PCL

PCL или Patran Command Language (командный язык системы PATRAN) представляет собой макроязык высокого уровня. PCL является частью системы MSC PATRAN и был специально разработан для создания программ автоматизации инженерного анализа (CAE). PCL помогает пользователю избавиться от рутинных повторяющихся процедур при работе с PATRAN. Возможно также интегрирование внешних программ пользователя в среду PATRAN, используя PCL. Одним из основных достоинств PCL является возможность параметрической оптимизации моделей.

Все команды пользователя PATRAN сначала проходят через PCL. Далее выражения PCL интерпретируются C (Си) программами, а затем откомпилированные функции переводятся в более эффективное двоичное представление и сохраняются в библиотеках для дальнейшего использования. Архитектура MSC PATRAN показана на рисунке П1.1.

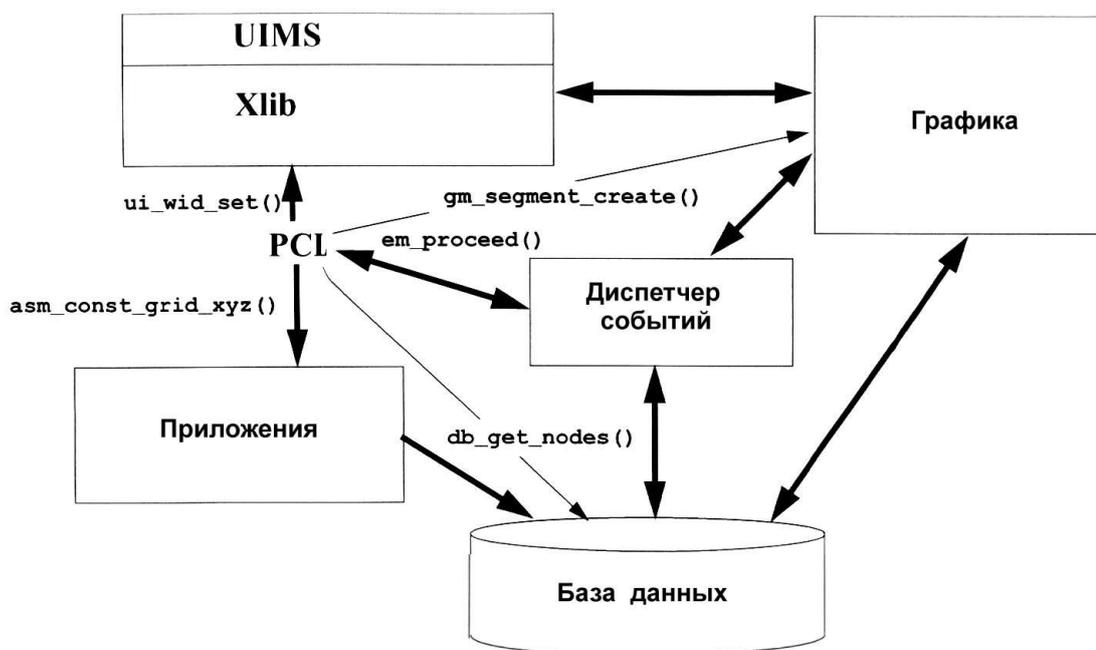


Рисунок П1.1. Архитектура MSC PATRAN

Принцип управления системой следующий: пользователь/оператор использует User Interface Managment System (система управления интерфейсом пользователя, UIMS). UIMS связано с необходимыми приложениями, приложения взаимодействуют с базой данных, а база данных работает с графической системой. Xlib представляет собой графическую библиотеку. Прочие соединения имеют очень мало обратных связей и представляются «слабыми». Краткое описание данных составляющих системы приведено далее.

UIMS является интерфейсом для взаимодействия с пользователем. Это различные объекты графического ввода и вывода (формы или графические элементы). Перед тем как информация, полученная от формы или графического элемента, перейдет для хранения в базу данных, она приобретает специальный формат с помощью приложения. База данных включает в себя полную информацию, обеспечивает ее целостность и предоставляет одновременный доступ другим составляющим системы. Кроме этого, UIMS включает в себя встроенный язык SQL и предоставляет пользователю возможность отменить предыдущее действия (Undo). Графика – выводит информацию базы данных через окно вида, обеспечивает возможности выбора и обратной связи с пользователем.

Через UIMS пользователь способен вносить исходную информацию. Далее через приложения информация конвертируется в формат базы данных или системы анализа (другими словами, Mesh – генерирование конечно-элементной сетки). Далее информация переходит в базу данных, где хранится для дальнейших операций. С помощью графики информация базы данных отображается пользователю как результат, далее возможно начало нового цикла работы.

Принцип First In First Out (первый пришел – первый ушел) обеспечивает действие диспетчера событий. Четыре составляющих MSC PATRAN системы координируются работой диспетчера событий. Также он управляет

состоянием системы: готовность системы обозначает зеленый цвет, возможность параллельного запуска задач показывает синий цвет, полную занятость системы обозначает красный цвет.

Язык запросов QLI обеспечивает работу реляционной базы данных MSC PATRAN посредством обращения к ней (интерфейс SQL). Основными командами являются `select`, `list`, `show`.

Пользователь может взаимодействовать с приложениями MSC PATRAN с помощью сообщений. Приложения обрабатывают данные, полученные от пользователя, проверяют на возможные ошибки и отправляют результаты в базу данных.

Можно привести основные отличительные черты приложений PATRAN: приложения выполняют интенсивные числовые операции, которые неуместны в PCL; приложения предоставляют результаты каждой операции; не используют графику; даже во время сессии приложения не поддерживают постоянных данных. Приложения вызываются только с помощью PCL, хотя могут быть написаны на C (Си) или FORTRAN (иногда на PCL).

Файл сессии является приоритетным источником программного кода для приложений пользователя и используется для составления PCL функций.

Форма является окном, используемым для отображения графических элементов. PCL Функция `ui_form_create()` используется для создания формы. Каждая форма ассоциирована с одним и только одним классом. Классом называется группа из нескольких функций. Все функции, входящие в класс, получают доступ к переменным типа `classwide`. Некоторые имена функций (членов класса) заняты системой, такие как `init`, `display`, `refresh`. Каждый класс (форма) должны иметь функции `init()` и `display()`, которые зарезервированы функциями для каждого класса. `Init()` составляет графические компоненты (`ui_widgettype_create`), `display()` отображает форму на дисплее (`ui_form_display`). Функция `ui_form_create` указывает расположение создаваемой формы в окне, размер создаваемой формы, название создаваемой

формы. Функция `ui_button_create` указывает на расположение создаваемой кнопки. Кнопка размещается на предке, а предками могут являться: форма (`form`), рамка (`frame`) и рамка с прокруткой (`scrollframe`). Функция указывает размер создаваемой кнопки, выделение создаваемой кнопки, метку кнопки. Функция `ui_databox_create` указывает место для поля ввода на предке (`form`, `frame`, `scrollframe`). Функция указывает размер создаваемого поля ввода, метку, значение по умолчанию и число возможных значений, тип данных.

Препроцессор `cpr` является стандартной программой, входящей в состав систем UNIX и WINDOWS. Препроцессор позволяет предварительно производить обработку файла перед дальнейшей компиляцией. Компиляция обрабатывает исходный текст программы в соответствии с директивами препроцессора. Конструкция `#define` позволяет заменить некоторые строки программы на другие строки перед компиляцией, которые заранее указаны пользователем. Директива `#include` служит для организации поиска конструкций `#define` в указанном файле. Если PCL код содержит строку `#include appforms.p`, тогда программа ищет значения размеров параметрической формы во внешнем файле `appforms.p`. Например, такой параметр как `FORM_HGT_TALL` задан в файле `appforms.p`.

Помимо препроцессора задействуются параметрические формы и процессор списка. С помощью них пользователь имеет возможность использовать созданные им файлы, которые включают в себя значения параметров, необходимых программе.

Параметрические формы позволяют существенно облегчить работу с размерами форм и с расположением графических элементов. В программу должен быть интегрирован файл `appforms.p`, с помощью которого возможно заменить параметры PCL функциями, при вызове возвращающими значения указанных параметров, исходя из размеров экрана, графического разрешения и размера шрифта. Параметрические формы позволяют пользователю отказаться от использования реальных чисел при расположении графических

элементов и отталкиваться от визуальной концепции. Программа самостоятельно изменяет параметры формы при изменении размера экрана или шрифта [258].

Разработка программы на командном языке PCL для моделирования цилиндрической оболочки и окружающего основания

Автоматизация процесса создания твердотельной расчетной модели цилиндрической оболочки и окружающего основания с учетом «потерянного объема» грунта выполнена в виде программы для конечно-элементного программного комплекса MSC PATRAN.

Требовалось задать через параметры следующие геометрические величины твердотельной расчетной модели: габариты массива основания; диаметр цилиндрической оболочки; положение оболочки в массиве основания; наличие или отсутствие зазора между оболочкой и окружающим основанием.

При наличии зазора между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием требовалось также автоматизировать создание одномерных контактных элементов GAP.

В начале разработано окно интерфейса программы, вызов которого происходит из списка выпадающего меню системы MSC PATRAN. Окно интерфейса позволяет ввести пользователю все необходимые исходные данные для создания модели. Вид окна интерфейса показан на рисунке П1.2.

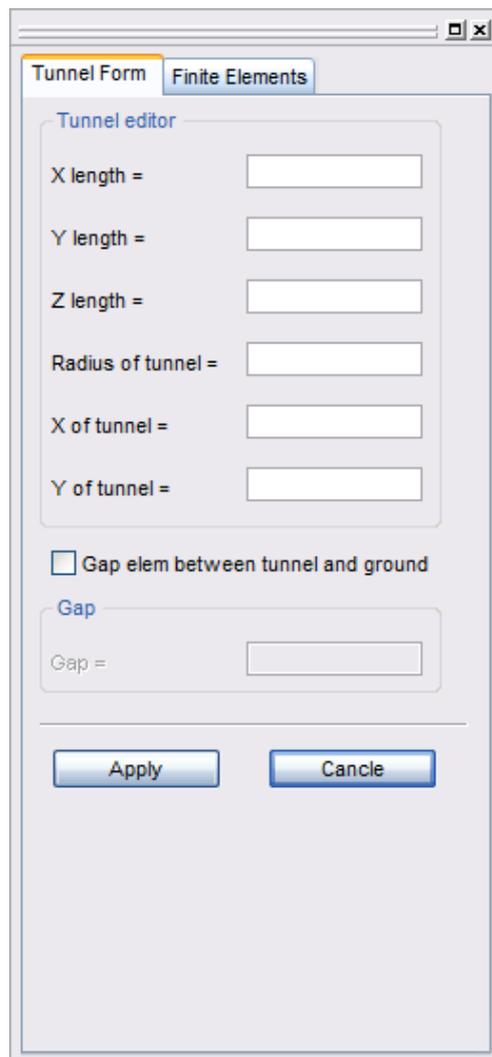


Рисунок П1.2. Интерфейс программы

Объявление переменных с указанным типом данных PCL стоит в начале кода программы. PCL использует следующие типы данных: INTEGER, LOGICAL, REAL, STRING, WIDGET. Большинство типов данных использовано при создании программы.

Окно программы создано с помощью функции `ui_form_create()`. В параметрах функции необходимо определить название и расположение будущей формы.

Функция `ui_databox_create()` использована для создания окна ввода исходных данных пользователя, необходимых для создания твердотельной расчетной модели. В параметрах функции указаны: предок, на котором будет расположено окно ввода (`form`, `frame`, `scrollframe`); расположение окна ввода на предке; тип данных окна ввода; значение по умолчанию и др.

Так как пользователю предоставлена возможность выбора наличия или отсутствия зазора между оболочкой и окружающим основанием, который позволяет учитывать «потерянный объем» грунта, с помощью функции `ui_toggle_create()` создана флаговая кнопка (`check box`). Флаговая кнопка может принимать значение `true` или `false`, что соответственно обозначает наличие или отсутствие зазора в создаваемой модели. При активированной флаговой кнопке поле ввода «Gap» активно, пользователь может указать величину зазора. Создание зазора происходит с помощью одномерных контактных элементов GAP.

Последними элементами программы являются кнопка исполнения «Apply» и кнопка отключения формы «Cancel», созданные с помощью функции `ui_button_create()`.

После функций, отвечающих за создание элементов интерфейса программы, идут функции создания твердотельной расчетной модели на основе введенных пользователем исходных данных. Первые объекты модели созданы с помощью функций элементов геометрии, таких как: точка – `asm_const_grid_xyz()`, линия – `asm_const_line_2point()`, поверхность – `sgm_const_surface_2curve()`. Число разбиений кривых геометрии, позволяющее определить необходимую густоту конечно-элементной сетки поверхностей, задано функцией `mesh_seed_create()`. В разрабатываемой модели особое значение имеет густота сетки в месте контакта поверхностей оболочки и окружающего основания.

За функциями элементов геометрии следуют функции плоских конечных элементов окружающего основания. Имеющиеся поверхности геометрии

разбиты на конечные элементы с помощью функции `fem_create_mesh_surf_4()`. На соседних гранях поверхностей геометрии при создании конечных элементов образованы совпадающие узлы. Объединение совпадающих узлов производится функцией `fem_equiv_all_group4()`. Функция `fem_equiv_all_group4()` позволяет перейти от плоских элементов окружающего основания к пространственным путем «выдавливания» плоских элементов вдоль координатной оси, совпадающей с осью оболочки. Стержневые и плоские элементы оболочки созданы функциями `fem_create_mesh_curv_1()` и `fem_sweep_extrude_1()`.

Последними элементами модели являются одномерные контактные элементы GAP. С помощью конструкции условия «Else If» и опроса флаговой кнопки возможно определить исходные данные пользователя для зазора и учесть их в создании модели. Функция `bv_create_gap_elements()` позволяет построить контактные элементы между оболочкой и окружающим основанием по принципу «узел в узел».

Кнопка исполнения «Apply» запускает вышеописанные функции и MSC PATRAN в автоматическом режиме строит твердотельную расчетную модель по заданным пользователем исходным данным. Конечный вид построенных цилиндрической оболочки и окружающего основания показан на рисунке П1.3.

Использование разработанной программы позволяет существенно сократить время создания расчетной модели и помогает избежать ошибки, которые возникают при создании модели вручную. Следует отметить, что при необходимости можно вносить правки в исходный код PCL с минимальными трудозатратами для использования программы в других задачах.

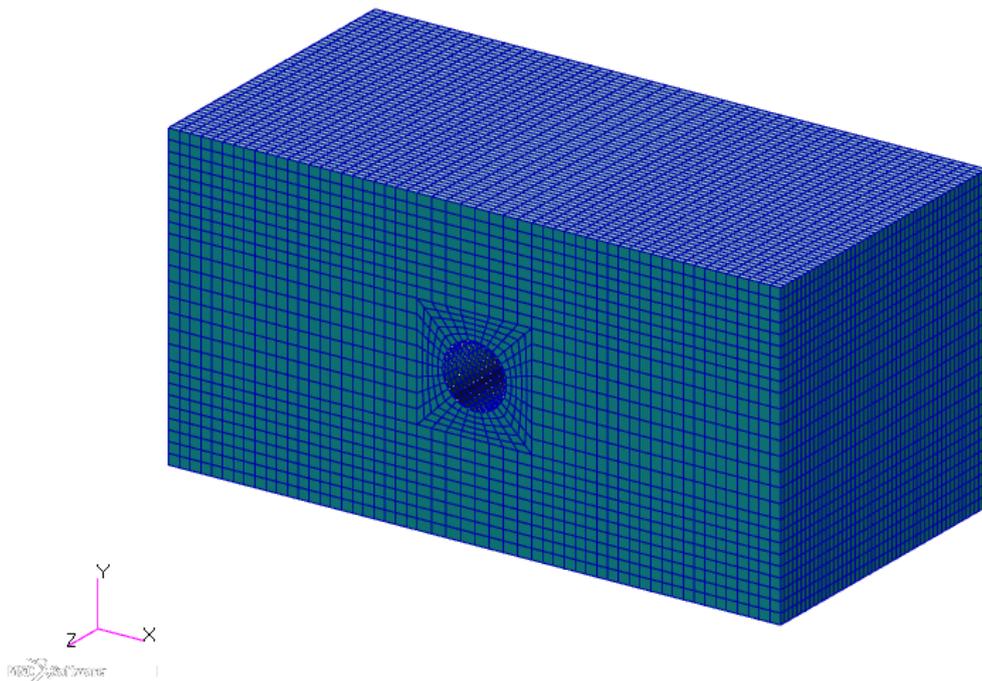


Рисунок П1.3. Вид созданной программой твердотельной расчетной модели

Ниже приведен полный текст разработанной программы на языке PCL.

```

1.#include "appforms.p"
2.
3.#include "appstrings.p"
4.
5.CLASS tunnel
6.
7. /*
8. * Инициализация переменных
9. */
10.
11. CLASSWISE widget form_id, X_length, y_length, z_length, radius_of_tunnel, x_of_tunnel, y_of_tunnel, frame_id, frame_id
    _gap, toggle_gap, gap, apply_button, cancel_button
12.
13. FUNCTION init
14.
15.     REAL y_loc
16.
17.     /*
18.     * Создание формы
19.     */
20.
21.     form_id = ui_form_create( " ", FORM_X_LOC_SML, FORM_Y_LOC, "UL", FORM_WID_SML, FORM_HGT_HALF+FONT_HG
        T, "Tunnel Form", " " )
22.
23.     /*
24.     * Создание рамки "Tunnel editor"
25.     */
26.
27.     y_loc = FORM_T_MARGIN

```

```

28.
29. frame_id = ui_frame_create( form_id, "", FORM_L_MARGIN, y_loc, SFRAME_WID_SINGLE, 20*INTER_WIDGET_SPACE, "
    Tunnel editor" )
30.
31. /*
32. * Создание поля ввода "X_length"
33. */
34.
35. y_loc += FRAME_T_MARGIN+INTER_WIDGET_SPACE
36.
37. X_length = UI_DATABOX_CREATE( form_id, "", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, 1.4, DBOX_LABEL_LEN_SPECIAL, "X length
    =", "", FALSE, "REAL", 1 )
38.
39. /*
40. * Создание поля ввода "Y_length"
41. */
42.
43. y_loc += 3*INTER_WIDGET_SPACE
44.
45. y_length = UI_DATABOX_CREATE( form_id, "", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, 1.4, DBOX_LABEL_LEN_SPECIAL, "Y length
    =", "", FALSE, "REAL", 1 )
46.
47. /*
48. * Создание поля ввода "Z_length"
49. */
50.
51. y_loc += 3*INTER_WIDGET_SPACE
52.
53. z_length = UI_DATABOX_CREATE( form_id, "", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, 1.4, DBOX_LABEL_LEN_SPECIAL, "Z length
    =", "", FALSE, "REAL", 1 )
54.
55. /*
56. * Создание поля ввода "Radius of tunnel"
57. */
58.
59. y_loc += 3*INTER_WIDGET_SPACE
60.
61. radius_of_tunnel = UI_DATABOX_CREATE( form_id, "", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, 1.4, DBOX_LABEL_LEN_SPECIAL,
    "Radius of tunnel =", "", FALSE, "REAL", 1 )
62.
63. /*
64. * Создание поля ввода "X of tunnel"
65. */
66.
67. y_loc += 3*INTER_WIDGET_SPACE
68.
69. x_of_tunnel = UI_DATABOX_CREATE( form_id, "", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, 1.4, DBOX_LABEL_LEN_SPECIAL, "X of
    tunnel =", "", FALSE, "REAL", 1 )
70.
71. /*
72. * Создание поля ввода "Y of tunnel"
73. */
74.
75. y_loc += 3*INTER_WIDGET_SPACE
76.
77. y_of_tunnel = UI_DATABOX_CREATE( form_id, "", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, 1.4, DBOX_LABEL_LEN_SPECIAL, "Y of
    tunnel =", "", FALSE, "REAL", 1 )
78.
79. /*
80. * Создание переключателя "Gap"
81. */
82.
83. y_loc += 4*INTER_WIDGET_SPACE
84.

```

```

85. toggle_gap = ui_toggle_create( form_id, "toggle_gap", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, "Gap elem between tunnel and gr
    ound")
86.
87. /*
88. * Создание рамки "Gap"
89. */
90.
91. y_loc += FRAME_T_MARGIN+INTER_WIDGET_SPACE
92.
93. frame_id_gap = ui_frame_create( form_id, "", FORM_L_MARGIN, y_loc, SFRAME_WID_SINGLE, 2*INTER_WIDGET_SPAC
    E+2*FONT_HGT, "Gap" )
94.
95. /*
96. * Создание поля ввода "Gap"
97. */
98.
99. y_loc += FRAME_T_MARGIN+INTER_WIDGET_SPACE
100.
101. gap = UI_DATABOX_CREATE( form_id, "", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, 1.4, DBOX_LABEL_LEN_SPECIAL, "Gap =", "", F
    ALSE, "REAL", 1 )
102.
103. ui_wid_set( gap, "ENABLE", FALSE)
104.
105. /*
106. * Создание разделителя
107. */
108.
109. y_loc += LINE_THICKNESS + 4*INTER_WIDGET_SPACE
110.
111. ui_separator_create( form_id, "",FORM_L_MARGIN, y_loc, FORM_WID_SML, TRUE )
112.
113. /*
114. * Создание кнопки "Apply"
115. */
116.
117. y_loc += LINE_THICKNESS + INTER_WIDGET_SPACE
118.
119. apply_button = ui_button_create( form_id, "apply_cb", BUTTON_HALF_X_LOC1, y_loc, BUTTON_WID_HALF, 0.0, "Appl
    y", TRUE, TRUE )
120.
121. /*
122. * Создание кнопки "Cancle"
123. */
124.
125. cacle_button = ui_button_create( form_id, "cacle_cb", BUTTON_HALF_X_LOC2, y_loc, BUTTON_WID_HALF, 0.0, "Ca
    ncle", TRUE, TRUE )
126.
127. END FUNCTION
128.
129. /*
130. * Создание опции переключателя "Gap"
131. */
132.
133. FUNCTION toggle_gap(Value)
134.
135. LOGICAL Value
136.
137. GLOBAL LOGICAL flag
138.
139. IF (Value == TRUE) THEN
140.
141. ui_wid_set( gap, "ENABLE", TRUE)
142.
143. flag = TRUE

```

```

144.
145.     ELSE
146.
147.         ui_wid_set (gap, "ENABLE", FALSE)
148.
149.         flag = FALSE
150.
151.     END IF
152.
153. END FUNCTION
154.
155. /*
156.  * Отображение формы на экране
157.  */
158.
159. FUNCTION display
160.
161.     ui_form_display( "tunnel" )
162.
163. END FUNCTION
164.
165. /*
166.  * Создание функции кнопки "Apply"
167.  */
168.
169. FUNCTION apply_cb
170.
171.     /*
172.     * Инициализация переменных
173.     */
174.
175.     GLOBAL LOGICAL flag
176.
177.     REAL a_r, b_r, c_r, r_r, x1_r, x2_r, g_r
178.
179.     STRING a[VIRTUAL], b[VIRTUAL], c[VIRTUAL], r[VIRTUAL], x1[VIRTUAL], x2[VIRTUAL], g[VIRTUAL]
180.
181.     STRING sa_val_array_str[32](4)
182.
183.     STRING sa_mesh_control[32](6)
184.
185.     ui_wid_get( X_length, "VALUE", a_r )
186.
187.     ui_wid_get( y_length, "VALUE", c_r )
188.
189.     ui_wid_get( z_length, "VALUE", b_r )
190.
191.     ui_wid_get( radius_of_tunnel, "VALUE", r_r )
192.
193.     ui_wid_get( x_of_tunnel, "VALUE", x1_r )
194.
195.     ui_wid_get( y_of_tunnel, "VALUE", x2_r )
196.
197.     IF ( flag == TRUE ) THEN
198.
199.         ui_wid_get (gap, "VALUE", g_r)
200.
201.     ELSE
202.
203.         g_r = 0.
204.
205.     END IF
206.
207.     a = str_from_real (a_r)

```

```

208.
209. b = str_from_real (b_r)
210.
211. c = str_from_real (c_r)
212.
213. r = str_from_real (r_r)
214.
215. x1 = str_from_real (x1_r)
216.
217. x2 = str_from_real (x2_r)
218.
219. g = str_from_real (g_r)
220.
221. sa_val_array_str(1) = str_from_real ((r_r+g_r)/3.)
222.
223. sa_mesh_control(6) = str_from_integer (mth_nint(b_r))
224.
225. /*
226. * Создание точек
227. */
228.
229. STRING asm_create_grid_xyz_created_ids[VIRTUAL]
230.
231. asm_const_grid_xyz( "1", "[0 0 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
232.
233. asm_const_grid_xyz( "2", ["//a/" 0 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
234.
235. asm_const_grid_xyz( "3", ["//a/" "//c/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
236.
237. asm_const_grid_xyz( "4", "[0 //c/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
238.
239. asm_const_grid_xyz( "5", ["//str_from_real(x1_r - 1.8 * (r_r+g_r))/" 0 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
240.
241. asm_const_grid_xyz( "6", ["//str_from_real(x1_r + 1.8 * (r_r+g_r))/" 0 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
242.
243. asm_const_grid_xyz( "7", ["//a/" "//str_from_real(x2_r - 1.8 * (r_r+g_r))/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
244.
245. asm_const_grid_xyz( "8", ["//a/" "//str_from_real(x2_r + 1.8 * (r_r+g_r))/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
246.
247. asm_const_grid_xyz( "9", ["//str_from_real(x1_r + 1.8 * (r_r+g_r))/" "//c/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
248.
249. asm_const_grid_xyz( "10", ["//str_from_real(x1_r - 1.8 * (r_r+g_r))/" "//c/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
250.
251. asm_const_grid_xyz( "11", "[0 //str_from_real(x2_r + 1.8 * (r_r+g_r))/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
252.
253. asm_const_grid_xyz( "12", "[0 //str_from_real(x2_r - 1.8 * (r_r+g_r))/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
254.
255. asm_const_grid_xyz( "13", ["//str_from_real(x1_r - 1.8 * (r_r+g_r))/" "//str_from_real(x2_r - 1.8 * (r_r+g_r))/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
256.
257. asm_const_grid_xyz( "14", ["//str_from_real(x1_r + 1.8 * (r_r+g_r))/" "//str_from_real(x2_r - 1.8 * (r_r+g_r))/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
258.
259. asm_const_grid_xyz( "15", ["//str_from_real(x1_r + 1.8 * (r_r+g_r))/" "//str_from_real(x2_r + 1.8 * (r_r+g_r))/" 0]", "Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
260.

```

```

261. asm_const_grid_xyz( "16", "[//str_from_real(x1_r - 1.8 * (r_r+g_r))//]" //str_from_real(x2_r + 1.8 * (r_r+g_r))//]" 0", "
    Coord 0", asm_create_grid_xyz_created_ids )
262.
263. /*
264. * Создание отверстия в массиве основания
265. */
266.
267. STRING sgm_create_curve_2d_created_ids[VIRTUAL]
268.
269. sgm_const_curve_2d_arcangles_v1( "1", r_r+g_r, 45., 135., "Coord 0.3", "[//x1//]" //x2//]" 0", FALSE, sgm_create_cur
    ve_2d_created_ids )
270.
271. sgm_const_curve_2d_arcangles_v1( "2", r_r+g_r, 135., 225., "Coord 0.3", "[//x1//]" //x2//]" 0", FALSE, sgm_create_c
    urve_2d_created_ids )
272.
273. sgm_const_curve_2d_arcangles_v1( "3", r_r+g_r, 225., 315., "Coord 0.3", "[//x1//]" //x2//]" 0", FALSE, sgm_create_c
    urve_2d_created_ids )
274.
275. sgm_const_curve_2d_arcangles_v1( "4", r_r+g_r, 315., 45., "Coord 0.3", "[//x1//]" //x2//]" 0", FALSE, sgm_create_cur
    ve_2d_created_ids )
276.
277. /*
278. * Создание кривых массива основания
279. */
280.
281. STRING asm_line_2point_created_ids[VIRTUAL]
282.
283. asm_const_line_2point( "5", "Point 1", "Point 5", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
284.
285. asm_const_line_2point( "6", "Point 5", "Point 6", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
286.
287. asm_const_line_2point( "7", "Point 6", "Point 2", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
288.
289. asm_const_line_2point( "8", "Point 12", "Point 13", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
290.
291. asm_const_line_2point( "9", "Point 13", "Point 14", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
292.
293. asm_const_line_2point( "10", "Point 14", "Point 7", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
294.
295. asm_const_line_2point( "11", "Point 11", "Point 16", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
296.
297. asm_const_line_2point( "12", "Point 16", "Point 15", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
298.
299. asm_const_line_2point( "13", "Point 15", "Point 8", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
300.
301. asm_const_line_2point( "14", "Point 4", "Point 10", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
302.
303. asm_const_line_2point( "15", "Point 10", "Point 9", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
304.
305. asm_const_line_2point( "16", "Point 9", "Point 3", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
306.
307. asm_const_line_2point( "17", "Point 13", "Point 16", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
308.
309. asm_const_line_2point( "18", "Point 14", "Point 15", 0, "", 50., 1, asm_line_2point_created_ids )
310.
311. /*
312. * Создание поверхностей массива основания
313. */
314.
315. STRING sgm_surface_2curve_created_ids[VIRTUAL]
316.
317. sgm_const_surface_2curve( "1", "Curve 5", "Curve 8", sgm_surface_2curve_created_ids )
318.
319. sgm_const_surface_2curve( "2", "Curve 6", "Curve 9", sgm_surface_2curve_created_ids )

```

```

320.
321.   sgm_const_surface_2curve( "3", "Curve 7", "Curve 10", sgm_surface_2curve_created_ids )
322.
323.   sgm_const_surface_2curve( "4", "Curve 8", "Curve 11", sgm_surface_2curve_created_ids )
324.
325.   sgm_const_surface_2curve( "5", "Curve 10", "Curve 13", sgm_surface_2curve_created_ids )
326.
327.   sgm_const_surface_2curve( "6", "Curve 11", "Curve 14", sgm_surface_2curve_created_ids )
328.
329.   sgm_const_surface_2curve( "7", "Curve 12", "Curve 15", sgm_surface_2curve_created_ids )
330.
331.   sgm_const_surface_2curve( "8", "Curve 13", "Curve 16", sgm_surface_2curve_created_ids )
332.
333.   sgm_const_surface_2curve( "9", "Curve 1", "Curve 12", sgm_surface_2curve_created_ids )
334.
335.   sgm_const_surface_2curve( "10", "Curve 2", "Curve 17", sgm_surface_2curve_created_ids )
336.
337.   sgm_const_surface_2curve( "11", "Curve 3", "Curve 9", sgm_surface_2curve_created_ids )
338.
339.   sgm_const_surface_2curve( "12", "Curve 4", "Curve 18", sgm_surface_2curve_created_ids )
340.
341.   /*
342.   * Определение числа разбиений кривых отверстия в массиве основания
343.   */
344.
345.   mesh_seed_create( "Curve 1:4", 1, 8, 0., 0., 0. )
346.
347.   /*
348.   * Создание плоской КЭ сетки массива основания
349.   */
350.
351.   INTEGER fem_create_mesh_surfa_num_nodes
352.
353.   INTEGER fem_create_mesh_surfa_num_elems
354.
355.   STRING fem_create_mesh_s_nodes_created[VIRTUAL]
356.
357.   STRING fem_create_mesh_s_elems_created[VIRTUAL]
358.
359.   fem_create_mesh_surf_4( "IsoMesh", 49152, "Surface 1:12", 1, sa_val_array_str, "Quad4", @
360.   "#", "#", "Coord 0", "Coord 0", fem_create_mesh_surfa_num_nodes, @
361.   fem_create_mesh_surfa_num_elems, fem_create_mesh_s_nodes_created, @
362.   fem_create_mesh_s_elems_created )
363.
364.   /*
365.   * Объединение узлов элементов массива основания
366.   */
367.
368.   REAL fem_equiv_all_x_equivtol_ab
369.
370.   INTEGER fem_equiv_all_x_segment
371.
372.   fem_equiv_all_group4( [" "], 0, "", 1, 1, 0.0049999999, FALSE, @
373.   fem_equiv_all_x_equivtol_ab, fem_equiv_all_x_segment )
374.
375.   gm_segment_delete(fem_equiv_all_x_segment)
376.
377.   /*
378.   * Создание пространственной КЭ сетки массива основания
379.   */
380.
381.   INTEGER fem_sweep_elems_n_nodes_created
382.
383.   INTEGER fem_sweep_elems_n_elems_created

```

```

384.
385. STRING fem_sweep_elems_ex_created_nids[VIRTUAL]
386.
387. STRING fem_sweep_elems_ex_created_eids[VIRTUAL]
388.
389. fem_sweep_extrude_1( "#", "#", "Coord 0", "<0 0 //b//>", b, "0.0", 3, @
390. "Elm 1:#", 10, ["Bar2", "Quad4", "Quad8", "Quad12", "Wedge6", "Wedge15", @
391. "Wedge24", "Hex8", "Hex20", "Hex32", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", @
392. "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", @
393. "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", @
394. "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", @
395. "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", "", @
396. "", ""], "Coord 0", "Coord 0", "Uniform: Number of Elements", @
397. sa_mesh_control, fem_sweep_elems_n_nodes_created, @
398. fem_sweep_elems_n_elems_created, fem_sweep_elems_ex_created_nids, @
399. fem_sweep_elems_ex_created_eids )
400.
401. /*
402. * Перенумерация узлов пространственной КЭ сетки массива основания
403. */
404.
405. STRING fem_renum_node_new_ids[VIRTUAL]
406.
407. fem_renum_node_1( "Node 1:#", "1", 2, fem_renum_node_new_ids )
408.
409. INTEGER num_nodes
410.
411. db_count_nodes (num_nodes)
412.
413. /*
414. * Получение номеров элементов массива основания
415. */
416.
417. INTEGER num_elems_soil
418.
419. db_count_elems (num_elems_soil)
420.
421. /*
422. * Создание кривых цилиндрической оболочки
423. */
424.
425. IF ( flag == TRUE ) THEN
426.
427.     sgm_const_curve_2d_arcangles_v1( "19", r_r, 45., 135., "Coord 0.3", ["//x1// " //x2// 0"], FALSE, sgm_create_c
         curve_2d_created_ids )
428.
429.     sgm_const_curve_2d_arcangles_v1( "20", r_r, 135., 225., "Coord 0.3", ["//x1// " //x2// 0"], FALSE, sgm_create_
         curve_2d_created_ids )
430.
431.     sgm_const_curve_2d_arcangles_v1( "21", r_r, 225., 315., "Coord 0.3", ["//x1// " //x2// 0"], FALSE, sgm_create_
         curve_2d_created_ids )
432.
433.     sgm_const_curve_2d_arcangles_v1( "22", r_r, 315., 45., "Coord 0.3", ["//x1// " //x2// 0"], FALSE, sgm_create_c
         urve_2d_created_ids )
434.
435. ELSE
436.
437. END IF
438.
439. /*
440. * Определение числа разбиений кривых цилиндрической оболочки
441. */
442.
443. IF ( flag == TRUE ) THEN

```



```

506.  /*
507.  * Перенумерация узлов пространственной КЭ сетки цилиндрической оболочки и создание
    контактных Гар элементов зазора
508.  */
509.
510.  IF ( flag == TRUE ) THEN
511.
512.    fem_renum_node_1( "Node "//str_from_integer(num_nodes+1)//"#", " "//str_from_integer(num_nodes+1), 2, fem
    _renum_node_new_ids )
513.
514.    INTEGER bv_f_create_gap__n_gaps_created
515.
516.    bv_create_gap_elements( "Node "//str_from_integer(num_nodes+1)//"#", "Node 1:"//str_from_integer(num_node
    s), 1, g_r*1.01, [0, 0, 0], "", bv_f_create_gap__n_gaps_created )
517.
518.  ELSE
519.
520.  END IF
521.
522.  /*
523.  * Удаление вспомогательных элементов цилиндрической оболочки
524.  */
525.
526.  STRING fem_delete_any_deleted_ids[VIRTUAL]
527.
528.  fem_delete_element( "Elm "//str_from_integer(num_elems_soil+1)//"."//str_from_integer(num_elems_tunnel_1D), f
    em_delete_any_deleted_ids )
529.
530.  /*
531.  * Скрытие элементов геометрии
532.  */
533.
534.  gm_plot_erase_geometry( 0 )
535.
536.  END FUNCTION
537.
538.  /*
539.  * Создание функции кнопки "Cancle"
540.  */
541.
542.  FUNCTION cangle_cb
543.
544.    ui_form_hide( "tunnel" )
545.
546.  END FUNCTION
547.
548.  END CLASS

```

Приложение 2. Описание примененных контактных конечных элементов

Контактные конечные элементы GAP в программном комплексе MSC PATRAN – NASTRAN

Рассмотрим контактный конечный элемент GAP программного комплекса MSC PATRAN – NASTRAN. GAP элемент моделирует связь по принципу «узел – узел» (рисунок П2.1). Открытие или закрытие контакта определяет GAP направление (ось x). Возможен учет трения между узлами GAP элемента при их взаимодействии. Контакт может изменять статус при приложении нагрузки. Компоненты сил в узлах элемента в местной системе координат: осевая сжимающая сила (F_x); силы трения в боковых ортогональных направлениях (F_y и F_z). Силы могут быть вычислены в процессе решения задачи [210].

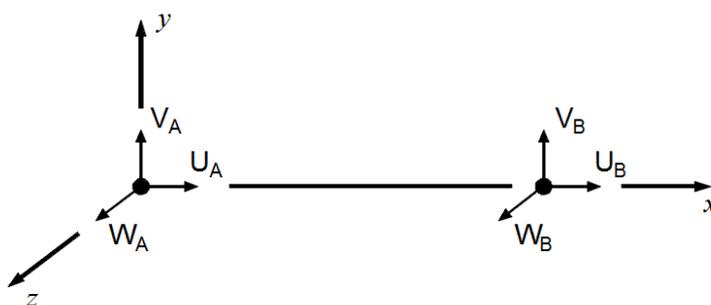


Рисунок П2.1. GAP элемент и его местная система координат

Открытый статус GAP элемента:

$$F_x = K_b u; F_y = F_z = 0,$$

где K_b – жесткость открытого GAP элемента.

Закрытый статус GAP элемента без учета трения:

$$F_x = K_a u; F_y = F_z = 0,$$

где K_a – жесткость закрытого GAP элемента.

Закрытый статус GAP элемента с учетом трения:

$$F_y^2 + F_z^2 = (f_s F_x)^2,$$

где $F_x = K_a u$; $F_y = K_\tau v$; $F_z = K_\tau w$; f_s – коэффициент статического трения; K_τ – жесткость поперечного сдвига.

При моделировании одностороннего взаимодействия жесткость при закрытом статусе контакта K_a имеет максимальное возможное значение (стремящееся к бесконечности), а жесткость на растяжение K_b имеет минимальное возможное значение (почти нулевое). Для учета трения при взаимодействии тел необходимо задать значение коэффициента статического трения f_s и жесткость поперечного сдвига K_τ . Разница между жесткостями K_a и K_b не должна быть более 14 порядков, чтобы не оказать отрицательное влияние на сходимость решения. Геометрическая и физическая нелинейности не учтены в GAP элементе.

На главной диагонали матрицы жесткостей GAP элементов \mathbf{R}_c стоят коэффициенты r_{ii} [207], например:

$$r_{ii} = K_a.$$

Остальные коэффициенты в матрице \mathbf{R}_c нулевые. Путем добавления матрицы \mathbf{R}_c к матрице жесткостей \mathbf{R} всей системы происходит учет одностороннего контакта рассматриваемых тел.

Более подробное описание контактного конечного элемента GAP приведено в изданиях [210, 305, 306].

Контактная пара «поверхность – поверхность» (CONTA174, TARGE170) в программном комплексе ANSYS Mechanical

Рассмотрим контактную пару «поверхность – поверхность» программного комплекса ANSYS Mechanical, состоящую из элементов CONTA174 и TARGE170. Контактная пара «поверхность – поверхность»

может быть симметричной и несимметричной. При симметричном контакте, или двухпроходном, каждая поверхность одновременно и контактная, и целевая. При несимметричном контакте, или однопроходном, каждая поверхность выполняет только одну функцию. После идентификации контактных поверхностей программа назначает контактные (CONTA174) и целевые (TARGE170) элементы на соответствующих поверхностях, которые будут определять взаимодействие тел и процесс деформирования [156] (рисунок П2.2).



Рисунок П2.2. Контактная пара «поверхность – поверхность»

Контакт происходит при сближении узлов внешних граней тел до определенного расстояния, так называемого «радиуса обнаружения». Первая стадия контактного взаимодействия тел представляет собой поиск узлов внешних граней тел, которые попали в заданный «радиус обнаружения». Повышение точности достигается путем поиска по точкам интегрирования конечного элемента. Стоит отметить, что поиск узлов, попадающих в «радиус обнаружения», требует больших вычислительных ресурсов. Проблема решается путем уменьшения зоны поиска взаимодействующих узлов.

На второй стадии контактного взаимодействия необходимо определить контактные силы. Контактные силы вычислены штрафными методами. Одна поверхность не может проникать в другую более чем на приемлемую величину. Это обеспечивают методы контроля совместности. В данной работе использован расширенный метод множителей Лагранжа (KEYOPT(2)=0). Метод основан на методе штрафов с расширенным контролем внедрения. Для вычислений необходимы следующие параметры: контактная жесткость в направлении нормали F_{KN} , контактная жесткость в поперечном направлении F_{KS} , максимально допустимое упругое скольжение $SLTOL$, максимально допустимое внедрение $TOLN$. Комплекс ANSYS Mechanical обеспечивает вычисление контактной жесткости в направлении нормали F_{KN} на основе модуля упругости E и размеров взаимодействующих элементов. [29] Контактная поверхность, как правило, разбита на более мелкую сетку по сравнению с вспомогательной поверхностью, что обеспечивает корректную работу штрафных методов. В зависимости от величины проникновения и жесткости контакта вычислены силы взаимодействия $F_{contact}$. Силы действуют на контактную поверхность и приводят к ее деформациям, что влечет за собой уменьшение величины проникновения поверхностей. Таким образом, алгоритм контактного взаимодействия всегда поддерживает величину проникновения малой. Для плоских элементов возможен учет толщины этих элементов при контактном взаимодействии. Принцип работы алгоритма штрафного метода показан на рисунке П2.3.

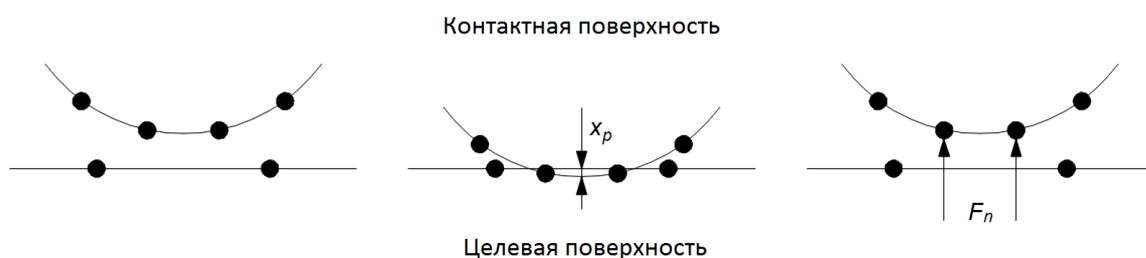


Рисунок П2.3. Принцип работы алгоритма метода штрафов

Величины проникновения определены с помощью целевых поверхностей. При взаимодействии тел алгоритм вычисляет величину проникновения x_p – расстояние между узлом контактной поверхности и гранью целевой поверхности. Узлы контактных элементов могут проникать через грани целевых элементов, так как имеют более мелкую сетку.

Более подробное описание контактной пары «поверхность – поверхность» (CONTA174, TARGE170) и других контактных конечных элементов программного комплекса ANSYS Mechanical приведено в изданиях [24, 29, 244, 323].

Приложение 3. Акт о внедрении результатов диссертационной работы



ООО «СпецСтройЭксперт»

111524, г. Москва, ул. Электродная, д. 2, стр. 12-13-14, пом. 1, комн. 1
Телефон: +7 (499) 951-0801, e-mail: info@sste.ru

Акт

о внедрении результатов диссертационной работы Акулича Владимира Юрьевича «Напряженно-деформированное состояние и устойчивость равновесия цилиндрических оболочек при упругих и упруго-пластических деформациях, в том числе взаимодействующих с окружающим основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени».

В рамках работ по научно-техническому отчету «Прогноз величин осадок грунтов и предложения по необходимым мероприятиям по обеспечению безопасности движения поездов на участке станция Солнечная – остановочный пункт Новопеределкино Московской железной дороги при пересечении соединительной веткой в депо «Солнцево» Московского метрополитена» по объекту: Калининско-Солнцевская линия метрополитена от станции метро «Раменки» до станции метро «Рассказовка» Акуличем В.Ю. разработана методика учета пропуса грунта в разрабатываемую область перегонного тоннеля, взаимодействующего с окружающим основанием, при упругих и упруго-пластических деформациях. По данной методике проанализировано напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки перегонного тоннеля, расположенного под существующими железнодорожными путями, и окружающего основания, в частности рассмотрено образование мульды оседания на поверхности земли, с учетом особенностей взаимодействия цилиндрической оболочки перегонного тоннеля с окружающим основанием.

В результате проведенной работы дано обоснованное заключение о возможности применения проектного технического решения по сооружению перегонных тоннелей в грунтовом основании методом щитовой проходки для обеспечения работоспособности земляного полотна в пределах зоны влияния строительства перегонных тоннелей и обеспечения безопасности эксплуатации существующей железнодорожной линии; оценены деформативность земляного полотна при строительстве перегонных тоннелей и максимальные величины перемещений деформирующейся зоны; оценена возможность образования просадок железнодорожных путей при выполнении строительных работ по сооружению перегонных тоннелей; определены критические условия, при которых возможно нарушение целостности грунтового основания в процессе сооружения перегонных тоннелей.

Численная методика учета пропуса грунта в разрабатываемую область перегонного тоннеля, взаимодействующего с окружающим основанием, при упругих и упруго-пластических деформациях, разработанная Акуличем В.Ю., позволяет с высокой точностью выполнять прогноз осадок поверхности земли при сооружении перегонных тоннелей методом щитовой проходки. Данная методика апробирована и рекомендуется к применению при оценке влияния строительства перегонных тоннелей методом щитовой проходки.

Генеральный директор
ООО «Спецстройэксперт»,
кандидат технических наук



/ Т. Н. Дымбренов /